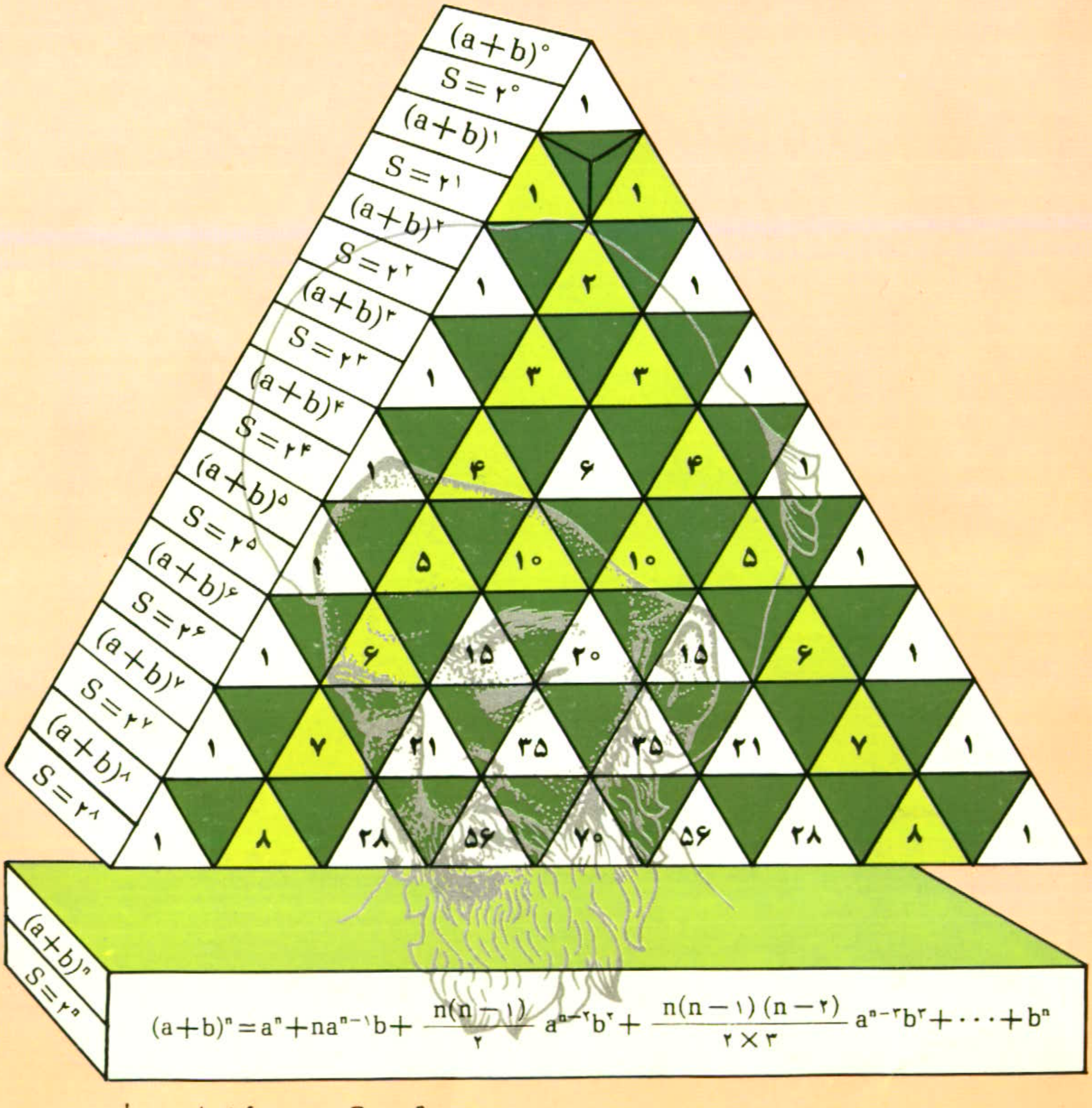
رشد

آموزش ریاضی

سال نهم ـ تابستان ۱۳۷۱ ـ شمارهٔ مسلسل ۳۴

بها: ۲۰۰ ریال



$S = 2^n$ = مجموع ضرایب بسط

بسم‌الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یکبار از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی منتشر می‌شود هدف از انتشار این مجله اعتلای دانش ریاضی دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلّم است. علاوه بر این ایجاد ارتباط متقابل بین معلّمین ریاضی و دفتر برنامه‌ریزی، به‌منظور تبادل تجارب، ارائه روشهای جدید آموزش ریاضی، معرفی جنبه‌های تاریخی، فلسفی، کاربردی ریاضیات در سطح پیش دانشگاهی است. هیأت تحریریه از مشارکت و همکاری همهٔ علاقه‌مندان بویژه دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان در ارائه مقالاتی در زمینه‌های زیر استقبال می‌کند:

الف) آموزش ریاضی (طرح و بررسی آموزش ریاضی، بویژه آموزش ریاضی در دوره‌های پیش دانشگاهی).

ب) تاریخ ریاضی (مشتمل بر سیر تحول مفاهیم ریاضی، شرح و احوال ریاضیدانان و کارهای علمی آنها، بویژه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی).

ج) فلسفه ریاضی (تبیین مفاهیم ریاضی، ریاضیات چیست، بررسی مکاتب ریاضی، بررسی ارتباط تاریخ و فلسفه ریاضی).

ریاضی کاربردی (مشتمل بر مباحثی در زمینه‌های آنالیز عددی، کامپیوتر و برنامه‌ریزی، تحقیق در عملیات، آمار و احتمال).

د) سایر مباحث ریاضی (مشتمل بر مقالات مختلفی در زمینه‌های مختلف، ارائه راه‌حلهای مختلف برای مباحث ریاضی، ارائه مسائل نمونه).

رعایت نکات زیر در مورد مقالات ارسالی ضروری است:

۱) مقالات ارسالی باید در چهارچوب اهداف فوق و با سبکی مشابه با سبک مقالات چاپ شده در رشد ریاضی باشد و در سطحی عرضه شوند که ضمن داشتن محتوی مطلوب دارای کیفیت عرضه مطلوب هم باشند؛

۲) مقالات باید با خط خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) و به صورت یک سطر در میان و با در نظر گرفتن جای کافی در حاشیه تهیه شود و صفحات به طور دقیق شماره‌گذاری شود؛

۳) فهرست مراجع مقاله به طور کامل و در دو قسمت فارسی و خارجی و به ترتیب الفبایی و طبق استاندارد مقالات علمی درج شود؛

۴) مقالات ترجمه شده از زبانهای خارجی همراه با متن اصلی ارسال شود؛

۵) مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور به چاپ رسیده باشد؛

۶) رد یا قبول و حک و اصلاح و ویراستاری مقالات به عهدهٔ هیأت تحریریه است.

رشد آموزش ریاضی

سال نهم ـ تابستان ۱۳۷۱ ـ شمارهٔ مسلسل ۳۴

نشریهٔ گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تلفن ۴ ــ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۴۹)

سردبیر: دکتر علیرضا مدقالچی
مدیر داخلی: میرزا جلیلی
مسوول هماهنگی و تولید: فتح‌ا... فروغی

امور فنی، صفحه‌آرا و رسام: محمد پریسای
دستیار ناظرچاپ: محمدکشمیری

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر دانش‌پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. جهت ارتقاء کیفی آن نظرات ارزنده خود را به صندوق پستی تهران ۳۶۳ ــ ۱۵۸۵۵ ارسال فرمائید.

فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

«الی کارتان، ریاضیدان مشهور فرانسوی، سه شاگرد داشت: چرن، لیشنروویتس و هشترودی. لیشنرووتیس گفته است که هشترودی ازاو وچرن باهوشتر بوده است. چرن و لیشنرویتس هردومحققان مشهوری شدند؛ اولی در ریاضیات، و دومی در ریاضی‌فیزیك ونسبیت. اما هشترودی شخصیت دیگری شد!» این جملات مقتبس از سر مقالهٔ شماره ۴ سال ۸ مجله فیزیك مرکز نشر دانشگاهی است‌که بعد ازانتشارموجب عکس‌العملهای زیادی درمحافل علمی وآگاه وبویژه درمجامع ریاضی گردید. خبرنامه اخیر انجمن ریاضی ایران درستون ویژه‌ای نظریات ریاضیدانان، شاگردان هشترودی را جمع‌آوری‌کرده است.در این خبرنامه هریك ازاین افراد درمورد تحقیقات و خدمات و ویژگیهای علمی هشترودی سخن رانده‌اند.

نخست باید دیدکه منظور ازبررسی وتحلیل زندگی یك دانشمند چیست و در این بررسی ما دنبال چه اهدافی هستیم. مسلماً دریك نگرش‌دقیق درمی‌یابیم‌که این بررسی‌ها نمی‌تواند

بقیه در صفحه ۳۱

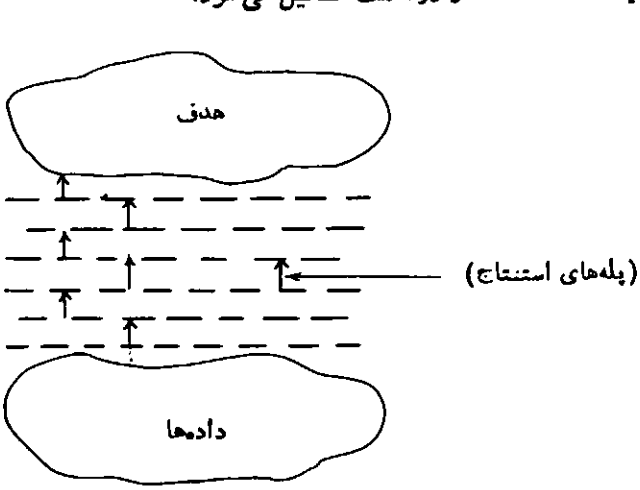
نقش ریاضیات در زندگی بشر و شناخت طبیعت

دکتر غلامرضا دانش نارویی

روشهای حل مسئله

هدف ما دراین مقاله آناکاوی حل مسائل وبیان مهمترین روشهای متداول مسئله حل کردن و یادآوری نکاتی است که باید منظورنمود.

یک مسئله اساساً از دوقسمت تشکیل می‌شود:



۱ـ مفروضات یا داده‌ها

۲ـ حکم یا هدف

منظور ازحل یک مسئله این است که با بهره‌برداری از داده‌ها قواعد استنتاج، حکم خواسته‌شده را نتیجه‌گیری‌کنیم؛ به‌عبارت دیگر از داده‌ها به‌هدف ازپیش تعیین شده برسیم. برای این‌کار نیاز به یک شیوهٔ منظم (یا سیستماتیکی) داریم که‌آن را **برهان** (یا اثبات) می‌نامیم. دستورهای استنتاج شکل تک‌تک مراحل یا قدمهائی راکه برای رسیدن به‌هدف دراین شیوهٔ منظم لازم است، به‌بیان دیگر مراحل سازندهٔ یک برهان هستند، مشخص می‌کنند. **این دستورها قالبهای سازندهٔ برهان هستند،** که اگر کسی آنها را به درستی نشناسد ساختن یک برهان قابل‌قبول برایش مقدور نیست وممکن‌است هرگز به‌سرمنزل مقصود نرسد! (متأسفانه یکی ازعلل ناتوانی محصلین ما درحل مسائل ناشی‌از همین عدم شناخت این قالبها است).

داده‌ها، هدف‌وهمهٔ راههای ممکن به‌کارگیری دستورهای استنتاج (یا قالبها)، چه در مجموعهٔ اولیه و چه نتایج حاصل از

آنها، همراه با دانش قبلی (اصول، تعاریف وقضایا) رویهم **«فضای‌کاوش»** مربوط به مسئله را می‌سازند. یك‌شیوهٔ کاوش منظم برای بررسی مفروضات و رسیدن به‌هدف یك «**الگوریتم**» (یا دستورالعمل) برهان را مشخص می‌نماید.

یك الگوریتم از دومؤلفه تشکیل می‌شود: مؤلفهٔ منطق و مؤلفهٔ کنترل.

به‌عبارت دیگر:

$$\boxed{\text{الگوریتم} = \text{منطق} + \text{کنترل}}$$

مؤلفهٔ منطق شامل داده‌ها، خواسته (ها)، نمایش آنها به زبان منطقی (یا ریاضی) وکشف روابط بین‌آنها است. مؤلفهٔ کنترل شامل طرز رویهم گذاشتن قالبهای سازنده ونحوهٔ رسیدن به هدف درفضای کاوش است. به‌عبارت دیگر، مؤلفهٔ منطق دانشی راکه درحل یك مسئله به‌کار می‌آیند به‌کارمی‌رود ونمایش آن‌را به‌زبان ریاضی مشخص می‌کند، درحالی که مؤلفهٔ کنترل طریقهٔ برهان را ارائه می‌نماید وتغییرات آن راههای مختلف حل یك مسئله را به‌دست می‌دهد وتنها برکارآئی راه‌حل اثرمی‌گذارد. کارآئی یك الگوریتم را غالباً می‌توان به‌وسیلهٔ مؤلفهٔ کنترل بهبود بخشید بدون‌اینکه تغییری درمؤلفه منطق بدهیم. این‌روش به‌ویژه دربرنامه‌ریزی‌های کامپیوتری بسیار مؤثراست.

برای اینکه برهان عاری ازلغزش وقانع‌کننده باشد لازم است مراحل استنتاج روشن و با یکدیگر سازگار باشند. برای این‌منظور ضرورت دارد جمله‌ها خالی ازابهام و دستورترکیب آنها حتی‌الامکان ساده باشد. به‌عبارت دیگر، زبان مورداستفاده برای بیان جمله‌ها، عاری از ابهام واز نظر دستوری باید از سادگی لازم برخوردار باشد. ضرورت صراحت و سادگی دستوری جمله‌ها ایجاب می‌کند تا یك زبان **نمادی** (یا صوری) برای مشخص‌کردن مؤلفهٔ منطق به‌کارگرفته شود ونه یك زبان محاوره‌ای. ازاین‌رو زبان منطق نمادی ابزاراصلی ریاضی‌دانها برای بیان صورت مجرد الگوها است. در اصل همین ویژگی تجرد (یا انتزاعی) دستگاههای نمادی است‌که دراواخر نیمهٔ اول‌قرن حاضر کلادشنون وسایرین‌اولین مدارهای الکترونیکی را ساختندکه به‌وسیلهٔ آنها توانستند محاسبات منطقی و حسابی انجام دهند وپایهٔ ساختن کامپیوتر وتوسعهٔ آن را فراهم آورند.

