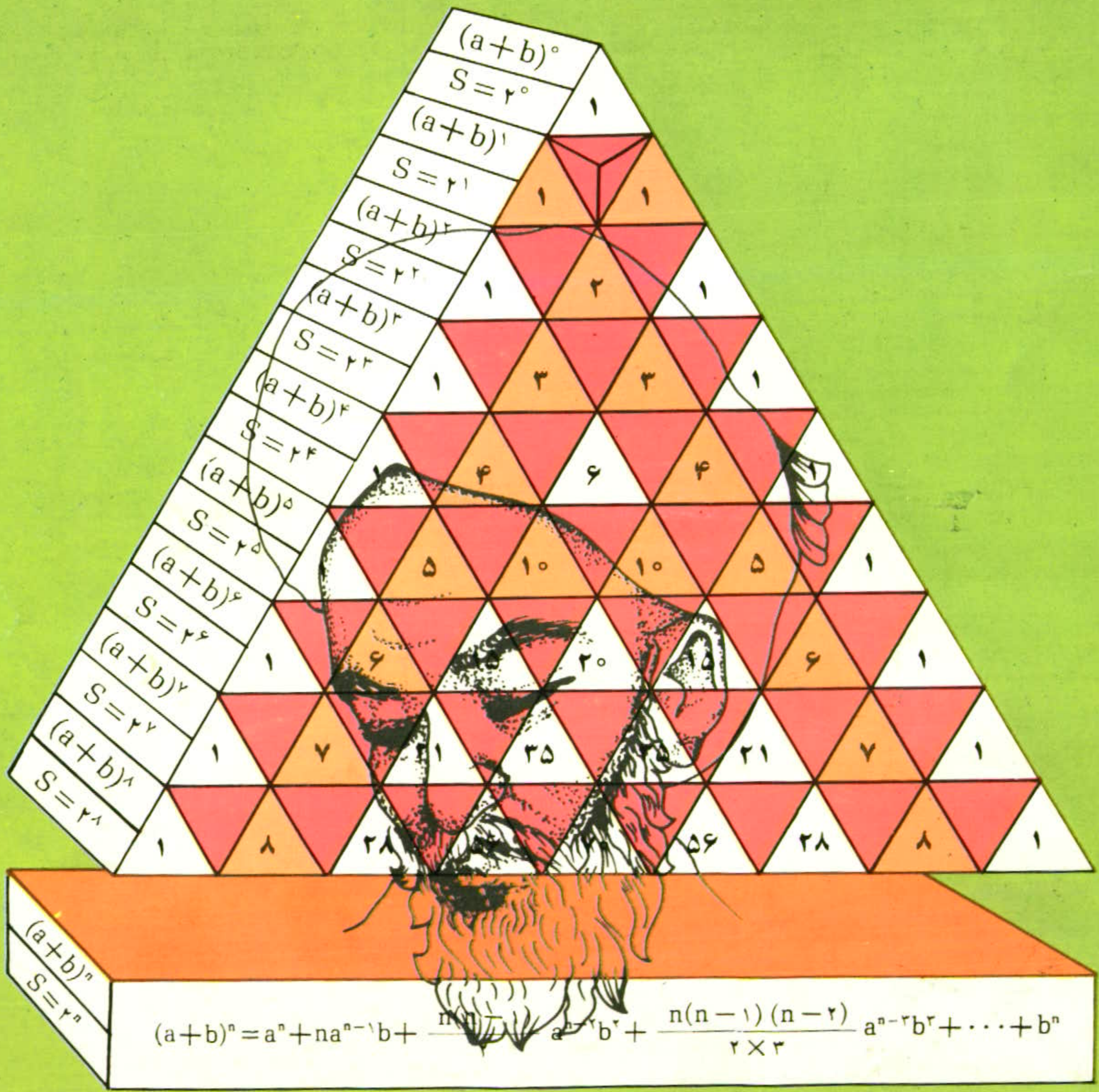
رشد آموزش ریاضی

سال نهم ـ پاییز ۱۳۷۱ ـ شمارهٔ مسلسل ۳۵

بها: ۲۰۰ ریال



$S = ۲^n$ = مجموع ضرایب بسط

بسم‌الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یکبار از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی منتشر می‌شود هدف از انتشار این مجله اعتلای دانش ریاضی دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلّم است. علاوه بر این ایجاد ارتباط متقابل بین معلّمین ریاضی و دفتر برنامه‌ریزی، به‌منظور تبادل تجارب، ارائه روشهای جدید آموزش ریاضی، معرفی جنبه‌های تاریخی، فلسفی، کاربردی ریاضیات در سطح پیش دانشگاهی است. هیأت تحریریه از مشارکت و همکاری همهٔ علاقه‌مندان بویژه دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان در ارائه مقالاتی در زمینه‌های زیر استقبال می‌کند:

الف) آموزش ریاضی (طرح و بررسی آموزش ریاضی، بویژه آموزش ریاضی در دوره‌های پیش دانشگاهی).

ب) تاریخ ریاضی (مشتمل بر سیر تحول مفاهیم ریاضی، شرح و احوال ریاضیدانان و کارهای علمی آنها، بویژه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی).

ج) فلسفه ریاضی (تبیین مفاهیم ریاضی، ریاضیات چیست، بررسی مکاتب ریاضی، بررسی ارتباط تاریخ و فلسفه ریاضی).

ریاضی کاربردی (مشتمل بر مباحثی در زمینه‌های آنالیز عددی، کامپیوتر و برنامه‌ریزی، تحقیق در عملیات، آمار و احتمال).

د) سایر مباحث ریاضی (مشتمل بر مقالات مختلفی در زمینه‌های مختلف، ارائه راه‌حلهای مختلف برای مباحث ریاضی، ارائه مسائل نمونه).

رعایت نکات زیر در مورد مقالات ارسالی ضروری است:

۱) مقالات ارسالی باید در چهارچوب اهداف فوق و با سبکی مشابه با سبک مقالات چاپ شده در رشد ریاضی باشد و در سطحی عرضه شوند که ضمن داشتن محتوی مطلوب دارای کیفیت عرضه مطلوب هم باشند؛

۲) مقالات باید با خط خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) و به صورت یک سطر در میان و با در نظر گرفتن جای کافی در حاشیه تهیه شود و صفحات به طور دقیق شماره‌گذاری شود؛

۳) فهرست مراجع مقاله به طور کامل و در دو قسمت فارسی و خارجی و به ترتیب الفبایی و طبق استاندارد مقالات علمی درج شود؛

۴) مقالات ترجمه شده از زبانهای خارجی همراه با متن اصلی ارسال شود؛

۵) مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور به چاپ رسیده باشد؛

۶) رد یا قبول و حک و اصلاح و ویراستاری مقالات به عهدهٔ هیأت تحریریه است.

رشد آموزش ریاضی

سال نهم ـ پاییز ۱۳۷۱ ـ شمارهٔ مسلسل ۳۵

نشریهٔ گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تلفن ۴ ــ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۵۰)

سردبیر: دکتر علیرضا مدقالچی
مدیر داخلی: میرزا جلیلی
مسوول هماهنگی و تولید: فتح‌ا... فروغی

امور فنی، صفحه‌آرا و رسام: محمد پریسای
دستیار ناظرچاپ: محمد کشمیری

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر دانش‌پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. جهت ارتقاء کیفی آن نظرات ارزنده خود را به صندوق پستی تهران ۳۶۳ ــ ۱۵۸۵۵ ارسال فرمائید.

فهرست

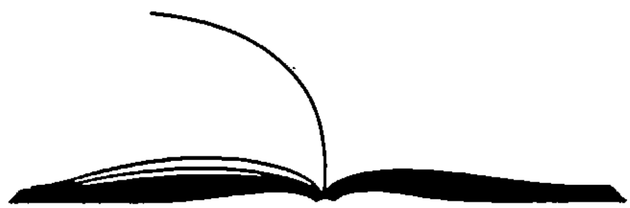
بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

نظام جدید آموزشی در سال تحصیلی جاری، به‌طور آزمایشی به‌اجرا در می‌آید، برنامه این طرح در مورد ده درصد از دانش‌آموزان اعمال می‌شود. در این سر مقاله قصد ورود به‌این برنامه را نداریم زیرا توسط مسئولین محترم وزارت آموزش و پرورش و ستاد بنیادی تغییر نظام جدید آموزشی توضیحات کافی در رسانه‌های مختلف به‌اطلاع مردم و به‌ویژه دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز رسیده است. آنچه مسلم است این است که این طرح حاصل تلاش و فعالیت مستمر چندین سالهٔ کارشناسان و دست‌اندرکاران و مسئولین رده‌های مختلف وزارت می‌باشد که اکنون به‌صورت طرح جدید آموزشی به‌اجرا درآمده است. با اجرای کامل این طرح نظام آموزشی فعلی دگرگون می‌شود و نظام واحدی جایگزین نظام فعلی آموزشی می‌گردد. دورهٔ چهارسالهٔ فعلی دبیرستان به‌یک دوره سه‌ساله و یک‌سالهٔ پیش‌دانشگاهی تبدیل می‌شود. از ویژگیهای مهم این طرح خاصیت انعطاف پذیری آن است. در نظام فعلی انعطاف بسیار کم و مرزبندی بین رشته‌ها محکم است. در نظام جدید دروس مشترک، به‌ویژه در سال اول، زیاد است.

به‌طوری که اشاره کردیم بحث در این نظام در قلمرو سر مقالهٔ رشد آموزش ریاضی نیست ولی بحث درباره برنامه و سر فصلهای دروس ریاضی از وظایف عمدهٔ ما است. شورای ریاضی طی سالیان گذشته، در ادامهٔ تالیف کتب ریاضی دبستان و راهنمایی، برای تغیر کتب ریاضی دبیرستان جلسات متعددی تشکیل داده است و برنامه‌های مشروح و مصوب این شورا به‌اطلاع همکاران

بقیه در صفحه ۴۶



بررسی کتب دبیرستانی

جواد لآلی عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت معلم

مقدمه. یکی از دروس دورهٔ لیسانس دبیری، بررسی کتب دبیرستانی است. این درس در دانشگاههایی، که چنین رشته‌ای را دارند، دایر است. اینجانب چند ترمی این درس را، در دانشگاه تربیت معلم، تدریس کرده‌ام. درخلال تدریس آن به نکات درسی ومسائل آموزشی برخورد کرده‌ام که، احتمالاً، برای اکثر دانش‌آموزان و دبیران جالب خواهد بود. درضمن، به‌خاطر تغییر نظام آموزشی در کشور، کتابهای درسی دبیرستانی درحال تدوین وتألیف است. نقد و بررسی کتابهای درسی و اظهارنظر معلمین و مدرسینی که در ارتباط نزدیك با چنین کتابهایی هستند موجب می‌شود که نارسائی‌ها، کمبودها، زیاده یا کم‌گویی‌ها، ویا احیاناً زائد ویا لازم بودن بعضی ازمطالب درسی را روشن کند.

دراینجا، به‌بررسی آن نکات ومسائل آموزشی می‌پردازیم که برای اکثر دانش‌آموزان و دبیران مفید باشد. در خلال چنین بررسی بعضی از مسائل کتاب را حل کرده و در کنار آن پیشنهاداتی جهت رفع اشکالات کتابهای درسی ارائه می‌دهیم تا در تألیف و تدوین آن مورد استفاده قرار گیرد. البته، نمی‌بایستی چنین انتظاری را ازما داشته باشید، که بررسی ما، بررسی دقیق تمام مطالب کتابهای درسی باشد. چرا که انجام چنین امری مستلزم کاری بس دقیق وتعمق بیشتر در مفاهیم و مطالب آن دارد واین دوراز توان وظرفیت ماست. آنچه راکه موجب تنظیم این مقاله گردیده به‌خاطراین بشارت است که تألیف وتدوین کتابهای درسی شروع شده است. اظهارنظر و نقدکتابهای درسی، به‌وسیله صاحبنظران و کارشناسان آگاه به مسائل آموزشی، گذشته ازآنکه مشکلات تألیف ونواقص آن‌را برطرف‌می‌کند، بلکه، موجب آگاهی‌وشناخت‌دبیران‌ازچگونگی تغییرات کتابهای درسی می‌شود واین آگاهی اشکالات اجرایی آن را به‌حداقل ممکن‌کاهش می‌دهد.

* * *

دربررسی مقدماتی کتابهای درسی به موضوعاتی برخورد می‌کنیم که عمده‌ترین آنها به‌قرار ذیل است: فشردگی و تراکم مطالب، کمبود تصاویرجهت توجیه مفاهیم، ناهماهنگی واژه‌ها و رسم‌الخط، نبودن فهرست مندرجات و علائم، فقدان مطالبی در زمینه تاریخ ریاضیات وشرح‌حال وفعالیتهای علمی بعضی از ریاضیدانان و غیره. حال چگونه می‌توان این نواقص را مرتفع نمود؟ اگر دربین مطالب دقیق ریاضی سرگرمیها یا

معماهای ریاضی گذاشته شود و یا تصویر رنگی یك کارعلمی و صنعتی، متناسب با مفهوم ارائه شده، عرضه گردد و یا شرح حال و زندگی ریاضیدانی بیان شود، نه فقط اطلاعات علمی دانش‌آموز را بالا می‌برد؛ بلکه ایجاد انگیزه می‌کند وشوق دانش‌آموز را در یادگیری ریاضی افزایش می‌دهد وملالتی را که ازارائه مطالب خشك ریاضی حاصل گردیده، کاهش می‌دهد.

جهت جلوگیری از تراکم مطالب، بدون کاستی آن، پیشنهاد می‌شود که بخش تمرینات پربارتر شود. متأسفانه، بخش تمرینات بدون هدف است ومحتوای آموزشی آن بسیار ضعیف است. امروز، در بسیاری ازکشورها، بالاخص در کشورفرانسه، محتوای تمرینات کتابهای درسی بسیارغنی است، مطالب ارائه شده در آن بیش ازمطالب متن درس است؛ وبرای حل تمرینات آن ساعتهای خاصی در برنامه درسی منظور گردیده است. اگر نگاهی اجمالی به بخش تمرینات کتابهای درسی بعضی ازکشورهای پیشرفته بیندازیم، عمده‌ترین اصول آن را می‌توانیم به صورت ذیل منظم کنیم:

۱ـ درابتدای هر بخش، تمرینات و مثالهای ساده مقدماتی، که روشنگر قضایا وتعاریف متن درس‌اند، آورده شده است. این‌گونه تمرینات که به صورت حساب شده، با مثالهای عددی تنظیم می‌شوند، به‌مراتب آگاهی بیشتری از یك بحث دقیق ریاضی، که برمبنای استدلال منطقی فراهم می‌گردد، به دانش‌آموز می‌دهد. اگرمثالها متناسب با مفهوم ریاضی ساخته شود، پیچیدگی‌های متن درس و ساختمانهای ریاضی آنها را با وضوح بیشتری درمعرض دید دانش‌آموز قرارمی‌دهد.

۲ـ بعضی ازتمرینات به‌گونه‌ای است که موضوع متن درس را بسط وگسترش می‌دهد. وجود چنین تمریناتی، گذشته ازآنکه فشردگی وتراکم مطالب درسی راکاهش می‌دهد؛ بلکه، دانش‌آموز را، درتعمیم برخی ازاحکام ریاضی و حدسهای موردنظر، هدایت می‌کند.

۳ـ مسائل مشکل و مبارز طلب، متناسب با سطح مطالب درسی (همراه با راهنمایی‌های لازم)، دانش‌آموزان با هوش ومستعد را به‌مبارزه می‌طلبد و چون حل بعضی از این نوع تمرینات نیازبه‌ابتکار ونوآوری دارد، بررسی آن برای دانش‌آموزان ایجاد انگیزه می‌کند وعلاقه دانش‌آموزان را به حل مسائل مشکل تحریك می‌نماید. البته تمرینات باید متناسب با شرایط سنی دانش‌آموزان ومحتوای مطالب درسی تهیه شود و نباید تا آن درجه سخت و دشوارباشدکه حل آنها خارج از ظرفیت دانش‌آموزان باشد.

نکته دیگری‌که در کتابهای درسی باید رعایت شود نظم مطالب وتقدم و تأخر بعضی ازمفاهیم آن است. برای برنامه‌ریزان باید مشخص‌شودکه چه‌مفاهیمی، درچه سطحی، چه‌مقدار، چگونه و با چه روشی (متناسب با سن دانش‌آموزان) ارائه گردد. آنچه‌که ما درپیش رو داریم تعداد زیادی دانش‌آموز است وجامعه‌ای‌که نیاز به مشاغل متنوع دارد. مطالب ریاضی و روش ارائه آن باید به‌گونه‌ای باشدکه در دانش‌آموزایجاد انگیزه‌کند و تواناییهایش را پرورش دهد تا براساس علاقه واستعدادش به‌مشاغل مورد لزوم جامعه هدایت شود. درضمن، شرایط سنی دانش‌آموز، واطلاعات ناقص او درمورد مشاغل مختلف، نمی‌تواند شغل آتیه خود را پیشبینی کند. بنابراین، از ارائه مفاهیم به‌صورت عرضی، وبررسی تمام نکات یك مفهوم، باید اجتناب کرد. مطالب ریاضی‌باید متنوع، به‌صورت طولی، وعمومی‌ترباشد تا نیاز او درمحاسبات مقدماتی مشاغل فنی مرتفع سازد. اما، ارائه مفاهیم ریاضیات چهارچوب‌خاصی دارد. برای طرح بعضی از مفاهیم، مقدماتی لازم است و آن مقدمات به‌مفاهیم دیگری بستگی پیدا می‌کند. بی‌توجهی به‌این نکات موجب دشواری مطلب وبی‌دقتی‌درطرح مطالب‌می‌گردد. حکایت ذیل تا حدودی روش ریاضی را، که به‌روش استقرائی یا تراجعی موسوم است، بیان می‌کند.

گویند درمحفلی از یك ریاضیدان و یك فیزیکدان سؤال کردندکه چگونه می‌توان یك‌کتری پر ازآب را در دومرحله زیر برروی شعله‌گازی قرارداد:

۱) کتری روی میز کنارشعله گاز قرار دارد.

۲) کتری درکف اطاق گذاشته شده است.

فیزیکدان گفت: درهردوحالت کتری را مستقیماً روی شعله‌گاز قرارمی‌دهیم. اما، ریاضیدان گفت: درحالت اول کتری رامستقیماً روی شعله‌گاز قرارمی‌دهیم، ولی، درحالت دوم، کتری را از کف اطاق برروی میز قرارداده، سپس، مانند حالت اول عمل می‌کنیم. شاید روشی‌راکه ریاضیدان‌ارائه داده است نپسندید. ولی، این یك بینش و روش ریاضی است. در بسیاری مواقع برای حل یك مسأله ریاضی می‌توان ابتدا در حالت خاص آن را حل کرد، سپس، حالت کلی را به حالت خاص برگرداند. همچنین، ارائه اکثر دروس در دبیرستان، بالاخص دروس

هندسه، متأثر ازاین روش است. زیرا، در هندسه تقدم و تأخر مطالب مهم است و هرقضیه به‌قضیه دیگری‌بستگی دارد وهندسه یکی از دروس دبیرستانی است که احکام آن بر پایه اصول موضوعه بنا نهاده شده است وارتباط احکام آن به قضایای قبلی بیش از دروس دیگراست. البته، در کتابهای هندسه کم‌وبیش بدین موضوع توجه شده‌است وما نیز درپی‌آن نیستیم که سطر به‌سطر به‌نقد و بررسی همه مطالب درسی اقدام کنیم، بلکه، جهت توجیه برداشت خود به ذکر نمونه‌هایی اکتفا می‌کنیم.

درهندسه سال‌اول علوم تجربی و ریاضی، انواع چهارضلعی‌ها را با تعاریفی مستقل ازیکدیگر بیان‌کرده‌اند. برای اینکه بهتر بتوانیم نواقص ونارسایی‌آن را بررسی کنیم، تعاریف چهارضلعی‌ها را عیناً ازکتاب مذکور ذکرمی‌کنیم:

۱) متوازی‌الاضلاع چهارضلعی است‌که اضلاع‌آن دوبه‌دو موازی یکدیگرند. . .

۲) مستطیل چهارضلعی است‌که زاویه‌های‌آن قائمه‌است...

۳) لوزی چهارضلعی است که چهار ضلع آن مساوی یکدیگرند...

۴) مربع چهارضلعی‌است‌که زاویه‌هایش قائمه وچهارضلع آن مساوی یکدیگرند...

اینك، تعاریف پیشنهادی، درمورد اشکال فوق، چنین است:

۱) متوازی‌الاضلاع چهارضلعی است که اضلاع مقابل آن متوازی باشند.

۲) مستطیل متوازی‌الاضلاعی است‌که یك زاویه‌آن قائمه باشد.

۳) لوزی متوازی‌الاضلاعی است‌که دو ضلع مجاور آن متساوی باشد.

۴) مربع لوزی است‌که یك زاویه‌آن قائمه باشد.

اگر تعاریف دوم‌را برای اشکال هندسی فوق بپذیریم، تمام احکام وقضایایی‌که برای متوازی‌الاضلاع ثابت شده است‌برای مستطیل ومربع ولوزی نیز برقرارمی‌شود. تنظیم مطالب بدین گونه موجب می‌شودکه انسجامی بین مفاهیم و قضایا برقرار گردد و ازتکرارمطالب واطالهٔ کلام جلوگیری شود، درچنین وضعیتی، تدریس وتفهیم هرقسمت نیازبه یادآوری مطالب گذشته پیدا می‌کندکه ازنظرآموزش ریاضی بسیارمفید است.

نمونه دیگری از روش فوق مربوط به‌جبرسال اول علوم تجربی و ریاضی‌است، وآن تجزیه عبارتهای جبری تجزیه‌پذیر است که صورت عمومی آنها عبارتند از Ax^2+Bx+C، که درآن، A و B و C اعداد صحیح‌اند (اگرAوBوCاعداد گویاباشند.با ضرب آنها درعامل مشترك مخرج آنها، می‌توان آنها رابه‌ضرایب‌صحیح تبدیل‌کرد). اگر $A=1$، تجزیه‌آن، با توجه‌به اتحاد دوجمله‌ای مشترك، امکانپذیراست وآن پیدا کردن‌دوعددصحیح a وb است‌که‌مجموع آنها B وحاصلضرب آن C است؛یعنی،

$$x^2+Bx+C=(x+a)(x+b)$$

حال اگربخواهیم حالت‌کلی را به حالت فوق برگردانیم به صورت زیرعمل می‌کنیم:

فرض‌کنیدکه عبارت مذکور درمجموعه اعداد صحیح تجزیه‌پذیر باشد. بنابراین،

$$Ax^2+Bx+C=\frac{1}{A}[(Ax)^2+B(Ax)+AC]$$

که اگربجای Ax متغیر y را قراردهیم، عبارت‌فوق به‌صورت

$$\frac{1}{A}[y^2+By+Ac]$$

درمی‌آید که قبلا تجزیه چنین عبارتهایی را به دانش‌آموزان تدریس نموده‌ایم.

مثال. سه‌جمله‌ایهای زیررا به‌حاصل‌ضرب عاملها تبدیل کنید:

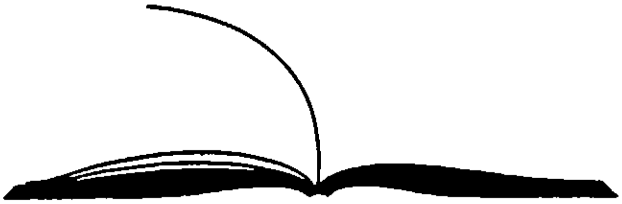
(الف) $-6x^2+5x-1$

(ب) $6x^2+5x-6$

حل. قسمت (الف)

$$-6x^2+5x+1=-\frac{1}{6}[(6x)^2-5(6x)+6]$$

$$=-\frac{1}{6}[y^2-5y+6]=-\frac{1}{6}(y-2)(y-3)$$



$$= -\frac{1}{6}(6x-2)(6x-3) = (-3x+1)(2x-1)$$

حل قسمت (ب)

$$6x^2+5x-6 = \frac{1}{6}[(6x)^2+5(6x)-36]$$
$$= \frac{1}{6}[y^2+5y-36]$$
$$= \frac{1}{6}(y+9)(y-4)$$
$$= \frac{1}{6}(6x+9)(6x-4)$$
$$= (2x+3)(3x-2)$$

ریشه دوم یك عدد

در درس بررسی‌کتب دبیرستانی، کـه در دانشگاه تربیت معلم، تشکیل شده بود کتاب جبـر سال اول، علوم تجـربی و ریاضی، مورد نقد و بررسی‌قرارگرفت. درشروع جلسه درس، جهت‌آمادگی دانشجویان وقرارگرفتـن در چگونگی محتوای مطالب کتاب، سؤالات تشریحی و تستی به‌صورت ذیل مطرح شد:

۱) تمایزعدد $\sqrt{4}$ وجذرعدد ۴ چیست؟

تعداد اندکی از دانشجویان پاسخ درستی‌بدین سؤال داده‌اند. جواب قانع‌کننده یکی از دانشجویان چنین بوده است:

جذرعدد ۴، به‌دست‌آوردن‌عددی‌مانند a است‌که $a^2=4$. بنابراین،جذر۴ برابر ± 2 است درصورتی‌که $\sqrt{4}=2$. سپس، سؤال شد:

۲) چرا جـذر«عددمثبتa» برابـراست با $\pm\sqrt{a}$، ولی، کعب عدد دلخواه b برابراست با $\sqrt[3]{b}$؟ بعداً، به‌طورمشروح، بدین سؤال پاسخ خواهیـم داد. سپس، سؤالات تستـی بدین صورت مطرح شد:

۳) کدام رابطه درست؟ $(n\in N)$

۱) $\sqrt[n]{a^n}=a$، ۲) $\sqrt{a^{2n}}=a^n$،

۳) $\sqrt[4n]{a^{2n}}=\sqrt{a}$، ۴) $\sqrt[n]{(a)^{2n}}=a^2$.

۴) اگر $0<a<1$ و $n\in N$، کدام رابطه درست‌است؟

۱) $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n+1]{a}<a$، ۲) $a<\sqrt[n+1]{a}<\sqrt[n]{a}$،

۳) $a<\sqrt[n]{a}<\sqrt[n+1]{a}$، ۴) $\sqrt[n+1]{a}<\sqrt[n]{a}<a$.

۵) اگر $a<0$، حاصل

$$\sqrt{a^2}+\sqrt[3]{27a^3}+\sqrt[4]{16a^4}+\sqrt[5]{32a^{10}}$$

کدام است؟

۱) $2a$، ۲) $2a^2$،

۳) $6a+2a^2$، ۴) $-6a-2a^2$.

۵) اگر $-\frac{1}{2}<a<0$،حاصل

$$\frac{\sqrt{1-a\sqrt{4}}\,\sqrt{1-2\sqrt{a^2}}}{\sqrt[4]{1+16a^4+4a\sqrt{4a^2}}}$$

کدام است؟

۱) 1، ۲) $1+a$، ۳) $1-a$، ۴) $1\pm a^2$.

که گزینه‌های صحیح، به‌ترتیب، ۴، ۳، ۲، ۱ است.

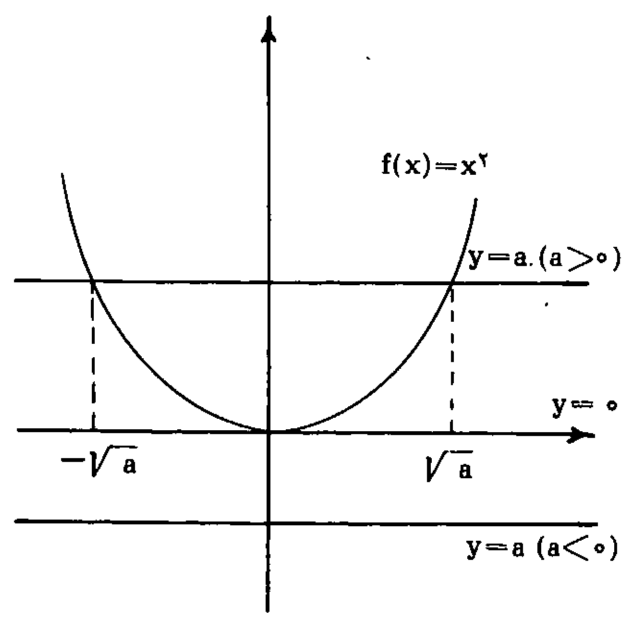
بسیاری ازدانشجویان،معلم مأموربه‌تحصیل بوده‌اند،و برخی دیگر، در دبیرستانها به‌عنوان معلمین حق‌التدریسی، به تدریس کتابهای درسی اشتغال داشته‌اند. درضمن، تمام آنها بسیاری از دروس دانشگاهی (مبانی ریاضی، ریاضیات عمومی،آنالیزا وجبرا و...) را گذرانده بودند. انتظار می‌رفت‌که اکثرآنان بتوانند جواب صحیح به پرسشهای فوق بدهند. اگرچه تلاش آنان با زحمات زیادی همراه بـود، ولی، دربین‌آنـان تعداد کمی پاسخ صحیح داده‌اند. با نقد و بررسی‌که ازجبرسال اول به‌عمل‌آمد نتیجه شد؛ که اولاً نیـازی نیست که توان و ریشه اعداد، درحالت‌کلی، آنهم به صورت ارائه شده در کتابهای درسی بیان شود؛ ثانیاً، اگر روشهای دیگری، با بیان شهودی وتعبیرات هندسی همراه باشد مناسبتر خواهد بودکه روشهای جدیدی را جایگزین روشهای قدیم کنیم. ممکن‌است روشهای جدید نیاز به‌مقدماتی داشته باشد، ولی، اگـر بیان مفهومی، با مقدماتی ملموس‌تر صورت گیرد، نباید در تنظیم و ارائه آن کوتاهی کرد. روشی را که دراین زمینه می‌توان پیشنهاد کرد

این است که پس از بیان قوای صحیح اعداد حقیقی، و رسم نمودار رابطه، به‌صورت نقطه‌یابی، ریشه nام عدد a را، طول نقطه برخورد دونمودار $y=a$ و $y=x^n$ دانست. نظر به‌اینکه در دوره راهنمایی، محورهای مختصات و رسم‌نمودار خط، بیان شده است، پس مقدمات لازم جهت ارائه این‌روش مهیا گردیده است. اینك به‌ارائه این روش می‌پردازیم.

فرض کنید a یك عدد حقیقی نامنفی باشد و n عدد طبیعی دلخواهی. ریشه nام a، عددی حقیقی مانند b است که در معادله $b^n=a$ صدق می‌کند. برای به‌دست‌آوردن عدد b، می‌باید تابع $f(x)=x^n$ را از طریق نقطه‌یابی رسم کنیم، سپس، طول نقطه تقاطع این تابع را با خط $y=a$ به‌دست آوریم. چون n زوج (یا فرد) باشد، نمودار $f(x)=x^n$، تشابهی با نمودار $f(x)=x^2$ (یا $f(x)=x^3$) دارد، پس، حالت کلی را می‌توان از ریشه دوم a؛ یعنی جذر a، و از ریشه سوم a؛ یعنی، کعب a نتیجه‌گرفت.

ریشه دوم یا جذر یك عدد نامنفی

تابع $f(x)=x^2$ را ازطریق نقطه‌یابی‌رسم می‌کنیم، سپس، طول نقطه تقاطع



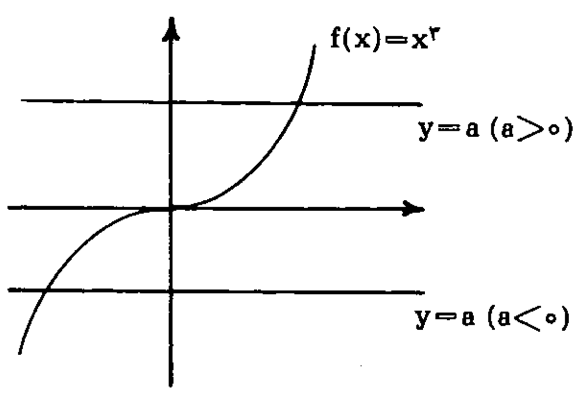
(شکل ۱)

خط $y=a$ را با نمودار این تابع به‌دست می‌آوریم (شکل ۱). مشاهده می‌شود که خط مذکور، وقتی که $a>0$، نمودار تابع را در دونقطه قطع می‌کند. اگر $b=\sqrt{a}$، آن را ریشه مثبت a (یا رادیکال حسابی) می‌نامند و $-\sqrt{a}$ را ریشه منفی a می‌گویند. بنابراین، ریشه دوم ۴ عبارت است از $\pm\sqrt{4}$ یا ±2. زیرا، خط $y=4$ نمودار $f(x)=x^2$ را در دونقطه به طول ۲ و ۲− قطع می‌کند. همچنین، ریشه دوم عدد ۲۵ برابر $\pm\sqrt{25}$ (یا ±5) است. زیرا، خط $y=25$ نمودار f را در دونقطه‌ای به‌طول ۵ و ۵− قطع می‌کند. ریشه دوم عدد صفر، عدد صفراست. زیرا، خط $y=0$ نمودار f راتنها درمبدأ قطع می‌کند.

تبصره. اگر $a<0$، خط $y=a$ نمودار f را قطع نخواهد کرد، پس، اعداد منفی ریشه دوم ندارند.

ریشه سوم یا کعب عددی دلخواه

تابع $f(x)=x^3$ را به‌طریق نقطه‌یابی رسم می‌کنیم. با توجه به‌نمودار آن، درمی‌یابیم که این تابع برمجموعه اعداد حقیقی صعودی ویك به‌یك است. بنابراین، به‌ازای هرعدد حقیقی a، خط $y=a$ نمودار $f(x)=x^3$ را تنها دریك نقطه قطع می‌کند (شکل ۲ ملاحظه شود).



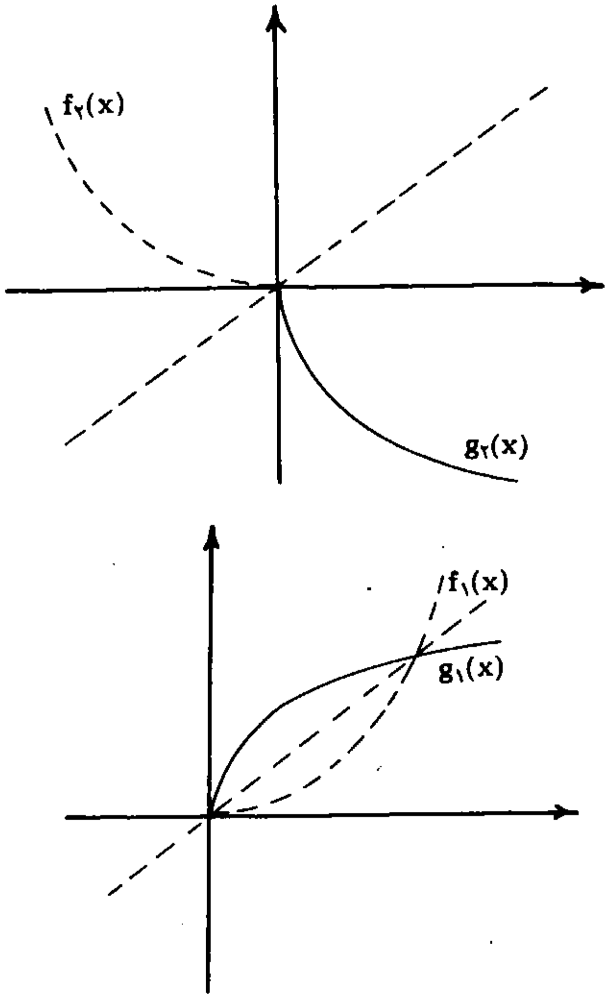
(شکل ۲)

محاسبه $\sqrt{x^2}$

اگر دقیقاً به‌عبارت $\sqrt{x^2}$ توجه‌کنیم، درمی‌یابیم که این عبارت تابع معکوس $f(x)=x^2$ است. ازطرفی توابعی‌دارای تابع معکوس است که یك‌به‌یك باشد، و برای‌اینکه چنین‌شرطی برقرارشود، باید دامنه تابع f را به‌دوفاصله

$]-\infty, 0], [0, \infty[$

تقسیم کرد. تحدید تابـع f را، به‌دوفاصله مذکـور، f_1 و f_2 می‌نامیم. درچنین حالتی f_1 و f_2، که شاخه راست وچپ تابع f است، یك به‌یك است. بالنتیجه، تابـع معکوس آن موجود



(شکل ۳)

است. بنابراین، اگر توابـع معکوس f_1 و f_2 را، به ترتیب، g_1 و g_2 بنامیم، خواهیم داشت

$g_1: [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[, \; g_1(x)=\sqrt{x},$

$g_1 o f_1(x)=x$

$g_2: [0, \infty[\longrightarrow]-\infty, 0], \; g_2(x)=-\sqrt{x},$

$g_2 o f_2(x)=x$

حال اگر $x>0$ آنگاه $(g_1 o f_1)(x)=x$ یا $\sqrt{x^2}=x$؛

ولی، اگر $x<0$ آنگاه $(g_2 o f_2)(x)=x$ یا $-\sqrt{x^2}=x$.