بحث در زبانهای نمادی واهمیت‌آنها را در ریاضی و درعلوم کامپیوتری به آینده موکول می‌نماییم و در اینجا به دانش قبلی‌مان در مورد این زبانها (از جمله منطق ریاضی) اکتفا می‌کنیم.

فضای‌کاوش از دوبخش تشکیل می‌شود:

الف) فضای حاصل ازمسئله حاضر

ب) فضای موجود گذشته (متشکل ازتعاریف، اصول و قضایا).

به‌عبارت دیگر:

فضای‌کاوش = فضای حال + فضای گذشته (که آن را دانشپایه خواهیم خواند)

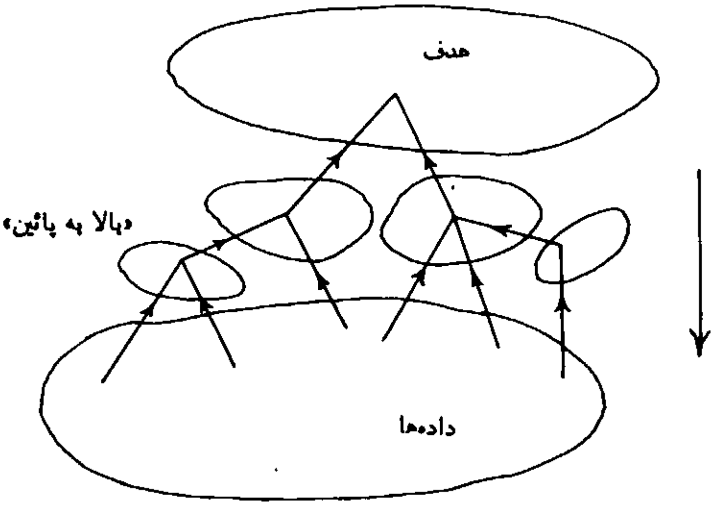
اولین‌حرکت درحل یك مسئله مشخص نمودن فضای‌کاوش حاضر (یا فضای‌حال) است. برای این‌کار باید فرض‌را ازحکم یا داده‌ها را از هدف تمیز دهیم وآنها را به زبان ریاضی (به صورت‌نمادی) بنویسیم وحتی‌الامکان روابط بین‌آنها را به‌کمك دانشپایه (فضای کاوش گذشته) کشف ومشخص نماییم. پس از این مرحله نوبت به‌مؤلفهٔ کنترل، یعنی انتخاب روش برهان یا شیوهٔ پویش درفضای کاوش می‌رسد.

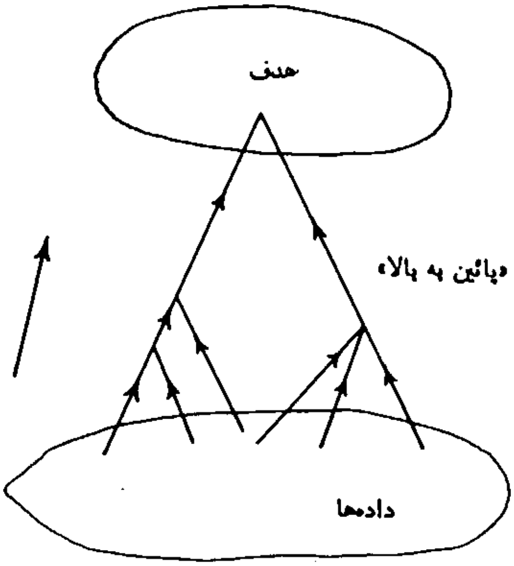
تعبیر دستورهای استنتاج منطقی به عنوان دستورهای «مسئله حل کن» دوطریقهٔ کلی ومتمایز زیر را مشخص می‌کنند:

الف) روش «**ترکیب یا اتحاد**» که عبارتست ازاستدلال از «**پایین به‌بالا**» که درآن استدلال از داده‌ها آغازمی‌شود و مرتباً ازترکیب مفروضات (یا داده‌ها) نتایج جدید به دست می‌آوریم تا سرانجام حکم (یا هدف) مستقیماً از نتایج حاصله به‌دست‌آید.

ب) روش «**تجزیه یا تفرقه**» که عبارتست از استدلال از «**بالا به پایین**» که درآن استدلال را ازحکم آغازمی‌نماییم و مرتب هر حکم را به احکام معادل تبدیل یا به احکام جزئی‌تر تجزیه‌می‌کنیم تا اینکه تمام احکام جزئی مستقیماً به‌وسیلهٔ داده‌ها نتیجه شوند (سیر قهقرائی) در روش (الف) عموماً راه‌حل‌ها ارائه می‌شوند و سپس تأیید و یا توجیه‌می‌گردند، درصورتی‌که در روش(ب) غالباً راه‌حل‌ها کشف می‌گردند.

درهندسه بیشتر از روش (ب) استفاده می‌شود. مطالعهٔ هندسه نشان می‌دهدکه دربسیاری موارد برای‌اثبات قضایا وحل‌مسائل خطوط اضافی رسم می‌کنیم‌که درشکل‌اصلی (که ازصورت قضیه یا مسئله حاصل‌می‌شود) وجود ندارند. این خطوط اگرچه شکل را پیچیده‌ترمی‌کنند ولی یك بخش ضرورت از پروسهٔ استنتاج را تشکیل می‌دهند. زیرا با کشیدن این خطوط شکل را





به‌اشکال جزئی‌تر تقسیم می‌کنیم و استدلال را دقیقاً درسطوح پایین‌تر انجام می‌دهیم. پرسشی که غالباً مطرح می‌شود این است که چگونه بدانیم این خطها را کجا بایدکشید تا در برهان مفید واقع شوند. به‌نظرمی‌رسد پیدا کردن این خطها تصادفی است؛ به‌یك تعبیر همین‌طور است و در واقع نبوغ ولم کار را تشکیل می‌دهند. پیداکردن این خطها خود بخشی ازبرهان است وممکن است کارساده‌ای نباشد. بینش ومهارت پیدا کردن این خطوط با تجربه حاصل می‌شود و به افراد بستگی دارد؛ فردی ممکن‌است ازفردی دیگر ماهرتر باشد. درهندسهٔ اقلیدسی هیچ راه تضمین شده‌ای برای‌رسیدن به‌یك برهان وجود ندارد واین واقعیتی‌است تلخ‌که دربارهٔ بچه‌های مدرسه و متخصصین هردو صادق است.

قالب‌های سازندهٔ روش (الف) براستنتاج منطقی

$$\frac{\begin{array}{c}A \to B\\ A\end{array}}{B}$$

(از $A \to B$ و A نتیجه می‌شود B)

وقالب‌های سازندهٔ روش (ب) براستنتاج منطقی

$$\frac{\begin{array}{c}A \to B\\ \neg B\end{array}}{\neg A}$$

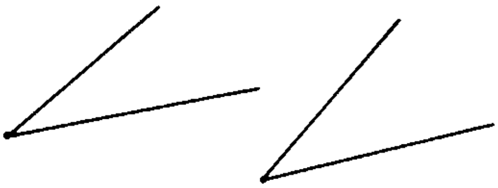
(از $A \to B$ و $\neg B$ نتیجه می‌شود $\neg A$)

پایه‌گذاری‌می‌شود. به‌یك تعبیر، فرض می‌کنیم حکم درست‌است (یعنی مسئله حل شده است). با توجه به‌ویژگی‌های حکم آن را به‌حکم معادل یا احکام جزئی‌ترتقسیم می‌کنیم.