ازاینجا نتیجه می‌شود که

$$\sqrt{x^2}=\begin{cases} x & ، x>0 \\ -x & ، x<0 \end{cases}$$

البته، عبارت $\sqrt{x^2}$ را می‌توان به‌صورت

$\sqrt{x^2}=\mathrm{Max}\{x, -x\}$ یا $\sqrt{x^2}=|x|$

تعریف نمود که هریك ازآنها نیاز به مقدماتی دارد.

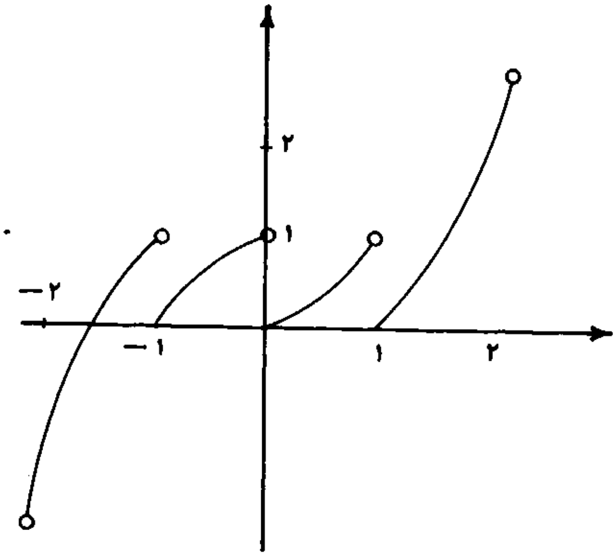
رسم نمودار یك رابطه به طریق نقطه‌یابی (یا نقطه به‌نقطه)

موضوع دیگری که درکتابهـای درسی توجهی بدان نشده است، رسم یك تابـع یا نمودار به‌طـریق نقطـه‌یابی است. امروزه، با توجه به محتوای کتابهای درسی، تصور ذهنی اکثر دانش‌آموزان، جهت رسم توابـع، این است که مشتق اول و دوم تابع را گرفته وجدولی جهت تغییرات تابع، مشتق‌اول و دوم تابـع، تنظیم نمایند. سپس براساس آن نمـودار تابع را بکشند. با توجه به مثالهای متنوعی که در کتابهای دبیرستانی موجود است بسیاری ازتوابع به‌خصوص توابع‌چندضابطه‌ای، ویا توابعی که شامل‌قدرمطلق وجزء صحیح است، ویارابطه‌هایی که «یك به‌چند» ویا «چند به چند» است، ازاین دستـورالعمل پیروی نمی‌کنند. برای ترسیم‌چنین توابعی باید قواعد دیگری، مستقل ازمفهوم مشتق تنظیم نمود. درکنکورتشریحی‌سال۱۳۶۲ سؤالی بدین صورت مطرح شد:

مسأله. منحنی‌نمایش‌تغییرات تابع $f(x)=x|x|-[x]$ را، درفاصله $[-2, 2]$ رسم کنید.

بنابرادعای مصحـح این سؤال، از بین ۲۲ هزار داوطلب رشته ریاضی، تنها حدود چهارصـد نفر توانستنـد نمودار این تابع را رسم کنند. شاید بتوان گفت کـه اشکال عمده این بوده است که روش رسم چنین توابعـی درکتابهای درسی تشریح نشده بـود. همانطوری که درشکل ۴ ملاحظه می‌کنید، این‌تابع

در نقاط صحیح پیوسته نیست، بالنتیجه در این نقاط مشتق‌پذیر هم نخواهد بود. برای رسم چنین توابعی می‌بایستی دامنه آن را به فاصله‌های $[n, n+1)$ تقسیم نمود تا ضابطه تابع صورت ساده‌تری بخود بگیرد.



(شکل ۴)

بنابراین،

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+2 & -2\leq x<-1 \\ -x^2+1 & -1\leq x<0 \\ x^2 & 0\leq x<1 \\ x^2-1 & 1\leq x<2 \\ 2 & x=2 \end{cases}$$

که در هریك از زیرفاصله‌های فوق، رسم نمودار آن، با انتخاب xهای نزدیك بهم و تعیین مقادیر آن، چندان مشکل نیست.

مجموعه اطلاعاتی که بتواند نقطه شروع مناسبی برای رسم توابع (یا رابطه‌ها) ازطریق نقطه‌یابی باشد چنین است:

۱) تعیین دامنه؛ یعنی، مجموعه x هائی که به‌ازای آن تابع تعریف شده است.

۲) افراز دامنه به زیرفاصله‌های جدا ازیکدیگر بطوری‌که ضابطه تابع در آنها ساده شود. اگر تابع شامل قدرمطلق باشد، دامنه را به‌مجموعه xهای مثبت و مجموعه xهای منفی افراز می‌کنیم؛ و اگر تابع شامل جزء صحیح باشد، دامنه را به زیر فاصله‌هایی افراز می‌کنیم که عبارت تحت جزء صحیح بین دو عددصحیح متوالی باشد. به‌عنوان‌مثال، برای تابع $f(x)=[x^2]$ اگر $x>0$ آنگاه دامنه را به‌زیرفاصله‌های $[\sqrt{n}, \sqrt{n+1}[$، که در آن n عدد صحیح نامنفی است، افراز می‌کنیم؛ و اگر $x<0$. افراز دامنه به صورت $[-\sqrt{n+1}, -\sqrt{n}\,[$ است.

همچنین برای تابع $f(x)=x\,[k^2x]$، وقتی‌که $x\geqslant 0$، افراز دامنه را به صورت $\left[\frac{n}{k^2}, \frac{n+1}{k^2}\right[$ اختیار می‌کنیم (k عدد ثابتی غیرازصفراست).

۳) تعیین محورهای تقارن ومرکز تقارن. اگر تابعی زوج باشد؛ یعنی، $f(x)=f(-x)$، آنگاه محور yها محورتقارن منحنی نمایش آن است وکافی است‌که نمودار آن را برای xهای مثبت رسم‌کنیم، وسپس، قرینه آن را نسبت به‌محور yها به‌دست‌آوریم؛ واگر f تابعی فرد باشد؛ $f(-x)=-f(x)$، کافی است نمودار آن را برای xهای مثبت رسم‌کنیم، سپس، قرینه آن را نسبت به‌مبدأ مختصات به‌دست آوریم.

محور تقارن را می‌توان برای «رابطه‌ها» نیز به‌دست آورد، قاعدهٔ آن چنین است:

اگر $-x$ را بجای x قرار دهیم در y تغییری حاصل نشود، محور yها محورتقارن است؛ مانند $y=x^2+\frac{1}{x^2}$؛ اگر y را به $-y$ تغییر دهیم مقدار x تغییر نکند، محور xها محور تقارن منحنی است؛ مانند $x+|y|=1$؛ واگر x به $-x$ تغییر کند y نیز به $-y$ تغییر نماید، مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی است؛ مانند $|x|+|y|=1$.

برای اینکه اهمیت رسم نمودار به روش نقطه‌یابی را واضح‌تر بیان‌کنیم مثالهایی را ارائه می‌دهیم.

مثال ۱. نمودار رابطه

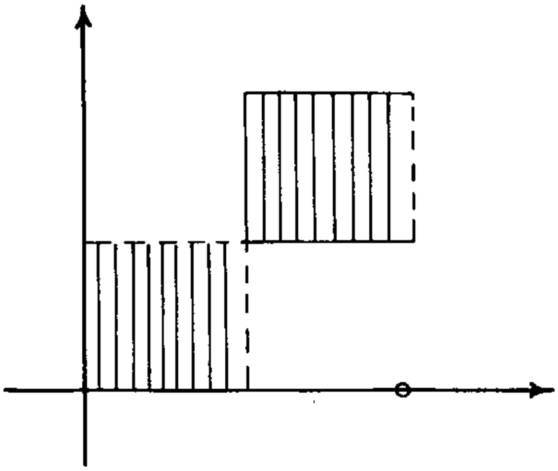
$$f=\{(x, y)|[x]=[y] \text{ و } 0\leqslant x<2\}$$

را رسم‌کنید.

حل. به‌ازای هر x از دامنه رابطه f، تغییرات y چنین‌است؛

$$[x]\leqslant y<[x]+1$$

بنابراین، نمودار آن به‌صورت زیر است.



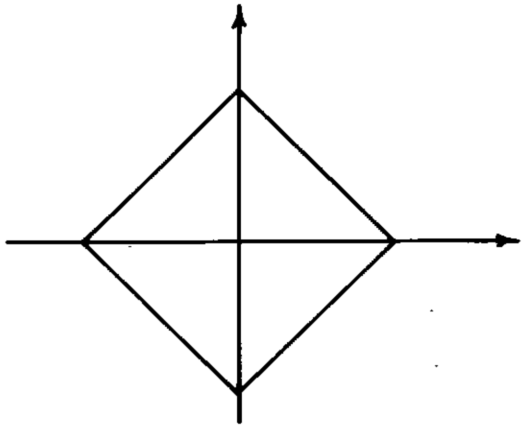
(شکل ۵)

مثال ۲. نمودار رابطه $|x|+|y|=۱$، کدام است؟

۱) دایره، ۲) مربع با اضلاع موازی محورها، ۳) مربعی به‌اقطارمنطبق برمحورها، ۴) دوپاره‌خط عمود برنیمساز ربع اول.

حل. اگر (x, y) نقطه‌ای روی نمودارباشد، $(\pm x, \pm y)$ نیزروی نموداراست. بنابراین، نمودار این رابطه نسبت به محورهای مختصات متقارن است.

بنابراین،کافی است که نمودارآن را برای $x \geqslant ۰$ و $y \geqslant ۰$ رسم‌کنیم، سپس قرینه‌آن را نسبت به دومحور به‌دست آوریم. بدیهی است‌که درچنین حالتی‌دامنه رابطه فاصله $[۰, ۱]$است، حال اگر $x \geqslant ۰$ و $y \geqslant ۰$ آنگاه $|x|+|y| \equiv x+y=۱$ که نمایش یك پاره‌خط است. (شکل ۶ را ببینید)



(شکل ۶)

مثال ۳. فرض‌کنید f و g و h توابعی از $R^۲$ بتوی $R^۲$ با ضابطه‌های زیر باشند:

$$f(x, y)=\left(\frac{۱}{۳}x, \frac{۲}{۳}y\right)$$

$$, g(x, y)=\left(\frac{۲-x}{۳}, \frac{۱+y}{۳}\right)$$

$$h(x, y)=\left(\frac{۲+x}{۳}, \frac{۱+۲y}{۳}\right)$$

الف) بررسی‌کنیدکه توابع فوق خطوط $y=mx+n$ و مربع $A=[۰, ۱]\times[۰, ۱]$ و دایره $x^۲+y^۲=R^۲$ رابه چه شکلی تبدیل می‌کنند؟

ب) اگر $B=\{(x, y)|۰\leqslant x=y\leqslant ۱\}$ آنگاه مجموعه ذیل چه وضعی دارد؟

$$f(A\cup B)\cup g(A\cup B)\cup h(A\cup B)$$

حل. حکم (الف) را برای f بررسی می‌کنیم و بررسی g و h را به‌عنوان تمرین باقی می‌گذاریم.
فرض‌کنید $f(x, y)=(X, Y)$. دراین صورت،

$$Y=\frac{۲}{۳}y, X=\frac{x}{۳}$$

چون نقطه (x, y) روی خط $y=mx+n$ است، پس،

$$\frac{۳}{۲}Y=m(۳X)+n$$

$$Y=۲mX+\frac{۲}{۳}n$$

دقیقاً می‌بینیم، که مکان حاصل، خطی با ضریب زاویه $۲m$ و عرض ازمبدأ $\frac{۲}{۳}n$ است. بنابراین، f مربع واحد را به‌مستطیل $\left[۰, \frac{۱}{۳}\right]\times\left[۰, \frac{۲}{۳}\right]$ تبدیل می‌کند زیرا، f تابعی پیوسته است و خطوط عمود برمحورها را به‌خطوط عمود بر محورها

تبدیل می‌کند. همچنین، f دایره به شعاع R را به یك بیضی تبدیل می‌کند. زیرا،

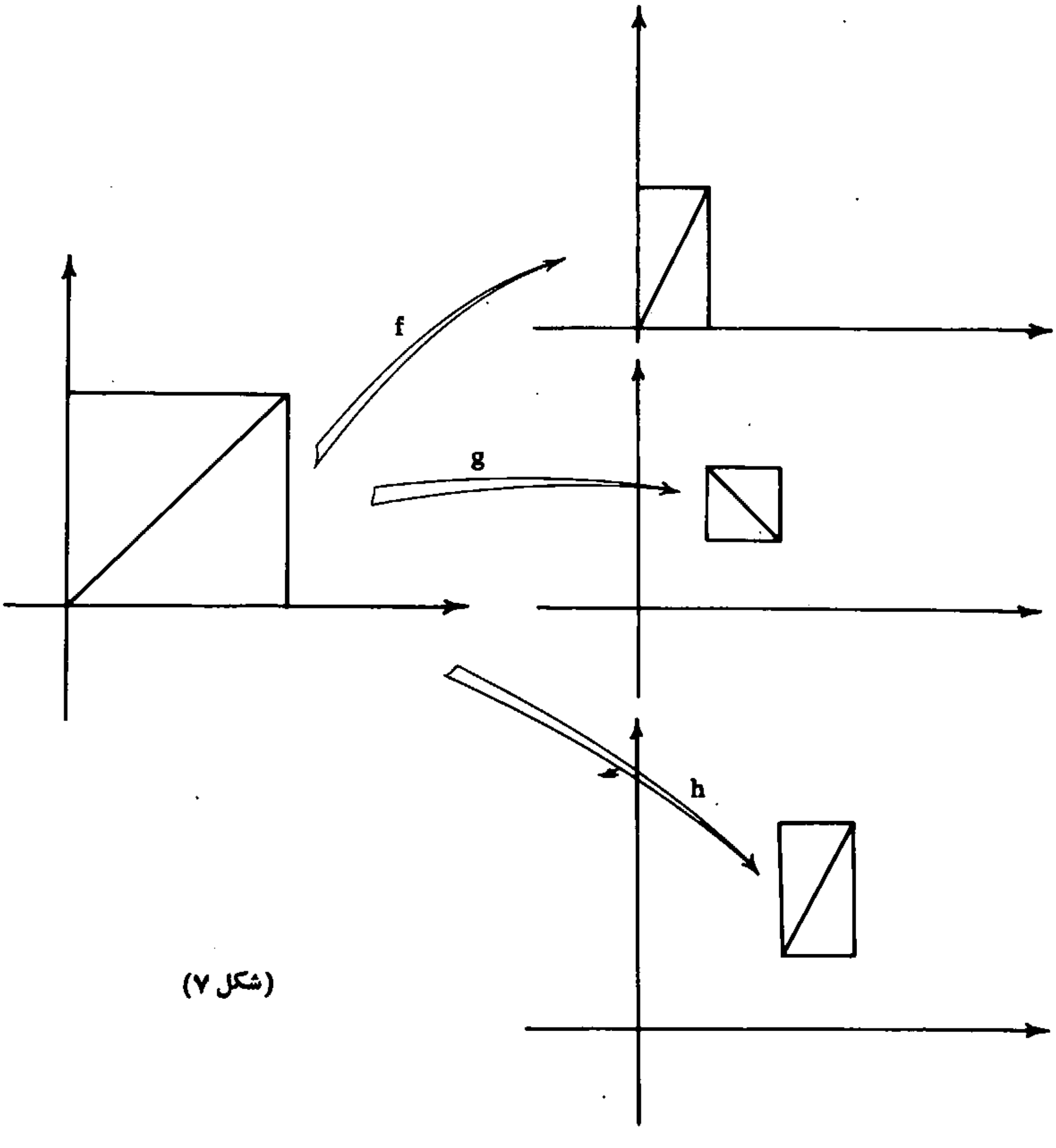
$$x=3X,\ y=\frac{3}{2}Y$$

$$(3X)^2+\left(\frac{3}{2}Y\right)^2=R^2$$

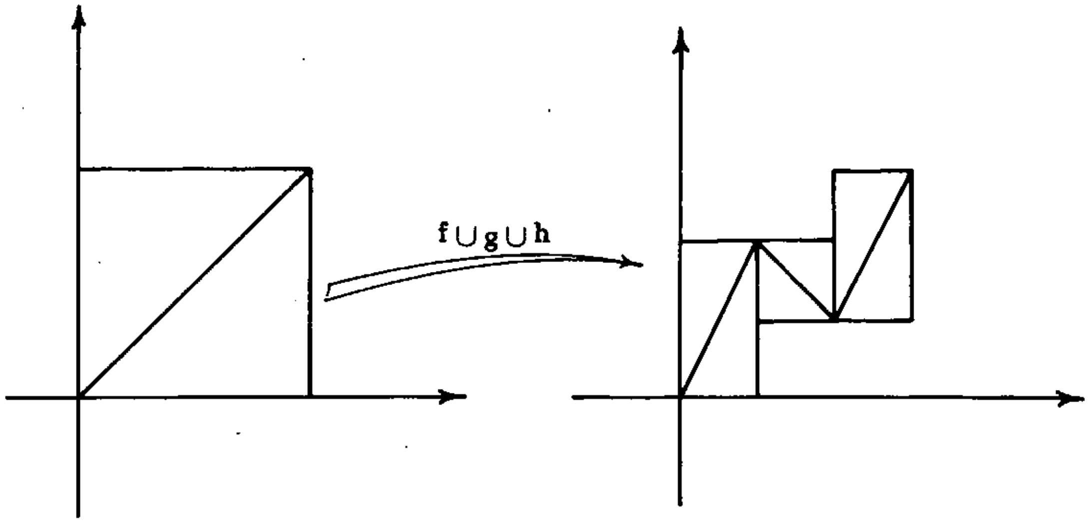
$$\left(X/\frac{R}{3}\right)^2+\left(Y/\frac{2}{3}R\right)^2=1$$

حکم (ب) با توجه به‌شکل‌های ۷ و ۸، مربع واحد به سه مستطیل که دریك ضلع مشترك‌اند تبدیل می‌گردد.

همیشه رسم‌دقیق توابع به‌کمك‌ترسیم نقطه به‌نقطه امکانپذیر نیست. معمولاً توابعی را می‌توان ازاین طریق ترسیم نمود که نیازی به‌تقعر وتحدب منحنی نباشد وتنها ترسیم تقریبی‌منحنی،



(شکل ۷)



(شکل ۸)

که حدود شکل را مشخص کند، کافی باشد. درجبر سال سوم ریاضی‌فیزیك، صفحه ۹۹، مسئله ۱۳، رابطه‌ای را ذکر کرده که رسم دقیق آن نیاز به مشتق اول و دوم دارد. این مسأله، که قسمت (ت) مثال زیر است، پس ازمبحث تقعر و تحدب بیان شده است که مقدمات لازم را جهت رسم دقیق آن مهیا کرده است.

مثال. فرض کنید که $a>0$.

(الف) مکان هندسی نقاطی درصفحه را به‌دست آورید که $x=a\cos^3\theta$ و $y=a\sin^3\theta$.

(ب) نمودار رابطه $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ را رسم کنید.

(ت) ثابت کنید که طول مماس برمنحنی (ب)، و محدود به محورهای مختصات، مقداری ثابت است.

حل. چون

$$\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=\sin^2\theta,\ \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=\cos^2\theta$$

بنابراین،

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

قسمت (ب). فرض کنید که f رابطه مذکور باشد. اگر $(x,y)\in f$ آنگاه $(\pm x, \pm y)\in f$. بنابراین، محورهای مختصات، محورهای تقارن نمودار رابطه f است. برای رسم نمودار، کافی است که نمودار آن را وقتی که $x\geqslant 0$ و $y\geqslant 0$ رسم کنیم. سپس، قرینه آن را نسبت به محورهای مختصات به‌دست آوریم. دقت کنید که درچنین حالتی رابطه به یك تابع تبدیل می‌شود که مفهوم مشتق درمورد آن با معنی است. ابتدا، y' را محاسبه می‌کنیم. با توجه به مشتق توابع مرکب داریم

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{dy}{dx}\times\frac{dx}{d\theta}$$

بنابراین،

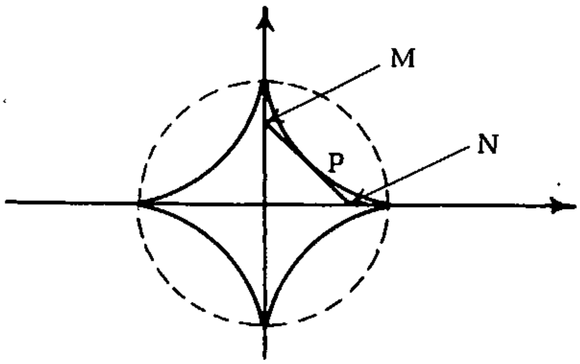
$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta}=-\operatorname{tg}\theta$$

$$y''=\frac{dy'}{dy}=\frac{dy'}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta}=\frac{-(1+\operatorname{tg}^2\theta)}{-3a\cos^2\theta\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{3a\cos^4\theta\sin\theta}$$

ازاینجا نتیجه می‌شود که، با فرض $x>0$ و $y>0$، مشتق اول منفی است، پس تابع نزولی است، و چون $y''\geqslant 0$، بنابراین، تقعرمنحنی به سمت yهای مثبت است. نمودار آن با توجه به جدول تغییرات تابع، مشتق اول و دوم، چنین است. شکل ۹ را ملاحظه کنید.

چون $y'=-\operatorname{tg}\theta$.
بنابراین، نقاط برخورد منحنی با محورهای مختصات نقاط زاویه‌دار یا بازگشتی است.



(شکل ۹).

قسمت (ت) فرض کنید که از نقطه دلخواه p مماس برمنحنی رسم کرده‌ایم. معادله خط مماس از نقطه p بدین‌صورت است:

$$y - a\sin^3\theta = -\mathrm{tg}\theta\,(x - a\cos^3\theta)$$

نقطه برخورد خط مماس با محورهای مختصات را N و M می‌نامیم. اگر $y = 0$،

$$x = a\cos^3\theta + a\sin^2\theta\cos\theta = a\cos\theta$$

واگر $x = 0$ آنگاه

$$y = a\sin^3\theta + a\cos^2\theta\sin\theta = a\sin\theta.$$

بالنتیجه، طول قسمتی‌ازخط مماس‌محدود به‌محورهای‌مختصات؛ یعنی، $\overline{MN}$، برابراست با

$$\overline{MN} = \sqrt{a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta} = a.$$

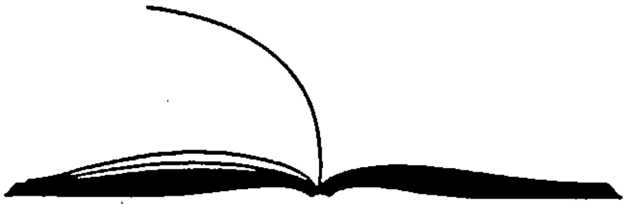
این مسأله بدون فرض (الف) درکتاب جبر سوم آمده است. دراینجا، این سؤال مطرح است که بدون فرض (الف)می‌توان این مسأله را حل کرد؟ جواب مثبت است. زیرا، با مشتق‌گیری ازطرفین رابطه، خواهیم داشت

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y'y^{-\frac{1}{3}} = 0$$

$$y' = -(y^{\frac{1}{3}}/x^{\frac{1}{3}})$$

اگر $P(x_0, y_0)$ یك نقطه دلخواه منحنی باشد، معادله خط مماس چنین است

$$y - y_0 = -(y_0^{\frac{1}{3}}/x_0^{\frac{1}{3}})(x - x_0)$$



که اگر $x = 0$ آنگاه

$$y = y_0 + y_0^{\frac{1}{3}}x_0^{\frac{2}{3}} = y_0^{\frac{1}{3}}(y_0^{\frac{2}{3}} + x_0^{\frac{2}{3}})$$
$$= y_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}$$

بنابراین، $M(0,\ y_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}})$ وبه‌طریق مشابه،

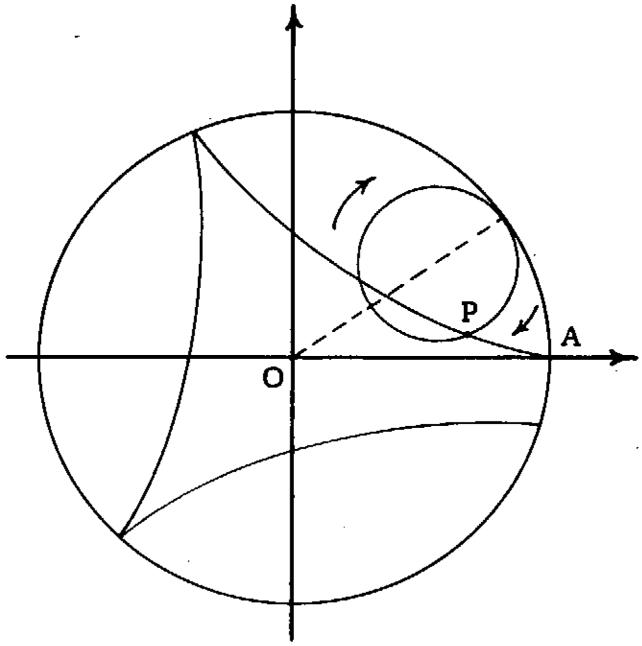
$$N(x_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}, 0)$$

ازاینجا، طول مماس محدود به محورهای مختصات به صورت ذیل محاسبه می‌شود:

$$MN = \sqrt{(x_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}})^2 + (y_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}})^2} = a$$

یکی‌از مشخصات‌معلم علاقمندوموفق این‌است‌که‌اطلاعات‌او بیش از کتابهـای درسی باشد، و دراطراف بعضی از مفاهیم، قضایای ریاضی ومسائل آن بتواند مطالب توصیفی وکلی(بدون بیان دقیق ریاضی) عرضه کند تا حضور ذهنی دانش‌آموز را، در کلاس درس، حفظ نماید. بیان‌مطالب کلـی وتوصیفی در دانش‌آموز ایجاد عـلاقه می‌کند و جاذبه‌هایـی را به وجود می‌آوردکه موجب توجه بیشتر وتقویت علاقه دانش‌آموز به درس می‌گردد. به عنـوان مثال، برای مسألـه فوق می‌توانید مطالب توصیفی به‌صورت ذیل ارائه دهید.

فرض‌کنیدکه دایره ثابتی به‌شعاع a و دایره غلتانی به‌شعاع b داشته باشیم به‌طوری‌که $b < a$ ومبدأ مختصات مرکز دایره ثابت باشد. نقطه ثابتی را مانند p بر روی دایره غلتان درنظرمی‌گیریم. موضع دایره غلتان‌را در وضعیتی قرارمی‌دهیم که نقطه p برروی نقطه $A(a, 0)$ قرارگیرد. نقطه p، وقتی که دایره غلتان حـرکت می‌کنـد، مسیـری را طی می‌کند که «چرخ‌نما» گویند (شکل ۹). اگر دایره غلتـان در داخل‌دایره ثابت بغلتد، مسیر نقطه p را «درون چـرخ‌نما» می‌نامنـد. اگر



(شکل ۱۰)

دایره غلتان برروی دایره ثابت، از بیرون، بغلتد، نقطه P واقع برمحیط دایرهٔ غلتان یك منحنی رسم می‌کند که «برون‌چرخ‌نما» نامیده می‌شود. فرض کنید مسیرحرکت «درون چرخ‌نما» باشد. طول منحنی بین دوگوشه متوالی، در داخل دایره ثابت، برابر $2\pi b$ است. اگر $2\pi a$ مضرب صحیحی از $2\pi b$ باشد، یعنی، عدد طبیعی مانند n موجود است که $a=nb$ مسیر «درون‌چرخ‌نما» دارای n گوشه است و دایره غلتان پس از n بار غلتیدن، نقطه P را برروی نقطه A قرارمی‌دهد. به‌عنوان‌مثال، اگر $a=4b$، معادله مسیر «درون چرخ‌نما» چنین‌است:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

همانطوری که درشکل ۵ ملاحظه می‌کنید، نمودار آن چهارگوشه دارد. به‌عنوان تمرین تحقیق‌کنیدکه: اگر $\frac{a}{b}$ عدد گویای ناصحیح باشدآنگاه پس ازطی‌چند گوشه (یا هلال) نقطه P بر نقطه A منطبق می‌گردد. اگر $\frac{a}{b}$ گنگ باشد، تعداد نامتناهی گوشه برمحیط دایره ثابت ایجاد می‌شود به‌طوری‌که هرقوس دلخواه بردایره ثابت اختیارکنیم، گوشه‌ای درآن قوس‌ایجاد می‌شود. جهت اطلاعات بیشترمی‌توانید به [۲]، صفحه ۵۱۵، مراجعه‌کنید.

زیرنویسها:

1- Hypocyc loid

2- Epicycloid

منابع:

[۱] کتابهای جبر، ریاضیات جدید، وآنالیز دبیرستانی سالهای ۱۳۶۷ تا ۱۳۷۰.

[۲]

George F. Simmons , Calculus With Analytic Geometry. Copyright 1985, by Mc Graw - Hill

[۳]

The American Mathematical Monthly , Volume 98, Number 5, May 1991

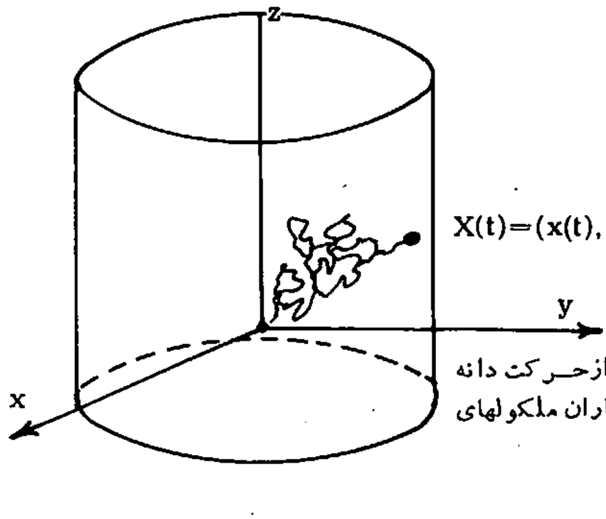
حرکت براونی و پارازیت سفید

دکتر عین‌الله پاشا عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت معلم

آنچه‌که ذیلاً می‌آید نمودی است از حرکت کاروان اندیشه در زمان و مکان. براون درسال ۱۸۱۵ در انگلستان مساله‌ای را طرح می‌کند و درسال ۱۹۰۵ انیشتن آلمانی در آمریکا علت فیزیکی آن را روشن می‌سازد و در ۱۹۲۳ وینر درآمریکا ازلحاظ ریاضی و قوانین احتمال به‌آن پاسخ کامل می‌دهد. با استفاده ازتعبیر «ایتو» از ژاپن کاربردهای فراوانی درتمام رشته‌های علمی بالاخص درفیزیک حاصل می‌شود.

سال ۱۸۱۵ بود که رابرت براون انگلیسی در آزمایشگاه گیاهشناسی خود مشغول مطالعهٔ دانه‌های گردهٔ معلق در یک ظرف آب بود. وی متوجه شد که این دانه‌های گرده درآب حرکت می‌کنند. این حرکت کنجکاوی وی را برانگیخت تاعلت حرکت را بیابد. مساله توسط براون طرح شد ولی گویا هنوز زمان پاسخگویی به‌آن نرسیده بود. این‌مساله‌حدود ۹۰ سال‌بدون پاسخ ماند تا اینکه درسال ۱۹۰۵ علت حرکت‌دانه‌های‌گرده توسط انیشتن‌توضیح داده شد. معلوم گردید که علت حرکت دانه‌ها به‌وسیلهٔ ضربه‌هایی است که توسط ملکولهای آب به آن وارد می‌شود. چون مایع دانه را احاطه کرده است، این ضربه‌ها از جهات مختلف و تقریباً با یك اندازه به‌طورمداوم به دانه وارد می‌شوند و درهر لحظه برایند این ضربه‌ها تغییر مکان کوچکی در دانه ایجاد می‌کند، ازبه‌هم پیوستن این تغییرمکانها حرکت دانه شکل می‌گیرد و در نتیجه، دانه‌ای که در مبدأ زمان‌درمبدأ مختصات قرارداده‌شده‌بودپس ازمدت‌زمان t درنقطهٔ $X(t)$ بامختصات $(x(t), y(t), z(t))$ قرار می‌گیرد. (شکل ۱).

برای درك بهتر این حرکت، بازی با توپ بزرگی مثلاً به‌شعاع یك متر را در نظر بگیرید که عدهٔ کثیری به‌آن ضربه می‌زنند. این‌توپ درمیان‌این جمع‌حرکتی کاملاً شبیه حرکت دانه‌های‌گرده درظرف آب خواهد داشت. ازآنجائی‌که شدت و جهت ضربه‌ها کاملاً تصادفی است، $X(t)$ نیز یك نقطه تصادفی درفضا خواهد بود و از این‌رو مسیر حرکت یك دانهٔ گرده متشکل از نقاطی است که آن را می‌توان به‌صورت مجموعهٔ $\{X(t),\ t \geqslant 0\}$ نشان داد. این مجموعه خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی است. درعلم آمار به‌هرمجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی «فرایند تصادفی»



شکل ۱. یک مسیر نمونه‌ای از حرکت دانه گرده درظرف آب براثر بمباران ملکولهای آب

می‌گویند. این فرایند تصادفی خاص راکه بیان‌کنندهٔ مسیر حرکت دانهٔ گرده است به احترام طراح مسأله، براون، «فرایند حرکت براونی» نامیدند.

روشن شدن علت حرکت، خود یک گام بزرگ درپاسخگوئی به‌سؤال براون بود ولی هنوز ذهن‌های کنجکاو ریاضیدانان را ارضاء نمی‌کرد. ابزارهای زیادی در ریاضی لازم بود تا بتوانند این حرکت‌را کاملاً توضیح دهند. با استفاده از نظریه انتگرال لوبك سرانجام وینر توانست این حرکت را ازنظر ریاضی کاملاً روشن سازد وقوانین احتمالاتی حاکم بر آن را روشن‌کند و تعمیم‌هایی از این حرکت را درفضاهایی با ابعاد بالاتر و پیچیده‌تر به‌دست‌آورد. از این‌رو درمدلهای ریاضی، فرایند حرکت براونی را «فرایند وینر» نیزمی نامند.

به‌طور صوری می‌توان ویژگیهای فرایند حرکت براونی را به صورت زیر بیان‌کرد

(i) $X(0)=0$، زیرا درمبدأ زمان‌از مبدأ مکان شروع‌کرده‌ایم.

(ii) $X(t)-X(s)$، یعنی تغییر مکان در فاصلهٔ زمانی s تا t، دارای توضیح نرمال با میانگین صفر و واریانسهای متناسب با $t-s$ است. نرمال بودن این توضیح‌نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ‌حد مرکزی‌است.

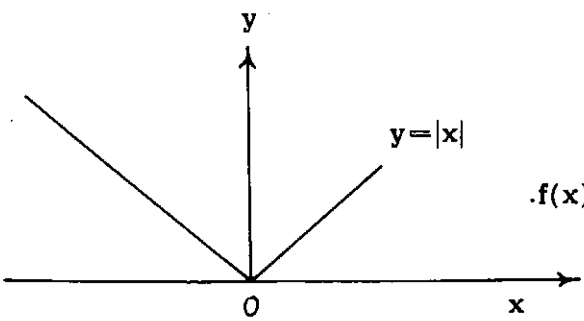
(iii) تغییرمکان در زمانهای جدا از هم، مستقل‌اند، به‌عبارت دیگر اگر $s<t<u<v$ آنگاه $X(v)-X(u)$ و $X(t)-X(s)$ متغییرهای مستقل‌اند.