روش (ب) روش تجزیه است که به وسیله آن مسائل پیچیده را به مسائل ساده‌تر تجزیه می‌کنیم. همین استنتاج (ب) راکه به‌منطق توانایی تعبیر حل مسئله می‌دهد می‌توان به طور مؤثر دراجرای برنامه‌های منطقی به‌وسیلهٔ کامپیوتر به‌کارگرفت. درحقیقت این روش حل مسائل را با برنامه‌ریزی کامپیوتریکی می‌کند (بحث بیشتر این مطلب را که بسیار اهمیت دارد به آینده موکول می‌کنیم).

برای‌روشن‌شدن‌این‌دو روش‌می‌پردازیم‌به ذکر چند مثال:

مثال ۱. نشان دهید که اگر دوضلع یك زاویه با دوضلع از یك زاویهٔ دیگر نظیر به نظیر موازی باشند. این دو زاویه با هم برابرند.

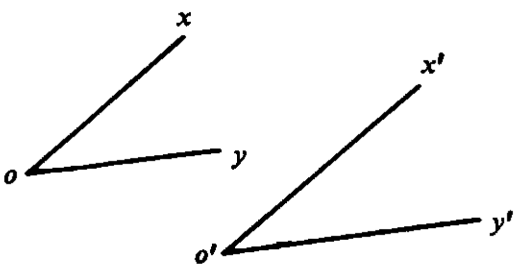


برهان. درنگاه اول داده‌ها وهدف ازاین قرارند:

داده‌ها، دو زاویه داده شده‌اند ـ هرضلع یکی ازاین دو زاویه با یك ضلع از زاویه دومی موازی است.

هدف، این دو زاویه برابرند.

اولین قدم برای مشخص‌کردن فضای کاوش حاضر این است‌که داده‌ها وهدف را به‌صورت ریاضی نمایش دهیم.



برای این‌کار لازم است زاویه‌ها را نامگذاری نماییم

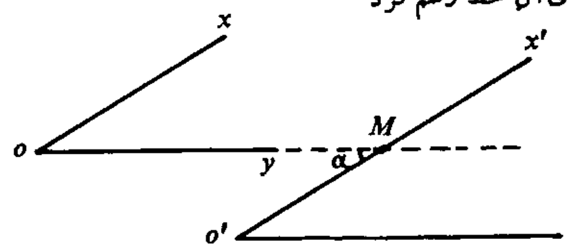
پس از این کار داده‌ها و هدف را به زبان ریاضی بازنویسی می‌کنیم

داده‌ها: (۱) $\angle o$ و $\angle o'$ معلوم‌اند- (۲) $oy \| o'y'$؛

(۳) $ox \| o'x'$؛

هدف: (۴) $\angle o = \angle o'$؛

فضای گذشته: از یك نقطه درخارج یك‌خط تنها یك خطمی‌توان موازی‌آن خط رسم کرد



اولین نتیجه این است‌که $oy \cap ox' \neq \varnothing$.

فرض‌کنیم

(۵) $oy \cap ox' = \{M\}$؛

(۶) $\angle o$ با $\angle \alpha$ متبادل داخلی است؛

(۷) $\angle o'$ با $\angle \alpha$ متبادل داخلی است؛

(۸) اگرخطی دوخط موازی را قطع‌کند دو زاویهٔ متبادل‌داخلی برابرند؛

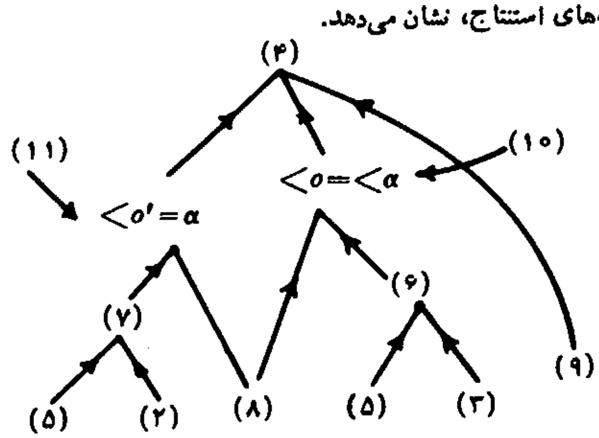
(۹) دوچیز برابر با یك چیزسوم با هم برابرند.

بنابراین فضای حال وفضای گذشته چنین است:

فضای حال شامل (۱)، (۲)، (۳)، (۴) می‌باشد.

فضای‌گذشته شامل (۵) و (۶) و (۷) و (۸) و (۹) می‌باشد

دیاگرام زیر برهان را با استفاده از روش (الف)، همراه با پله‌های استنتاج، نشان می‌دهد.



روش (الف)

ملاحظه می‌شودکه از (۳) و (۵) رابطهٔ (۶) واز (۶) و (۸) رابطهٔ $\angle o = \angle \alpha$ (۱۰) نتیجه می‌شود و نیز از (۲) و (۵) رابطهٔ (۷) واز روابط (۷) و (۸) رابطهٔ $\angle o' = \angle \alpha$ (۱۱) نتیجه می‌گردد. و بالاخره از (۱۰) و (۱۱) و (۹) به هدف می‌رسیم

مثال ۲. فرض‌کنیم α یك عدد حقیقی بین ۰ و π باشد. تابع F در رابطهٔ زیرصدق‌کند

$$F(\theta)=\frac{\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)}{\cos\theta-\cos(\theta+\alpha)},\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi-\alpha$$

نشان دهندکه F یك تابع ثابت هست.

(داده‌ها)، α عددی است حقیقی بین ۰ و π

(۱) $0<\alpha<\pi$

F یك تابع است با ضابطهٔ

(۲) $F(\theta)=\dfrac{\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)}{\cos\theta-\cos(\theta+\alpha)}$

θ عددی است حقیقی بطوری‌که (۳) $0\leqslant\theta\leqslant\pi-\alpha$

هدف، F تابعی است ثابت (۴)

فضای حاضر شامل (۱)، (۲)، (۳) و (۴) است

فضای گذشته: (الف) ازتناسب $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ نتیجه می‌شود

(۵) $ad=bc$

(ب) (۶) $\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b$

(ج) برای هرشیء x، (۷) $x=x$

تعریف تابع ثابت. تابع $F: R \to R$ را یك تابع ثابت‌گوییم هرگاه برای هر x در R داشته باشیم $F(x)=a=F(0)$ (a عددی است ثابت).

با استفاده ازاین دانش صورت ریاضی‌هدف (یعنی رابطهٔ (۴)) چنین است.

برای هر θ، (۸) $F(\theta)=F(0)$

برهان. این مسئله را به روش (ب) حل می‌کنیم.

فرض‌کنیم حکم درست باشد. از (۸) و (۲) نتیجه می‌شود.