نکتهٔ جالب دراین فرایند آن است که چون $X(t)$ مسیرحرکت‌را مشخص‌می‌کند، نسبت به t تابعی پیوسته است. البته با توجه به‌سه ویژگی بالا از لحاظ ریاضی ثابت می‌شود‌که درواقع این تابع پیوسته است. برای به‌دست‌آوردن سرعت این حرکت در زمان t بنابر تعریف سرعت لازم است $\frac{dX(t)}{dt}$، مشتق مسیرنسبت به زمان، محاسبه گردد. در رابطه با مشتق فرایند حرکت براونی نسبت به‌زمان ثابت گردید‌که این تابع پیوسته، درهیچ‌نقطه‌ای مشتق ندارد. به‌عبارت دیگر سرعت این حرکت تعریف‌نشده است. در ریاضی‌بنا بر قضیه‌ای هر تابع مشتق‌پذیر پیوسته است،اما عکس این‌قضیه صادق نیست. ومثالی‌که در ردعکس این قضیه در اغلب موارد عنوان می‌شود تابع $f(x)=|x|$ است که در $x=0$ پیوسته است ولی‌مشتق ندارد.علت نداشتن مشتق در $x=0$ آن است، که نمودار‌این تابع در این نقطه گوشه مانند و دندانه‌داراست، شکل ۲.

با استفاده از این ویژگی تابع قدر مطلق، می‌توانیم توابعی‌بسازیم که علیرغم‌پیوستگی درنقاط زیادی مشتق نداشته باشند.کوشش ریاضیدانها برای ساختن تابعی‌که همه جا پیوسته باشد ولی در هیچ جا مشتق نداشته باشد به‌صورت تابع وایراشتراس باضابطهٔ

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos(3^n x)$$

ظاهر گردید. نمونهٔ عملی این قبیل توابع تحقیقهای (Realization) فرایند حرکت براونی است. مشتق نداشتن مسیر حرکت براونی نتیجهٔ قابل‌انتظاری است، زیرا به‌محض‌آنکه، مسیری‌رابرای‌حرکت انتخاب می‌کند براینـد ضربه‌های بعدی مسیر آن را می‌شکنند و درنتیجه مسیر حرکت، یك منحنی دندانه‌ای است. شکل ۳ مسیرحرکت یك فرایند براونی دوبعدی

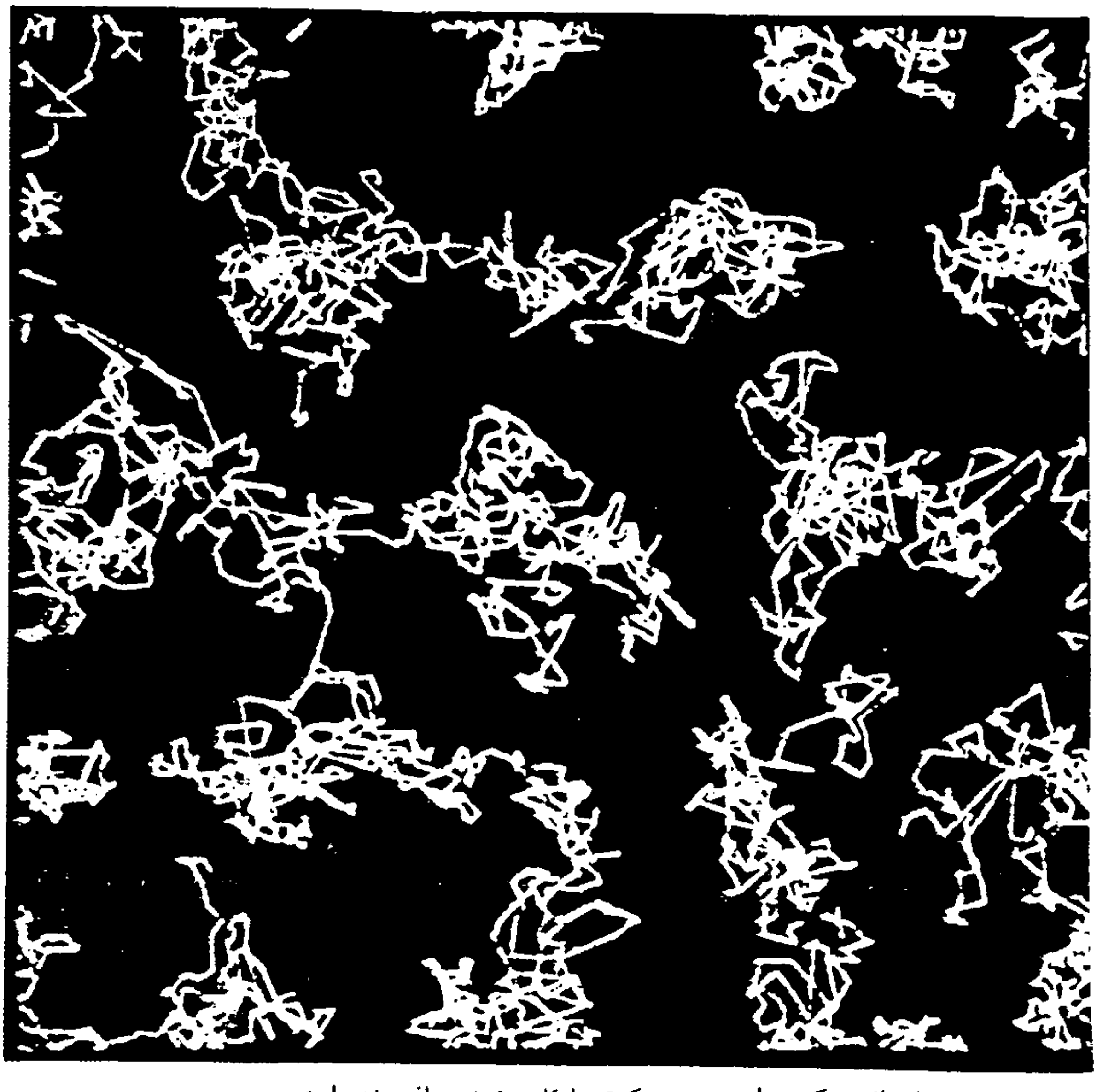


شکل ۲، نمودار تابع $f(x)=|x|$.

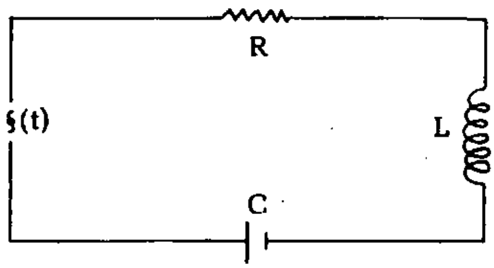
راکه توسط کامپیوتر شبیه‌سازی شده نشان می‌دهد.

* * *

امروزه در بررسی‌های پیشرفته درعلوم کمینها دیگرکمیتهای ثابت کـه ریاضیات معمولی درحلحساب دیفرانسیل و انتگرال بتواند پاسخگـوی آنها باشند نیست. در فرمولهایی ازقبیل $F=m\gamma$، F، m، γ کمیت‌های یقینـی (deterministic) هستندکه با این رابطه بنابرقوانین‌نیوتون به هم پیوند خورده‌اند. لیکن در مطالعات دقیق، حساس و پیشرفته به‌خاطر نوسانهایی که درکمیت‌هاي‌بالا مشاهده‌می‌شود دستور فوق ممکن است برقرار نباشد. به عبارت دیگر آنچه که‌در رابطه $F=m\gamma$ آمده‌است میانگین کمیت‌هایی است که خود متغیرهای تصادفی‌اند. یعنی جرم یك ذره، شتاب و نیروی وارد برآن متغیـرهای تصادفی‌اند که میانگین آنها در رابطه $F=m\gamma$ صدق می‌کند، نه خود آنها. در فیزیك امروزی مسایلی مطرح است که با کمیت‌های یقینی به‌بررسی آنها نمی‌توان پرداخت. مباحثی در مـکانیك‌کوانتم و فیزیك آمـاری از این مقوله‌اند. کمیت‌هـای مورد استفاده دراین زمینـه‌ها اغلـب از نـوع تصادفی (Stochastic) است. درتبین برخی از مسایل فیزیکی معادلات دیفرانسیلی ظاهر می‌شودکـه بنابرقوانین فیزیك لازم است طرف ثانـی آنها مشتق فرایند حرکـت براونی، یعنی‌چیزی‌که اصلاً وجودندارد، باشد. مثلاً درشکل ۴ یك مدار الکتریکی ازمقاومت R، سلف L، خازن C و نیروی



شکل ۳. یك مسیرنمونه‌ای از حرکت براونی دوبعدی‌که توسط کامپیوترشبیه‌سازی شده است.



شکل ۵. یك مدارالکتریکی

محرکهٔ الکتریکی (t) تشکیل‌شده است. فرض‌کنید $Y(t)$ نمایش افت ولتاژ در خازن و در زمان t باشد. بنابرقانون دوم کیرشهوف، $Y(t)$ درمعادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم زیرصدق می‌کند

$$LCY''(t)+RCY'(t)+Y(t)=X'(t).$$

اگر نیروی محرکهٔ الکتریکی هم درمدار نباشد هنوز یك منبع کوچك ولتاژ به نام پارازیت حرارتی وجود خواهد داشت که ناشی ازاغتشاش حرارتی الکترونها در مقاومت است. در این حالت بنابر قوانین فیزیکی می‌توان نشان دادکه این پارازیت حرارتی همان مشتق حرکت براونی است و درنتیجه افت ولتاژ درمعادلهٔ دیفرانسیل زیرصدق می‌کند

$$LCY''(t)+RCY'(t)+X(t)=X'(t)$$

که در آن $X(t)$ فرایند حرکت براونی است.

در اینجا نقش یك ریاضیدان زبده آن است‌که به‌نحوی راه‌حلی برای مسأله بیابد و پژوهشگران را ازبن‌بست برهاند. حل معادلات دیفرانسیل از نوع بالا و در اصل تعبیری برای مشتق حرکت براونی توسط «ایتو» از ژاپن ارائه شد. کارهای ایتو سرآغاز مطالعاتی گردید که آنها را می‌توان تحت عنوان حساب دیفرانسیل تصادفی (Stochastic Calculus) خلاصه کرد. تعبیری که ایتو برای مشتق فرایند حرکت براونی ارائه کرد از نوع توزیعها و تابعهای آزمون در آنالیز تابعی است.

برای مطالعه درفرایندهای (مانا) علاوه برمبنا قراردادن زمان می‌توان از حوزهٔ فرکانس نیز استفاده نمود. به‌عبارت دیگر هرفرایندمانا دارای توزیعی بر «طیف»هاست که مطالعهٔ ریاضی فرایند را آسانتر می‌کند. مشتق حرکت براونی با تعبیری که ایتو ارائه نمود چنان است که توزیع طیفی‌آن یکنواخت پیوسته است. به‌عبارت دیگر تمام طیفها درآن حضور دارند وازاین‌رو شبیه نور سفید است. بنابراین شباهت مشتق فرایند حرکت براونی را «پارازیت سفید» نامیدند.

* * *

امروزه فرایند حرکت براونی و پارازیت سفید در فیزیك مفاهیم آشنا و معمولی‌اند و درسایرعلوم به‌طور جدی زمینهٔ مطالعات وسیع می‌باشند. مسأله انتشار اپیدمی‌ها و برخی مسایل ژنتیك به وسیلهٔ فرایند حرکت براونی و پارازیت سفید قابل‌توضیح‌اند. به سبب کاربردهای فراوان این فرایندها در زمینه‌های‌مختلف، انتظارمی‌رودکه به‌زودی فرایند حرکت براونی وپارازیت سفید به‌نحوی کلاسیك شوند تا بتوان هرچه زودتر محصلین کلیهٔ رشته‌ها را باآنها آشنا نمود.

منابع:

۱ــ وینر، نوربرت، من ریاضیدانم، ترجمه شهریاری، پرویز. انتشارات فاطمی-۱۳۶۸
۲ــ هوئل، پورت، استون. آشنایی با فرایندهای تصادفی، ترجمه افقهی، محمدحسین. مرکزنشر دانشگاهی ۱۳۶۷

3. S. Karlin, M. Taylor; A First Course in Stochastic Processes A. P. 1975

4. K. Ito, H. P. Mckean, Jr, Diffusion Process and Their Sample Paths. Springer-Verlag 1974

تداخل حساب با هندسه (۲)

دکتر آدینه محمد نارنجانی
گروه ریاضی ـ دانشکده‌ی علوم دانشگاه فردوسی «مشهد»

در شماره‌ی قبلی این مقاله دیدیم که اگرخطوطی موازی لبه‌های کاغذ با فواصل مساوی روی یک صفحه رسم کنیم، مجموعه‌ی این خطوط صفحه تشکیل یک مشبکه را می‌دهند. مسائل مطرح‌شده دراین‌مورد از دونوعند، اول اینکه داخل یک ناحیه‌ی D چند نقطه ازنقاط مشبکه قراردارند و دوم اینکه اگر n عددی طبیعی باشد آیا دایره‌ای وجودداردکه درون آن درست n نقطه از نقاط مشبکه قرارداشته باشد. درقسمت قبل به‌این دوسؤال پاسخ دادیم، اینک بحث خودرا در این زمینه‌ها ادامه می‌دهیم:

۶) دربخش ۵ دیدیم که اگر نقاط مشبکه $Q_1, \dots, Q_n, \dots$ به‌ترتیب صعودی فاصله‌هایشان از نقطه‌ی ثابت P (مثلا $P(\sqrt{2}, \frac{1}{3})$) مرتب‌شده باشند دایره‌ی به‌مرکز P وشعاع R_n، $PQ_n < R_n < PQ_{n+1}$ درست دارای n نقطه درداخل‌خود است واگر نقاط روی دایره را هم به‌حساب آوریم R_n را می‌توان دقیقاً برابر PQ_n گرفت.

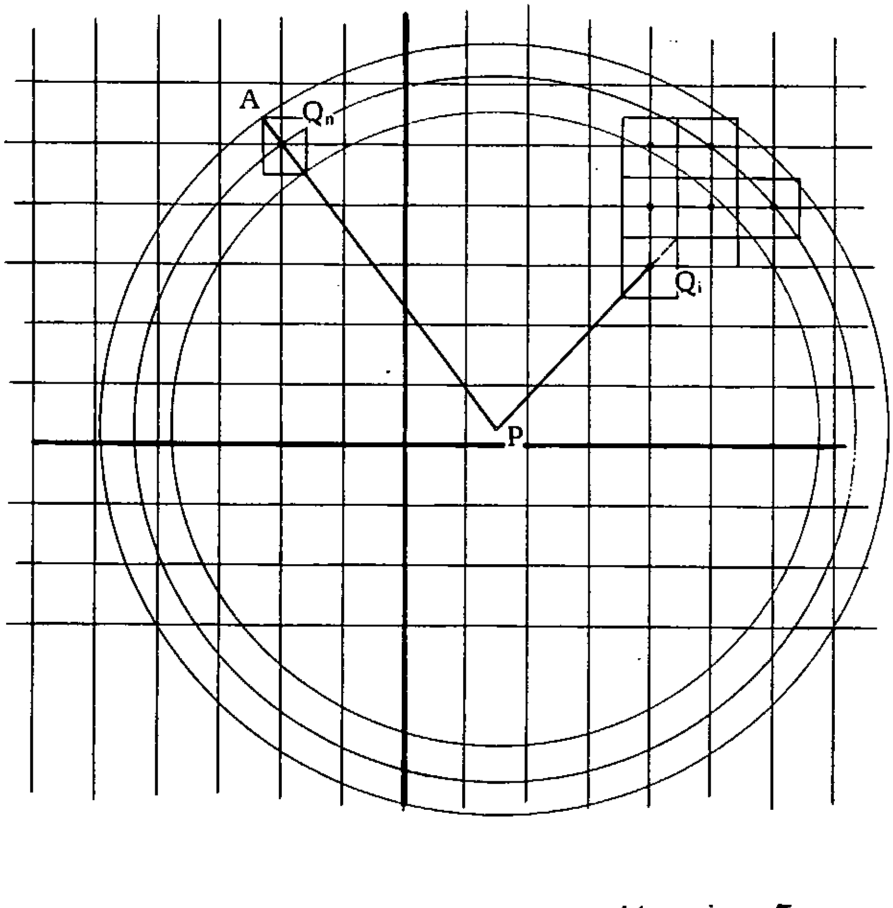
ظاهراً روشی برای محاسبه R_n در دست نیست ولی می‌توان آن را محدودکرد.

فرض‌کنیم Q_i یکی‌از نقاط مشبکه باشد(شکل۷). می‌توان مربعی به‌مرکز Q_i و به‌ضلع یک و اضلاع موازی باخطوط مشبکه رسم‌کرد. داریم

$$PQ_i \leqslant PQ_n = R_n$$

بنابراین نصف قطر مربع $+PQ_i = PQ_i + \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant R_n + \frac{\sqrt{2}}{2} = PA$، پس تمام این مربع‌ها درون دایره‌ای به‌مرکز P وشعاع $R_n + \frac{\sqrt{2}}{2}$ قرار دارند.

مساحت هرمربع برابرواحد است، درنتیجه مساحت کل این مربعها برابر است با تعداد نقاط مشبکه درون و روی دایره



شکل ۷

یعنی n وچون تماماً درون دایره به‌شعاع $R_n+\frac{\sqrt{2}}{2}$ قرار دارند داریم

مساحت دایره $=\pi(R_n+\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \geqslant n=$ مجمـوع مساحات مربعها.

درنتیجه،

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\geqslant R_n$$

به‌طریق مشابه اگر $R_n\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ دایره‌ی به شعاع $R_n-\frac{\sqrt{2}}{2}$ وبه‌مرکز P دقیقاً داخل مربعها قرار میگیرد. بنابراین

مجموع مساحات مربعها $=n\geqslant\pi(R_n-\frac{\sqrt{2}}{2})^2$

وازآنجا،

$$R_n-\sqrt{\frac{2}{2}}\leqslant\sqrt{\frac{n}{\pi}}$$

وبنابراین

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant R_n\leqslant\sqrt{\frac{n}{\pi}}+\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (۶.۱)$$

نامساویهای (۶.۱) دارای دو نتیجه‌ی جالب است. نتیجه‌ی اول اینکه

$$\left|R_n\sqrt{\frac{\pi}{n}}-1\right|<\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

واگر n بانـدازه‌ی کافی بزرگ باشد داریـم $R_n\sqrt{\frac{\pi}{n}}\sim 1$ به‌عبارت دقیق ریاضی

$$\lim_{n\to\infty} R_n\sqrt{\frac{\pi}{n}}=1 \qquad (۶.۲)$$

یعنی به‌ازای nهای بزرگ شعاع دایره‌ای که شامل n نقطه از مشبکه‌است (بامرکز $(\sqrt{2},\frac{1}{3})$) در حدود $\sqrt{\frac{n}{\pi}}$ میباشد.

نتیجه‌ی دوم اینست که اگرما باشعاع نسبتاً بزرگ دایره‌ای رسم کنیم (این شعاع را R_n مینامیم) وسپس نقاط مشبکه داخل و روی دایره را بشماریم وآن را n بنامیم آنگاه بنابر (۶.۱)

$$\frac{n}{\left(R_n+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\leqslant\pi\leqslant\frac{n}{\left(R_n-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

که می‌تواند تقریب خوبی برای عدد π به‌دست دهد؛ به‌شرطی که نحوۀ انتخاب R_nها مشخص شود.

دربخش بعد مسئله‌ای را که با معادلات نظریـه اعـداد بستگی بیشتری دارد عنوان می‌کنیم.

۷) مطلوبست محاسبه‌ی شعاع دایره‌ای به‌مرکز یکی از نقاط مشبکه به‌قسمی که روی دایره‌حداقل یکی‌ازنقاط مشبکه‌قرار داشته باشد.

جهت جوابگویی به‌این‌مسئله میتوان مرکزدایره را مبدأ گرفت. بنابراین اگرشعاع دایره R باشد منظوریافتن R است به‌قسمی که معادله‌ی‌سیاله‌ی $x^2+y^2=R^2$ برای x و y دارای جوابی صحیح باشد. چون x و y صحیح‌اند (مختصات نقاطی ازمشبکه که روی‌محیط دایره قرار دارند.) پس $R^2=n$ عددی طبیعی است، بنابراین $x^2+y^2=n=R^2$ ضمناً $R=\sqrt{n}$ در نتیجه $\sqrt{n}$هایی برای R جوابندکه بتوان n را به‌صورت مجموع دومربع نوشت، که بنابرقضیه‌ی ۵ صفحه‌ی ۲۱۰ ازمأخذ ۲ یاقضیه‌ی صفحه‌ی ۱۶۳۸ ازمأخذ ۱، صورت کلی این nها چنین است.

$n=m^2k$ که $k\in n$ و $m\in k$ و k خالی‌ازمربع‌است و عامل اولی به‌صورت $4k+3$ ندارد.

به‌عنوان مثال اگر $R\leqslant 5$ آنگاه $n\leqslant 25$ و

$$R=\sqrt{n}=1,\ \sqrt{2},\ 2,\ \sqrt{5},\ 2\sqrt{2},\ 3,\ \sqrt{10},\ \sqrt{13},\ 4,\ \sqrt{17},\ 3\sqrt{2},\ 2\sqrt{5},\ 5$$

درواقع اگر بخواهیم بدانیم‌که به‌ازای Rای مفروض به صورت‌فوق دایره ازچند نقطه‌ی‌مشبکه می‌گذرد لازم است‌تعداد جوابهای معادله‌ی $x^2+y^2=R^2=n$ را تعیین کنیم، برای این‌منظور می‌توانید به‌صفحه‌ی ۱۶۳۹ مأخذ ۱ یاصفحه‌ی ۲۱۱ مأخذ ۲ رجوع کنید.

کسانیکه خـواستار اطلاعـات بیشتر دراین زمینه‌انـد می‌توانند به ۳ رجوع کنند.

مراجع:

۱. غلامحسین مصاحب، تئوری مقدماتی اعداد جلد دوم، انتشارات سروش ۱۳۵۸

۲. آشنایی بانظریه‌ی اعداد نوشته‌ی ویلیام و آدامزولری جوئل گولدشتین ترجمه‌ی آدینه محمد نارنجانی از انتشارات مرکز نشردانشگاهی ۱۳۶۲.

[3]. W. Sierpinski , A selection of problems in theTheory of Numbers, Pergamon Press,1964

خاصیت انعکاسی در مقاطع مخروطی

محمود نصیری

خاصیت انعکاسی درمقاطع مخروطی یکی ازمهمترین خواص آنها می باشد، این خواص در آئینه‌ها، چراغهای جلوی اتومبیلها، نورافکن‌ها، چراغهـای الکتریکـی و غیره مورداستفاده قرار می گیرند.

چون این خواص درهندسه سال چهارم ریاضی نیز بررسی می‌شوند، لذا، دراین مقاله سعی شده است که اثباتهای مختلف دیگری که کاربرد این خـاصیت را بهتر روشن می‌سازد بیان شود.

روش اول: با استفاده ازمساله هرون

۱. خاصیت انعکاسی در بیضی

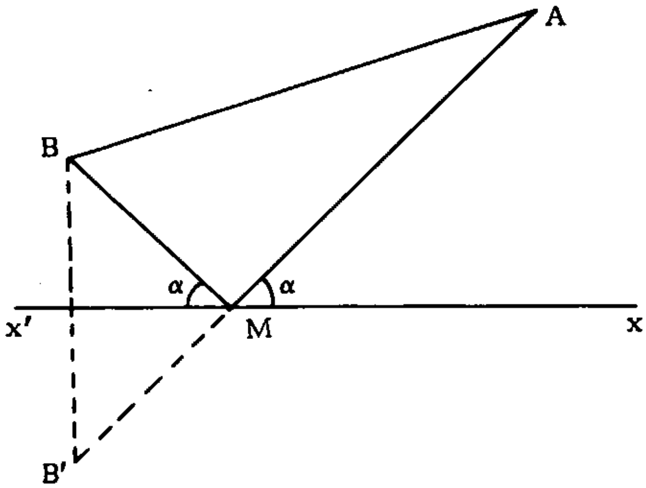
یادآوری‌ـ مسأله هرون ـ دونقطه A و B وخط $x'x$ درصفحه مفروض‌اند، روی خط $x'x$ نقطه M را چنان بیابید که

$$MA+MB$$

مینیمم باشد.

واضح است که اگر B و A دوطرف خط $x'x$ باشند، یا حداقل یکی ازآنها روی‌خط $x'x$ باشد، کافی است A را به B وصل‌کنیم هرجا خط $x'x$ را قطع‌کند، نقطه M است.

اگر B و A دریك طرف خط $x'x$ باشند، یکی از دونقطه را به‌قرینه نقطه دیگر نسبت به‌خط $x'x$ وصل می‌کنیـم هرجا خط $x'x$ را قطـع کند نقطه M است، یعنی $MA+MB$ مینیمم است. چرا؟



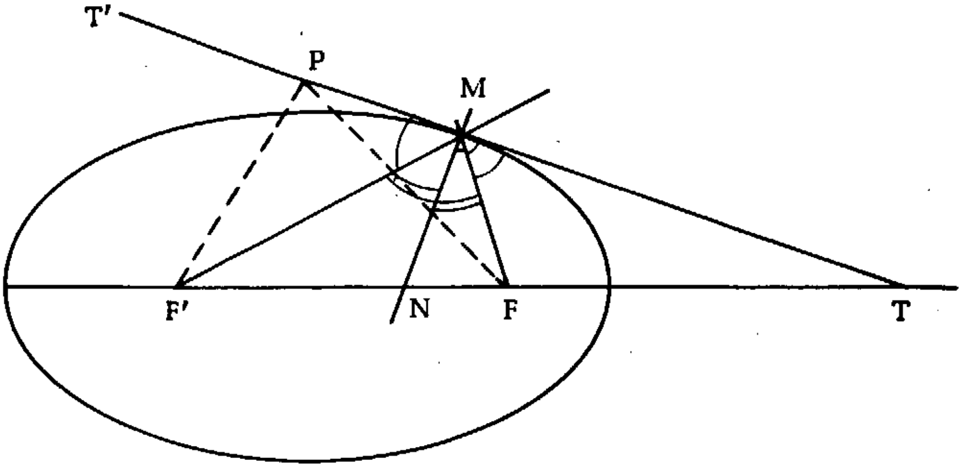
(شکل ۱)

نتیجه: $B\hat{M}x' = A\hat{M}x$ چرا؟

اگر روی خط $x'x$، آئینه مسطحی‌عمود برصفحهٔ BMB' در نظر بگیریم، برای ناظری‌که درنقطه A تصویر شیء B را در آئینه مشاهده می‌کند نورمسیر AMB راکه کوتاه‌ترین است طی می‌کند، و زاویه تابش نور با زاویه انعکاس برابر است. (هردوشعاع دریك محیط یکسان می‌باشند).

اکنون با توجه به‌مقدمه فوق خاصیت انعکاسی را دربیضی بیان می‌کنیم.

قضیه‌ـ خطهای مماس وقائم درهرنقطه از بیضی نیمسازهای زاویه‌های بین شعاعهای حامل آن نقطه می‌باشند.

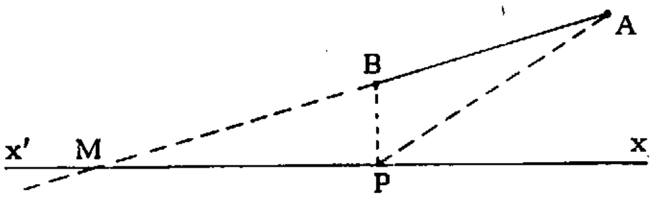


(شکل ۲)

هرگاه P نقطه دلخواهی روی خط مماس باشد، چون همواره P خارج یا روی بیضی است لذا $PF+PF' \geqslant 2a$ پس $PF+PF'$ وقتی مینیمم است که P روی بیضی باشد، لذا بنا به مساله هرون $\widehat{T'MF'}=\widehat{FMT}$ و $\widehat{F'MN}=\widehat{NMF}$. بنابراین اگر یك شعاع نوری ازیك کانون بیضی به نقطه M روی بیضی بتابد و منعکس شود، شعاع انعکاس ازکانون دیگر بیضی می‌گذرد. این خاصیت را خاصیت انعکاسی در بیضی می‌نامند.

۲. خاصیت انعکاسی در هذلولی

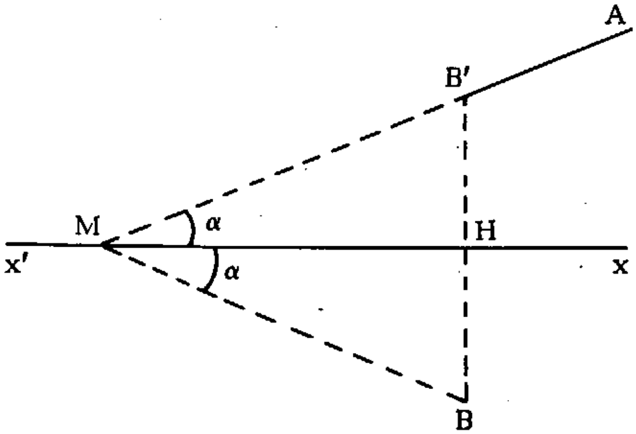
یادآوری ـ دونقطه A و B وخط $x'x$ مفروض‌اند. روی خط $x'x$ نقطه M را چنان بیابید که $|MA-MB|$ ماکسیمم باشد.



(شکل ۳)

فرض کنیم A و B در یك طرف خط $x'x$ باشند و AB موازی $x'x$ نباشد، اگر P نقطه دلخواهی روی $x'x$ باشد، مشخص است که همواره، $|PA-PB| \leqslant AB$. لذا $|PA-PB|$ وقتی ماکسیمم است که نقطه P محل تلاقی امتداد AB با $x'x$ باشد.

حال اگر A و B در دوطرف $x'x$ باشند، قرینه یکی از نقاط را نسبت به $x'x$ پیدا می‌کنیم، نقطه M درمحل تلاقی $x'x$ با خطی که یکی ازنقاط را به‌قرینه دیگری نسبت به $x'x$ وصل می‌کند قرار دارد.



(شکل ۴)

نتیجه: دو زاویه AMx و BMx مساوی‌اند چرا؟

اکنون با استفاده ازمسألهٔ فوق خاصیت انعکاسی درهذلولی را ثابت می‌کنیم.

قضیه ـ خطوط مماس وقائم درهر نقطه ازهذلولی زاویه‌های بین شعاعهای حامل آن نقطه را نصف می‌کنند.

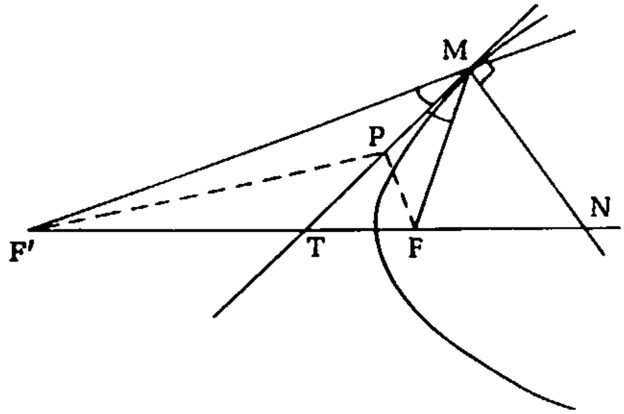
اثبات ـ اگر P نقطه دلخواهی روی خط مماس باشد چون P همواره خارج یا روی هذلولی است، لذا

$$|PF'-PF| \leqslant 2a$$

بنابراین هرگاه P روی هذلولی واقع شود، $|PF'-PF|$ ماکسیمم است. درنتیجه با توجه به‌یادآوری فوق

$$\widehat{F'MT}=\widehat{TMF}$$

ومماس MT نیمساز زاویه $F'MF$ است.



(شکل ۵)

نتیجه ۱. قرینه هر کانون هذلولی نسبت به هر خط مماس بر آن، بر دایره هادی نظیر کانون دیگر واقع است. چرا؟

نتیجه ۲. تصویر هر کانون هذلولی بر هر خط مماس بر آن، بر دایره اصلی واقع است. چرا؟

روش دوم: با استفاده از روش کپلر

در سال ۱۶۰۹ «کپلر» کشف کرد که سیارات منظومه شمسی روی یك مدار بیضی‌شکل حرکت می‌کنند، که خورشید در یك کانون آن قرار دارد.

هفتاد سال بعد نیوتن ثابت کرد کـه این مدارهای بیضوی در تئوری از قانون عکس مجذور فاصله پیروی می‌کنند و این اثبات سرانجام در سال ۱۶۸۷ در کتاب اصول وی منتشر گردید.

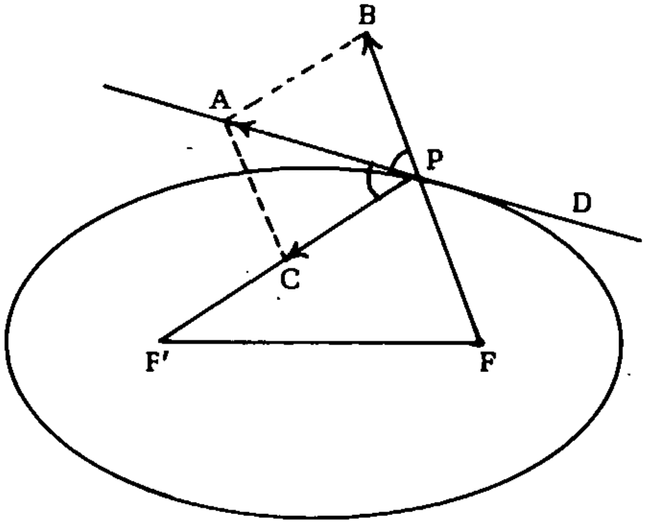
روشی را که اکنون برای اثبات خاصیت انعکاسی در مقاطع مخروطی به‌کارمی‌بریم بر این نکته استوار است که هرگاه یك متحرك بر روی یك منحنی صاف (منحنی که در هر نقطه مشتق‌پذیر است) حرکت‌کند، آنگاه راستای سرعت در هر نقطه آن همان راستای خط مماس بر منحنی در آن نقطه است.

این روش را درمورد بیضی و سهمی بیان کرده و درمورد هذلولی به‌خواننده واگذارمی‌کنیم.

هرگاه نقطه P روی بیضی در یك جهت معین حرکت‌کند، راستای خط مماس درنقطه P همان راستای سرعت در نقطه P است.

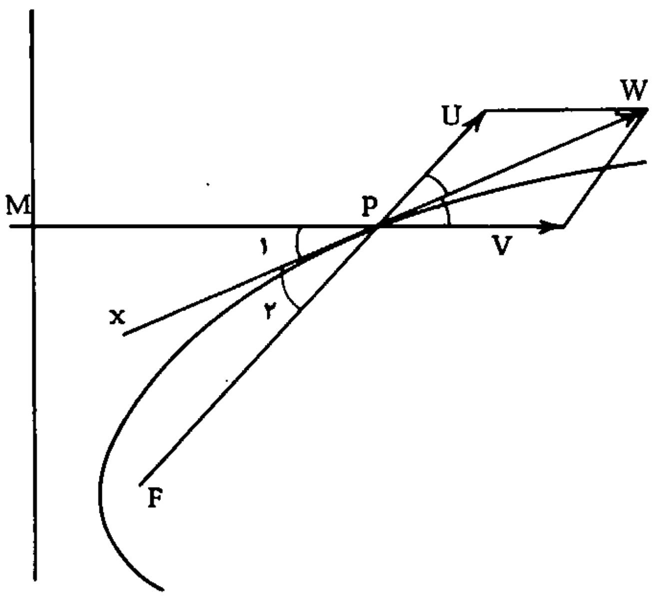
چون همواره $PF+PF'$ ثابت می‌ماند، لذا مقدارافزایش PF برابرمقدارکاهش PF' است، بنابراین بردارسرعت نقطه P در راستاهای FP و PF' دارای مولفه‌های برداری با طول برابر است. درنتیجه متوازی‌الاضلاع سرعتها به‌لوزی تبدیل می‌شود.

در لوزی PBAC، مماس APD نیمساز زاویه BPC است.



(شکل ۶)

روش فوق را برای سهمی نیزمی‌توان به‌سادگی به‌کاربرد.



(شکل ۷)

هرگاه نقطه P روی سهمی حرکت‌کند، آنگاه راستای خط مماس درنقطه P همان راستای سرعت درنقطه P است. چون همواره MP با FP برابراست، لذا نقطه P با همان سرعتی که ازکانون دورمی‌شود ازخط هادی نیز با همان سرعت دور

می‌شود. بنابر اینکه سرعت نقطه P جمع برداری مولفه‌های برداری با طول برابر در راستاهای FP و MP است، متوازی‌الاضلاع سرعتها به لوزی تبدیل می‌شود و لذا مماس xPW نیمساز زاویه UPV است.

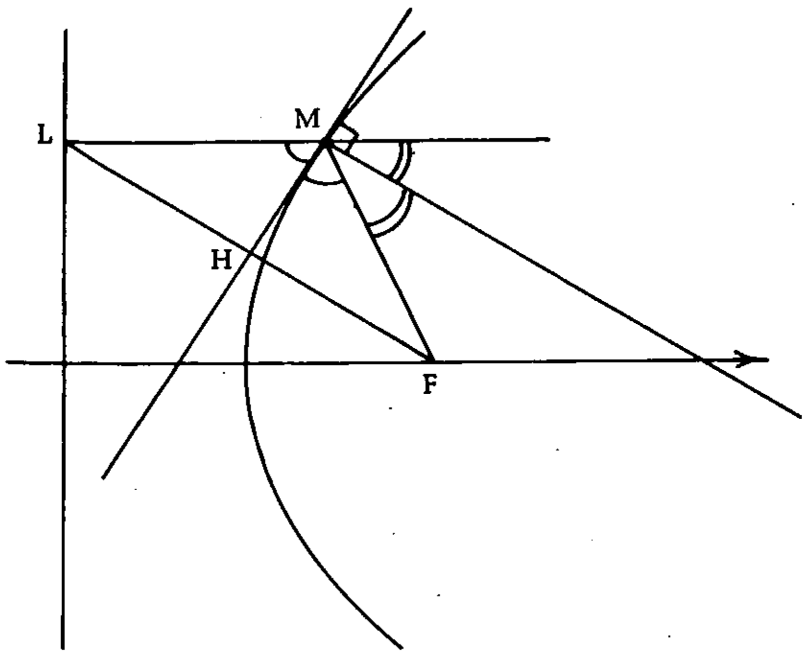
بنابراین قضیه زیر را درمورد سهمی داریم:

قضیه- خطهای مماس وقائم برسهمی نیمسازهای زاویه‌هائی هستندکه بین شعاع حامل نقطه تماس وخط عمودی که ازآن نقطه برخط هادی رسم شود، پدید می‌آیند.

این‌خاصیت را خاصیت انعکاسی درسهمی می‌نامیم، بنابراین اگریك شعاع نورازکانون یك سهمی به‌نقطه M روی سهمی بتابد ومنعکس شود، شعاع انعکاس موازی محورسهمی است، وبرعکس.

نتیجه ۱. قرینه‌کانون سهمی نسبت به‌هرخط مماس برآن‌روی خط هادی‌آن سهمی واقع است. چرا؟

نتیجه ۲. تصویرکانون سهمی نسبت به‌هرخط مماس برآن‌روی مماس در رأس سهمی واقع است. چرا؟



(شکل ۸)

خاصیت انعکاسی درسهمی‌را به‌روش‌دیگری نیزمی‌توان‌اثبات کرد، که‌آن را ذیلاً بیان می‌کنیم.

اثبات. فرض کنیم معادله سهمی $y^2 = 2Px$ است. در این صورت معادله خط هادی $x = -\frac{P}{2}$ و $F\left(\frac{P}{2}, 0\right)$ است.لذا اگر $M(x_0, y_0)$ را روی سهمی فرض کنیم، ضریب زاویه FL برابر $m' = -\frac{y_0}{P}$ وضریب زاویه خط مماس در نقطه M، $m = \frac{P}{y_0}$ است.

لذا، $mm' = -1$. بنابراین $MH \perp FL$ و MH نیمساز زاویه FML است.

روش‌سوم:روش‌ارشمیدس برای‌خاصیت انعکاسی دربیضی وهذلولی

برای یك بیضی‌مجموع فواصل‌هرنقطه از دوکانون مقداری ثابت است، وبرای هذلولی قدرمطلق تفاضل فواصل ثابت است.

این تعریف‌ها به‌ما اجازه می‌دهندکه روشی‌کوتاه و واضح برای رسم مماس براین منحنی‌ها، با توجه به‌خاصیت انعکاسی برای بیضی وهذلولی داشته باشیم.

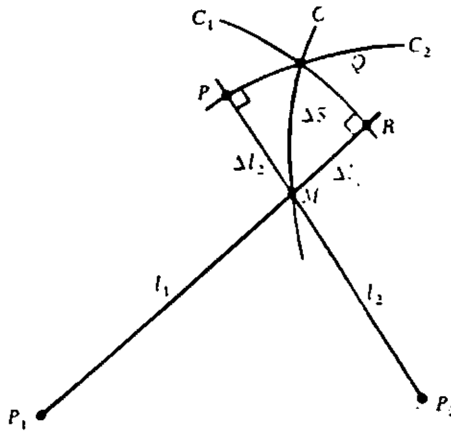
باوسیله مکانیکی‌که درشکل (۱) نشان داده شده‌استشروع می‌کنیم.

دو میله صلب می‌توانند آزادانه گرد دو نقطه اتکای P_1 و P_2

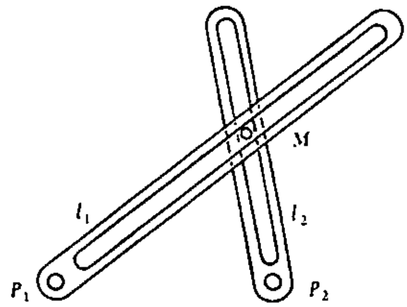
بچرخند.
آنها دارای یك شیارمی‌باشند بطوری‌کـه نقطه M می‌توانند به‌هر طریقی که حرکت‌کند، اثرخارجی‌آن یك منحنی C باشد.
تغییر مکان ΔS درطول منحنی درشکل (۲) نشان داده شده است، علاوه بر آن دو دایره C_1 و C_2 به‌شعاعهای

$$l_1+\Delta l_1 \text{ ، و } l_2+\Delta l_2$$

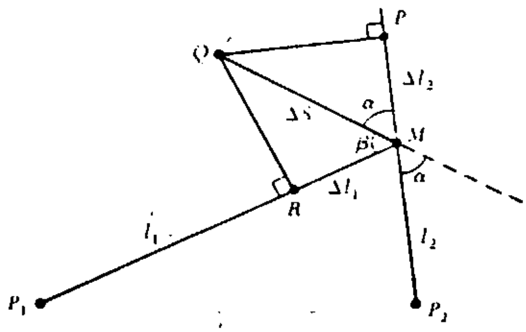
ثابت می‌باشند.
وقتی‌که ΔS به‌صفرمیل‌می‌کند، پاره‌خط MQ به خط مماس برمنحنی درنقطه M میل می‌کند، وقوسهای PQ و RQ به‌خط راست میل می‌کنند.



(شکل ۱۰)



(شکل ۹)



(شکل ۱۱)

اگر M روی بیضـی حرکت کنـد l_1+l_2 ثابت است، لذا،
$\Delta l_1 = -\Delta l_2$
وقتی ΔS به صفرمیل می‌کنـد، PQM و RQM به مثلثهای قائم‌الزاویه میل می‌کنندکه قاعده MQ درآنها مشترك است.
این دومثلث مساوی ولذا $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$ (شکل ۱۱).
این مطلب را می‌توان به‌همین طریق درمورد هذلولی نیز بیان‌کرد، با این تفاوت‌که در هذلولی $|l_1-l_2|$ ثابت‌است، بنابراین، $\Delta l_1 = \Delta l_2$
بدیهی‌است‌که ارشمیدس (۲۸۷–۲۱۲ قبل‌ازمیلاد)می‌توانست با مماس کارکند. مثالی ازآن مارپیچ ارشمیدس است.
همچنین واضح است‌که اوهمواره مایل بودکه از ایده‌های مکانیکی برای جهت دادن به‌استناجهای ریاضی استفاده‌کند.
این‌که آیا او مسأله انعکاس مربوط به بیضی را حل‌کرد مورد سؤال است. اما به‌نظر می‌رسدکه حل ارائه شده در اینجا در ذهن وی بوده است.

مراجع:

1. MATHEMATICS MAGAZINE Vol . 64 No. 4 October 1991.

2. T. Y. Heard, D. R. Martin EXTENDING MATHEMATICS Volum 2. Oxford University Press.

شگفتیهای اعداد

فرستنده: علی فرامرزی پلنگر دانش‌آموزسال چهارم
ریاضی-فیزیك (مینودشت)

درشمارهٔ ۲۹ مجله رشدآموزش ریاضی، صفحهٔ ۳۱، مجموعه

$\{۴, ۱۶, ۳۷, ۵۸, ۸۹, ۱۴۵, ۴۲, ۲۰\}$

با این خاصیت‌که «مجموع مربعات ارقام هرعدد مساوی عدد بعدی‌است» ارائه‌شده‌است (مثلاً، $۴۲ = ۵^۲ + ۴^۲ + ۱^۲$، البته درمورد ۲۰ به عدد چهارکه ابتدای مجموعه است می‌رسیم.) درآنجا سؤال شده بودکه آیا مجمــوعه‌های دیگری، و برای توانهای دیگری ازارقام، وجود دارد. برای مجموعه

$A_۳ = \{۱۳۳, ۵۵, ۲۵۰\}$

داریم:

$۱^۳+۳^۳+۳^۳=۵۵,\ ۵^۳+۵^۳=۲۵۰,\ ۲^۳+۵^۳+۰^۳=۱۳۳$

و برای مجموعه

$A_۴ = \{۱۳۱۳۹, ۶۷۲۵, ۴۳۳۸, ۴۵۱۴, ۱۱۳۸, ۴۱۷۹, ۹۲۱۹\}$

داریم:

$$۱^۴+۳^۴+۱^۴+۳^۴+۹^۴=۶۷۲۵,$$
$$۶^۴+۷^۴+۲^۴+۵^۴=۴۳۳۸$$
$$۴^۴+۳^۴+۳^۴+۸^۴=۴۵۱۴,$$
$$۴^۴+۵^۴+۱^۴+۴^۴=۱۱۳۸$$
$$۱^۴+۱^۴+۳^۴+۸^۴=۴۱۷۹,$$
$$۴^۴+۱^۴+۷^۴+۹^۴=۹۲۱۹$$
$$۹^۴+۲^۴+۱^۴+۹^۴=۱۳۱۳۹$$

خاصیت بـالا برای توان ۵ ارقام اعداد مجموعه زیر برقرار است (امتحان کنید).

$$A_۵ = \{۲۴۵۸۴, ۳۷۹۷۳, ۹۳۱۴۹, ۱۱۹۳۶۶, ۷۴۸۴۶, ۵۹۳۹۹, ۱۸۰۵۱۵, ۳۹۰۲۰, ۵۹۳۲۴, ۲۶۰۹۳, ۶۷۱۰۰\}$$

مثلاً،

$$۷^۵+۴^۵+۸^۵+۴^۵+۶^۵=۵۹۳۹۹$$

برای اعضای مجموعه زیر نیز **مجموع توانهای ششم ارقام مساوی عددی بعدی است.** (امتحان کنید).

$$A_۶ = \{۵۷۸۱۶۴, ۴۴۶۱۷۱, ۱۷۲۴۹۹, ۱۱۸۴۶۹۲, ۸۴۴۰۳, ۲۷۵۱۶۱, ۱۷۵۸۶۲۹, ۹۷۳۵۸۰, ۹۲۷۵۸۸, ۱۱۸۹۰۶۷, ۹۵۷۸۹۲, ۱۴۵۸۳۶۴, ۳۳۳۳۴۷, ۱۲۴۶۶۱, ۹۷۴۷۴, ۷۷۴۹۳۱, ۷۷۱۵۶۵, ۳۱۳۲۰۵, ۱۷۱۴۸, ۳۸۳۹۹۱, ۱۰۵۷۱۸۸, ۶۵۷۵۶۴, ۲۴۶۳۰۷, ۱۶۱۹۹۴, ۱۱۱۳۶۳۶, ۹۴۷۷۳, ۷۷۱۵۶۴, ۳۰۱۶۷۶, ۲۱۱۶۹۱\}$$

برای‌توانهای ۷ ارقام نیزمجموعه‌ای وجود داردکه اولین‌عضو آن ۱۵۰۹۷۸۶۱ وآخرین‌عضو آن ۱۶۴۹۴۰۳ می‌باشد(امتحان کنید).

بحثی در تعمیم قضیهٔ آخر فرما

مؤلف: ج. ام. گاندی
ترجمه: علی‌محمد کارپرور

۱ـ مقدمه. به‌موجب قضیه آخر فرما معادلهٔ

$$x^n+y^n=z^n \quad (n>2) \qquad (1.1)$$

جواب صحیح ندارد. هدف مقالهٔ حاضر، تعمیم حدس فرما و مطالعهٔ معادلاتی به شکل $x^n\pm y^n=pz^n$ می‌باشد که $1\leqslant p\leqslant n$. براساس تعداد زیادی ازنتایج حاصل از تئوری ومقدماتی از اطلاعات محاسباتی، دوحدس ذیل مطرح‌شده‌اند:

حدس ۱ : معادلهٔ $x^n+y^n=pz^n$ جواب صحیح‌ندارد.

حدس ۲ : احتمالاً معادلهٔ $x^n-y^n=pz^n$ جواب صحیح ندارد.

در اینجا x، y و z اعداد صحیح ناصفر متمایز دوبه‌دو متباین‌اند، $n>2$ و p یک‌عدد صحیح مثبت می‌باشد. به‌طوری که $p\leqslant n$. بدیهی است که حدسهای ۱و۲، قضیه آخرفرما را به‌عنوان یک حالت خاص، وقتی‌که $p=1$، شامل می‌شوندونیز حدسهای فوق درحالتی‌که n فردباشد، اگر یکی جواب داشته باشد دیگری هم دارد وبالعکس. نتایج ذیل که از منابع مقاله مأخوذ است حدسهای فوق را تضمین می‌کنند. ای. مایلت[1] بااستفاده از روش کومر[2] ثابت کرد که معادله $x^a+y^a=az^a$ $(a>2)$ در حالاتی‌که a بر ۴ بخش‌پذیر باشد، یا a عدد زوجی باشد که بریک عدد اول به‌صورت $4n+3$ بخش‌پذیر است، یا $2<a\leqslant 100$، $a\neq 37,59,67,74$، ویااینکه a عامل اولی بزرگتر از ۱۷ نداشته باشد، جواب صحیح مخالف صفر ندارد. او همچنین امتناع معادلهٔ $x^n+y^n=nz^n$ را که درحالت خاصی از حدس ۱، بازاء $p=n$، است حدس زده‌است. برای اثبات حدس مایلت در حالات دیگر به [۱۶] و [۸] مراجعه‌کنید. دراین‌مقاله اثبات حدس مایلت رابازاء همهٔ توانهای به‌صورت $n^c(n-1)$، که n یک عدد اول‌فرد و $c\geqslant 0$ است‌می‌آوریم. (قضیهٔ ۲).امتناع معادلات $x^n\pm y^n=2z^n$ $(n>2)$ که حالات خاصی از حدسهای بالااست، به‌نظر درست می‌آید، چون بافرض امتناع این معادلات، اثبات‌قضیهٔ آخرفرما (FLT) برای‌تمام‌توانهای زوج نتیجه‌خواهدشد([۱۱] و [۱۴] را ببینید). نشان‌خواهیم دادکه حدسهای ۱و۲ برای $n=3$ و $n=4$ درست هستند درحالی‌که برای $n=5$ و $n=6$ و $n=7$ ثابت شده‌است که این حدسها به‌جز درحالات ذیل، درست‌هستند.

حدس۱: برای $n=5$ و $p=2$؛ $n=7$ و $p=2$.

حدس۲: برای $n=5$ و $p=2$؛ $n=6$ و $p=6$؛ $n=7$ و $p=2$.

لژاندر[3] ثابت کرد که $x^3+y^3=2z^3$ که([۱۲] و [۳]) نتیجه می‌دهد $x=\pm y$، بنابراین اگر x,y,z اعداد صحیح متمایز دوبه‌دو متباین باشند، آنگاه این معادله ممتنع است. همچنین ثابت شده است که معادلهٔ $x^3+y^3=3z^3$ جواب صحیح ندارد ([۲۲]) وبه‌موجب آن حدسهای ۱و۲ برای $n=3$ درست‌اند.

به‌وسیلهٔ آر. دی. کارمایکل[4] ثابت شده است که معادلات

$x^4 \pm y^4 = 4z^4$ ممتنع‌اند ([۱] و [۳])، درعین‌حال ژوپیس[۵] ثابت کرد که معادلات $x^4 \pm y^4 = 2z^2$ غیرممکن‌اند ([۱۹] و [۳]). نظر به‌اینکه معادلهٔ $x^2+y^2=mz^2$ می‌تواند دارای جواب باشد فقط اگر m مجموع دومربع کامل باشد ([۳])، معادلهٔ $x^4+y^4=3z^4$ ممتنع‌است. دراین‌مقاله امتناع معادله $x^4-y^4=3z^4$ ثابت شده‌است؛ که حدسهای ۱ و ۲ را برای $n=4$ ثابت می‌کند.

با ترکیب نتایج جی. ال. دیریکله[۶] ([۴] و [۳]) و ج. جی. واندر کرپات[۷] ([۲۳] و [۳]) درستی این حدسها برای $n=5$، به‌جز درحالت $p=2$ را می‌توان تحقیق کرد.

چون معادلات $x^3 \pm y^3 = pz^3$ غیرممکن‌اند $(p \leqslant 3)$، می‌توان نتیجه‌گرفت که معادلات $x^6 \pm y^6 = pz^6$ نیز برای $p \leqslant 3$ غیرممکن‌اند.

ای. سویفت[۸] ([۲۰] و [۳]) ثابت کرد عبارات $x^6 \pm y^6$ مربع کامل نیستند و بنابراین، معادلات $x^6 \pm y^6 = 4z^6$ ممتنع‌اند.

ج. جی. کرپت ([۲۴] و [۳]) ثابت کرد که اگر p یک‌عدد اول باشد به‌طوری که $p \equiv 2 \pmod 9$ یا $p \equiv 5 \pmod 9$ معادلات $x^3 \pm y^3 = pz^3$ ممتنع‌اند که در نتیجه معادلات $x^6 \pm y^6 = 5z^6$ ممتنع خواهند بود.

ای. مایلت [۱۷] ثابت کرد که معادلهٔ $x^a+y^a=az^a$ جواب صحیح ندارد به‌شرط آنکه a یک عدد زوج و بخش‌پذیر بر یک عدد اول به‌شکل $4n+3$ باشد، این نتیجه می‌دهد که معادله $x^6+y^6=6z^6$ غیرممکن است، (و یا با توجه به قضیهٔ ۲ که متعاقباً آورده می‌شود) و به‌سبب آن حدس ۱ برای $n=6$ نیز آزمایش می‌شود، درحالی‌که برای حدس ۲، تنهامعادله‌ای که امتناع آن باید ثابت شود، $x^6-y^6=6z^6$ است.

ای. مایلت ثابت کرد ([۱۶] و [۳]) که معادلهٔ $x^7+y^7=cz^7$ وقتی که c به‌شکل $49k \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \ldots$ باشد، جواب صحیح ندارد، در نتیجه معادلهٔ فوق برای $c=\pm 1, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$ غیرممکن‌است. درهمانجا او امتناع معادله $x^7+y^7=7z^7$ را در تأیید حدسهای ۱ و ۲ برای $n=7$ ثابت می‌کند، بنابراین تنهامعادلاتی که امتناع آنها برای اعداد صحیح دو به دو متباین باید ثابت شود $x^7 \pm y^7 = 2z^7$ می‌باشند. درمتن آن مقاله حالات خاص زیر از حدسهای ۱ و ۲ ثابت شده‌اند:

قضیهٔ ۱. معادلهٔ $px^R+y^R=z^R$ جواب صحیح ندارد، وقتی که

الف) $P=R=n$؛

ب) $P \equiv 0, 1$ یا $-1 \pmod{n^{c+1}}$ و $c \geqslant 0$ و $R=kn^c(n-1)$ بشرط آنکه n یک عدد اول فرد و با x متباین باشد.

قضیهٔ ۲. اگر $n^c(n-1)$ یک عامل $2m$ باشد $(c \geqslant 0)$، و n یک عدد اول فرد، آنگاه معادلهٔ $x^{2m}+y^{2m}=pz^{2m}$ باشرط $p \equiv 1$ یا $2 \pmod{n^{c+1}}$ جواب صحیح ندارد.

قضیهٔ ۳. اگر n یک عدداول فرد بزرگتر از ۵ و z نسبت به n اول باشد و $p \equiv 0, 1, -1, 2$ یا $-2 \pmod n$ و k عددی‌فرد، آنگاه معادلهٔ $x^{\frac{k(n-1)}{2}}+y^{\frac{k(n-1)}{2}}=pz^{\frac{k(n-1)}{2}}$ جواب صحیح ندارد.

روشن‌است‌که قضیهٔ ۱ حدس ۲ را برای برخی از توانها، وقتی‌که x و n متباین باشند ثابت می‌کند، درصورتی‌که قضیهٔ ۳ حدسهای ۱ و ۲ را برای تعداد وسیعی از توانهای زوج و فرد، با قید متباین‌بودن z, n ثابت می‌کند. قضیهٔ ۲ درستی حدس ۱ را برای همهٔ توانهای به‌شکل $n^c(n-1)$، که n یک عدداول فرداست ثابت‌می‌کند (به‌جز وقتی‌که $p=1$ و ۲)؛ جالب‌است که اینها، بترتیب، قضیهٔ فرما ونتیجهٔ آن می‌باشند. بااستفاده از قضیهٔ ۲ می‌توان برهان حدس ۱ را برای تعداد وسیعی از توانهای زوج به‌غیراز $n^c(n-1)$ که n یک عدد اول فرد است، بیان‌کرد. برای مثال، ثابت شده‌است‌که حدس ۱ برای مقادیر $n=8, 20, 24, 32, 44, 48, 56, 64, 80, 84$ و غیره درست است. مؤلف همهٔ جوابهای

$$x^n+y^n=pz^n<10^7 \qquad (n>2) \tag{2.1}$$

ونیز همهٔ جوابهای

$$pz^n+y^n=x^n<10^7 \qquad (n>2) \tag{3.1}$$

را فهرست کرده است.

برای $n=3$، جوابهای (۲.۱) و (۳.۱) بسیار زیادند ودر اینجا نمی‌توانند آورده شوند. برای $n=4$، کانینگهام[۹] ([۲] و [۳]) همهٔ‌معادلات‌حل‌پذیر $a^4+b^4=mc^2<10^7$ و $1+y^4=mc^2$ $(y<1000)$ و ای. لوکاس[۱۰] ([۱۵] و [۳]) همهٔ معادلات حل‌پذیر به شکل $ax^4+by^4=cz^2$ که درآن ۲ و ۳ تنها اعداد اولی هستندکه a، b یا c را عاد می‌کند را فهرست کرده‌است.

برای $n>4$، تنهاجوابها برای معادلات (۲.۱) و (۳.۱) در حوزه مشخص شده چنین‌اند:

$$7^5+25^5=11 \cdot 27791 \cdot 2^5,$$

$$13^5+19^5=881 \cdot 101 \cdot 2^5,$$

$$11^5+21^5=132661 \cdot 2^5$$

بدین ترتیب درمی‌یابیم که اطلاعات به‌دست آمدهٔ موجود نیز حدسهای فوق را تأیید می‌کنند. اکنون توجه خواننده را به این مطلب جلب می‌کنیم که، با استفاده از قضیه ۲ می‌توان نشان داد که

$$x^n+y^n=(n+1)z^n \qquad (4.1)$$

برای تعداد زیادی از nهای زوج جواب صحیح ندارد. همه این مقادیر ($n<1000$) در آن مقاله فهرست شده‌اند. با استفاده از همان قضیه نشان داده‌می‌شود که

$$x^n+y^n=(n+2)z^n \qquad (5.1)$$

برای تعداد زیادی از nهای زوج جواب صحیح ندارد. برای مقادیر زوج n که $n<2000$، ثابت شده است که معادلهٔ (۵.۱) ممتنع است مگر زمانی که:

$n=284$، 1244، 1604، 1784 یا 1844.

احتمالاً معادلات (۴.۱) و (۵.۱) نیز ممتنع هستند؛ اگر چنین باشد، شرط $p\leqslant n$ برای حدس ۱ را می‌توان به‌شرط $p\leqslant n+2$ توسعه داد. چون $17^3+37^3=6\cdot21^3$ و $71^3+(-17)^3=7\cdot88^3$ و $3^4-1^4=5\cdot2^4$ شرط $p\leqslant n+2$ برای حدس ۱ و $p\leqslant n$ برای حدس ۲ نمی‌توانند بیشتر توسعه پیدا کنند.

۲ـ در این بخش، بیشتر در خصوص معادلاتی به شکل $x^n\pm y^n=pz^n$ بحث خواهیم کرد. اثبات این‌که اگر بپذیریم که p با z,y,x تغییر می‌کند، آنگاه معادلهٔ

$$pz^n=x^n-y^n \qquad (1.2)$$

بینهایت جواب دارد، کاملا بدیهی است. معادلهٔ

$$x^n+y^n=pz^n \qquad (2.2)$$

نیز بینهایت جواب دارد، وقتی‌که

۱) n فرد باشد ۲) n به‌شکل $2(2k+1)$ باشد.

برای اثبات حکمهای فوق باید عبارات $x^n\pm y^n$ را تجزیه کرد از عاملها را مساوی با z^n گرفت، بنابراین معادلهٔ حاصل را به‌سادگی می‌توان حل کرد و عامل دیگر را p می‌گیریم.

مثال: $44^6+117^6=164634913\cdot5^6$

نشان خواهیم داد که برای n مفروض، بینهایت مقدار p وجود دارد به‌طوری‌که برای آنها معادلات (۱.۲) و (۲.۲) قابل حل‌اند. آنگاه طبیعی است که این سئوال را مطرح کنیم: عدد n مفروض است، کوچکترین مقدار p چقدر است به‌طوری که معادلات فوق جوابهای نابدیهی داشته باشند؟ (جواب نابدیهی به‌این معنی است که $z>1$ و هیچ کدام از اعداد صحیح y,x صفر نباشند و اینکه هیچ دوتا از آنها مساوی نباشند)

برای $n=2$ و p مفروض. (۲.۲) یا بینهایت جوابهای متباین دارد و یا اصلاً جواب ندارد و این به‌مقدار p بستگی دارد. برای $n=3$ ممکن است که برای p مفروض هم (۱.۲) وهم (۲.۲) تعدادی متناهی جوابهای متباین داشته‌باشند. بنابراین برای $n>3$، کوچکترین مقدار p که برای آن جواب نابدیهی موجود باشد، احتمالاً بطور گسترده با n تغییر می‌کند. براساس نتایج حاصل از تئوری را اطلاعات محاسباتی چندی، کاملا بدیهی است که به‌حدسهای فوق برسیم.

۳ـ در این بخش ثابت خواهد شد که معادلهٔ

$$3x^4+y^4=z^4 \qquad (1.3)$$

جواب صحیح ندارد. دراینجا y,x هردو نمی‌توانند فرد باشند، زیرا در آن‌صورت y^4,x^4 هر کدام به‌شکل $8m+1$ خواهندشد و بنابراین $3x^4+y^4$ به‌شکل $8k+4$ درخواهد آمد که هرگز توان چهارم یک عدد زوج نخواهد بود. بنابراین فرض‌کنیم x فرد و y زوج باشد، آنگاه z فرد است و در این صورت $3x^4+y^4$ به‌شکل $8s+3$ درخواهد آمد که توان چهارم هیچ عدد فردی نخواهد بود و بنابراین x نمی‌تواند فرد باشد.

اکنون فرض می‌کنیم x زوج و y فرد باشد که در این‌صورت z فرد است. معادلهٔ (۱.۳) را به‌صورت

$$3x^4=z^4-y^4 \qquad (2.3)$$

می‌نویسیم. فرض کنید $z=p+q$ و $y=p-q$، q,p با متفاوت و نیز متباین هستند؛ چراکه y,z متباین و فرد هستند. از آنجا به‌دست می‌آید:

$$3x^4=8pq(p^2+q^2) \qquad (3.3)$$

چون q,p متباین‌اند، بنابراین q،p و p^2+q^2 نیز متباین‌اند. p را زوج q را فرد می‌گیریم (مهم نیست اگر q را زوج و p را فرد بگیریم)، p^2+q^2 نیز فرد است. ابتدا فرض می‌کنیم $p=0 \pmod 3$ یا $p=3A$، بنابراین خواهیم داشت:

$$x^4=(8A)q(9A^2+q^2) \qquad (4.3)$$

چون همهٔ عوامل سمت راست (۴.۳) متباین هستند، هر کدام باید توان چهارم کامل باشند، در نتیجه:

$$\text{a) } 8A=M^4 \quad \text{b) } q=L^4 \quad \text{e) } 9A^2+q^2=D^4 \qquad (5.3)$$

از (b۵.۳) و (c۵.۳) داریم:

$$9A^2+L=D^4 \quad \text{یا} \quad D^4-L=(3A)^2$$

ولی $x^4-y^4=z^2$ غیرممکن است ([۳]) و نتیجتاً $p\equiv 0 \pmod 3$. به طریق مشابه ثابت می‌شود که $q\equiv 0 \pmod 3$. پس‌داریم: $p^2+q^2\equiv 0 \pmod 3$ که از (۳.۳) به‌دست می‌آید:

$$x^4=(8p)q\left(\frac{p^2+q^2}{3}\right) \qquad (۶.۳)$$

چون کلیهٔ عوامل واقع در سمت راست (۶.۳) متباین‌اند، هرکدام باید توان چهارم کامل‌باشند. بنابراین

$$a)\ 8p=B^4\ ,\ b)\ q=V^4\ ,\ c)\frac{p^2+q^2}{3}=t^4 \qquad (۷.۳)$$

اما (c۷.۳) غیرممکن است ([۳]) ودرنتیجه

$$p^2+q^2\equiv 0 \pmod 3$$

که خلاف فرض

$$p^2+q^2\equiv 0 \pmod 3$$

است. بنابراین (۳.۳) یا (۱.۳) ممتنع است.

۴ـ دراین‌بخش قضایای ۱،۲،۳ ثابت خواهند شد.
قضیهٔ (a۱) به‌وسیلهٔ ج. وست‌لند[11] ثابت شده‌است ([۲۱] و [۳]).

برهان (b۱). اگر $R=kn^c(n-1)$، n فرد و $c\geqslant 0$ آنگاه

$$px^{kn^c(n-1)}=z^{kn^c(n-1)}-y^{kn^c(n-1)}\ ; \qquad (۱.۴)$$

فرض می‌شود که x نسبت‌به n اول باشد. مطابق تعمیم قضیهٔ فرما، اگر a نسبت به n اول باشد و n یك‌عدد اول فرد، آنگاه

$$a^{kn^c(n-1)}\equiv 1 \pmod{n^{c+1}} \qquad (۲.۴)$$

فرض‌کنیم که y,z هردو نسبت به n اول باشند. آنگاه بنابر (۲.۴) از (۱.۴) خواهیم داشت: $p\equiv 0 \pmod{n^{c+1}}$ ولی این‌حالت قبلا درقضیه کنارگذاشته شده است، بنابراین y,z توأماً نمی‌توانند نسبت به n اول باشند. همچنین چون p,x هرکدام نسبت به n متباین‌اند، پس y,z بر n بخش‌پذیر نیستند. بنابراین بسته‌به‌اینکه z یا y بر n بخش‌پذیر باشند؛ از (۱.۴) خواهیم داشت: $p\equiv -1$ یا $1 \pmod{n^{c+1}}$؛ چون این‌حالتها هردو کنار گذاشته شده‌اند، پس قضیه برقرار است.

$$x^{kn^c(n-1)}+y^{kn^c(n-1)}=pz^{kn^c(n-1)} \qquad (۳.۴)$$

برهان قضیه ۲. فرض‌کنید
به‌طوری‌که n یك عدد اول فرد است و $c\geqslant 0$. ابتدا p را نسبت به n اول می‌گیریم، x،y،z را نیز نسبت به n اول فرض کنیم، آنگاه بااستفاده از (۲.۴) و (۳.۴) خواهیم داشت: $p\equiv 2 \pmod{n^{c+1}}$، اما این همنهشتی کنارگذاشته شده‌است. اکنون حالتی‌که x,y نسبت به n اول باشند و z مضرب n است رادرنظرمی‌گیریم، از (۲.۴) و (۳.۴)داریم: $2\equiv 0 \pmod{n^{c+1}}$ که باتوجه به $n>2$ غیرممکن است.
حال x یا y بر n بخش‌پذیر است، از (۳.۴) به‌دست‌می‌آید $p\equiv 1 \pmod{n^{c+1}}$ یا $1\equiv 0 \pmod{n^{c+1}}$، بسته‌به‌اینکه z بر n بخش‌پذیر یانسبت‌به‌آن اول باشد. همنهشتی دوم در قضیه کنارگذاشته‌شده‌است‌وهمنهشتی‌اول برای $n>1$ غیرممکن‌است.
سرانجام فرض می‌کنیم که x,y هردو بر n بخش‌پذیر باشند. فرض‌کنید $x=n^m t$ و $y=n^s u$ بافرض‌اینکه $m\geqslant s$ و t,u نسبت به n اول باشد. آنگاه (۳.۴) نتیجه‌می‌دهد:

$$n^{(m-s)kn^c(n-1)}t^{kn^c(n-1)}+u^{kn^c(n-1)}=p\left(\frac{z}{n^s}\right)^{kn^c(n-1)} \qquad (۴.۴)$$

چون t,u نسبت به n اولند، ازتقسیم‌کردن طرفین (۴.۴) بر n^{c+1} بدست می‌آید

$$1 \text{ یا } 2\equiv p\left(\frac{z}{n^s}\right)^{kn^c(n-1)} \pmod{n^{c+1}} \qquad (۵.۴)$$

بسته به اینکه $m>s$ یا $m=s$. از آنجائیکه $p\equiv 1$ یا $2 \pmod{n^{c+1}}$، (۵.۴) هرگز برقرارنخواهدبود. بافرض‌اینکه p بر n بخش‌پذیر باشد وباانجام عملیاتی مانند حالات قبل می‌توان نشان دادکه (۳.۴) منجر به همنهشتی‌هایی غیرممکن می‌شود و بنابرقضیهٔ مذکور برقرار است. بااستفاده از همنهشتی‌معروف $a^{\frac{n-1}{2}}\equiv \pm 1 \pmod n$ که در آن a نسبت به n اول و n یك عدد اول فرد است وعلامت، مثبت یا منفی است بسته‌به اینکه $k^2\equiv a \pmod n$ جواب صحیح داشته‌باشد یا خیر، می‌توان قضیهٔ ۳ را به‌آسانی ثابت‌کرد.
همان‌طورکه قبلا بیان شد، قضیه ۲ حدس ۱ را برای همهٔ توانهای به‌شکل $n^c(n-1)$ $(c\geqslant 0)$ که n یك عدد اول‌فرد است ثابت می‌کند به‌غیراز مقادیر $p=1,2$، ولی اینها قضیه

آخرفرما و نتیجهٔ آن می‌باشند. بااستفاده از قضیه ۲، حدس ۱ می‌تواند برای تعداد وسیعی از توانهای زوج بجز $n^c(n-1)$ محقق باشد (که n و c قبلا معرفی شوند). باید بخاطر داشته باشیم‌که دربحثهای ذیل حالات ۲ و ۱ = p راکنار بگذاریم، بجز وقتی که حدس ۱ برای این حالات نیز درست باشند. برای مثال به‌معادلهٔ زیر توجه‌کنید:

$$x^{24}+y^{24}=pz^{24} \qquad (6.4)$$

چون ۱۲ یك عامل ۲۴ ، همچنین ۱۳ یك عدد اول است، معادلهٔ بالا برای مقادیر p غیر ممکن است غیر از آنکه $p\equiv 1$ یا $2 \pmod{13}$ که این‌مقادیر p که برای‌آنها $p\leqslant 24$ است عبارتند از: p = ۱و۲و۱۴و۱۵. همچنین، از آنجا که ۴ عامل ۲۴ است و ۵ یك عدد اول، معادله فوق برای کلیهٔ مقادیر p بجز وقتی‌که $p\equiv 1$ یا $2 \pmod 5$ غیرممکن است چون چنین حالتهائی برای p = ۱۴و۱۵ حذف‌شده‌اند. بنا براین (۵.۴) برای $p\leqslant 24$ جواب صحیح ندارد بجز هنگامیکه p = ۱ یا ۲ باتوجه به اینکه حدس ۱ برای توان ۴ درست و (۶.۴) نیز برای p = ۱,۲ ممتنع است، ما درستی حدس ۱ را برای توان ۲۴ ثابت کرده‌ایم. ضمناً (۶.۴) برای تمام‌مقادیر p که $p\equiv 1$ یا $2 \pmod 3$ و $p\equiv 1$ یا $2 \pmod 7$ غیر ممکن است. می‌دانیم که $3(3-1)$، عاملی از ۲۴ است پس (۶.۴) برای تمام مقادیر p کـه $p\equiv 1$ یا $2 \pmod{3^2}$ غیر ممکن است. بااستفاده از این‌روش، حدس ۱ (با انضمام مقادیر p = ۱,۲) برای توانهای ۸, ۲۰, ۲۴, ۳۴, ۴۴, ۴۸, ۵۶, ۶۴, ۸۰, ۹۰, ۹۲, ... درست‌می‌باشد. بااستفاده‌از روش‌فوق نشان می‌شود که معادلهٔ

$$x^n+y^n=(n+1)z^n \qquad (7.4)$$

برای تعداد زیادی از مقادیر زوج n دارای جواب صحیح نیست. برای مقادیر زوج $n\leqslant 1000$، معادلهٔ (۷.۴) غیر‌ممکن‌است مگر برای این مقادیر از n:

n = ۳۴, ۹۴, ۱۱۸, ۱۴۲, ۲۰۲, ۲۲۶, ۲۶۲, ۲۷۴, ۴۳۴, ۳۷۸, ۳۹۴, ۴۳۶, ۴۵۶, ۵۱۴, ۵۲۶, ۵۳۸, ۵۸۲, ۶۲۲, ۶۳۴, ۶۹۴, ۷۰۶, ۷۶۶, ۷۷۸, ۸۰۲, ۹۲۲, ۹۳۴, ۹۵۸, ۹۸۲, ۹۹۴.