(۹) $\dfrac{\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)}{\cos\theta-\cos(\theta+\alpha)}=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

$\Updownarrow$ بنابر (۵)

(۱۰) $[\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)](1-\cos\alpha)=$

$$\sin\alpha\,[\cos\theta-\cos(\theta+\alpha)]$$

$$\Big\Updownarrow \quad \text{(بنا بر فضای گذشتهٔ جبری)}$$

(۱۱) $$\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)-\sin\theta\cos\alpha-\sin(\theta+\alpha)\cos\alpha=\sin\alpha\cos\theta-\sin\alpha\cos(\theta+\alpha)$$

$$\Big\Updownarrow \quad \text{(بنا بر فضای گذشته جبری)}$$

(۱۲) $$\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)-(\sin\theta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\theta)-[\sin(\theta+\alpha)\cos\alpha-\sin\alpha\cos(\theta+\alpha)]=0$$

$$\Big\Updownarrow \quad \text{(بنا بر فضای گذشته جبری)}$$

(۱۳) $$\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)-\sin(\theta+\alpha)-\sin(\theta+\alpha-\alpha)=0$$

$$\Big\Updownarrow \quad \text{بنا بر (۶)}$$

(۱۴) $$\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)-\sin(\theta+\alpha)-\sin\theta=0$$

$$\Big\Updownarrow \quad \text{(بنا بر فضای گذشتهٔ جبری)}$$

(۱۵) $$0=0$$

اما (۱۵) گزاره‌ای است درست (حالت خاص (۷)) و بنا بر این حکم ثابت است.

توجه. با به‌کار بردن روش (ب) راه حل این مسئله به روش (الف) کشف شده است. زیرا کافی است از (۱۵) به ترتیب عکس حرکت کنیم تا به‌حکم برسیم

$$(7)\Longrightarrow(15)\Longrightarrow(14)\Longrightarrow\dots\Longrightarrow(9)\Longrightarrow(8)$$

مثال ۳. تابع $f\colon Q\to R$ درشرط

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

صدق می‌کند. ثابت‌کنید برای هر x در Q داریم:

$$f(x)=xf(1)$$

برهان (داده‌ها). Q مجموعهٔ اعداد گویا، R مجموعهٔ اعداد حقیقی x و y اعداد گویا هستند،

تابع $f\colon Q\to R$ طوری است که داریم

(۱) $$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

هدف

(۲) $$f(x)=x\cdot f(1)\quad (x\in Q)$$

برای حل این مسئله، حکم را به‌چهار حکم جزئی تجزیه می‌کنیم:

$$Q=Z^+\cup Z^-\cup Q_1\cup Q_2$$

که در آن ....

$$Z^+=\{1,2,3,4,\dots\}$$

$$Z^-=\{\dots-4,-3,-2,-1,0\}$$

$$Q_1=\left\{\frac{1}{m}\,\middle|\,m=\pm2,\pm3,\dots\right\}$$

$$Q_2=\left\{\frac{n}{m}\,\middle|\,n=2,3,4,\dots \text{ و } m=\pm2,\pm3,\dots\right\}$$

برای اینکه (۲) را ثابت کنیم کافی است آن را درهر یك از حالات ساده‌تر زیر ثابت نمائیم:

حالت ۱) وقتی x متعلق است به $Z^+_\circ$.

$$f(1)=1\times f(1)$$

$$f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1) \qquad \text{بنا بر (۱)}$$

$$f(2)=2f(1)$$

با استفاده ازاستقراء داریم (ثابت‌کنید).

$$f(n)=nf(1)$$

بنا بر این (۲) برقرار است.

حالت ۲) وقتی x متعلق است به Z^-.

$$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0) \qquad \text{بنا بر (۱)}$$

$$\left.\begin{aligned}f(0)&=0\\ f(0)&=0\times f(0)\end{aligned}\right\}\ \text{بنا بر فضای گذشتهٔ جبری}$$

بنا بر (۱)

$$0=f(0)=f(-1+1)=$$

$$f(-1)+f(1)$$

$$f(-1)=-f(1)=-1\times f(1)$$

بااستفاده از استقراء داریم: (ثابت‌کنید).

$$f(-n)=-n\times f(1)$$

حالت ۳) وقتی x متعلق است به Q_1.

$$f(1)=f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f(1)=2f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}f(1)$$

با استقراء داریم (ثابت‌کنید)

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}f(1)$$

$$f(0)=f\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{n}\right)=-f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{n}\right)=-\left(\frac{1}{n}f(1)\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n}\times f(1)$$

حالت ۴) وقتی x متعلق است به Q_2.

$$f\left(\frac{2}{m}\right)=f\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m}\right)=f\left(\frac{1}{m}\right)+f\left(\frac{1}{m}\right)$$

بنابرحالت (۳).

$$f\left(\frac{2}{m}\right)=\frac{1}{m}f(1)+\frac{1}{m}f(1)$$

$$f\left(\frac{2}{m}\right)=\frac{2}{m}f(1)$$

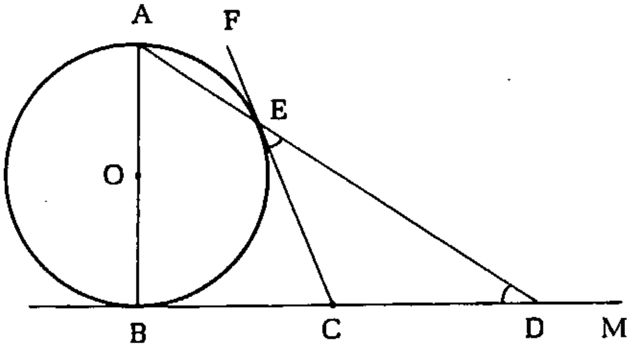
بنابراستقراء

$$f\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{n}{m}f(1)$$

با اثبات حالت۴ حکم ثابت‌می‌شود. زیرا از ترکیب این‌حالات رابطهٔ (۲) حاصل می‌شود.

مثال ۴. دایرهٔ O به‌قطر AB مفروض است و BM و CF بر دایره مماسند. اگر وتر AE را ادامه دهیم تا BM را در نقطهٔ D قطع‌کند ثابت‌کنید: $BC=CD$.

هدف $\overline{BC}=\overline{CD}$



برهان (فضای کاوش حاضر)

داده‌ها الف) دایره‌ای به‌مرکز O وقطر AB (۱)

ب) مماسهای BH و CF ونقاط تماس B و E (۲)

ج) c محل برخورد مماس‌ها . D محل برخورد مماس BM با وتر AE. (۳)

هدف $\overline{BC}=\overline{CD}$. (۴)

فضای‌کاوش گذشته

الف) زاویه‌های $\angle AEF=\angle CED$ چون روبه‌رو هستند (بنا بر تعریف زاویه‌های روبرو) (۵)

ب) $\angle A$ یك زاویهٔ محاطی و $\angle AEF$ یك زاویهٔ ظلی است (۶)

ج) قطر AB برمماس BM عمود است، یعنی $\angle ABM=90^\circ$. (۷)

(د) دو زاویهٔ روبرو با هم برابرند. (۸)

ه) $\angle A$ و $\angle AEF$ متمم یکدیگرند (چون مجموعشان ۹۰ درجه است) (۹)

و) $\angle A$ و $\angle D$ متمم یکدیگرند (چون $\angle B=90^\circ$) (۱۰)

ز) دومماس کشیده شده از یك نقطه بر یك دایره با هم برابرند. (۱۱)

ح) دوچیز مساوی با یك چیز خود با هم برابرند. (۱۲)

ط) دریك مثلث، اگردوضلع با هم برابرباشند.دو‌زاویهٔ روبه‌روی آنها برابرندوبالعکس. (۱۳)

اثبات. فرض کنیم (۴) برقرار باشد.