بااستفاده ازاین نتیجه‌که معادلهٔ

$$X^{4n}+y^{4n}=4pz^{4n} \qquad (8.4)$$

باشرط $p\leqslant n+1$ جواب صحیح ندارد (اثبات آن درجای دیگری بررسی می‌شود) وقضیهٔ ۲، معلوم می‌شودکه معادلهٔ

$$x^n+y^n=(n+2)z^n \qquad (9.4)$$

برای‌تعدادوسیعی از nهای زوج جواب صحیح ندارد. برای مقادیر زوج $n<2000$، (۹.۴) غیرممکن است مگر برای مقادیر n = ۲۸۴, ۱۲۴۴, ۱۶۰۴, ۱۷۸۴ یا ۱۸۴۴. احتمالاً معادلات (۸.۴) و (۹.۴) نیز غیرممکن‌اند. گذشته ازآن، ما دراینجا یك کاربرد جالب قضیهٔ ۳ را می‌آوریم. برمبنای این قضیه، شرط‌لازم برای‌جواب‌داشتن معادله $x^{68}+y^{68}=pz^{68}$ برای مقادیر $p\leqslant 68$ (مقادیر p = ۱,۲ نیزمشمول این‌شرط هستند؛ چون حدس ۱ برای توان ۴ صحیح است، پس برای این‌مقادیر p، معادلهٔ فوق، غیرممکن است)، این‌است‌که z بر ۱۳۷ بخشپذیر باشد. بنابراین

$x^{68}+y^{68}=pz^{68}<137^{28}\approx 10^{146}$، برای $p\leqslant 68$ جواب صحیح ندارد. برای توانهای دیگر نیز می‌توان محدودیتهای مشابهی بدست‌آورد.

سرانجام ما نتایج زیر را برای قضایای اخیر بیان می‌کنیم. اثبات این نتایج مانند اثبات قضایای قبل دریك حد باشند و دراینجا حذف می‌شوند. به‌معادلهٔ

$$z^{2m}-y^{2m}=px^{2m} \qquad (10.4)$$

توجه‌کنیدکه درآن x، y و z نسبت‌به‌هم اولند و $n^c(n-1)$ عاملی از $2m$ است و n عدد اول فرد است.

نتیجهٔ ۱. اگر $p\equiv 0 \pmod{n^{c+1}}$ آنگاه y,z باید نسبت به n متباین باشند.

نتیجهٔ ۲. اگر x بر n بخش‌پذیر باشد، آنگاه‌برای‌هر y,z,p باید با n متباین باشند.

نتیجهٔ ۳. اگر x نسبت به n اول باشد، آنگاه از y,z، یکی بر n بخشپذیر و دیگری بـا n متبایـن است بسته به‌اینکه $p\equiv -1 \pmod{n^{c+1}}$ یـا $p\equiv 1 \pmod{n^{c+1}}$. حال به‌معادلهٔ

$$x^{2m}+y^{2m}=pz^{2m} \qquad (11.4)$$

توجه‌کنیدکه z,y,x نسبت به‌هم اول باشند.

نتیجهٔ ۴. شرط لازم برای جواب‌داشتن (۱۱.۴) چنین است: $p\equiv 0 \pmod 3$ و $p\equiv 0 \pmod 4$. شرط دوم از ایـن لحاظ برقرار است‌که مجموع دومربع کامل فرد بر ۴ بخشپذیر نیست. حال فـرض کنید $n^c(n-1)$ یك عامـل $2m$ بـاشد به‌طوری‌که n یك عدد اول فرد است،

نتیجهٔ ۵. اگر $p\equiv ۲ (\mathrm{mod}\, n^{e+1})$، آنگاه x, y, z هریك باید نسبت به n اول باشند.

نتیجهٔ ۶. اگر $p\equiv ۱ (\mathrm{mod}\, n^{e+1})$، آنگاه z باید نسبت به n اول باشد و x یا y یکی بر n بخش‌پذیر بوده و دیگری نسبت به n اول باشد.

این نتیجه، ایجاب می‌کند که قضیه آخر فرما (FLT) برای توان $۲m$ درست است، جایی که $n^e(n-۱)$ یك عامل $۲m$ باشد و x, y, z همه نسبت به n اولند.

مرجع مترجم:

The American Mathematical Monthly, Vol. 71, No.2, November 1964.

اسامی به‌کار برده شده در متن

1. E. Maillet
2. Kummer
3. Legendre
4. R.D Camichael
5. Schopis
6. G.L. Dirichlet
7. Van der Corput
8. E. Swift
9. Cunnigham
10. E. Lucas
11. J. Westland

مراجع مؤلف:

1. R.D. Carmichael, Diophantine Analysis, Mathematical Monographs, No. 16,New York, (1915) 77-79.

2. A. Cunningham, L'inter médiaire des math., 18(1911)45-46.

3. L.E. Dickson, History of the Theory of Numbers, Vol.2,Chelsea, New York,1952.

4. G.L. Dirichlet, Werke I,21-46.J.Reine Angew. Math.,3(1828)354,375.

5. A. Desboves, Nouv. Ann. Math.(2), 18 (1879) 400,491;(3),5(1886)577.

6.——, ibid.(2),18(1879)408 and 481-489.

7. Fermat, Oeuvres, I, 291; French transl.III,241-Diophanti Alexandrini Arith., Libri sex. Ed. by S. Fermat, Tolosae (1670)61. (Ref. 3,P.731)

8. T. Hayashi,J. Indian Math. Soc.,3(1911) 16-22; III-III

9. E.E Kummer,S.-B. Deutsch. Akad. Wiss.Berlin,(1847)132-139,(Ref.3,P.741) & Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, (Math.) for 1857,1858,41,74 (Ref 3,P.744).

10.——, Letter to L. Kronecker, Jan. 274,1852 (Ref .3,P.742)

11.——, J. Reine Angew.Math.,17(1837)203-209.

12. A.M. Legendre, Théorie. des Nombres,Paris, (1798)409.

13. D. N. Lehmer, Factor Table for the First Ten Millions, Carnegie Inst. Wash., Puble. No. 105, 1909.

14. J. Liouville , J. Math . Pures Appl ., 5(1840) 360.

15. E. Lucas, Recherches Sur L'analyse indéterminée, Moulins, 1873; extract from Bull. Soc - d'Emulation du département de l'Allier, 12 (1873)441-532.

16. E. Maillet, Comptes Rendus , Ac. Sci - de pan's, 129 (1899) 198-199, Proofs in Acta Math., 24(1901) 247-256.

17.——, Ann, Mat. Pura Appl.,(3).12(1906)145-178.

18. L. J. Mordell, Three lectures on FLT, Chelsea, New York, 1955.

19. Schopis, Einige Satze aus der unbestimmten Analytik, Progr-Gumbinen, 1825 (Ref. 3,P.618)

20. E. Swift , AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY, 21(1914)238,239; 23(1961)261.

21. J. Westlund, ibid., 16(1909)3-4.

22. J. V. Uspensky and M. A. Heaslet , Elementary Number Theory, Mc Grow Hill, New York, 1939.

23. J. G. vander Corput , Nieuw Arch-Wisk., 11 (1915)68-75.

24.——, ibid.,(2)11(1915)64-68.

25. H. S. van diver, Trans-Amer. Math. Soc. 31 (1929)613-642.

26. —— , AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY,53. (1946)555-578.

تعیین توابعی که در روابط تابعی نظیر روابط تابعی سینوس و توابع کسینوس صدق می کنند

دکتر علیرضا مدقالچی

در شماره دسامبر سال ۱۹۵۳ مجله ماهنامه آمریکا مسأله‌ای به این صورت درج شده است:

«فرض کنید f و g دو تابع حقیقی باشند که در رابطهٔ

$$(۱)\quad g(x-y)=g(x)\,g(y)+f(x)\,f(y)$$

صدق می‌کنند و به‌ازای $t\neq ۰$ ای $f(t)=۱$، $g(t)=۰$ ثابت کنید همواره

$$(۲)\quad f(x\pm y)=f(x)\,g(y)\pm g(x)\,f(y)$$

$$(۳)\quad g(x+y)=g(x)\,g(y)-f(x)\,f(y)$$»

(I) ابتدا حل این مسأله را می‌آوریم وسپس براساس این مسأله و نیز مقالهٔ دیگری از همان مجله توابـع سینوس وکسینوس را مشخص می‌کنیم. اولا، از تعریف (۱) معلوم است که g تابعی است زوج. حال اگر در (۱) به‌جای $y=t$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$(۴)\quad g(x-t)=f(x)$$

بالنتیجه، با قراردادن $y=x-t$ در (۱) رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$(۵)\quad ۰=g(t)=g(x)\,g(x-t)+f(x)\,f(x-t)$$

با توجه به رابطهٔ (۴) خواهیم داشت:

$$(۶)\quad f(x)\,(g(x)+f(x-t))=۰$$

پس،

$$g(x)+f(x-t)=۰$$

ازاین‌رو،

$$f(x)=-g(x+t)=-g(-x-t)=-f(-x)$$

یعنی f تابعی است فرد. پس رابطهٔ (۳) از (۱) به‌دست می‌آید. حال اگر در (۲) به‌جای x، $x\pm y$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f(x+y)&=g(x+y-t)=g(x+(y-t))\\ &=g(x)\,g(y-t)+f(x)\,f(y-t)\\ &=g(x)\,f(y)+f(x)\,g(y) \end{aligned}$$

درمفروضات مسأله شرط $t\neq ۰$ اضافی است.

(II) دوباره به‌معادله (۱) برمی‌گردیم. این معادله را می‌توان به‌صورت

$$(۷)\quad g(x-y)=g(x)\,g(y)+g(x-s)\,g(y-s)$$

نوشت‌که s ثابت است. با قرار دادن $y=x$ در (۱) داریم:

$$(۸)\quad g(0)=g(x)^2+f(x)^2$$

از رابطهٔ (۸) بدیهی است که

$$(۹)\quad |g(x)|^2\leqq g(0)\ ,\ \ |f(x)|^2\leqq g(0)$$

حال اگر در (۱) به‌جای x صفر قرار دهیم خواهیم داشت:

$$(۱۰)\quad f(0)^2=g(0)-g(0)^2$$

ازاین‌رو، واضح است که:

$$(۱۱)\quad 0\leqslant g(0)\leqslant 1$$

وبا قراردادن $y=0$ در (۱) به‌دست می‌آوریم:

$$(۱۲)\quad (1-g(0))\,g(x)=f(0)\,f(x)$$

بالنتیجه، با ملاحظه مفروضات فوق داریم:

(۱۳) اگر $g(x)=g(0)$، آنگاه $f(x)=f(0)$

(۱۴) اگر $g(x)=-g(0)$، آنگاه $f(x)=-f(0)$

اقامه ادله برای روابط (۱۳)، (۱۴) چندان مشکل نیست. زیرا اگر $g(0)=0$ بنابه (۹)، $f\equiv 0$. اگر $0<g(0)<1$ آنگاه بنابه (۱۰)، (۱۲) ومفروضات گزاره‌های (۱۳) و(۱۴) خواهیم داشت $f(0)^2=f(0)\,f(x)$. بالاخره، اگر

$$(x\in R)\ g(x)=\pm g(0),\ g(0)=1$$

،آنگاه‌بنابه (۱) $f(x)=0$ وبنابه (۱۰) اگر $g(0)=1$، آنگاه $f(0)=0$.

تذکر: فرض‌کنید تابع f بر R مشتق‌پذیر باشد، ازرابطهٔ (۱) با قراردادن $x=y$ خواهیم داشت

$$(۱۵)\quad g^2(x)+f^2(x)=g(0)$$

حال اگر $g(0)=1$، آنگاه نشان می‌دهیم که

$$g(x)=\cos x,\ f(x)=\sin x$$

بدیهی‌است‌که توابع مذکور در رابطهٔ (۱۵) صدق می‌کنند و از روابط (۲) و ازمشتقگیری نسبت به y داریم

$$f'(x+y)+f'(x-y)=2g(x)\,f'(y)$$

به‌ازای $y=0$ داریم:

$$(۱۶)\quad f'(x)=g(x)\,f'(0)$$

ازمشتقگیری از رابطهٔ (۱۵) و رابطهٔ (۱۶) نتیجه زیر به‌دست می‌آید:

$$(۱۷)\quad g'(x)=-f(x)\,f'(0)$$

ازاین رابطه‌ها با توجه به تمرین ۸ مندرج درشماره ۱۶ رشد آموزش ریاضی نتیجه می‌شودکه توابع f و g به‌طورمنحصر به فرد به‌دست می‌آیند.

بنابه رابطهٔ (۱) روابط (۶)، (۱۳) و (۱۴) معادل است با:

به‌ازای هر x, y

اگر $g(x)=g(y)=g(0)$، آنگاه

$$(۱۸)\quad g(x-y)=g(0)$$

اگر $g(x)=g(y)=-g(0)$، آنگاه

$$(۱۹)\quad g(x-y)=g(0)$$

از رابطه‌های (۸)، (۱۲) داریم

$$(1-g(0))(g(x)^2-g^2(0))=0$$

یعنی، اگر $g(0)\neq 1$ آنگاه به‌ازای هر x،

$$g(x)=\pm g(0)$$

،نشان می‌دهیم‌که $g(x)=g(0)$. برای اثبات، مجموعهٔ

$$A=\{x|g(x)=\pm g(0)\}$$

را درنظرمی‌گیریم.

واضح است‌که A گروه جمعی R (گروه اعداد حقیقی) است بنابه (۱۸) و (۱۹) مجموعه

$$B=\{x|g(x)=g(0)\}$$

یك زیرگروه جمعی R است که با اندیس (۲) است؟ چون R دارای هیچ‌زیرگروهی با اندیس ۲ نیست پس به‌ازای هر x، $g(x)=g(0)$ وازاین‌رو به‌ازای هر x، $f(x)=f(0)$.

بنابراین اگر، $g(0)=0$ آنگاه $g\equiv 0$، $f\equiv 0$ و اگر

$0<g(0)=c<1$ آنگاه به‌ازای هر x،

$$f(x)=-b \text{ یا } f(x)=b,\ g(x)=c$$

که $b=\sqrt{1-c^2}$. اینها جوابهای معادلهٔ تابعی (۱) با شرط $g(0)\neq 1$ هستند.

(III) مجدداً حالت $g(0)=1$ را به‌طور کاملتر مورد بحث قرارمی‌دهیم. قبلا با فرض بیشتری نشان دادیم که f فرد است. دراین‌حالت فرض به ازای $t\neq 0$ ای، $f(t)\neq 0$، $g(t)=0$ را حذف می‌کنیم چون g تابعی است زوج، پس

(۲۰) $f(x)^2=f(-x)^2$

یعنی اگر به‌ازاء xای $f(x)=0$ آنگاه $f(-x)=0$.

حال بنا به (۱) و زوج بودن g داریم

(۲۱) $g(2x)=g^2(x)+f(x)f(-x)$

حال اگر $f(x)=f(y)=0$، آنگاه بنا به (۱۵) و شرط $g(0)=1$ داریم $g(x)g(y)=\pm 1$. ازاین روبنا به (۱)

$g(x-y)=\pm 1$

پس به‌طور کلی بنا به (۲) داریم:

اگر $f(x)=f(y)=0$، آنگاه $f(x-y)=0$ (۲۲)

حال ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر x

(۲۳) $f(2x)=g(x)(f(x)-f(-x))$

برای اثبات رابطه (۲۳)، ابتدا در (۱)، $y=2x$ قرار می‌دهیم و بالنتیجه رابطهٔ

(۲۴) $g(x)=g(x)g(2x)+f(x)f(2x)$

را به‌دست می‌آوریم. بین روابط (۲۴) و(۱۴) مقدار $g(2x)$ را حذف می‌کنیم و به رابطهٔ

(۲۵) $f(x)g(x)[f(x)-f(-x)]=f(x)f(2x)$

می‌رسیم. اگر به ازای xای $f(x)=0$، رابطهٔ (۲۳) نتیجه (۲۱) (۲۲) و درغیراین صورت نتیجه (۲۵) است.

حال نشان می‌دهیم که f تابعی است فرد. برای اثبات بنا به (۲۰)

$$f\left(\frac{y}{2}\right)=-f\left(-\frac{y}{2}\right) \text{ یا } f\left(\frac{y}{2}\right)=f\left(-\frac{y}{2}\right)$$

در حالت اول بنا به (۲۳) $f(y)=0$ ولهذا، بنا به (۲۰) $f(-y)=0$. درحالت دوم بنا به (۲۳)،

$$f(-y)=-2g\left(-\frac{y}{2}\right)f\left(\frac{y}{2}\right),\quad f(y)=2g\left(\frac{y}{2}\right)f\left(\frac{y}{2}\right)$$

ولهذا، بنا به زوج بودن g، $f(-y)=-f(y)$

قضایای زیر را بدون توسل به شرط اضافی مندرج در صورت مسأله ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱. به‌ازای هر x، y داریم

(۲۶) $g(x+y)=g(x)g(y)-f(x)f(y)$

(۲۷) $f(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$

برهان. رابطه (۲۶) نتیجه مستقیم (۱)، زوج بودن g وفرد بودن f است. برای اثبات (۲۷) در (۱) به‌جای y، $x+y$ قرارمی‌دهیم خواهیم داشت:

$$g(y)=g(x)g(x+y)+f(x)f(x+y)$$

از رابطه اخیر با توجه به (۲۶) خواهیم داشت:

(۲۸) $f(x)f(x+y)=f(x)[f(x)g(y)+g(x)f(y)]$

حال اگر به‌ازاء x، yای $f(x)=f(y)=0$ آنگاه (۲۷) نتیجهٔ (۲۰) و (۲۲) است درغیراین صورت از رابطه (۲۱) به‌دست می‌آید.

نتیجه. از (۲۷)، زوج بودن g وفرد بودن f نتیجه زیر عاید می‌شود:

(۲۹) $f(x-y)=f(x)g(y)-g(x)f(y)$

قضیه ۲. احکام زیر برقراراست:

(۳۰) $g(2x)=g(x)^2-f(x)^2=2g(x)^2-1$

(۳۱) $f(2x)=2f(x)g(x)$

$$(۳۲)\quad f(3x)=f(x)\left[4g(x)^2-1\right]$$

$$(۳۳)\quad g(x)-g(y)=-2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

برهان نتیجه این احکام مبتنی برمقدمات اولیه است.

(IV) روشها و نتایج تا این مرحله کاملا جبری بودند ولی در این قسمت از خاصیت پیوستگی استفاده می‌کنیم.

قضیه ۳ (i). اگر $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ موجود باشد آنگاه

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

اگر $\lim_{x\to 0^+} f(x)^2$ موجود باشد آنگاه $\lim_{x\to 0} g(x)=1$.

برهان (i). اگر $\lim_{x\to 0^+} g(x)=L$، آنگاه $L=2L^2-1$ پس $L=\frac{1}{2}$ یا $L=1$. اگر $L=-\frac{1}{2}$ آنگاه بنا (۳۲)،

$$\lim_{x\to 0^+} f(3x)=0$$

درحالی‌که بنابه (۱۵) وشرط $g(0)=1$،

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)^2=\frac{3}{4}$$

که یک تناقض است. پس $L=1$ ولهذا، بنابه (۱۵) و شرط $g(0)=1$ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$. پس بنابه‌فرد بودن f،

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

(ii) اگر $\lim_{x\to 0^+} f(x)^2$ موجود باشد، آنگاه بنابه (۱۵)

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)^2$$

موجود است وبنابه (۳۰)، $\lim_{x\to 0^+} g(2x)$ موجود است.

بنابراین، اگر $\lim_{x\to 0^+} g(x)=1$، آنگاه بنا به زوج بودن g،

$$\lim_{x\to 0} g(x)=1.$$

قضیه ۴. اگر f و g از راست دریک‌نقطه پیوسته باشند، آنگاه هردو درصفر پیوسته‌اند.

برهان. فرض کنید f یا g درنقطهٔ صفر از راست پیوسته باشد آنگاه بنابه قضیه ۳، f و g درصفر پیوسته‌اند. فرض‌کنید مثلا، f از راست درنقطه x پیوسته باشد. اگر $f(x)\neq 0$ آنگاه به ازای‌هر y، $\lim_{y\to x^+} g\left(\frac{x-y}{2}\right)=1$ (در واقع، نظیر رابطهٔ ۳۳، داریم

$$f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)g\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

وبعلاوه بنابه (۸) و $g(0)=1$، می‌دانیم که f و g دارای‌صفر مشترک نیستند) پس $\lim_{x\to 0^-} g(x)=1$ پس بنابه‌فرد بودن g و شرط $g(0)=1$ داریم $\lim_{x\to 0} g(x)=1$. اگر $f(x)=0$ آنگاه، $g(x)\neq 0$ بنابه رابطه (۲۷) $\lim_{y\to 0^+} f(y)=0$. از این‌رو، بنابه‌قضیه ۳ $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$. ازطرف‌دیگر، اگر g درنقطهٔ x ازراست‌پیوسته باشد به‌طریق مشابه نتیجه می‌شود که f درصفر پیوسته است.

قضیه ۵. اگر f در صفر پیوسته باشد آنگاه f و g همه جا پیوسته‌اند.

برهان. نتیجهٔ مستقیم (۲۹)، (۳۳) و (۱) است.

قضیه ۶. تابع f پیوسته است اگر و فقط اگر بازه‌ای مانند $(0, b)$ باشدکه درآن f تغییرعلامت ندهد.

برهان. اگر f بر بازه‌ای مانند $(0, b)$ تغییر علامت ندهد، با توجه به‌رابطهٔ (۳۳)تابع g براین‌بازه صعودی‌است‌بنابه (۹)،

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)$$

موجود است ولهذا، f درصفر پیوسته است پس f پیوسته‌است.

ازطرف دیگر، اگر f بربازه‌ای‌مانند $(0, b)$ تغییرعلامت‌دهد آنگاه دراین بازه دارای صفر است. چون صفرهای f یک‌گروه می‌سازندکه در R چگالند پس f باید صفرباشد.

بنابه‌قضیه بولتزانو تابع f براین بازه دارای صفر است بنابه (۲۲) صفرهای f یک زیرگروه R است‌که در R چگال است پس f باید صفرباشدکه متناقض با فرض است.

قضیه ۷ (i). اگر g بر R پیوسته و f بر R مشتق‌پذیر باشند آنگاه $f'(x)=f'(0)\,g(x)$ $(x\in R)$.

(ii) اگر f بر R پیوسته و g بر R مشتق‌پذیر باشد آنگاه

$$g'(x)=-f'(0)\,f(x) \quad (x\in R)$$

برهان. چون g بر R پیوسته است. با بحثی نظیر بحث قبلی یا $f=0$ ویا بازه‌ای مانند $(0\,,\,b)$ وجود دارد که شامل هیچ صفری از f نیست. درحالت اخیر، اگر $0<x=nh$، $0<h<b$، داریم

$$f\left(\frac{h}{2}\right)\sum_{k=1}^{n} g(kh)=\sum_{k=1}^{n} g\left(\left(\frac{2k-1}{2}\right)\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right) f\left(\frac{h}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[f(2k+1)\frac{h}{2}-f\left(\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(\frac{h}{2}\right)\right]$$

پس

$$\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n} g(kh)=\left(f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(\frac{h}{2}\right)\right)\frac{h/2}{f(h/2)}$$

چون f و g بر R پیوسته است و $f(0)=0$ و $f\neq 0$. از حدگیری داریم

$$\int_0^x g(t)\,dt=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{2}}{f\left(\frac{h}{2}\right)}$$

چون به‌ازاء هر x مثبت $g(x)$ مثبت است پس، حد طرف راست صفر نیست. پس $f'(0)$ موجود است و

$$f'(0)\int_0^x g(t)\,dt=f(x)$$

ازمشتقگیری داریم

$$f'(0)\,g(x)=f'(x)$$

با توجه به خواص f, g رابطهٔ اخیر به‌ازای x های منفی هم برقرار است. مسلماً رابطهٔ $f'(0)g(0)=f'(0)$ هم برقرار است. پس حکم قضیه برقرار است.

نتیجه. از رابطهٔ فوق معلوم است که f و g ریشه‌های معادله دیفرانسیل $y''+a^2y=0$ با شرایط اولیه

$g(0)=1$، $g'(0)=0$، $f(0)=0$، $f'(0)=a$

است. بنابراین f و g همان توابع کسینوس و سینوس هستند یعنی

$$f(x)=\sin ax,\quad g(x)=\cos ax$$

حال ریشه‌های ناپیوسته را پیدا می‌کنیم. فرض کنید R مجموع مستقیم زیرگروههای خود مانند R_1, R_2 باشد به‌طوری که

$$x=x_1+x_2 \quad (x_1\in R_1,\ x_2\in R_2)$$

فرض کنید f_1، g_1 و f_2، g_2 دو جواب باشند. بدیهی است

$$f(x)=f_1(x_1)\,g_2(x_2)+g_1(x_1)\,f_2(x_2)\,,\quad g(x)=g_1(x_1)\,g_2(x_2)-f_1(x)\,f_2(x_2)$$

در (۱) صدق می‌کنند و $g(0)=1$ مگر آنکه $f=g=0$ اگر به‌ازای s ای $g(s)=0$، $f(s)\neq 0$، آنگاه بنابه (۱) $g(0)\neq 0$ پس $g\neq 0$. ازطرف دیگر اگر $g\neq 0$ آنگاه $g(s)=0$ و از این‌رو $f(s)\neq 0$.

با درنظر گرفتن (۱) شرط $g(0)=1$ به‌دست می‌آید. چون اگر در (۱) به‌جای $x=s$، $y=0$ قرار دهیم نتیجه می‌شود که $f(0)=0$ پس بنابه (۱۰)، $g(0)=0\,,\,1$.

ولی چون $g\neq 0$ پس $g(0)\neq 0$. حال چون $g(s)=0$ و $g(0)=1$، $f(s)^2=1$ بنابراین $f(s)=1$ و $f(-s)=-1$ و ازاین‌رو، بنابه (۱)، $g(x-t)=f(x)$ که t برابر s یا $-s$ است.

مراجع

[1]. E 1079 , American Math . Monthly , 1953, 479

[2] H. E. Vaughan ; American Math. Monthly , 1955, 701

اثبات هندسی فرمول ماشین

ترجمه : محمود نصیری

درتاریخ محاسبه π، فرمول زیر

$$\frac{\pi}{۴} = ۴\text{Arc tg}\frac{۱}{۵} - \text{Arc tg}\frac{۱}{۲۳۹}$$

نقش مهمی را ایفا کرده است که به فرمول *Machin* مشهور است.

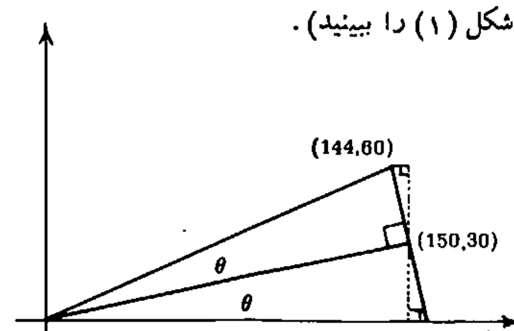
ویلیام شانکس[۲] درسال ۱۸۷۳، با به‌کار بردن فرمول Machin و سری مك‌لوران در مورد تابع آرك تانژانت، π را تا ۷۰۷ رقم اعشار محاسبه‌کرد. درآن زمان‌این یك‌موفقیت قابل توجه بود، و کاری که وقتی‌کشف شد در ۵۲۸ امین رقم خطا داشت واین‌خطا تاسال ۱۹۴۶ پابرجا بود [۲].

درحالی‌که این فرمول می‌تواند به‌طورعـادی با به‌کار بردن فرمولهای مثلثات تحقیق شود، یك اثبات سازنده با به‌کار بردن فقط روش هندسی وتفسیر آرك تانژانت‌ها به‌جای زوایا وجود دارد.

اگر فرض کنیم

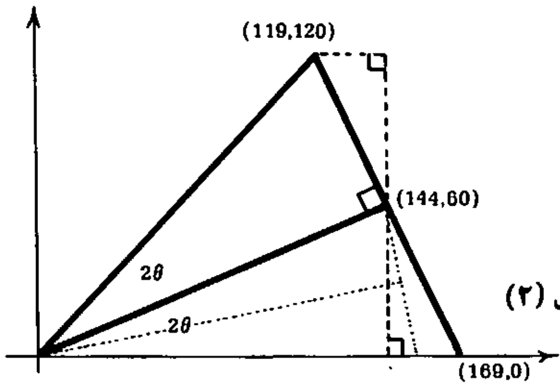
$$\theta = \text{Arctg}\frac{۱}{۵} = \text{Arc tg}\frac{۳۰}{۱۵۰}،$$

آنگاه با به‌کاربردن مثلثهای متشابه داریم $۲\theta = \text{Arctg}\frac{۶۰}{۱۴۴}$ (شکل (۱) را ببینید).



شکل (۱)

وبه‌همین روش، داریم $۴\theta = \text{Arc tg}\frac{۱۱۹}{۱۲۰}$(شکل(۲)راببینید). با امتداد دادن ضلع انتهایی زاویه ۴θ و به‌کار بردن مثلثهای



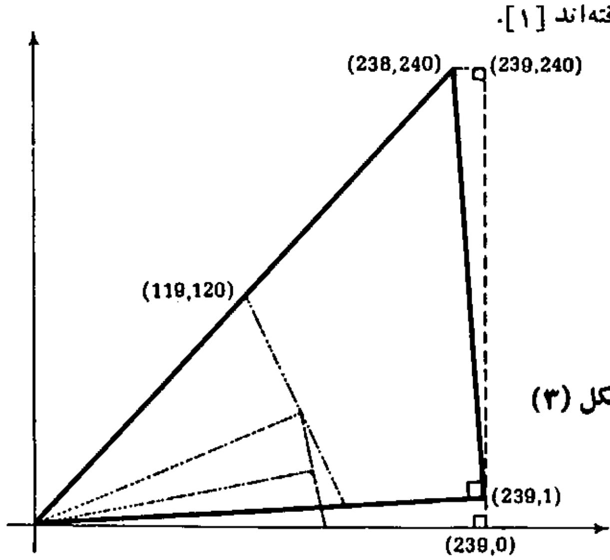
شکل (۲)

برابر به‌دست می‌آوریم

$$۴\theta = \frac{\pi}{۴} + \text{Arctg}\frac{۱}{۲۳۹}$$

(شکل (۳) را ببینید)، ازاین رابطه فرمول Machin به‌دست می‌آید.

عبارتهای‌مشابه‌بافرمول Machin نیزدرمحاسبه π به‌کار رفته‌اند [۱].



شکل (۳)

زیرنویسها:

1– Machin

2– William Shanks

مراجع :

MATHEMATICS MAGAZINE VOL: 63, NO. 5, DECEMBER 1990

1. D. Castellanos, The ubiquitousx, this Magazine 61 (1988), 67-98; 148-163

2. H.Eves, *An Introduction to the History of Mathematics,* Saunders Publishing Co., 1983, pp. 87–89

نقش گراف در تفهیم مطالب درسی

ابراهیم دارابی

در اینجا می‌خواهیم یکی از مطالب رایج در کتابهای درسی، مثلاً معادله درجه دوم را به‌کمك گراف تدریس کنیم اما هدف تنها این نیست. نوشتن این مقاله یا «مقاله‌گونه» بهانه‌ای است تا دوباره و چندباره از دبیران دلسوز کشورمان درخواست کنیم تا تجارب تدریس خود را به صورت مقاله برای مجله بفرستند و صفحات آن را درحدی که حق مسلم آنان است دراختیار خود گیرند، تا ازاین راه، مجله بیشتر درجهت خواست بسیاری از خوانندگانی که سطح مجله را بالا می‌دانند، سوق پیدا کند و نیازهای دانش‌آموزان و همکاران دبیر تا حدودی مرتفع گردد. با این امید و به‌این بهانه کار را شروع می‌کنیم و این را هم می‌دانیم که بسیاری ازهمکاران دبیر مطالب بهتری را دراختیار دارند، اما شاید با دید واهی، و به این بهانه که شاید سطح مقاله‌شان پائین تلقی شود، آن را برای مجله نمی‌فرستند. لیکن مجله بر این باور است که اگر مطلب تازه‌ای است باید دست دانش‌آموزان به آن برسد و معلمین دراین راه آنها را کمك کنند. چون امروزه دانش‌آموزان بیش ازهروقت دیگر، بخصوص در شهرهای دورافتاده، به‌این کمك احتیاج دارند. درآغاز، مطالبی را یادآوری می‌کنیم تا سطح کارکه بی‌تردید برای دانش‌آموزان کلاسهای دوم ریاضی هم قابل درك است، روشن گردد. همچنین ذکر این نکته راهم لازم می‌دانیم که دراینجا صرفاً روش گرافیك مطالب مدنظر بوده و برای اینکه مطلب طولانی نشود از آوردن سایر مطالب که درکتابهای درسی وجود دارد خودداری شده است. در تدریس، تلفیق این مطالب با مطالب کتاب، را لازم ومفید می‌دانیم تا ازاین طریق، تعبیر درستی ازحل معادلات در ذهن دانش‌آموز نقش و ترسیم گردد.

● درسوم راهنمایی دانش‌آموزان از راه نقطه‌یابی با رسم نمودار خط $ax+by+c=0$ و نمودار منحنی $y=x^2$ (و احیاناً $y=ax^2$) آشنا شده‌اند.

در اینجا یادآوری می‌کنیم که نمودار $ax+by+c=0$ مجموعه نقاطی مانند $M(x, y)$ ازصفحه محورهای مختصات است که مختصات آنها درمعادله خط صدق می‌کنند، وبعکس. مختصات این‌گونه نقاط را جواب ویا ریشه‌های معادله

$$ax+by+c=0$$

می‌نامیم. ناگفته پیداست که تعداد جوابها بیشمار است. منظور از حل یك معادله پیدا کردن همه جوابهای معادله است.

●● اگر به‌جای یك معادله، دستگاه معادلات مثلاً

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

را داشته باشیم. منظور از حل آن، پیدا کردن زوجهایی مانند (x_1, y_1) است که مختصات آن درهردو معادله دستگاه صدق کند. با توجه به‌آنچه که در بالا گفته شد، مختصات محل

برخورد نمودار دوخط به‌معادلات

$$a'x+b'y+c'=0\ ,\ ax+by+c=0$$

جواب دستگاه خواهد بود. یعنی با فرض اینکه دو خط موازی نباشند، دستگاه همواره جواب خواهد داشت. اما شرط توازی دوخط، مساوی بودن ضریب زاویه‌آنهاست. پس اگر:

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$

و $\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ آنگاه دو خط موازی بوده و درنتیجه دستگاه جواب نخواهد داشت. اگر

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

آنگاه دوخط برهم منطبق، در نتیجه نقاط اشتراك آنها بیشمار خواهد بود.