از (۲) و (۱۱) داریم: $\overline{BC}=\overline{CE}$ (۱۴)

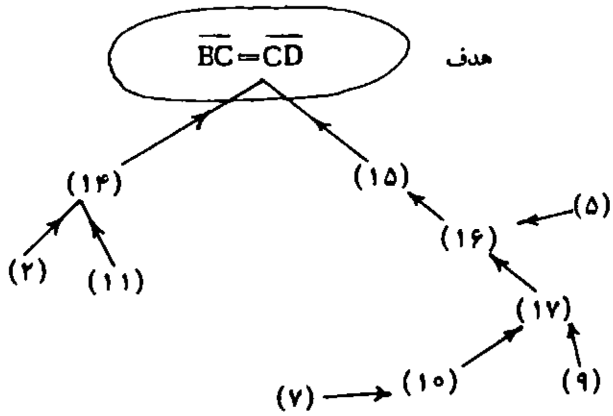
با فرض (۴)، از (۱۲) و (۱۴) نتیجه می‌شود $\overline{CE}=\overline{CD}$ (۱۵)

از (۱۵) و (۱۳) نتیجـه می‌شود $\angle E=\angle D$ (در مثلث CDE) (۱۶)

از (۵) و (۸) « « $\angle D=\angle AEF$ (۱۷)

از (۱۷) و (۱۰) « « $\angle AEF, \angle A$ متمـم یکدیگرند (۱۸)

اما (۱۸) همان (۹) است که ازقبل می‌دانیم (فضای کاوش گذشته).
درخت برهان را به‌صورت زیر می‌توان نشان داد:

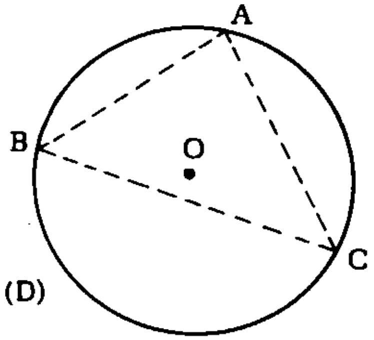


ملاحظه می‌کنید که چگونه راه‌حل کشف می‌شود.
در روش «بالا به پایین»، درحالتی‌که درستـی حکم را فرض می‌گیریم یا فرض می‌کنیم مسئله حل شده باشد، فایـدهٔ اصلی در این است که به‌این طریق‌ویژگیهائی راکه حکم (یا پاسخ مسئله) باید دارا باشد تعیین می‌کنیم و سپس با دانستن این ویژگـی‌ها شییء راکه دنبالش می‌گردیم پیدا می‌کنیـم. برای روشن شدن بیشتر موضوع به‌مثال زیر توجه‌کنید.

مثال. دایره‌ای رسم‌کنیدکه برسه نقطه داده شده غیرواقع بریك استقامت بگذرد.

برهان. فرض کنیـم نقاط A و B و C معلوم باشنـد و (D) دایره‌مطلوب‌باشد. اگر از O مرکز دایره‌را به نقاط A و B و C وصل کنیم و پاره‌خطهـای AB و AC و BC را بکشیم ویژگی‌ها و روابط زیرحاصل می‌شود.

(۱) $OA=OB=OC$ همه شعاع‌های‌دایره‌اند؛



(۲) از $OA=OB$ نتیجه‌می‌شود:
O روی عمودمنصف AB قراردارد؛

(۳) از $OA=OC$ نتیجه می‌شود:
O روی عمودمنصف AC واقع‌است.

از ۲ و ۳ نتیجه می‌گیریم برای پیداکردن O کافی است عمود‌منصف‌های AB و AC را بکشیم محل تـلاقـی این دو عمود‌منصف مرکز دایره است. با پیدا شدن مرکز دایره طول شعاع آن نیزمشخص می‌شود (طول OA یا OB یا OC). می‌دانیم که داشتن مرکز وشعاع برای رسم یك دایره‌کافی است.

مسائل عموماً به‌دو دسته تقسیم می‌شوند: یك دسته‌آنهائی هستندکه در آنها می‌خواهیم نشان دهیم کـه حکمی با ویژگی معینی دربارهٔ تعداد زیادی (درحقیقت نامتناهـی) شییء برقرار است (در واقع کلیه اشیاء یك عالم سخن مطرح می‌شوند). به عبارت دیگر با سورعمومی سروکار داریم. دستهٔ دیگر آنهائی هستندکه درآنها می‌خواهیم وجود یك شیئی را با ویژگی معینی نشان دهیم (دراینجا با سور وجودی روبه‌روهستیم).

ازآنجائی‌که اثبات حکم برای تك‌تك اشیاء موردبحث درحالت اول‌کاری ناشدنی است، معمول براین است که یکی ازآن اشیاء را به‌نمایندگی بقیه به دلخـواه انتخاب می‌کنیم و حکم را درموردآن ثابت می‌نماییم. این روش راکه به **«روش انتخاب»** مشهور است می‌توان به منزلهٔ یـك **«ماشین برهان»** دانست‌کـه توانائی تکرار اثبات حکم را برای تك‌تك اشیاء موردنظر دارد و به‌ما توانائی انجام این کار را می‌دهد و به این ترتیب نیازی به‌اینکه حکم را درمورد همه ثابت کنیم نیست. بهتر بگـوییم روش انتخاب نشان می‌دهـد که چگونه ساختمان داخلی **ماشین برهان** طراحی می‌شود تا توانائی دلخواه را به ما عرضه‌کند.

نکته‌ای‌که باید به آن توجه نمود این است‌که شیـیء برگزیده نمایندهٔ تمام اشیاء موردبحث باشد ونه نماینـده اشیاء خاصی ازآنها (مثلاً وقتی صحبت از مثلث می‌شود نباید مثلث انتخاب

شده درحالت خاص رسم شود. متساوی‌الساقین و...)

توجه. اصل استقراء ریاضی را نیزکه درمقالهٔ گذشته از آن صحبت به‌میان آمد می‌توان‌مانند روش انتخاب یك ماشین‌برهان دانست که با بررسی حالت $n=1$ (یا در استقراء قوی $n=a>1$) حرکت را آغاز می‌کند و درطول لیست پیش می‌رود وهرحکمی را که به‌آن می‌رسد اثبات می‌نماید.

درحالت دوم یعنی‌حالتی‌که با سور وجودی ارتباط پیدا می‌کنند اثبات به‌نحو دیگری است. دراینجا دنبال یك یا چند شییء درمیان اشیاء عالم سخن می‌گردیم‌که دارای ویژگی معین باشند با پیداکردن (یا ارائه دادن) چنین شییء حکم ثابت می‌شود. روش معمول دراین حالت ساختن شییء خواسته شده است‌که دارای ویژگی داده شده باشد. برای این‌کارفرض‌اینکه مسئله حل شده است (مانند مثال قبل) بسیار کمك می‌کند. چون بررسی ویژگی‌ها روش ساختن شیئی و راه‌حل مسئله را کاملاً معلوم می‌کنند.