یعنی، دستگاه جوابهای بیشمارخواهد داشت. بالاخره اگر

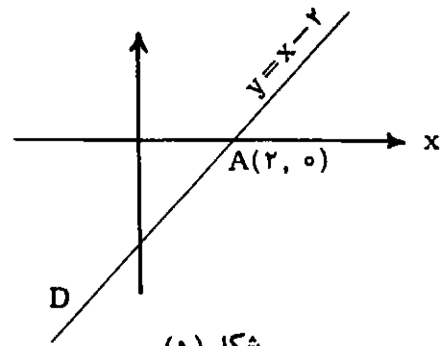
$$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$$

آنگاه دو خط یکدیگر را قطع خواهند کرد یعنی برای دستگاه یك جواب پیدا می‌شود.

●●هر معادله یك‌مجهولی مانند $f(x)=0$ را می‌توان به صورت‌دستگاه

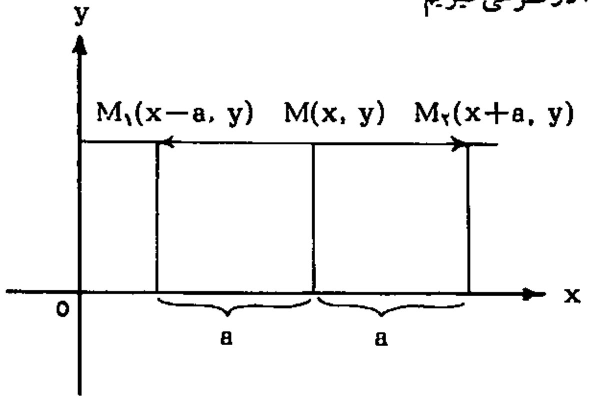
$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases}$$

نوشت. چون نمودار $y=0$ محور طولها می‌باشد، بنابراین منظور از حل معادلـه $f(x)=0$، پیدا کردن مختصـات محل برخورد نمودار $y=f(x)$ با محور طولها خواهد بود. مثلاً جواب معادله $x-2=0$، طول نقطه تقاطع خط D به معادله $y=x-2$ با محورطولها خواهد بود.



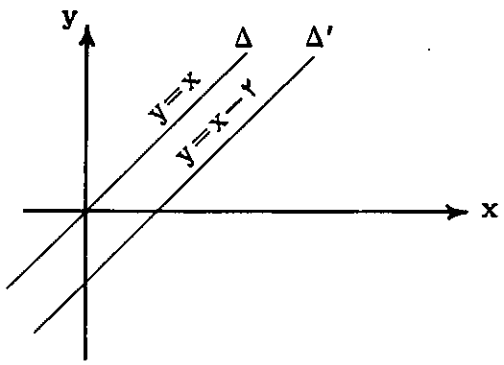
شکل (۱)

●●●روی‌صفحه محورهای مختصات نقاط $M(x,y)$ و $M_2(x+a,\ y)\ ,\ M_1(x-a,\ y)$ را درنظرمی‌گیریم



شکل (۲)

از روی نمودار دیده می‌شودکه اگرنقطه M را به‌اندازه a در جهت محور طولها وبه موازات‌آن انتقـال دهیم به‌نقطه M_2 می‌رسیم واگر به‌همان اندازه درخلاف جهت محور طولها وبه موازات‌آن انتقال دهیم به نقطه M_1 می‌رسیم. معنی این‌کار آن است‌که، اگرنمودار $y=f(x)$ را به‌اندازهٔ a درجهت محور طولها وبه موازات آن انتقال دهیم نمودار $y=f(x-a)$ و اگر درخلاف جهت انتقال دهیـم نمودار $y=f(x+a)$ به دست می‌آید. مثلاً نمودار $f(x)=x$ نیمساز ربع اول وسوم است. اما نمودار $f(x-2)=x-2$ خطی است موازی‌آن که به‌اندازه ۲ واحد درجهت محورطولها انتقال یافته است.



شکل (۳)

همچنین اگرنمودار $y=f(x)$ را داشته باشیم نمودار

$$y=f(x)+h$$

با انتقال آن‌به‌اندازه h بموازات‌محور yهادرجهت‌آن، (اگر $h>0$) و درخلاف جهت‌آن (اگر $h<0$) به‌دست می‌آید.

با این مقدمه، معادله درجـه دوم $ax^2+bx+c=0$ را در

نظر می‌گیریم که در آن $a\neq 0$. طرفین معادله را به a تقسیم می‌کنیم

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

معادله را به‌صورت

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4ac}=0$$

یا

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

می‌نویسیم. بنابر آنچه گفته شد، جوابهای معادله عبارت خواهد بود ازطول نقاط برخورد نمودار

$$y=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

با محورطولها. برای‌رسم آن‌سه مرحله را به‌اجرا درمی‌آوریم.

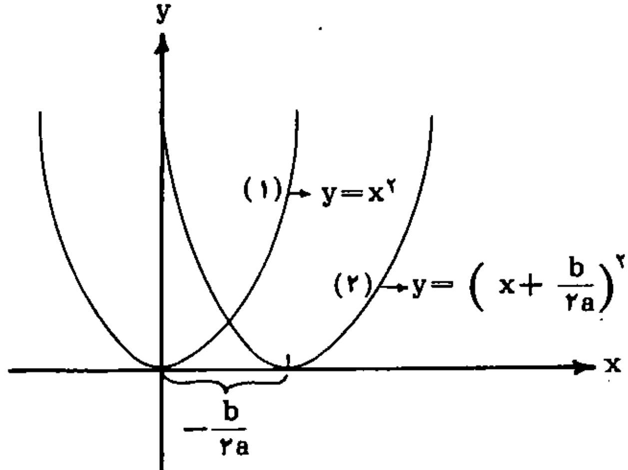
۱) نمودار $y=x^2$ را که با آن آشنا هستیم رسم می‌کنیم.

۲) با انتقال آن به اندازهٔ $\frac{b}{2a}$ به موازات محورطولها (اگر $\frac{b}{2a}>0$ در خلاف جهت و اگر $\frac{b}{2a}<0$ در جهت محور طولها) نمودار $y=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ را به‌دست می‌آوریم.

۳) با توجه به مثبت ویا منفی بودن b^2-4ac نمودار

$$y=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

را به‌موازات‌محورعرضهاو‌به‌ترتیب‌پائین وبالامی‌بریم‌تا نمودار



شکل (۴)

$$y=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

به‌دست آید، سپس مختصات‌محل برخوردآن را با محورطولها مشخص می‌کنیم و برای شکل تعبیرهندسی ارائه می‌دهیم.

برای اینکه این مطلب روشن شود، ریشه‌های معادله

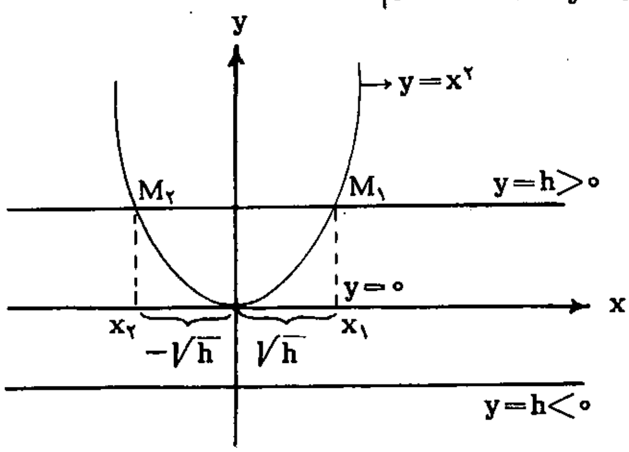
$$ax^2+bx+c=0$$

را درچند حالت به‌دست می‌آوریم:

الف) $x^2=h$ برای حل این معادله باید دستگاه

$$\begin{cases}y=x^2\\ y=h\end{cases}$$

را حل‌کنیم. یعنی مختصات محل برخورد نمودار $y=x^2$ و $y=h$ را به‌دست آوریم.



شکل (۵)

همان‌طورکه‌از روی نموداردیده می‌شوداگر $h>0$، آنگاه خط $y=h$ نمودار $y=x^2$ را در دو نقطه M_1 و M_2 قطع می‌کند یعنی دراین حالت معادله دو ریشه دارد. از روی شکل می‌توان دید که این دو ریشه یعنی طولهای نقاط تقاطع، قرینه یکدیگرند. ($x_1=\sqrt{h}$ و $x_2=-\sqrt{h}$)

همچنین معلوم می‌شودکه اگر $h<0$ آنگاه، خط $y=h$ نمودار $y=x^2$ را قطع نمی‌کند یعنی معادله در این حالت جواب ندارد.

واگر $h=0$ آنگاه خط ومنحنی درمبدأ مختصات برهم مماس می‌شوند. یعنی معادله تنها یک جواب صفر دارد. این جواب (طول نقطه تماس) را ریشه مضاعف معادله می‌نامند.

ب) نمودار (۲) درشکل (۴) نشان می‌دهدکه مرحله اول‌تکرار شده ($h=0$) ونقطه تماس به نقطه‌ای به طول $-\frac{b}{2a}$ (بنابر

وضعیت شکل $\frac{b}{2a}<0$) انتقال‌یافته است. یعنی دراین‌حالت معادله ریشه مضاعف $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ رادارد. اما درواقع دراین حالت b^2-4ac از

$$y=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

صفر فرض شده است. یعنی اگر درمعادله درجه دوم

$$ax^2+bx+c=0$$

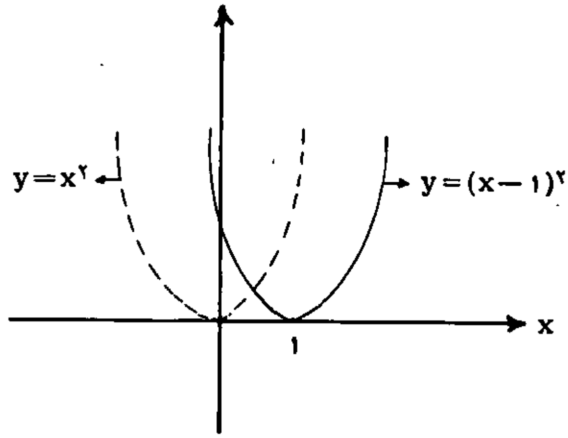
داشته‌باشیم

$$b^2-4ac=0$$

آنگاه معادله، ریشه مضاعف

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

را دارد. (از راه غیرگرافیك این را می‌دانیم.)
مثلاً درمعادله $x^2-2x+1=0$ داریم $(x-1)^2=0$،



شکل ۴

یعنی معادله ریشه مضاعف $x_{1,2}=1$ دارد.

ج) اکنون برای رسم نمودار

$$y=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

دوحالت درنظرمی‌گیریم: اگر $b^2-4ac<0$، آنگاه

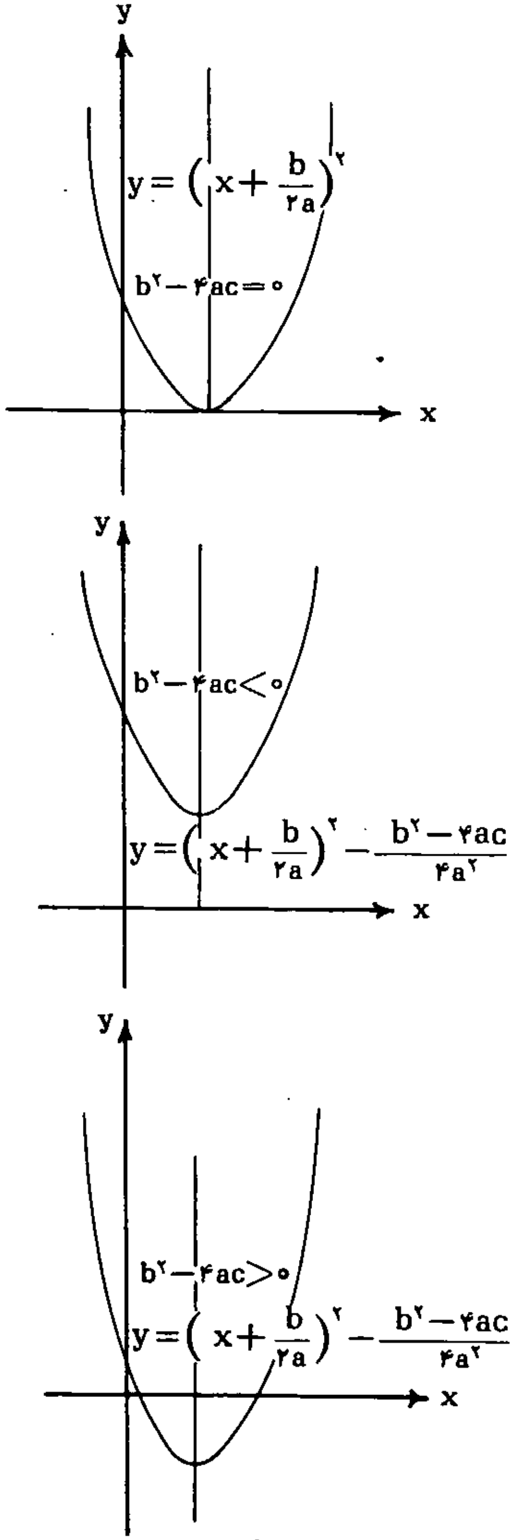
$$-\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0$$

پس نمودار

$$y=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

را درجهت محور عرضها بالا می‌بریم. واضح است که دراین حالت منحنی محورطولها را قطع نخواهدکرد.

یعنی اگر $b^2-4ac<0$، آنگاه معادله $ax^2+bx+c=0$ جواب ندارد. (این را می‌دانستیم).



شکل ۵

اما اگر $b^2-4ac>0$ ویا

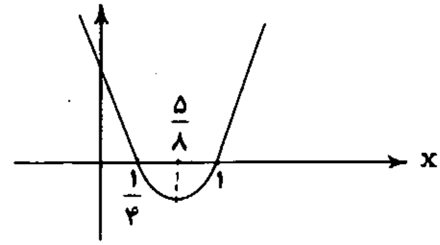
$$-\frac{b^2-4ac}{4a^2}<0$$

آنگاه منحنی باید پائین برده شود یعنی منحنی محور طولها را در دو نقطه قطع می‌کند. پس معادله دراین حالت دو ریشه دارد.

یادآوری. درهمه موارد ضریب x^2 را مثبت فرض کرده‌ایم واضح است که اگرضریب x^2 منفی باشد، جهت منحنی‌ها تغییر خواهد کرد. یعنی منحنی‌ها به جای اینکه می‌نیمم داشته باشند، ماکسیمم خواهند داشت.

مثال. $4x^2-5x+1=0$ طرفین معادله را به ۴ تقسیم می‌کنیم.

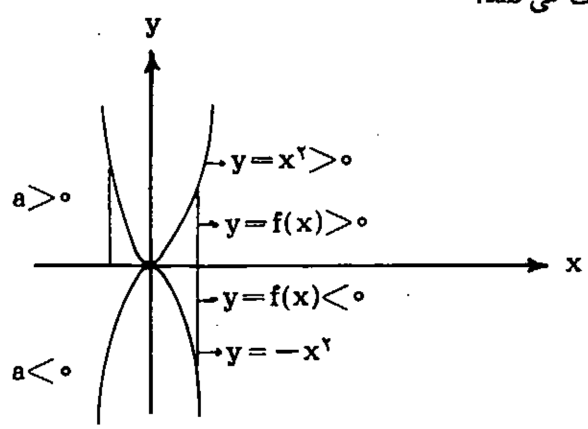
$$x^2-\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{5}{8}\right)^2-\frac{9}{64}=0$$

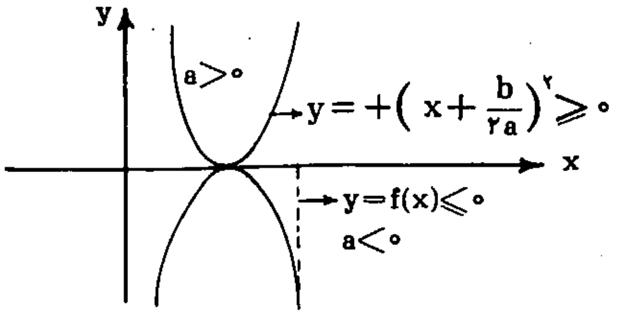


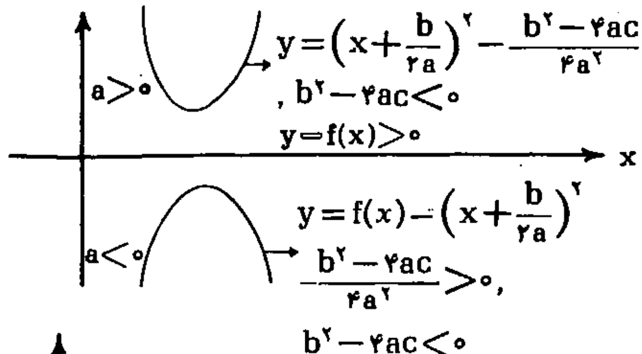
شکل ۶

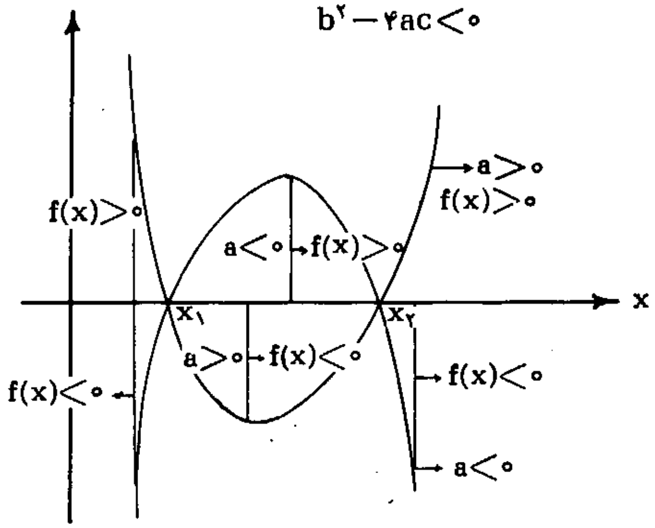
از روی شکل دیده می‌شود که معادله دو ریشه $x_1=1$ و $x_2=\frac{1}{4}$ دارد.

همچنین از روی نمودارهای بالا می‌توان به آسانی به علامت سه‌جمله‌ای‌ها هم پی برد. مثلاً دیده می‌شود که وقتی معادله ریشه مضاعف‌دارد ویا اصلاً جواب ندارد، علامت سه‌جمله‌ای با علامت ضریب x^2 یکسان است. اما درحالتی‌که سه‌جمله‌ای دو ریشه دارد، علامت آن بین دو ریشه مخالف a و درخارج آن موافق a می‌باشد. نمودارهای زیر این مطلب را کاملاً اثبات می‌کنند.









لازم است یادآوری‌کنیم که به‌کمک گراف، مسایل دیگری از جمله معادلات از درجه بالاتر را هم می‌توان حل‌کرد. در زیر نمونه‌هایی ازاین مسایل را می‌آوریم.

مثال ۱. معادله زیررا حل‌کنید.

$$2\sin x=5x^2+2x+3$$

حل. طرفین معادله را به ۵ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{2}{5}\sin x=x^2+\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}$$

$$\begin{cases} y=x^2+\frac{2}{5}x+\frac{3}{5} & (1) \\ y=\frac{2}{5}\sin x & (2) \end{cases}$$

مختصات محل برخورد نمودارهای (۱) و (۲) جوابهای مسئله است.

اما این دستگاه را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} y=\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{14}{25} & (1)\\ y=\frac{2}{5}\sin x & (2)\end{cases}$$

با توجه به آنچه‌که‌گفته شد، می‌بینیم نمودار (۱) ازمحورطولها به اندازه $\frac{14}{25}$ فاصله دارد. در حالی که حداکثر فاصله نقاط $y=\frac{2}{5}\sin x$ ازمحورطولها برابراست با $\frac{2}{5}$. چون $\frac{2}{5}<\frac{14}{25}$ دومنحنی یکدیگر را قطع نمی‌کنند ومعادله جواب ندارد. در واقع به‌ازای جمیع مقادیر x نامعادلات زیر برقرارند.

$$5x^2+2x+3=5\left(x+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{14}{5}\geqslant 2$$

و

$$2\geqslant 2\sin x$$

پس؛

$$5x^2+2x+3>2\sin x$$

مثال ۲. معادله زیررا حل‌کنید

$$\sin x=x^2+x+1$$

حل.

$$\begin{cases} y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\\ y=\sin x\end{cases}$$

دراینجا نمی‌توان از روش بالا استفاده‌کرد. زیرا نموداراول ازخط $y=1$ پائینتر رفته است. اما دراینجا می‌دانیم به ازای $x>0$ و $x<-1$ همواره $x^2+x+1>1$. وچون درفاصله $-1\leqslant x\leqslant 0$ داریم

$$\sin x\leqslant 0 \text{ و } x^2+x+1>0$$

پس به‌ازای جمیع مقادیر x داریم

$$x^2+x+1>\sin x$$

یعنی بازمعادله جواب ندارد.

مثال ۳. معادله زیررا حل‌کنید.

$$2\cos^2\frac{x^2+x}{6}=2^x+2^{-x}$$

حل. بدیهی است که دراینجا رسم نمودار دوطرف‌کار ساده‌ای نیست اما ازخاصیت نمودارهادرحل معادلات استفاده‌می‌کنیم. می‌دانیم به‌ازای جمیع مقادیر x،

$$2\cos^2\frac{x^2+x}{6}\leqslant 2$$

و

$$2^x+2^{-x}\geqslant 2$$

زیرا اگر $a>0$ آنگاه داریم $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$.

بنابراین دراین حالت مسئله جواب‌خواهد داشت. اگردستگاه

$$\begin{cases} 2\cos^2\frac{x^2+x}{6}=2\\ 2^x+2^{-x}=2\end{cases}$$

جواب داشته باشد. معادله دوم دستگاه جواب منحصر به فرد $x=0$ را دارد. این جواب درمعادله اول دستگاه هم صدق می‌کند پس تنها جواب $x=0$ است.

مثال. معادله زیر را حل‌کنید.

$$\cos^7 x+\sin^4 x=1$$

حل. چون $\cos^7 x\leqslant\cos^2 x$ و $\sin^4 x\leqslant\sin^2 x$ پس سمت چپ معادله از ۱ تجاوز نمی‌کند. و وقتی برابر یك است که داشته‌باشیم

$$\begin{cases} \cos^7 x=\cos^2 x\\ \sin^4 x=\sin^2 x\end{cases}$$

$x=2k\pi$ درمعادله اول و دوم صدق می‌کند. اگر $x=\frac{\pi}{2}$ آنگاه $\cos x=0$ و $\sin x=1$ هم در هر دومعادله صدق می‌کند. پس به‌طورکلی

$$x=2k\pi,\ x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

(k عدد صحیح است.) جوابهای دستگاه هستند.

مثال ۵. معادله زیررا حل‌کنید.

$$\sin^4 x-\cos^7 x=1$$

حل. استدلالی‌که درمسئله قبل به‌کاربردیم دراینجاکارساز نیست اما می‌توان با تغییراتی‌آن روش را در ادامه حل این مسئله‌هم به‌کار برد.

به‌آسانی نتیجه‌می‌گیریم که $0\leqslant\cos^7 x$ (وگرنه $\sin^4 x>1$)

پس $\cos x \leqslant 0$ اما درآن صورت

$$|\cos^7 x| = -\cos^7 x$$

ومعادله به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sin^4 x + |\cos x|^7 = 1$$

اکنون بنا بر مسئله قبل می‌توان نوشت:

$$\sin^4 x \leqslant \sin^2 x \text{ ، } |\cos x|^7 \leqslant \cos^2 x$$

پس دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \sin^4 x = \sin^2 x \\ |\cos x|^7 = \cos^2 x \end{cases}$$

$|\cos x| = 0$ و $|\cos x| = 1$ در معادله دوم صدق می‌کنند
از $|\cos x| = 0$ نتیجه می‌شود.

$$x = \frac{\pi}{2} + K\pi, \ (K = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

که درمعادله اول هم صدق می‌کند.
اما اگر $|\cos x| = 1$، آنگاه $\cos x = -1$ (زیرا $\cos x \leqslant 0$) و $x = (2k+1)\pi$، این جواب نیز در معادله اول‌صدق می‌کندبنا براین جوابهای معادله اصلی عبارت‌است‌از

$$x = \frac{2}{\pi} + k\pi, \ x = (2k+1)\pi, \ (k \in Z)$$

- دراینجا راه حل دیگری هم وجود دارد که تنها معادله را به یکی ازمعادلات قبل‌تبدیل می‌کند. مثلا با تبدیل x به $(\pi - y)$ داریم

$$\sin^2(\pi - y) - \cos^7(\pi - y) = 1$$

یا

$$\sin^4 y + \cos^7 y = 1$$

که دربالا موردبررسی قرارگرفت و ریشه‌های آن عبارتند از.

$$y = \frac{2}{\pi} + k\pi, \ y = 2k\pi$$

چون $x = \pi - y$ پس $x = \pi - 2k\pi$ و $x = \frac{2}{\pi} - k\pi$

(k عدد صحیح است.)

مراجع:

۱) شهریاری‌رضا، نمودار $f(x-a)$، رشدآموزش ریاضی، ۶ـ۵ (۱۳۶۴).

۲) دارابی ابراهیم، آمادگی برای کنکورها و المپیادها، انتشارات نویا.

بقیه از صفحهٔ ۳

رسانیده است. بعد از اعلام رسمی تغییر نظام، شورای ریاضی و هیات تحریریه رشد ریاضی مؤلفین کتب سال اول (ریاضی ۱، هندسه ۱) را انتخاب کرده که هم‌اکنون این دو کتاب آماده شده است.

بعد از انتشار سر فصل دروس ریاضی دبیرستان تحت عنوان: ریزمواد آنالیز، جبر، هندسه، ریاضیات کاربردی، **انتظار هیأت تحریریه از همکاران دبیرستانی و دبیران ارجمند این بوده و هست که بر اساس تجربیات ارزنده خود و با دیدی نقادانه به‌این ریزمواد بنگرند و مؤلفین کتب جدید را با ارائهٔ دیدگاههای خود رهنمون باشند.**

در برنامه‌ریزی ریاضی سعی شده است که این کتب با شیب ملایم دنبالهٔ راهنمایی شروع شود. در کتب سال اول توجه بیشتر به‌روشها است و از ورود به‌مفاهیم دقیق اجتناب شده است. در کتب بعدی توجه به ریاضیات کاربردی و گسسته بیشتر خواهد شد. قرار است که کتابها از هر نظر هم‌آهنگ شوند. بعضی از اثباتهای دقیق به سال سوم و دورهٔ پیش‌دانشگاهی ارجاع می‌شود. روش آموزش حلزونی به‌شدت مورد توجه قرار خواهد گرفت یعنی با تکرار و افزایش دقت در دوره چهارساله به‌تدریج بعضی از مفاهیم دقیق و قضایا تدریس خواهد شد. اما باید توجه داشت که هر گونه تغییر برنامه می‌تواند درصد کمی (مثلا بیست درصد) از تغییر مباحث را تحمل کند و در غیر این صورت موفق نخواهد بود. این تغییر کمی نیز مورد توجه قرار خواهد گرفت. البته در نظام فعلی کتاب کامپیوتر وارد برنامه شده است و این اقدام، در واقع یکی از اقدامات اساسی فعلی است. امروزه نقش مهم رایانه‌ها بر هیچ کس پوشیده نیست. این کتاب در برنامهٔ جدید هم ملحوظ شده است. نباید پنداشت که به‌کارگیری و استفاده از کامپیوتر و ماشین موجب تنبلی فکری دانش‌آموزان است و نباید تصور کرد که به‌کار بردن کامپیوتر ابتکار و خلاقیت محصلین را کاهش می‌دهد.

اما سخن آخر، موفقیت یک برنامه خوب منوط به‌اجرای خوب آن است. در اجرای نظام جدید آموزشی باید در مورد بازآموزی دبیران فکر اساسی شود که به سرمایه‌گذاری مناسبی نیاز دارد. باید دفاتر آموزشهای ضمن خدمت عنایت خاصی نسبت به‌این برنامه داشته باشد و از هیچ کوشش و تلاشی جهت اجرای خوب و مفید دوره‌های بازآموزی دریغ ننماید. در غیر این صورت اهداف تدوین کتب جدید ریاضی عملی نشده و مسلما نتیجهٔ مطلوب حاصل نخواهد شد، والسلام.

روش ساده‌ای برای به‌دست آوردن سری مکلوران سینوس و کسینوس

ترجمه: محمود نصیری

روش معمولی یافتن سری مکلوران برای توابع سینوس وکسینوس ازطریق مشتقگیری شناخته شده‌اند. دراین‌یادداشت نشان می‌دهیم که چگونه انتگرالگیری می‌تواند برای به‌دست آوردن این دوسری و اثبات همگرائی آنها به‌توابع سینوس وکسینوس به‌کار می‌رود.

آشکار است‌که برای انجام این کار کافی است که $x\geqslant 0$ چون $\cos x\leqslant 1$ ، $\int_0^x co\, y\,dy \leqslant \int_0^x dy$. یعنی، $\sin x\leqslant x$. از اینجا، $\int_0^x \sin y\,dy\leqslant\int_0^x y\,dy$ نتیجه می‌شود. یعنی، $1-\cos x\leqslant \frac{x^2}{2!}$. با ادامه این روش، نامساویهای زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$1-\frac{x^2}{2!}\leqslant \cos x\leqslant 1$$

$$x-\frac{x^3}{3!}\leqslant \sin x\leqslant x$$

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\leqslant \cos x\leqslant 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\leqslant \sin x\leqslant x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$

هنوز فرض $x\geqslant 0$ پابرجاست، با به‌کاربردن استقراء می‌توان ثابت‌کرد

$$S(2r)\leqslant \cos x\leqslant S(2r-1)$$

و

$$T(2r)\leqslant \sin x\leqslant T(2r-1)$$

که به‌ازای $r=1,2,\dots,$

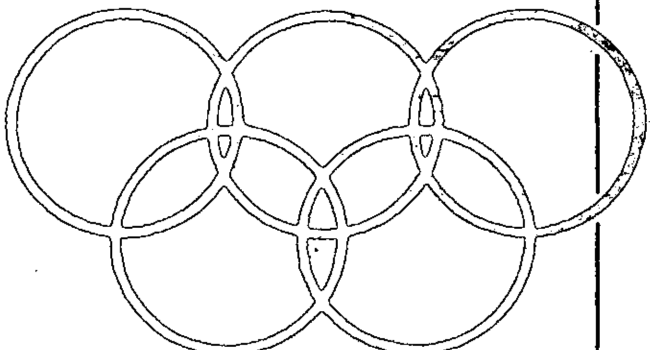
$$S(k)=1+\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i\,\frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

$$T(k)=\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\,\frac{x^{2i-1}}{(2i+1)!}$$

کرانهای بالا و پائین دارای اختلاف $\frac{x^m}{m!}$ هستند،که برای x ثابت، به‌آسانی‌می‌توان‌نشان دادکه‌وقتی‌که $m\to\infty$، به‌سمت صفر میل می‌کند.

مرجع:

MATHEMATICAL MONTHLY November 1990, p 836.



حل مسائل سی‌و دومین المپیاد ریاضی سوئد

ترجمه‌و تنظیم: محمود نصیری

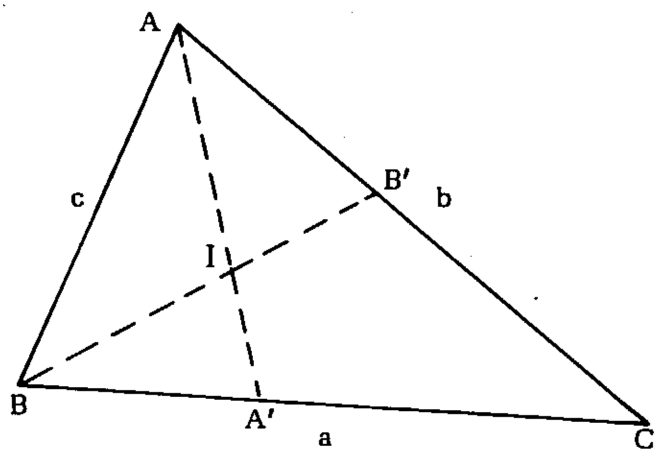
۱ـ در مثلث ABC فرض می‌کنیم I مرکز دایره محاطی باشد ونیمسازهای داخلی زوایای A وB وC اضلاع مقابل را به ترتیب در A' وB' وC' قطع کنند ثابت کنید:

$$\frac{1}{4}<\frac{AI\cdot BI\cdot CI}{AA'\cdot BB'\cdot CC'}\leqslant\frac{8}{27}$$

حل. نیمسازهای داخلی مثلث را به d_a وd_b وd_c نشان می‌دهیم، درمثلث ABA'،

لذا $$\frac{IA}{IA'}=\frac{c}{BA'}=\frac{c}{\frac{ac}{b+c}}=\frac{b+c}{a}$$

$$\frac{IA}{d_a}=\frac{b+c}{a+b+c}=\frac{b+c}{2P}$$



و به‌همین‌ترتیب،

$$\frac{IB}{d_b}=\frac{a+c}{2P}\quad,\quad\frac{IC}{d_c}=\frac{a+b}{2P}$$

لذا، بنا به نامساوی واسطه حسابی وهندسی داریم:

$$\frac{IA\cdot IB\cdot IC}{d_a d_b d_c}=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(2P)^3}\leqslant$$

$$\frac{1}{27}\left(\frac{a+b}{2P}+\frac{b+c}{2P}+\frac{c+a}{2P}\right)^3=\frac{1}{27}(2)^3=\frac{8}{27}$$

برای اثبات طرف دیگر، ازاحکام زیر استفاده می‌کنیم.

۱) اگر $x+y=x_1+y_1$ و $|x-y|<|x_1-y_1|$ آنگاه $x^3+y^3<x_1^3+y_1^3$ ، (x، y، x_1 و y_1 اعداد حقیقی مثبت‌اند).

۲) برای هر سه‌عددحقیقی a، b و c تساوی زیر برقرار است.

$$3(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3.$$

فرض می‌کنیم $a\geqslant b\geqslant c$، چون $\frac{a+b+c}{2}>0$

و $$\frac{a+b+c}{2}-\frac{a+b-c}{2}=c>|a-b|،$$

$$\frac{a+b+c}{2}>\left|\frac{a+b-c}{2}-c\right|$$

بنابراین،

$$\frac{IA\cdot IC\cdot IC}{d_a\cdot d_b\cdot d_c}=\frac{(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3}{3(a+b+c)^3}>$$

$$\frac{(a+b+c)^3-\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^3-\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^3-c^3}{3(a+b+c)^3}>$$

$$\frac{(a+b+c)^3-\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^3-\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^3-0^3}{3(a+b+c}=\frac{1}{4}$$

۲ـ فرض می‌کنیم $n>6$ یك‌عددصحیح باشدو«$a_1,a_2,\dots,a_k$» تمام‌اعدادطبیعی باشندکه از n کوچکتراند ونسبت به n اول‌اند. اگر $a_2-a_1=a_3-a_2=\dots=a_k-a_{k-1}>0$ ثابت کنید n یا اول است ویا به‌صورت توان صحیحی‌از۲می‌باشد.

حل. داریم $a_1=1$ و $a_2=p$، که p کوچکترین عدد اول است که n را عاد نمی‌کند؛ $a_k=n-1$ وتفاضل بین‌دوجمله متوالی ازاین تصاعد را به $r=p-1$ نشان می‌دهیم.

۱) اگر n فردباشدآنگاه $a_2=2$ ، $r=1$ وتصاعدبه‌صورت

«$n-1, \dots, 2, 1$» است. چون از $q<n$ به‌دست می‌آید $(q,n)=1$، از این‌جا نتیجه می‌گیریم که n عددی اول است.

۲) اگر n زوج باشد نتیجه می‌گیریم که $p \geqslant 3$.

a) اگر $p=3$ آنگاه $r=2$ و تصاعد «$1, 3, 5, \dots, n-1$» است.

چون برای هر عدد فرد q که، $q<n$ داریم $(q,n)=1$ نتیجه می‌گیریم $n=2^m$.

b) اگر $p>3$ نتیجه می‌گیریم $3|n$.

داریم $a_k=a_1+r(k-1)$، بنابراین

$$n-1=1+(p-1)(k-1)$$

که از آن به‌دست می‌آید

$$(1) \qquad p-1|n-2$$

فرض کنیم q عدد اولی باشد به‌طوری‌که $q|p-1$. از (۱) نتیجه می‌گیریم $q|n-2$ چون $q<p$ از آن نتیجه می‌گیریم $q|n$.

چون $q|n-2$ و $q|n$ نتیجه‌می‌گیریم $q|2$، بنابراین، $q=2$.