اصل زیرکه به‌اصل «لانه کبوتر» نام گرفته است یکی ازاصول بسیارمهم پذیرفته شده در ریاضیات است.

اصل لانه کبوتر اگر $kn+1$ شییء را در n جعبه قرار دهیم یکی ازجعبه‌ها دست‌کم $n+1$ شییء خواهدداشت. این اصل حتی درحالتی‌که $k=1$ وسیله‌ای بسیارقوی برای اثبات قضایا ومسایل **وجودی** است نیاز به‌یادآوری نیست که طرزاستفاده ازاین اصل نیزمانند اصول دیگر نیاز به تجربه و تمرین دارد.

مثال. فرض‌کنیم‌مجموعه‌ای $n+1$ عضوداردکه همهٔ آنها اعداد طبیعی نابیشتراز $2n$ هستند. نشان‌دهید عضوی دراین مجموعه وجود داردکه مضربی است ازیك عضو دیگر (به‌عبارت دیگر یك عضواین مجموعه عضو دیگری‌را عاد می‌کند).

اثبات شکل ریاضی این مجموعه چنین است:

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}\}\ ,\ a_k\leqslant 2n,$$

$$k=1, 2, \cdots, n+1$$

می‌دانیم هرعدد فرد مانند b را می‌توان‌به‌صورت $b=2^0\times b$ وهرعدد زوج مانند c را می‌توان به‌صورت $c=2^{n_1}\times b$ که درآن $n_1\geqslant 1$ و b عددی است فرد نوشت. پس می‌توان اعضای A را چنین نمایش داد:

$$a_i=2n_ib_i\ ,\ i=1, 2, \cdots, n+1$$

که درآن $n_i\geqslant 0$ و b_i عددی است فرد.

حال مجموعهٔ $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_{n+1}\}$ یك مجموعهٔ $n+1$ عضوی است ازاعداد فرد که هریك ازآنها از $2n$ کوچکتر است. اما تعداد اعداد فردکوچکتر از $2n$ برابراست با n. بنابراین اصل لانه کبوترحکم می‌کند که دست‌کم دوعدد در B وجود دارندکه با هم برابرند.

فرض‌کنیم $b_i=b_j$, $i<j$.

آنگاه

$$a_j=2^{n_j}b_j\ ,\ a_i=2^{n_i}b_i$$

اگر $n_i\leqslant n_j$ آنگاه a_j مضربی است از a_i و اگر $n_i>n_j$ آنگاه a_i مضربی است از a_j وبنابراین حکم ثابت است.

طریقهٔ دیگری‌که درحل مسایل بسیارمفید است این‌است که **نقیض حکم** را **درست** فرض می‌کنیم و آن را به مجموعهٔ داده‌ها (یا مفروضات) می‌افزاییم (یعنی فرض می‌کنیم حکم درست نباشد). سپس نشان می‌دهیم‌که مجموعه حاصل **ناسازگار** است، یعنی منجربه **تناقض** می‌گردد. دراینجا با فرض نادرست بودن حکم کوشش براین است‌که به‌نقیض یك گزارهٔ درست یا نقیض یکی از مفروضات برسیم. رسیدن به یك تناقض نشانگر آن است‌که فرض **نادرست بودن حکم** قابل پذیرش نیست. و ازاین‌رو حکم درست است.

روش **انکارحکم** که در بالا آمد هستهٔ اثباتهای مکانیکی قضایا و «**هوش مصنوعی**» است‌وما بحث آن رابه آینده‌موکول می‌کنیم.

برای روشن شدن طرز استفاده از **تناقض** به مثال زیر توجه کنید:

مثال. ثابت‌کنید سری

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

واگرا است.

برهان. برای اینکه نشان دهیم سری بالا واگرا است. باید ثابت‌کنیم هیچ عددی‌وجود نداردکه حاصلجمع بالا باآن برابر باشد. حال حکم را انکارمی‌نماییم، یعنی فرض می‌کنیم این‌سری واگرا **نباشد** وازآنجا تلاش می‌کنیم به یك تناقض برسیم. از انکارحکم نتیجه می‌شودکه‌سری همگرااست یعنی عددی مانند p وجود داردکه

$$p=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots.$$

اگر دراین سری به جای کسرهائی که مخرج آنها فرد است کسرهائی قرار دهیم‌که مخرج‌آنها اولین عدد زوج بعدی باشد کسرحاصل کوچکتراز‌کسر قبلی می‌شود و درنتیجه p بزرگتر

از سری حاصل است.

یعنی:

$$p>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

$$=p$$

درنتیجه به‌این نتیجه می‌رسیم که $p>p$ واین **متناقض است** با ایــن اصل «**که هرشییء با خودش برابر است**» این‌تناقض آشکار نشان می‌دهد که فرض همگرا بودن نادرست است.

مثال ۲. ثابت‌کنید معادلـهٔ $x^2-2y^2=0$ در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب ندارد.

$$x^2-2y^2=0$$

برهان‌فرض

حکم برای هردوعدد درست a و b، $a^2-2b^2\neq 0$.

انکارحکم. اعداد طبیعی c و d یافت می‌شوند که

$$(1)\quad c^2-2d^2=0$$

برای جلوگیری از اطاله‌کلام نتایج‌حاصل از (۱) را به‌اختصار می‌نویسیم و جزئیات را به‌خواننده واگذار می‌کنیم:

$$(2)\quad c \text{ زوج است}, \ c=2c_1 \ c>c_1$$

$$(3)\quad d \text{ زوج است}, \ d=2d_1 \ d>d_1$$

پس داریم

$$(4)\quad c_1^2=2d_1^2, \ c>c_1, \ d>d_1$$

یعنی c_1 و d_2 نیزیك جواب هستند.

به‌همین ترتیب c_2 و d_2 یافت می‌شوند که:

$$(5)\quad c_2^2=2d_2^2, \ c>c_1>c_2, \ d>d_1>d_2$$

یعنی c_2 و d_2 نیزیك دسته جواب هستند.

اگراین روش را ادامه دهیم به دنباله‌های نزولی

$$(6)\quad c, c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n, \cdots$$
$$c>c_1>c_2>\cdots>c_n>\cdots$$

$$(7)\quad d, d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n, \cdots$$
$$d>d_1>\cdots>d_n>\cdots$$

می‌رسیم که پایان ناپذیرند. اما مجموعه‌های

$$\{c, c_1, \cdots, c_n, \cdots\}$$

$$\{d, d_1, \cdots, d_n, \cdots\}$$

زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی هستندکه بنابراصل خوشترتیبی N باید عضو **ابتدا** داشته باشند. یعنی دنباله‌های (۶) و (۷) باید **پایان‌پذیر** باشند واین با ماهیت ساخت آنها **متناقض** است.

روش بالا که از عهد یونان باستان شناخته شده است به روش نـزول نـامتناهــی معروف است و روشی‌بسیار تـوانا برای حل بسیاری از مسائل است. به‌ویژه، این روش درمسائل مربوط به حل‌ناپذیری معادلات ویا ساخت‌پذیری مناسب‌است.

در زیراهم نکات مفیدی را که درحل مسائل باید درنظر گرفت به طوراجمال می‌آوریم.