چون تمام عاملهای اول $p-1$ برابر ۲ می‌باشند، لذا $p-1=2^l$، یا $p=2^l+1$، که $l \geqslant 2$.

اما p یك عدد اول است، بنابراین $l=2^t$ و $p=2^{2^t}+1$، که $t \geqslant 1$.

داریم،

$$a_2=a_1+2r=1+2(p-1)=2p-1=2^{2^t+1}+1،$$

که بر ۳ بخش‌پذیر است.

اما $3|a_2$ و $3|n$ با $(a_2,n)=1$ متناقض است. اثبات حکم تمام است.

۳- فرض می‌کنیم

$$S=\{1, 2, \dots, 280\}$$

کوچکترین عدد طبیعی n را بیابید به‌طوری که در هر زیر مجموعه n‌عضوی از S پنج‌عدد وجود داشته‌باشد که دو به دو نسبت به‌هم اول باشند.

حل. فرض کنیم $A_1=\{k \in S : 2|k\}$،

$A_2=\{k \in S : 3|k\}$ ، $A_3=\{k \in S : 5|k\}$

$A_4=\{k \in S : 7|k\}$ و $A=A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

داریم

$|A_1|=140$ ، $|A_2|=93$ ، $|A_3|=56$، $|A_4|=40$.

به‌طور مشابه

$|A_1 \cap A_2|=46$، $|A_1 \cap A_3|=28$، $|A_1 \cap A_4|=20$

$|A_2 \cap A_3|=18$ و $|A_2 \cap A_4|=13$ ، $|A_3 \cap A_4|=8$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|=9$ ، $|A_1 \cap A_2 \cap A_4|=6$ ،

$|A_1 \cap A_3 \cap A_4|=4$ ، $|A_2 \cap A_3 \cap A_4|=2$ ،

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|=1$.

به‌وسیله اصل شمول وعدم شمول

$$\begin{aligned}|A| &= |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \\ &= 140+93+56+40-46-28-20-18 \\ &\quad -13-8+9+6+4+2-1=216.\end{aligned}$$

بنابر اصل لانه‌کبوتری، برای هر پنج‌عضو A، دوتا از آنها وجوددارند که به‌یك A_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ تعلق‌دارند، لذا، این دوعددنسبت به‌هم اول‌نیستند. بنابراین ثابت‌کردیم $n>216$.

ازطرف دیگر، فرض‌کنیم $B_1=A-\{2,3,5,7\}$،

$$B_2=\{11^2, 11\times 13, 11\times 17, 11\times 19, 11\times 23, 13^2, 13\times 17, 13\times 19\}$$

و $P=S-\{B_1 \cup B_2\}$.

مشاهده می‌کنیم که $|P|=|S|-|B_1|-|B_2|=60$ و P شامل ۱ و کلیهٔ اعداد اولی است‌که در S می‌باشند.

فرض کنیم T زیر مجموعه‌ای از S باشد به‌طوری که $|T|=217$.

نشان‌می‌دهیم T شامل ۵ عدداست‌که دوبه‌دونسبت به‌هم‌اول‌اند. واضح‌است که بایدفقط‌حالتی‌رابررسی‌کنیم که $|T \cap P| \leqslant 4$.

درچنین‌حالتی

$|T \cap (S-P)| \geqslant 217-4=213$، یعنی، در بین تمام اعداد مرکب در S (تعداد کل $|S-P|=220$ است)، حداکثر ۷ عضو وجود دارد به‌طوری‌که در T نیستند.

فرض‌کنیم M_1، M_2، ...، M_8 به‌ترتیب‌نشان‌دهنده‌مجموعه‌های زیر باشند

$\{2\times 23, 3\times 19, 5\times 17, 7\times 13, 11\times 11\}$,

$\{2\times 29, 3\times 23, 5\times 19, 7\times 17, 11\times 13\}$,

$\{2\times 31, 3\times 29, 5\times 23, 7\times 23, 11\times 17\}$,

$\{2\times 37, 3\times 31, 5\times 29, 7\times 23, 11\times 19\}$,

$\{2\times 41, 3\times 37, 5\times 31, 7\times 29, 11\times 23\}$,

$\{2\times 43, 3\times 41, 5\times 37, 7\times 31, 13\times 17\}$,

$\{2\times 47, 3\times 43, 5\times 41, 7\times 37, 13\times 19\}$,

$\{۲^۲ , ۳^۲ , ۵^۲ , ۷^۲ , ۱۳^۲\}$

آشکار است که $M_i \subset S-P$، $i=۱,۲,\dots,۸$.
به‌وسیلهٔ اصل لانه‌کبوتری $i_\circ$ای، وجود دارد به‌طوری که $۱ \leqslant i \leqslant ۸$ و $M_{i_\circ} \subset T$.
پنج عضو $M_{i_\circ}$ نسبت به‌یکدیگر اول‌اند
از آن‌چه گفته شد، نتیجه می‌گیریم که $n=۲۱۷$.

۴- فرض می‌کنیم G یك شکل متصل باشد که دارای K پاره خط است. ثابت کنید می‌توان پاره‌خطهای G را با اعداد $۱,۲,۳,\dots,K$ طوری نام‌گذاری کرد به‌طوری‌که درهر رأس که از آن دو یا بیشتر پاره‌خط می‌گذرد بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك تمام اعداد وابسته به‌این پاره‌خطها برابر ۱ باشد.
(یك شکل G از مجموعه‌ای از نقاط بنام رئوس و مجموعه‌ای از پاره‌خطها که برخی ازرئوس متمایز را به‌هم وصل می‌کند تشکیل شده‌است، و از هردورأس u و v حداکثر یك پاره‌خط می‌گذرد.)
G یك شکل متصل است اگر برای هردورأس متمایز $\{x,y\}$ دنباله‌ای از رئوس مانند

$$x=V_\circ , V_۱ , \dots , V_m = y$$

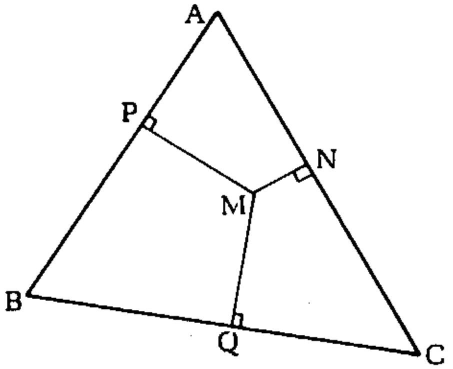
وجود داشته باشد به‌طوری که از هر دو رأس V_i و $V_{i+۱}$، $(\circ \leqslant i < m)$ یك پاره‌خط واقع در G بگذرد)،

حل. از رأسی مانند $v_\circ$ شروع می‌کنیم.
درطول اضلاع متمایز شکل حرکت کرده وآنها را با ۱،۲،... طوری شماره‌گذاری می‌کنیم که از روی تمام آنها عبور کرده باشیم، وامکان جلورفتن روی‌شکل میسر نباشد مگر آنکه از یك ضلع دوبار عبور کنیم.
اگر هنوز ضلعهائی وجود داشته باشند که شماره‌گذاری نشده باشند، یکی از آنها رأسی دارد که از آن عبورکرده‌ایم، چه درغیراین‌صورت G نمی‌تواند متصل باشد.
ازاین‌رأس شروع می‌کنیم، حرکت را روی اضلاعی که به‌کار نرفته‌بودند ادامه می‌دهیم، شماره‌گذاری را از قسمتهائی که جاافتاده‌باشند ازسرمی‌گیریم. سرانجام متوقف می‌شویم. این عمل‌را همان‌گونه که توضیح داده‌شد تکرار می‌کنیم تا تمام اضلاع شماره‌گذاری شوند.
فرض‌کنیم v رأسی باشد که ازآن e ضلع گذاشته باشد، که $e \geqslant ۲$. اگر $v=v_\circ$ آنگاه v روی ضلع ۱ است، بنابراین، بزرگترین‌مقسوم‌علیه مشترك‌در v برابر ۱ است. اگر $v \neq v_\circ$، فرض‌کنیم اولین‌دفعه که به‌رأس v می‌رسیم در انتهای رأس r باشد. دراین موقع $e-۱ \geqslant ۱$ ضلع به‌کارنرفته‌وجود داردکه با v متقاطع‌اند، بنابراین، یکی از آنها $r+۱$ شماره‌گذاری شده‌است. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك هرمجموعه شامل r و $r+۱$ برابر ۱ است.

۵- فرض می‌کنیم M یك نقطه در درون مثلث ABC باشد ثابت‌کنید حداقل یکی از زوایای $\angle \widehat{MAB}$ یا $\angle \widehat{MBC}$ یا $\angle \widehat{MCA}$ کوچکتر یا مساوی ۳۰° است.

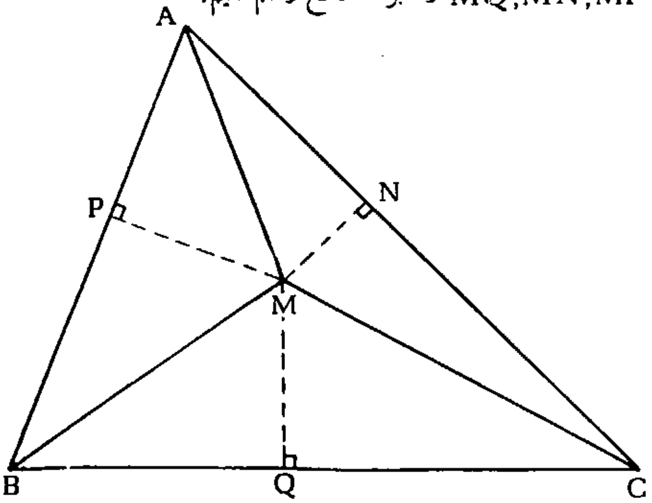
حل. قبل‌از حل‌مساله نامساوی زیر راکه به نامساوی «اردش-مردل» معروف است بیان وثابت می‌کنیم. هرگاه M نقطه‌ای درون‌مثلث ABC باشد و از M سه‌عمود MQ, MN, MP را بر سه‌ضلع مثلث رسم‌کنیم آنگاه

$$MA+MB+MC \geqslant ۲(MP+MN+MQ)$$



شکل ۲

اکنون‌فرض‌کنیم هرسه‌زاویه‌ $\angle MAB, \angle MBC, \angle MBC$ بزرگتر از ۳۰° باشند. درآن صورت اگر از M سه عمود MQ, MN, MP را برسه‌ضلع رسم‌کنیم.



شکل ۳

$$MP > \frac{۱}{۲} MA \text{ ، } MQ > \frac{۱}{۲} MB \text{ ، } MN > \frac{۱}{۲} MC$$

یا

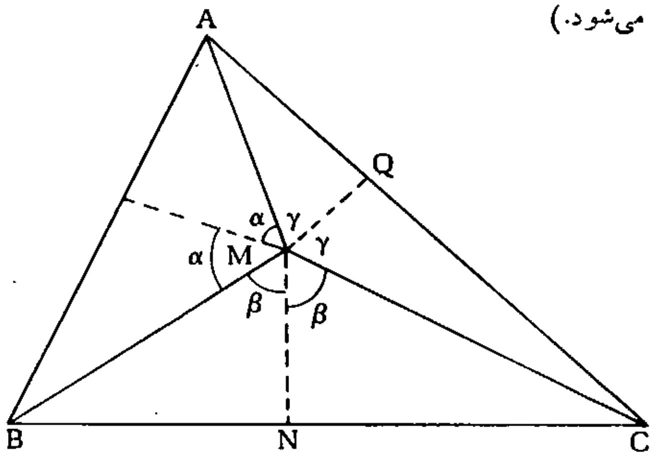
$$۲(MP+MQ+MN) > (MA+MB+MC)$$

که متناقض با نامساوی اردیش-مردل است.
اکنون نامساوی زیر را که تعمیم نامساوی اردیش-مردل است بیان و ثابت می‌کنیم:

هرگاه M نقطه‌ای درون مثلث ABC و MP، MN و MQ به‌ترتیب نیمسازهای زوایای $\angle AMB$، $\angle BMC$ و $\angle CMA$ باشند آنگاه

$$MP+MN+MQ\leqslant \frac{1}{2}(MA+MB+MC)$$

(واضح است که نامساوی اردیش-مردل از این مسأله نتیجه می‌شود.)



شکل ۴

نصف هر یک از زوایای AMB, BMC, CMA را به α، β و γ نشان می‌دهیم. چنین‌داریم:

$$S_{AMB}=\frac{1}{2}MA\cdot MB\,\mathrm{Sin}\,2\alpha$$

$$=\frac{1}{2}MA\cdot MP\,\mathrm{Sin}\,\alpha+\frac{1}{2}MB\cdot MP\,\mathrm{Sin}\,\alpha$$

لذا

$$2MA\cdot MB\,\mathrm{Cos}\,\alpha=MP(MA+MB)$$

و بنا به نامساوی واسطه حسابی و هندسی

$$MA+MB\geqslant 2\sqrt{MA\cdot MB}$$

بنا بر این

$$\sqrt{MA\cdot MB}\,\mathrm{Cos}\,\alpha\geqslant MP$$

و به‌همین‌ترتیب

$$\sqrt{MB\cdot MC}\,\mathrm{Cos}\,\beta\geqslant MN$$

و

$$\sqrt{MC\cdot MA}\,\mathrm{Cos}\,\gamma\geqslant MQ$$

از جمع سه‌رابطه فوق داریم:

$$\sqrt{MA\cdot MB}\cos\alpha+\sqrt{MB\cdot MC}\cos\beta+\sqrt{MC\cdot MA}\cos\gamma\geqslant MP+MN+MQ$$

اما،

$$(*)\ \frac{1}{2}(MA+MB+MC)\geqslant\sqrt{MA\cdot MB}\cos\alpha+\sqrt{MB\cdot MC}\cos\beta+\sqrt{MC\cdot MA}\cos\gamma$$

و لذا نامساوی ثابت است.

برای اثبات نامساوی (*) از نامساوی زیر استفاده کرده‌ایم،

هرگاه $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ و x,y,z سه‌عدد مثبت باشند آنگاه

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2xy\cos\alpha+2yz\cos\beta+2xz\cos\gamma$$

برای اثبات این نامساوی گوئیم:

$$(x-y\cos\alpha-z\cos\gamma)^2+(y\sin\alpha-z\sin\gamma)^2\geqslant 0$$

یا

$$x^2+y^2\cos^2\alpha+z^2\cos^2\gamma-2xy\cos\alpha-2xz\cos\gamma+2yz\cos\alpha\cos\gamma+x^2\sin^2\alpha+z^2\sin^2\gamma-2yz\sin\alpha\sin\gamma\geqslant 0$$

یا

$$x^2+y^2+z^2-2xy\cos\alpha-2xz\cos\gamma+2yz(\cos(\alpha+\gamma))\geqslant 0$$

اما $\cos(\alpha+\gamma)=-\cos\beta$

و اثبات کامل است.

حال اگر درنامساوی فوق $x=\sqrt{AM}$ و $y=\sqrt{MB}$ و $z=\sqrt{MC}$ اختیار کنیم نامساوی (*) ثابت می‌شود.

۶- گوئیم دنباله نامتناهی «$x_0,x_1,x_2,\ldots$» از اعداد حقیقی کراندار است اگر عدد ثابتی مانند u وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $i\geqslant 0$ داشته‌باشیم $|x_i|\leqslant u$، عددحقیقی

$a>1$ داده‌شده‌است. یك دنباله نامتناهی کرانـدار از اعداد مانند «$x_0, x_1, x_2, \ldots$» بسازید به‌طوری‌که برای هر دو عدد صحیح و نامنفی i, j که $i\neq j$ داشته‌باشیم

$$|x_i-x_j|\,|i-j|^a\geqslant 1$$

حل. بسط هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت منحصر به‌فردی در مبنای دو نمایش داد.

فرض کنید

$$i=b_0+b_1 2+b_2 2^2\times\cdots+b_k 2^k$$

که $b_i\in\{0,1\}$ و $k\in N$.

تعریف کنید:

$$h_i=b_0+b_1 2^{-a}+b_2 2^{-2a}+\cdots+b_k 2^{-ka}$$

بنابراین،

$$0\leqslant h_i\leqslant 1+2^{-a}+2^{-2a}+\cdots+2^{-ka}\leqslant\frac{1}{1-2^{-a}}$$

j را متمایز از i می‌گیریم $(i\neq j)$، به‌طوری‌که

$$j=c_0+c_1 2+\cdots+c_k 2^k \quad,\quad c_i\in\{0,1\}$$

و فرض می‌کنیم

$$t=\mathrm{Min}\{P\in\{0,1,2,\ldots k\}\,|\,b_p\neq c_p\}$$

پس،

$$|h_i-h_j|=|(b_0-c_0)+(b_1-c_1)2^{-a}$$
$$+(b_2-c_2)2^{-2a}+\ldots(b_k-c_k)2^{-2ka}|\geqslant$$
$$|(b_t-c_t)2^{-ta}|-|(b_{t+1}-c_{t+1})2^{-(t+1)a}|$$
$$-\ldots|(b_k-c_k)2^{-ka}|$$

$$\geqslant 2^{-ta}-\frac{2^{-(t+1)a}}{1-2^{-a}}=2^{-ta}\left(1-\frac{2^{-a}}{1-2^{-a}}\right)$$

$$=(2^t)^{-a}\left(\frac{2^a-2}{2^a-1}\right)\geqslant\left(\frac{2^a-2}{2^a-1}\right)|i-j|^{-a}$$

چون $2^t\leqslant|i-j|$. بنابراین

$$|h_i-h_j|\cdot||i-j|^{-a}\geqslant\frac{2^a-2}{2^a-1}$$

تعریف کنید:

$$x_i=\frac{2^a-2}{2^a-1}h_i$$

ارتباط متناوب بودن یك تابع با وجود مرکز تقارن برای آن و برعکس

سید احمد حسن‌پور دبیر دبیرستانهای بابل

I: می‌دانیم اگر f متناوب باشد لزوماً دارای مرکز تقارن نیست مانند $f(x)=\sin x-\sin^2 x$ که متناوب است $(T=2K\pi)$ اما دارای مرکز تقارن نیست.

اثبات (فرض خلف) فرض می‌کنیم $\omega\left|\begin{array}{l}\alpha\\ \beta=f(\alpha)\end{array}\right.$ مرکز تقارن باشد وهمچنین فرض می‌کنیم که قرینه

$$P\left|\begin{array}{l}x\\ g=f(x)=\sin x-\sin^2 x\end{array}\right.$$

نسبت به نقطه $\omega\left|\begin{array}{l}\alpha\\ \beta=f(\alpha)\end{array}\right.$ ، $P'\left|\begin{array}{l}x\\ y=f(x)\end{array}\right.$ باشد، دراین صورت:

$$P'\left|\begin{array}{l}X=2\alpha-x\\ f(X)=f(2\alpha-x)\end{array}\right.$$
$$=\sin(2\alpha-x)-\sin^2(2\alpha-x)=2\beta-y$$

یا:

$$\sin(2\alpha-x)-\sin^2(2\alpha-x)=2(\sin\alpha-\sin^2\alpha)$$
$$-(\sin x-\sin^2 x)$$

برای نشان دادن عدم وجود α دونقطه مشخص P_1 و P_2 را در نظر می‌گیریم:

$$P_1\left|\begin{array}{l}x=3\pi/2\\ y=-2\end{array}\right. \quad (1)\ \sin(2\alpha-3\pi/2)$$

$$-\sin^2\left(2\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=2(\sin\alpha-\sin^2\alpha)+2$$

$$P_2\left|\begin{array}{l}x=\pi/2\\ y=0\end{array}\right. \quad (2)\ \sin(2\alpha-\pi/2)$$

$$-\sin^2\left(2\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=2(\sin\alpha-\sin^2\alpha)-0$$

با مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\cos 2\alpha-\cos^2 2\alpha-2=-\cos 2\alpha-\cos^2 2\alpha$$

یعنی، $\cos 2\alpha=1$ پس $\alpha=K\pi$.

پس مرکز تقارن موردنظر $\omega\left|\begin{array}{l}K\pi\\ 0\end{array}\right.$ است و P و Q بامختصات زیر باید قرینه باشند:

$$P\left|\begin{array}{l}3\pi/2\\ -2\end{array}\right. \quad Q\left|\begin{array}{l}2K\pi-3\pi/2\\ 0+2\end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow 2=\sin(2K\pi-3\pi/2)-\sin^2(2K\pi-3\pi/2)$$

واین‌تساوی درست‌نیست وتناقض‌است زیرا ازآن نتیجه‌می‌شود که $2=0$

II: اگر f متناوب باکوچکترین‌دوره تناوب T باشد ودرفاصله یك دوره تناوب مرکز تقارن داشته باشد، آنگاه‌بیشمار مرکز تقارن دارد.

اثبات. فرض می‌کنیم $\omega_1\left|\begin{array}{l}\alpha\\ \beta\end{array}\right.$ مرکز تقارن تابع f باشد که $f(x+T)=f(x)$ ثابت می‌کنیم نقطه $\omega_2\left|\begin{array}{l}\alpha+T\\ \beta\end{array}\right.$ نیزمرکز تقارن است.

اگر نقطه دلخواه $P\left|\begin{array}{l}x\\ y=f(x)\end{array}\right.$ نقطه دلخواهی از f باشد

چون $\omega_1\left|\begin{array}{l}\alpha\\ \beta\end{array}\right.$ مرکزتقارن است پس P' قرینه P هم بر f واقع است:

$$P'\left|\begin{array}{l}x_1=2\alpha-x\\ y_1=2\beta-y\Longrightarrow y_1=f(x_1)=f(2\alpha-x)\end{array}\right.$$

حالا ثابت می‌کنیم قرینه $P\left|\begin{array}{l}x\\ y=f(x)\end{array}\right.$ نسبت به $\omega_2\left|\begin{array}{l}\alpha+T\\ \beta\end{array}\right.$ روی f واقع است.

قرینه P را $Q\left|\begin{array}{l}X\\ Y\end{array}\right.$ می‌نامیم:

$$Q\left|\begin{array}{l}X=2(\alpha+T)-x\\ Y=2\beta-y\quad Y=f(X)=f(2\alpha+2T-x)\end{array}\right.$$

$$=f(2\alpha-x)=2\beta-y.$$

به‌همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که $\omega\left|\begin{array}{l}\alpha+KT\\ \beta\end{array}\right.$ هم مرکز تقارن تابع است $(K\in Z)$.

$$P\left|\begin{array}{l}x\\ y=f(x)\end{array}\right. \text{ قرینه‌p نسبت‌به}\ \omega \quad P''\left|\begin{array}{l}X=2(\alpha+KT)-x\\ Y=2\beta-y\end{array}\right.$$

پس، $\Longrightarrow f(X)=f(2\alpha+2KT-x)=f(2\alpha-x)$

$$\Longrightarrow f(X)=2\beta-y=Y.$$

حتی می‌توان ثابت‌کرد که $\omega'\left|\begin{array}{l}\alpha+\frac{T}{2}\\ \beta\end{array}\right.$ هم مرکز تقارن است.

$$P\left|\begin{array}{l}x\\ y=f(x)\end{array}\right. \xrightarrow{\text{قرینه P نسبت به } \omega'} P_1$$

$$P_1\left|\begin{array}{l}X=2(\alpha+T/2)-x\\ Y=2\beta-y\end{array}\right.$$

$$f(X)=f\left(2\alpha+\frac{2T}{2}-x\right)=f(2\alpha+T-x)$$

$$=f(2\alpha-x)=2\beta-y.$$

بقیه در صفحه ۶۶

مسائل ویژه دانش آموزان

تهیه و تنظیم از جواد لآلی

آنچه‌که دراین بخش موردنظر است فراهم آوردن مخزنی ازمسائل جالب ومتنوع است تا مرجعی مناسب برای دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز باشد. ازطرفی هردبیر درحین تدریس ممکن است مسائل جالبی را طرح کند ویا، درحین مطالعه‌کتابها یا مجلات، به‌مسائل جالبی برخورد نماید. جمع‌آوری این‌گونه مسائل، دراین ستون ازمجله، منبع خوبی برای استفاده دیگران خواهد شد. تقاضای ما از دبیران محترم این است‌که مسائلی راکه به‌نظرشان جالب است، وحل آن برای دانش‌آموزان مفید تشخیص می‌دهند، با راهنمایی کوتاه، برایمان‌ارسال دارند تا با درج آن دراین‌قسمت به‌جمع‌آوری آن‌کمک‌کرده باشند.

مسائل این قسمت ازساده به مشکل واز سال اول تا چهارم تنظیم یافته است‌وسعی ما براین بوده است‌که هردانش‌آموزی از دوران‌متوسطه، مسائل‌مربوط به‌خود را دربین مسائل بیابد. بعضی ازمسائل بسیارساده‌اندکه نیازی به‌راهنمایی نداشته‌اند؛ وبرخی دیگرکه‌کمی مشکل‌است با راهنمایی‌کافی درج‌گردیده است. تقاضای ما ازخوانندگان‌گرامی‌این است‌که برهان‌این نوع مسائل را برای ما نفرستند، مگر آنکه راه‌حلی، ابتکاری، کوتاه وغیراز راه‌حل راهنمایی شده داشته باشد.

۱) فرض‌کنید که

$$A_1=\{2, 3, 4, \dots, 100\}$$
$$A_2=\{5, 6, 7, \dots, 99\}$$
$$A_3=\{8, 9, 10, \dots, 98\}$$
$$\dots \qquad \dots$$

دراین‌صورت، کوچکترین عدد طبیعی‌که به‌ازای‌آن مجموعهٔ $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ تهی باشد چیست؟

راهنمایی: صورت عمومی چنین مجموعه‌هایی به‌شکل

$$A_n=\{3n-1, 3n, 3n+1, \dots, 101-n\}$$

است،که $\dots \subset A_2 \subseteq A_1$. بنابراین، باید به‌دنبال‌کوچکترین عدد طبیعی، مانند n، باشیم‌که $A_n=\varnothing$.

۲) دستگاه زیررا حل‌کنید.

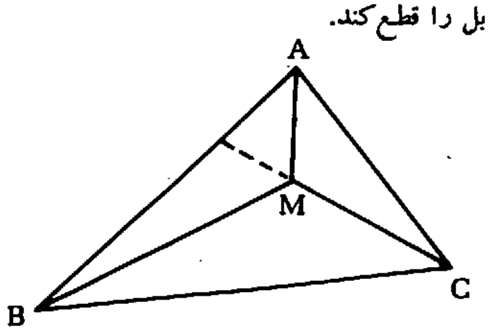
$$\begin{cases} x+2y+3z+4t=5 \\ y+2z+3t+4x=7 \\ z+2t+3x+4y=1 \\ t+2x+3y+4z=7 \end{cases}$$

راهنمایی: طرفین معادلات را جمع‌کنید، سپس، با معادله‌ایکه ازتفاضل اولی و دومی حاصل می‌شود تشکیل یك دستگاه‌دهید. ازآنجا نتیجه می‌شودکه $x=1$. بهمین ترتیب، $y=-1$، $z=2$، و $t=0$.

۳) ثابت‌کنیدکه اگر M نقطه دلخواهی‌در داخل مثلث ABC باشد،

$$MA+MB+MC<AB+BC+CA$$

راهنمایی: یکی ازخطوط واصل به‌نقطه M را امتداد دهید تا ضلع مقابل را قطع‌کند.



شکل ۱

[فرستنده: مسائل ۲ و ۳، رضا گودرزی از دبیرستان دکتر بهشتی، تهران]

۴) ثابت کنید که به‌ازای هر x، y، z،

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geqslant xyz(x+y+z)$$

۵) ثابت کنید که اگر $a<b<c$ آنگاه

$$\frac{1}{2}(a+b)<\frac{1}{3}(a+b+c)$$

۶) اگر $a>1$ آنگاه بین ۱ و a عددگویایی هست که مربع آن کوچکتر از a است.

راهنمایی: چون $4a<(1+a)^2$ و $(1+a)^2<4a^2$، پس،

$$1<\frac{2a}{1+a}<a \quad \text{و} \quad 1<\frac{4a^2}{(1+a)^2}<a$$

[منبع: مسائل ۴، ۵ و ۶ کتاب آنالیز ریاضی، تألیف دکتر غلامحسین مصاحب است.]

۷) مقدار a و b چیست؟ درصورتی که

$$2(a^2+b^2)=3(2b-2a-3)$$

راهنمایی: اگر مجموع مربعات چند عدد صفر باشد، مقدار تک تک آن اعداد نیز صفر می‌شود.

۸) اگر $f(x)=|x+3|+|x-2|$ آنگاه کمترین مقدار تابع f چیست؟

راهنمایی: همواره $|a-b|\leqslant|a|+|b|$، که کمترین مقدار ۵ است.

۹) ثابت کنید که به‌ازای هر عدد حقیقی x، که $0<x<\frac{\pi}{2}$،

$$0<1-\cos x<x$$

راهنمایی: $1-\cos x<1-\cos^2 x$.

۱۰) اگر عبارت ax^4-x^2+b بر x^2+2 بخشپذیر باشد، باقیماندهٔ تقسیم $x^6-2ax^3+3x^2+b$ بر x^3+2 چیست؟

راهنمایی: چون $ax^4-x^2+b=(x^2+2)\,Q(x)$، با قراردادن $x^2=-2$، خواهیم داشت $4a+b+2=0$.

ازطرفی،

$$x^6-2ax^3+3x^2+b=(x^3+2)P(x)+R(x)$$

چون حداکثر درجهٔ $R(x)$ عدد ۲ است، با انتخاب $x^3=-2$ و رابطه قبلی بین a و b نتیجه می‌شود که

$$R(x)=3x^2+2$$

[فرستنده: حمید دارابی، دانش‌آموز سال سوم، اسفراین.]

۱۱) فرض کنید که $A=\{1,\ 2,\ 3,\ \dots\ n\}$

(الف) A چند زیرمجموعه دارد که هریک حداقل دارای یک عدد صحیح زوج باشد؟

(ب) A چند زیرمجموعه دارد که هریک دقیقاً یک عدد صحیح زوج داشته باشد؟

راهنمایی: برحسب اینکه n زوج یا فرد باشد دوحالت درنظر بگیرید. فرض کنید که n زوج باشد. $2^{\frac{n}{2}}-1$ زیرمجموعه از A وجود دارد، که هریک، فقط شامل اعداد صحیح فرد است. یادآوری می‌کنیم که مجموعه تهی زیرمجموعه‌ای است که باید حذف شود.

بنابراین

$$(2^n-1)-(2^{n/2}-1)=2^n-2^{n/2}$$

اگر n فرد باشد، پس، $\frac{n+1}{2}$ عدد صحیح فرد در A وجود دارد، لذا $2^n-2^{\frac{n+1}{2}}$ زیرمجموعه می‌شود

جواب قسمت (ب) اگر n زوج باشد، تعداد زیرمجموعه $2^{\frac{n}{2}}\frac{n}{2}$؛ واگر n فرد باشد، تعداد زیرمجموعه‌های موجوذ

$$\frac{n-1}{2}\left(2^{(n+1)/2}-1\right)$$

است.

[منبع: کتاب جبر به روش تمرین، کتاب اول، ترجمهٔ دکتر حسین دوستی، ناشر مبتکران.]

۱۲) اگر، به‌ازای $-1<x<1$

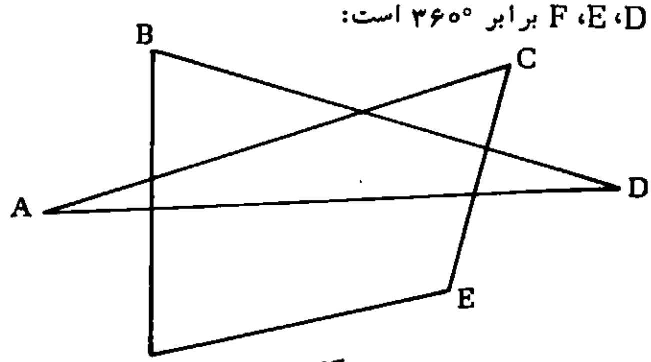
$$f(x)=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

آنگاه

$$f\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right)=3f(x)$$

راهنمایی: مقدار داخل پرانتزرا درتابع جایگزین کنید.

۱۳) درشکل زیر، ثابت کنید که مجموع زوایای A، B، C، D، E، F برابر ۳۶۰° است:



شکل ۲

راهنمایی: محل برخورد ضلع AD با دوضلع BF و CE را، به‌ترتیب، P و Q می‌نامیم. مجموع زوایای چهارضلعی PFEQ برابر ۳۶۰ درجه است.

۱۴) ثابت کنید که اگر a، b، c اعداد حقیقی مثبت باشند آنگاه

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)}$$

راهنمایی: فرض کنید که $a\geqslant b>0$. دراین صورت،

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\geqslant 1$$

بنابراین، $a^a b^b \geqslant a^b b^a$. نامساویهای مشابهی برای a و c، همچنین، b و c حاصل می‌گردد که از آنها نتیجه می‌شود که

$$(a^a b^b c^c)^2 \geqslant a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b},$$

که اگر طرفین نامساوی فوق را در $a^a b^b c^c$ ضرب کنیم، حکم حاصل می‌گردد.

۱۵) بدون استفاده از قاعده هوپیتال حد

$$\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$$

را، وقتی که x به یك میل می‌کند، به‌دست آورید.

[فرستندگان: بهروز شهریاری و حسین تخمکار.]

راهنمایی: ابتدا با قرار دادن $\sqrt[6]{x}=y$، و خلاصه کردن عبارت فوق، خواهیم داشت

$$\frac{-2y^4+3y^3-2y^2+1}{1-y^6}$$

که صورت ومخرج تجزیه‌پذیر است ومقدار حد $\frac{1}{2}$ خواهد شد.

۱۶) فرض کنید $f(x)=x^2-x-6$.

(الف) ثابت کنید که اگر

$$|x-3|<\frac{1}{10}$$

آنگاه

$$|f(x)|<\frac{51}{100}$$

(ب) فرض کنید δ عدد حقیقی دلخواهی باشد به‌طوری‌که $0<\delta<1$.

ثابت کنید؛ اگر $|x-3|<\delta$ آنگاه $|f(x)|<6\delta$.

راهنمایی (ب): چون $|f(x)|=|(x-3)(x+2)|$، پس اگر $|x-3|<\delta$ آنگاه $5-\delta<x+2<5+\delta$، یا $0<x+2<6$.

۱۷) حد زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\dots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$$

راهنمایی: اگر f تابعی پیوسته بر بازه [۰, ۱] باشد آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

[منبع مسائل ۱۶ و ۱۷، کتاب «روشهایی در آنالیز حقیقی»، تألیف گلدبرگ (متن انگلیسی)]

۱۸) ثابت کنید که تابعی با مقادیر حقیقی موجود نیست که در یك همسایگی صفر مشتق‌پذیر باشد و $f(0)=0=f'(0)$ و

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f'(x)}=1$$

راهنمایی: فرض کنید تابعی با مشخصات فوق موجود باشد. بدیهی است که درهمسایگی سفته‌ای ازصفر، مقدار f متمایز از صفراست. بنا بر قاعده هوپیتال،

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+xf'(x)}{f'(x)}=1$$

واین یك تناقض است؟

۱۹) دایره‌ای‌سهمی $y=x^2$ را درنقاط (a,a^2)، (b,b^2)، نه به‌طورمماسی، و در (t,t^2) به‌طورمماسی قطع می‌کند. مقدار t برحسب a و b چیست؟

راهنمایی: معادله دایره را به‌مرکز و شعاع دلخواه، با معادله سهمی قطع می‌دهیم. اگر y را در دومعادله حذف کنیم به چندجمله‌ای درجه چهارم

$$(x-h)^2+(x^2-k)^2=r^2$$

حاصل می‌شود که ضریب جمله درجه سوم آن صفر است. ریشه‌های این معادله a، b، t و t است‌که حاصلجمع آن صفر است. بنابراین، $t=-\frac{1}{2}(a+b)$.

[منبع مسائل ۱۹ و ۲۰، مجله ریاضی، جلد ۶۵، شماره ۲، آوریل ۱۹۹۲ است.]

۲۰) فرض کنید A و B دوماتریس متمایز، ازمرتبه $n\times m$، با درایه‌های حقیقی باشند. اگر $A^3=B^3$ و $A^2B=B^2A$، آیا می‌توان گفت‌که A^2+B^2 وارون‌پذیر است؟

راهنمایی: خیر. فرض کنید A^2+B^2 وارون‌پذیر باشند. سپس، با محاسبه

$$A-B=(A^2+B^2)^{-1}[(A^2+B^2)(A-B)]$$

تناقض حاصل می‌شود.

[ازسری مسائل مسابقات پاتنام، همان منبع مسألهٔ ۱۹].

مسائل شمارهٔ ۳۴

تهیه و تنظیم از: محمود نصیری

۱ـ ازمجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ یك زیرمجموعه S شامل $(n+1)$ عدد انتخاب می‌کنیم. ثابت‌کنید دوعدد در S وجود دارندکه مجموع آنها $2n+1$ است.

۲ـ ثابت‌کنید معادله $\sum_{i=1}^{3}(x-a_i)^{2k+1}=0$

الف) فقط دارای یك ریشه حقیقی است.

ب) $x=\frac{a_1+a_2+a_3}{3}$ ریشه آن است اگر وفقط اگر a_iها تشکیل تصاعد حسابی دهند.

($k\in N$ و a_iها اعداد حقیقی‌اند.)

۳ـ فرض می‌کنیم N نقطه‌ای دلخواه روی میانه وارد برضلع BC ازمثلث ABC باشد. امتدادهای BN و CN به‌ترتیب AC و AB را درنقاط D و E قطع می‌کنند. اگرشعاعهای دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای CND وBNE برابر باشند، ثابت‌کنید $AB=AC$.

۴ـ خط راست d وعدد طبیعی n مفروض است ثابت کنید n نقطه متمایز روی خط d ویك نقطه خارج آن می‌توان طوری انتخاب‌کردکه فاصله هر زوج از $n+1$ نقطه عددی صحیح باشد.

۵ـ ثابت‌کنید معادلهٔ

$$x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+\frac{3}{4}=0$$

دارای ریشه حقیقی نیست.

۶ـ اگر $A=x^2y+y^2z+z^2x$ و

$$B=xy^2+yz^2+zx^2$$

عبارت A^2+AB+B^2 را به حاصلضرب عوامل تجزیه کنید.

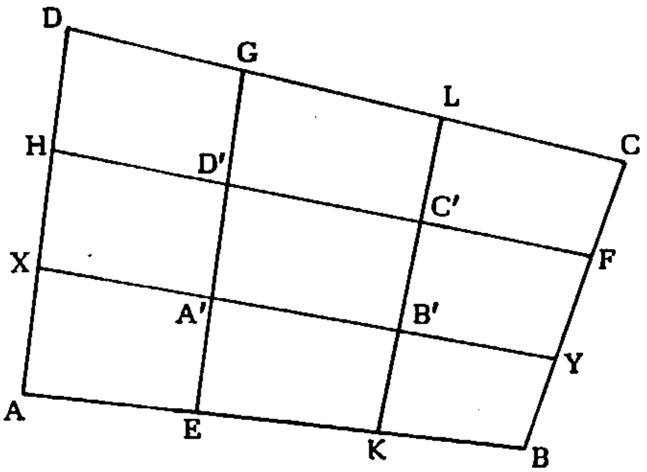
۷ـ فرض می‌کنیم s و t اعداد حقیقی مفروض باشند. تمام توابع مشتقپذیر f بر R را که در رابطه زیر به‌ازای هر x و y حقیقی و $x\neq y$ صدق می‌کنند پیدا کنید.

$$f'(sx+ty)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

۸ـ فرض می‌کنیم ABCD یك چهارضلعی محدب در صفحه باشد، با نقاطی روی اضلاع که هرضلع را به سه قسمت‌مساوی تقسیم می‌کنند، مطابق‌شکل نه‌چهارضلعی کوچکتر حاصل‌می‌شود.

الف) نشان دهید مساحت چهارضلعی $A'B'C'D'$، $\frac{1}{9}$ مساحت چهارضلعی ABCD است.

ب) تعیین‌کنید شرط لازم و کافی برای آنکه مساحت تمام نه چهارضلعی برابر باشند چیست.



۹ـ دنبالهٔ توابع $\{f_n\}$ به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$f_1(x)=\sqrt{x^2+48}$ و به‌ازاء $n\geqslant 1$

$$f_{n+1}(x)=\sqrt{x^2+6f_n(x)}$$

به‌ازای هرعدد صحیح n، تمام ریشه‌های معادله

$$f_n(x)=2x$$

را پیدا کنید.

۱۰ـ فرض می‌کنیم A یك ماتریس $n\times m$ با دترمینان‌برابر ۱ باشد. فرض‌کنیم B ماتریسی باشدکه ازاضافه‌کردن عدد ۱ به هر درایه ماتریس A به‌دست‌آید.

ثابت کنید دترمینان B برابر $s+1$ است، s مجموع n^2 درایه ماتریس A^{-1} است.

حل مسائل شماره ۳۱

تهیه و تنظیم از: ابراهیم دارابی

۱ـ فرض‌کنید ABCD چهارضلعی مسطحی باشدکه اضلاع روبه‌روی آن موازی نباشد.
اگر E محل برخورد AB، CD و F محل برخورد AD، BC و M و N و P به ترتیب اوساط AC و BD و EF باشند و داشته باشیم

$$\overrightarrow{AE}=a\,\overrightarrow{AB}\ ،\ \overrightarrow{AF}=b\,\overrightarrow{AD}$$

ثابت‌کنید

$$\overrightarrow{MP}=ab\,\overrightarrow{MN}$$

که در آن a و b اعداد حقیقی ومخالف صفرهستند.

اثبات. برای‌این‌که دستگاه مختصات آفین مناسبی انتخاب کرده باشیم، فرض می‌کنیم

$C(x, y)$ ، $B(۱, ۰)$ ، $A(۰, ۰)$

و $D(۰, ۱)$. پس

$N=(۱/۲, ۱/۲)$ ($M=(x/۲, y/۲)$

$E=(a, ۰)$، $F=(۰, b)$ و $P=(a/۲, b/۲)$. چون D، C، E و B، C، F به ترتیب هم‌راستا هستند، x و y را می‌توان برحسب a و b بیان‌کرد مانند:

$$y=b(۱-a)/(۱-ab)\ ,\ x=a(۱-b)/(۱-ab)$$

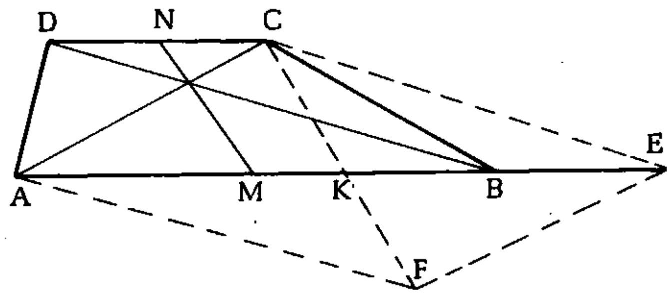
درنتیجه

$$\overline{MN}=\frac{۱}{۲}(۱-x, ۱-y)=\frac{۱}{۲(۱-ab)}(۱-a, ۱-b)$$

$$\overline{MP}=\frac{۱}{۲}(a-x, b-y)=\frac{ab}{۲(۱-ab)}(۱-a\ ,\ ۱-b)=ab\,\overline{MN}$$

۲ـ مساحت یك ذوزنقه را برحسب طول دوقطر و پاره‌خطی‌که اوساط دوقاعده را به هم وصل می‌کند حساب‌کنید.

حل. ذوزنقه ABCD را درنظرمی‌گیریم. اگر M وسط AB و N وسط DC و $AC=k$ و $BD=l$ و $MN=n$ باشد، از رأس C خطی‌به موازات BD رسم می‌کنیم تا امتداد AB



را درنقطه E قطع کند. در متوازی‌الاضلاع DCEB داریم DC=BE. و چون مثلث ACE و ذوزنقه ABCD ارتفاع مساوی دارند (DH)، پس با یکدیگر معادلند. درمثلث ACE میانه CK را رسم می‌کنیم و به اندازه خود تا نقطه F امتداد می‌دهیم از F به A و E وصل می‌کنیـم چهار ضلعی ACEF متوازی‌الاضلاع است در نتیجه مثلث‌های ACE و ACF با یکدیگرمعادلند. با توجه به‌شکل چون K وسط اقطار متوازی‌الاضلاع ACEF می‌باشد داریم

$$MK=AK-AM=\frac{AE}{۲}-\frac{AB}{۲}=$$

$$\frac{AE-AB}{۲}=\frac{BE}{۲}$$

و چون،

$$MK=\frac{DC}{۲}=\|NC$$

پس چهارضلعی NMKC متوازی‌الاضلاع است درنتیجه

$$CF=۲CK=۲m \text{ ، } MN=CK=m$$

درمثلث‌های معادل ACF و ACE می‌توان نوشت

$$AC=k \text{ ،} BD=CE=AF=l \text{ ، } CF=۲m$$

$$k+l+۲m=۲P$$

(P نصف محیط است) پس

$$S_{ACF}=\sqrt{P(P-k)(P-l)(P-۲m)}$$

وازآنجا

$$S_{ABCD}=\sqrt{P(P-k)(P-l)(P-۲m)}$$

(فرستنده: کافیه کیومرثی، دانش‌آموز، شهرکرد)

۳ـ فرض‌کنید $K\geqslant ۲$ عددی صحیح، و به‌ازای هرعدد طبیعی N داشته باشیم

$$f(n)=[(n+n^{1/K})^{1/K}]+n$$

که درآن [x] جزء صحیح x باشد. برد تابع f راپیداکنید.

حل. برد تابع f تشکیل شده است از همه اعداد صحیح، که توانهای کاملی‌از K نباشندابتداثابت‌می‌کنیم هیچ‌توانی‌ازK در برد تابع f قرارندارد. چون $K\geqslant ۲$، بنابه‌قضیه دوجمله‌ای به ازای همه $S\geqslant ۰$، داریم $S^K+S+۱\leqslant(S+۱)^K$

به‌ازای $S=a-۱$ داریم $(a-۱)^K\leqslant a^K-a$

به‌ازای a و $m\in N$ بطوری‌که $a^K<m<(a+۱)^K$ ثابت می‌کنیم $m=f(m-a)$.

اگر $n=m-a$، پس $a^K-a<n<m$. ازنامساوی‌متغیر نتیجه می‌شود

$$a^K\leqslant(m-a)+(a-۱)<n+n^{1/K}<(m-a)+(a+۱)\leqslant(a+۱)^K.$$

ازآنجا

$$f(n)=a+(m-a)=m$$

علاوه براین ثابت می‌کنیم توانهای K حذف شده‌اند. ملاحظه می‌کنیم‌که f یك تابع اکیداً صعودی است. بنابراین

$$f(۱)=۲$$

نشان می‌دهد ۱ حذف شده است. برای هرمقدار بزرگتـر از a^K کافیست دومقدار متوالی معرفی کنیم که تصاویر آنها

$$a^K+۱\ ,\ a^K-۱$$

باشند. اگر m توانی از K نباشد در بـالا نشان داده‌ایم m تصویر $m-[m^{1/K}]$ است. بنابراین

$$f(a^K+۱-a)=a^{K+۱}$$

$$f(a^K-a)=f(a^K-۱-(a-۱))=a^K-۱$$

۴ـ اگر $۰<\theta<\pi$، ثابت‌کنید

$$\arcsin\frac{\theta}{۶}+\arcsin\left(\frac{۲}{۳}\sin\frac{\theta}{۴}\right)<\frac{\theta}{۳}$$

حل.

فرض‌کنید $I=(0, \pi/4)$ تابع

$$f(x)=\arcsin(2x/3)+\arcsin(2(\sin x)/3)-4x/3$$

را درنظر بگیرید ثابت می‌کنیم برروی I، $f(x)<0$ چون $f(0)=0$، کافیست ثابت کنیم بر روی I، $f'(x)<0$ از،

$$f'(x)=2[9-4x^2)^{-1/2}+(9+5tg^2x)^{-1/2}-2/3]$$

با فرض

$$g(x)=(9-4x^2)^{-1/2}+(9+5tg^2x)^{-1/2}$$

نشان می‌دهیم بر (I) $g(x)<2/3$

چون $g(0)=2/3$، کافیست ثابت کنیم، بر I، $g'(x)<0$ چون

$$g'(x)=4x(9-4x^2)^{-3/2}-5tg\,x\,(1+tg^2x)(9+5tg^2x)^{-3/2}$$

کافیست ثابت کنیم

$$A=\frac{(9+5tgx^2)^{3/2}}{tg\,x(1+tg^2x)}<\frac{5(9-4x^2)^{3/2}}{4x}=B$$

اکنون

$$\sin(x)/x>\sin(\pi/4)/(\pi/4)=2\sqrt{2}/\pi$$

دلالت برآن داردکه بر I داریم

$$1+tg^2x=(1-\sin^2x)^{-1}>\pi^2(\pi^2-8x^2)^{-1}$$

چون

$$A=\{5+4/(1+tg^2x)\}(5+9/tg^2x)^{1/2}<(9\pi^2-32x^2)^{3/2}/(2\sqrt{2}\,\pi^2x)$$

لازم است فقط ثابت کنیم‌که عبارت اخیر حداکثر برابر B است. وآن ازاین عامل نتیجه می‌شود که سمت چپ نامساوی آخر، یك تابع صعودی است‌که به‌ازای $x=\pi/4$ برابراست با $28\pi^2/(36-\pi^2)$ که‌خودکمتر از $(25\pi/2)^{1/3}\pi$ می‌باشد.

۵ـ مقادیری از x و y را پیدا کنیدکه درمعادله

$$x^2+4x\cos(xy)+4=0$$

صدق کند.

حل. معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$[x+2\cos(xy)]^2=4[1-\cos^2(xy)]=0$$

هردو کروشه نامنفی‌اند پس

$$x+2\cos(xy)=0$$
$$\cos^2(xy)=1$$

ویا

$$\cos(xy)=\pm1$$

ازآنجا،

$$(1)\begin{cases}\cos(xy)=1\\ x+2\cos(xy)=0\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}\cos(xy)=-1\\ x+2\cos(xy)=0\end{cases},$$

از (۱) داریم $x=-2$ و $y=K\pi$ که درآن

$$K=\pm1, \pm2, \pm\dots$$

واز (۲) نتیجهٔ می‌شود

$$y=\frac{\pi}{2}(2m+1)\ ,\ x=2$$

که درآن $m=\pm1, \pm2, \pm\dots$

۶ـ دستگاه زیر را حل کنید

$$\begin{cases}x_1x_2x_3=x_1+x_2+x_3\\ x_2x_3x_4=x_2+x_3+x_4\\ x_3x_4x_5=x_3+x_4+x_5\\ -\ -\ -\ -\ -\ -\\ x_{1985}\ x_{1986}\ x_{1987}=x_{1985}+x_{1986}+x_{1987}\\ x_{1986}x_{1987}x_1=x_{1986}+x_{1987}+x_1\\ x_{1987}\cdot x_1x_2=x_{1987}+x_1+x_2\end{cases}$$

حل. با کم کردن معادله دوم ازمعادله اول نتیجه می‌شود

$$x_2x_3(x_1-x_4)=x_1-x_4$$

وچون $x_2x_3=1$ و $x_1=x_4$

حالت اول امکان‌پذیر نیست زیرا اگر $x_2x_3=1$، آنگاه از معادله اول خواهیم داشت

$$x_2+x_3=0$$

و از دستگاه $x_2x_3=1$ یا $x_2+x_3=0$ ناسازگاراست.
حالت دوم را درنظرمی‌گیریم

$$x_1=x_4$$

که این امکان‌پذیر است.
به‌طریق مشابه ازمعادلات دوم وسوم نتیجه می‌شود

$$x_2=x_5$$

وازمعادلات سوم وچهارم

$$x_3=x_6$$

وبالاخره ازمعادلات ۱۹۸۵ و ۱۹۸۶ داریم

$$x_{1986}=x_2$$

درنتیجه

$$x_3=x_6=x_9=x_{1986}=x_2=x_5=x_8=\cdots$$
$$=x_{1985}=x_1=x_4=x_7=\cdots=x_{1987}$$

پس هر ریشه از دستگاه به صورت $(x, x, \ldots x)$ نوشته می‌شودکه درآن x عدد حقیقی می‌باشد.
با قرار دادن $x_1=x_2=x$ درمعادله اول نتیجه می‌شود

$$x^3=3x$$

ویا

$$x=0 \text{ یا } x=+\sqrt{3} \text{ یا } x=-\sqrt{3}$$

به‌آسانی می‌توان محاسبه کرد که

$(0, 0, 0)$ ، $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

، $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ ،

ریشه‌های دستگاه هستند و دستگاه ریشه دیگری ندارد.

۷ـ ثابت کنید درهر $2n$ ضلعی محدب قطری یافت می‌شودکه با هیچ یك ازاضلاع آن موازی نباشد.

حل. تعداد اقطار $2n$ ضلعی برابراست با

$$\frac{1}{2}\cdot 2n(2n-3)=n(2n-3)$$

چند قطرمی‌توانند با اضلاع ثابت $2n$ ضلعی موازی باشند؟هر ضلع دو رأس چندضلعی را به هم وصل می‌کند و از بقیه $(2n-2)$ رأس، لااقل یکی ازآنها به‌هیچ قطری تعلق‌ندارد. اما تعداد رئوس که از انتهای اقطار به‌وجود می‌آیند، زوج است. (هر پاره‌خط دوانتها دارد.) بنابراین اقطار بیش از $(2n-4)$ رأس را به هم وصل نمی‌کنند. یعنی اقطار موازی با یك ضلع بیش از $\frac{1}{2}(2n-4)$ نیست. تعداد اقطارمشترکی که هر یك ازآنها لااقل موازی با یك ضلع باشند از

$$2n\cdot\frac{1}{2}(2n-4)=n(2n-4)$$

تجاوزنمی‌کند. پس لااقل

$$n(2n-3)-n(2n-4)=n$$

قطر یافت می‌شودکه موازی با هیچ یك ازاضلاع نمی‌باشند.

۸ـ ده مرد در مسابقه تنیس روی میز شرکت کرده‌اند. هر دو نفرازآنها بین خودشان یك‌بازی را به‌انجام رسانده‌اند.اولین بازیکن درطول مسابقات x_1 برد و y_1 باخت، دومین بازیکن x_2 برد و y_2 باخت و .... داشته‌اند.
ثابت‌کنید

$$x_1^2+\cdots+x_{10}^2=y_1^2+\cdots+y_{10}^2$$

حل. ملاحظه می‌شودکه هر ورزشکار ۹ بازی انجام داده‌است. یعنی

$$x_i+y_i=9$$

علاوه براین

$$x_1+\cdots+x_{10}=y_1+\cdots+y_{10}.$$

زیرا درهر بازی یك بازیکن می‌بازد و دیگری می‌برد، پس

$$(x_1^2+\dots+x_{10}^2)-(y_1^2+\dots+y_{10}^2)=$$
$$(x_1^2-y_1^2)+\dots+(x_{10}^2-y_{10}^2)=$$
$$9((x_1-y_1)+\dots+(x_{10}-y_{10}))=0$$

۹ـ مطلوبست

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(n^2+3n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

حل. می‌توان نوشت

$$\frac{2(n^2+3n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=$$
$$\frac{n(n+1)+(n+2)(n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{n(n+1)}+$$
$$\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}+$$
$$\frac{(n+3)-(n+2)}{(n+2)(n+3)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-$$
$$\frac{1}{n+3}=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+3}\right)$$

فرض می‌کنیم

$$a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}$$

دراین صورت

$$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+3}$$

بنابراین اگر

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)$$
$$+\dots+(a_n-a_{n+1})=a_1-a_{n+1}$$

پس،

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2(n^2+3n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=a_1-a_{n+1}=$$

$$1+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+3}\right)$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{4}{3}$$

۱۰ـ مطلوبست

$$\int\frac{dx}{2\cos^2x+\sin x\cos x+\sin^2x}$$

حل. صورت ومخرج کسر را بر $\cos^2x\neq0$ تقسیم می‌کنیم

$$I=\int\frac{(1+tg^2x)dx}{2+tgx+tg^2x}=$$
$$\int\frac{(1+tg^2x)\,dx}{\left(tg\,x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=$$

اگر

$$tg\,x+\frac{1}{2}=t$$

آنگاه

$$(1+tg^2x)\,dx=dt$$

واز آنجا

$$I=\int\frac{dt}{t^2+\frac{7}{4}}$$

اگر

$$t=\frac{\sqrt{7}}{2}u$$

آنگاه

$$u=\frac{2t}{\sqrt{7}}\ ,\ dt=\frac{\sqrt{7}}{2}du$$

$$I=\frac{2}{\sqrt{7}}\,\mathrm{Arc\,tg}\,u+c=\frac{2}{\sqrt{7}}\,\mathrm{Arc\,tg}\frac{2t}{\sqrt{7}}+c=$$
$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{2tgx+1}{\sqrt{7}}+c$$

جواب نامه‌ها

آقای کوروش برارپور، دانشجو، اصفهان

ضمن تشکر از مسایل ارسالی، سعی کنید از این پس مسایل را همراه با حل بفرستید.

آقای عیسی عباسی، دانش‌آموز، تبریز.

با تشکر از شما مسایل ارسالی‌تان را دریافت کردیم. به‌موقع از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای فریدون لطیفی، دانش‌آموز، کرج

با تشکر از شما مسایل شما را دریافت کردیم. برای درج مسائلی درمجله مأخذ وحل آن لازم است

آقای مرتضی طبیانی، دانش‌آموز، زنجان

با تشکر از شما مسایل ارسالی‌تان را دریافت کردیم، درصورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای آرتا امیرجمشیدی، دانش‌آموز، مشهد

ضمن تشکر از ارسال محاسبه e تا ۲۰۰ رقم، آن را به‌نام خود شما چاپ می‌کنیم.

e = ۲.۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹۰۴۵۲۳۵۳۶۰۲۸۷۴۷۱۳۵۲۶
۶۲۴۹۷۷۵۷۲۴۷۰۹۳۶۹۹۹۵۹۵۷۴۶۹۶۷۲۷۷۲
۴۰۷۶۶۳۰۳۵۳۵۴۷۵۹۴۵۷۱۳۸۲۱۷۸۵۲۵۱۶۶
۴۲۷۴۲۷۴۶۶۳۹۱۹۳۲۰۰۳۰۵۹۹۲۱۸۱۷۴۱۳۵
۹۶۶۲۹۰۴۳۵۷۲۹۰۰۳۳۴۲۹۵۲۶۰۵۹۵۶۳۰۷۳
۸۱۳۲۳۲۸۶۲۷۹۴۳۴۹۰۷۶۳۲۳۳۸۲۹۸۸۰۷۵۳
۱۹۵۲۵۱۰۱۹۰۱

آقای سعید صالحی‌پورمهر، دانش‌آموز، تبریز

۱- گرینبرگ سازگاری هندسه اقلیدسی را می‌پذیرد و ثابت می‌کند که هندسه هذلولی سازگار است. یعنی اگر در بین قضایای هندسه اقلیدسی به‌تناقض نمی‌رسیم، در بین قضایای هندسه هذلولی هم به‌تناقض نمی‌رسیم. عده‌ای دیگر، سازگاری هندسی هذلولی را پذیرفته‌اند ولی سازگاری هندسه اقلیدسی را ثابت می‌کنند. بدنیست بدانید که درفیزیك، هندسه هذلولی بیشتر از هندسه اقلیدسی کاربرد دارد. به‌این ترتیب معادل بودن دو دستگاه ازنظر منطقی ثابت می‌شود.

۲- برهانهای گرینبرگ دقیق وعلمی است و دربین کتابهای دیگرمربوط به‌این درس، کتاب او، کتاب خوبی‌است.

۳- درهمان کتاب، الگوی کلدین مطرح شده است والگوهای توانکاره هم برای همین منظور آورده شده است. برای اینکه ارتباط آنها را بهتر بدانید، به‌مسایل همان فصل مراجعه کنید و آن را با توجه به‌نظریه توابع مختلط بخوانید.

آقای امیرمسعود ربیعی، دانشجو، اصفهان

ضمن تشکر از تبریك شما به‌مناسبت نهمین سال انتشار مجله، مطالب ارسالی شما را درباره ضرب اعداد دریافت کردیم. همان‌طور که خودتان اشاره کرده‌اید این مطالب به‌نوعی در کتابها چاپ شده وموجود است وچاپ آن درمجله، نه مجاز است ونه مفید.

آقای بهروز پی‌زری، دانش‌آموز، اصفهان

ضمن تشکر از شما مسایل ارسالی‌تان را دریافت کردیم. متأسفانه ضوابط مجله در آنها مراعات نشده است. یعنی مسایل نه حل دارند ونه مأخذ.

آقای محمد مرادی، اصفهان

ازاینکه بعضی ازاشتباهات چاپی شماره ۲۸ صفحه ۵۸ را ارسال‌داشتید متشکریم. ما ازخوانندگان‌می‌خواهیم جهت‌تصحیح آن به‌صورت زیراقدام‌کنند:

$$2^2+0^2=4$$

$$4^2=\dots$$

درضمن، بعضی از روابط عددی که از کتاب ریاضی‌دانان نامی، ترجمه حسن صفاری، برایمان انتخاب‌کرده‌اید، بدون بحث دقیق واستدلال کامل است، واین موجب شك و تردید است. دراینجا به‌ذکر چند نمونه از آن بسنده می‌کنیم:

$$377=4^2+19^2=11^2+16^2$$

$$13832=2^3+24^3=18^3+20^3$$

$$635318654=59^4+158^4=133^4+134^4$$

آقای حسن رحامی، دانش‌آموز، سوم‌ریاضی، اراك، آقای پویای

باقری، دانش‌آموز ریاضی، شیراز

بنا به درخواست بسیاری از خوانندگان، از جمله شما خوانندگان گرامی، قرار است مقالات متنوعی در زمینه کامپیوتر درمجله درج گردد. به‌عنوان نمونه،درشماره۳۳، مقالاتی دراین زمینه را می‌توانید ملاحظه کنید. درضمن، مسائل ارسالی شما دربخش مسائل مورداستفاده قرارخواهدگرفت.

درمورد سؤال شماکه فضای چهاربعدی و دیاگرام چیست؟ هرمجموعه‌ای‌که ازترکیب خطی چهاربردارمستقل خطی‌تشکیل شده باشد یك فضای ۴ بعدی است. مثلاً مجموعه همه

$$(x, y, z, t)$$

که x طول، y، عرض، z ارتفاع و t زمان باشد یك فضای چهاربعدی ملموس است. همچنین، دیاگرام به‌معنی، نمودار یك رابطه است.

آقای رضا آقایان، دانش‌آموز چهارم ریاضی، تهران ــ آقای محمدرضا سرشاد، دانش‌آموز ریاضی، تهران ــ آقای وحید فرشاد دانش‌آموزسوم ریاضی، تبریز

مسائل ارسالی شما دربخش مسائل مورداستفاده قرار خواهد گرفت.

آقای رضا خلیلی، دانش‌آموزسوم راهنمایی، مرکز آموزش فرزانگان اهواز

مطالب ارسالی شما احکام ریاضی است‌که درسالهای آتیه خواهید خواند، وازاینکه شما پیشاپیش به اثبات چنین احکامی نائل آمده‌اید نشان علاقه شما به ریاضیات وتلاش شما دراین زمینه است. موفقیت شما راآرزومندیم.

آقای محسن سالاری، دانش‌آموز، تهران

بیشترمطالب ارسالی شماکه به عنوان «معما» ارسال داشته‌اید مسائل جالب ریاضی است وسعی می‌شود که دربخش «مسائل ویژه دانش‌آموزی» مورداستفاده قرارگیرد.

آقای محمدحسین یزدی‌نژاد، دبیرفیزیك، اهواز

مسائل ارسالی شما بسیارساده است وبرای مسابقه مناسب نیست، ولی، دربخش مسائل مورداستفاده قرارخواهیم‌داد. در مورد بخشپذیری اعداد بر۹، وامتحان عمل ضرب، درکتابهای درسی (ریاضیات جدید سال ۴) و دربخش نامه‌ها مطالبی‌درج گردیده است.

آقای حسین‌کفاش امیری، بابلسر

اشکال شما درموردمطلبی‌که در مجله رشد آموزش ریاضی، پائیز ۱۳۶۹، شماره ۲۷، صفحه ۵۷، درج‌گردیده درست‌است. دقت شما موردتقدیراست. برایمان جالب بودکه شما توانستید یك حکم‌کلی را، با مثال نقض، باطل‌کنید وهمان‌طوری که می‌دانید این روش مناسبی است‌که بعضی ازاحکام نادرست‌را می‌توان باطل‌کرد. اما، درمورد اشکال شما، متأسفانه عبارت «متباین با ۱۰» درصفحه ۵۷، مجله مذکور درج نگردیده‌که صورت اصلاح شده‌آن چنین است:

«برای به‌دست‌آوردن رقم یکان یك عدد متباین با ۱۰، به‌توان n، کافی‌است‌که رقم یکان‌آن‌را به‌توان‌باقیمانده n بر ۴ برسانیم؛ که رقم یکان حاصل همان رقم یکان عدد به‌توان n است».

اگربخواهیم برهانی برای آن ارائه دهیم، باید از مفاهیم همنشتی‌ها استفاده کنیم. جهت خلاصه کردن مطالب؛ «a همنهشت b به پیمانه ۱۰» را با نماد $a \overset{10}{\equiv} b$ یا $a \overset{10}{\equiv} b$ نمایش می‌دهیم.

فرض‌کنید که a نسبت به ۱۰ اول باشد و n عدد طبیعی دلخواهی باشد. همچنین، فرض کنید که $n=4k+r$، که $0 \leqslant r < 4$. ثابت می‌کنیم‌که رقم یکان a^r و a^n یکسان است. بنابرقضیه فرما، به‌سادگی ثابت می‌شودکه

$$a^4 \overset{10}{\equiv} 1$$

بنابراین،

$$a^n \equiv a^{4k+r} \equiv (a^4)^k a^r \equiv (1)^k a^r \equiv a^r$$

این قاعده برای اعدادی صادق است‌که رقم یکان آنها، ۱، ۳، ۷، و ۹ باشد. برای اعداد دیگرمی‌توان از رابطه همنهشتی $a \overset{10}{\equiv} a^5$، که می‌گوید «رقم یکان a^5 و a یکسان است»استفاده کرد اما ضابطهٔ مستقل از n ارائه نمی‌دهد.

●

بقیه از صفحهٔ ۵۳

III: عکس قضیه درست نیست: یعنی توابعی هستند که دارای بیشمار مرکز تقارن بوده اما متناوب نیستند.

مانند $f(x)=x+\sin x$ که بیشمار مرکز تقارن روی خط $y=x$ دارد اما متناوب نیست.

اثبات فرض‌کنیم $\omega\left|\begin{array}{l}\alpha\\ \beta=\alpha\end{array}\right.$ مرکز تقارن باشد

$$P\left|\begin{array}{l}x\\ f(x)=x+\sin x=y\end{array}\right.\xrightarrow{\text{قرینه } P \text{ نسبت به } \omega} P'$$

$$P'\left|\begin{array}{l}X=2\alpha-x\\ Y=2\beta-y=2\alpha-y=2\alpha-x-\sin x\end{array}\right.$$

$$y=f(X)=f(2\alpha-x)=2\alpha-x+\sin(2\alpha-x)$$
$$=2\alpha-x-\sin x$$

از اینجا نتیجه می‌شود:

$$\sin(2\alpha-x)=\sin x\Longrightarrow\alpha=K\pi$$

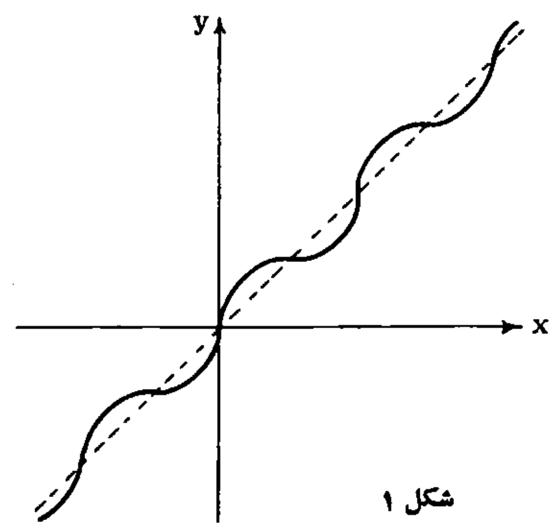
حال ثابت می‌کنیم $\omega_1\left|\begin{array}{l}K\pi\\ K\pi\end{array}\right.$ مرکز تقارن تابع

$$y=f(x)=x+\sin x$$

است.

$$A\left|\begin{array}{l}x\\ y=f(x)=x+\sin x\end{array}\right.\xrightarrow{\text{قرینه } A \text{ نسبت به } \omega_1} A'$$

$$A'\left|\begin{array}{l}X=2K\pi-x\\ Y=2K\pi-y=2K\pi-(x+\sin x)\end{array}\right.$$



شکل ۱

$$f(X)=f(2K\pi-x)=(2K\pi-x)$$
$$+\sin(2K\pi-x)=2K\pi-x-\sin x=Y$$

پس A' بر تابع $f(x)$ واقع است.

ضمناً نمودار $f(x)=x+\sin x$ در شکل ۱ ملاحظه می‌شود. اثبات اینکه $f(x)=x+\sin x$ متناوب نیست ساده‌است.

IV: اگر f دارای دومرکز تقارن باشد ومراکز تقارن برمحور xها واقع باشند آنگاه f متناوب است. (دراین صورت f بیشمارمرکز تقارن داردکه برمحور طولها واقع است).

اثبات. فرض $I_1\left|\begin{array}{l}\alpha_1\\ 0\end{array}\right.$ و $I_2\left|\begin{array}{l}\alpha_2\\ 0\end{array}\right.$ مراکز تقارن $y=f(x)$ باشند ثابت می‌کنیم f متناوب است.

فرض کنید $P\left|\begin{array}{l}x\\ y=f(x)\end{array}\right.$ نقطه‌ای دلخواه باشد قرینه P نسبت به I_1 را P' مینامیم که بر f واقع است.

$$P'\left|\begin{array}{l}x_1=2\alpha_1-x\\ y_1=0-y=-f(x)\ (1)\ f(2\alpha_1-x)=-f(x)\end{array}\right.$$

وقرینه P' نسبت به $I_2\left|\begin{array}{l}\alpha_2\\ 0\end{array}\right.$ یعنی $P''\left|\begin{array}{l}x_2\\ y_2\end{array}\right.$ نیز بر f واقع است.

$$P''\left|\begin{array}{l}x_2=2\alpha_2-x_1\\ y_2=0-y_1=y=f(x)\ (2)\ f(x_2)=y_2=f(x)\end{array}\right.$$

از (۲) نتیجه می‌شود

$$f(x)=f(x_2)=f(2\alpha_2-x_1)=f(2\alpha_2-2\alpha_1+x)$$

واین نشان می‌دهدکه $T=2\alpha_2-2\alpha_1$ دوره تناوب است، یعنی همواره، $f(T+x)=f(x)$ ضمناً ثابت می‌کنیم که:

$$f(x-T)=f(x)$$

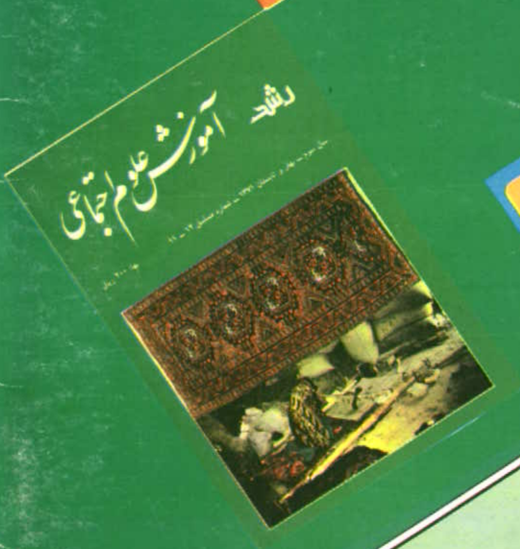
$$f(x-T)=f(x-2\alpha_2+2\alpha_1)$$
$$=f(2\alpha_1-(2\alpha_2-x))=f(2\alpha_2-x)=f(x)$$

تذکر: اگرمراکز تقارن برمحور xها نباشد و روی خط $y=c$ باشد می‌توان حکم بالا را با انتقال ثابت‌کرد.

Contents

Roshd, Magazine of Mathematical Education, Vol IX No. 35, Autumn 1992 Mathematics Section, 274 BLDG - No. 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave. Tehran - Iran.

A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.



مجلات رشد تخصصی

هر سه ماه یکبار، برای استفاده دبیران و دانشجویان رشته‌های مختلف و دانش‌آموزان علاقمند دبیرستانها از سوی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش منتشر می‌شود

آیا شما مجلات رشد مخصوص دبیران را می‌خوانید؟