۱ـ **درك صورت مسئله:** صورت مسئـله را باید به دقت مطالعه کرد (در صورت لزوم چنـدین بار) تـا ابهامات مـوجود برطرف شود. درصـورت نیاز باید با عبارت‌های معادل بیان کرد.

۲ـ **مشخص کردن معلوم و مجهول (داده‌ها و حکم):** این کار برای‌ساختن فضای‌کاوش ضروری‌است.

۳ـ **انتخاب نمادگذاری مناسب:** بـه منظـور روشن ساختن و اختصارنویسی و...

۴ـ **نمایش‌داده‌ها** (معلوم‌ها) وحکم (مجهول) به‌صورت‌نمادی.

۵ـ **کشیدن شکل یا دیاگرام:** این‌کار نیز می‌تـواند خیلی از ابهامات را رفع کند و روابط موجود را ظاهرمی‌کند.

۶ـ **فضای کاوش گذشته:** آنچه در وهلهٔ نخست دیده می‌شود.

۷ـ **کوشش برای یافتن رابطه‌های موجودبین داده‌ها و حکم:** فضای کاوش گذشته دراینجا نقش اساسی بازی می‌کند.

۸ـ **فرمولبندی به یك مسئلهٔ معادل:** تعـدیل یا اصـلاح‌کردن روابط

۹ـ **از تقارنهای ریاضی و ثابت‌های‌ریاضی استفاده‌کردن:** این کارهم اثبات را ممکن است ساده‌ترکند وهم راه‌حل ارائه دهد.

۱۰ـ **کاوش برای دستیابی به یك الگو:** ایــن کار با آغاز از حالتهای خاص‌آغاز می‌شود.

۱۱ـ **تجزیه به‌حالات کردن:** در روش از بالا به پایین

۱۲ـ **بحث از طریق تناقض.**

۱۳ـ **استفاده ازاصول استقراء و لانگکبوتر.**

واضح است که استفاده هریك ازاین نکات به نوع مسئله بستگی دارد و دربعضی موارد نامناسب ممکن است موجب پیچیدگی بیشتری شود تا راهگشای حل مسئله. اینکه هر نکته را کی باید به‌کارگرفت بستگی به‌مهارت وتجربهٔ ما دارد کـه مسلماً تمرین زیاد نقش سازنده‌ای درکسب این مهارت بازی می‌کند.

این مقاله را با توضیح بیشتری درمورد مؤلفه‌های اصلی مسئله یعنی منطق وکنترل به‌پایان می‌بریم:

برای پیروزی درحل مسائل تسلط به‌هردو مؤلفه لازم است. بدون دانش لازم درمورد مؤلفهٔ منطق تمیزدادن داده‌ها ازهدف (یا مفروضات ازحکم) ونمایش آنها بدزبان نمادی (یا فنی) و ایجاد یك فضای روشن‌که درآن روابط موجود ولی نهفتهٔ بین داده‌ها وهدف به‌راحتی دیده شوند به‌سختی عملی است، وبدون داشتن دانش (ولو متوسط) دربارهٔ تکنیکها و روش‌های کشف نمی‌توان حداکثر بهره را ازمنابع در دست (یعنی داده‌ها و دانش‌پایه) گرفت.

مؤلفهٔ منطق را می‌توان دانش فنی نامید و مؤلفهٔ کنترل را دانش مدیریت.

هدف‌ازمقدمات بالا تأکید براین نکته است‌که: هردودانش چه فنی وچه مدیریت برای پیروزی درحل مسائل واصولا درانجام کارهای روزمره (فردی یا اجتماعی) لازمند وهیچیك از این‌دو به تنهائی برای رسیدن به‌هدف و بهره‌گیری مطلوب وبهینه کافی نیستند. یك دلیل مهم شکست بسیاری از افراد در انجام وظایف محوله ازهمین‌جا ناشی می‌شودکه تصور می‌رود اگر فردی دارای دانش فنی درموردی خاص باشد می‌تواند ازعهدهٔ انجام‌آن کار به‌خوبی برآید!، ویا اگر فردی دانش مدیریت داشته باشد می‌تواند هرکاری را به‌او محول‌کنند به‌خوبی‌انجام دهد!ـ تصورکنید اگرکاری به‌کسی‌که نه دارای دانش فنی‌است ونه دانش‌مدیریت واگذارشود چه‌گرفتاری پیش‌خواهدآورد!!! (نمرهٔ صفر درامتحانات برای این افراد درنظرگرفته شده‌است که حقیقتاً زیبندهٔ آنها است!)

درحل مسائل زیرسعی‌کنید فضای کاوش را تشکیل دهید و روش انتخاب شده را مشخص‌کنید.

تمرین

۱ـ ثابت‌کنید به‌ازای هر $n\geqslant 1$ داریم

$$1!+2(2!)+\dots+n(n!)=(n+1)!-1$$

۲ـ اگر n عددی صحیح و n^2 زوج باشد ثابت‌کنید n زوج است

۳ـ نردبانی به‌طول l متر برروی‌کف افقی قرارگرفته است وبه دیواری تکیه داده شده است و کارگری درنقطهٔ وسط نردبان قرار دارد. اگر نردبان ناگهانی به‌لغزد وبه زمین‌بیفتد، مسیر طی شده کارگر را (به‌فرض ثابت ماندن در وسط نردبان) مشخص‌کنید

۴ـ ثابت‌کنید

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$$

۵ـ ثابت‌کنید

$$2!\times 4!\dots\times(2n)!\geqslant((n+1)!)^n$$

۶ـ ثابت‌کنید به‌ازای هر $p\geqslant 2$ داریم

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p^2}\right)=\frac{p+1}{2p}$$

دراین مسئله ازاصل استقراء قوی استفاده کنید (به‌جای آغاز از ۱ استقراء را از۲ شروع می‌کنیم).

۷ـ ثابت‌کنید یك مجموعهٔ n عضوی دارای 2^n زیرمجموعه است.

سعی‌کنید این مسئله را به‌چندین روش حل‌کنید.

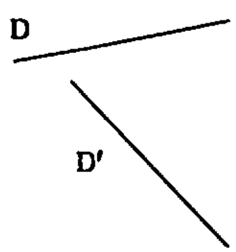
۸ـ فرض‌کنیم n یك عدد فرد و A یك ماتریس $n\times n$ متقارن باشد به‌گونه‌ای‌که هر ردیف وهرستون‌آن متشکل شده باشد ازجایگشتهای اعداد ۱، ۲، ...، n. ثابت‌کنید هریك از این اعداد برقطراصلی ظاهرمی‌شود.

۹ـ نشان‌دهید برای هرعدد حقیقی x، اگر

$$x^2-3x+2\leqslant 0$$

آنگاه، $1\leqslant x\leqslant 2$

۱۰ـ دوخط D و D' داده شده‌اند. دایره‌ای به شعاع ۵ رسم‌کنیدکه برهردوخط مماس باشد.



تفاوت ریاضیات دبیرستانی با ریاضیات دانشگاهی

این مقاله نظرات آقای دکتر امیدعلی کره‌زاده می‌باشد که در بیست‌و دومین کنفرانس ریاضی مشهد برای دبیران ریاضی ایراد شده است.

منظورمن از تفاوت فوق تفاوتی نیست‌که بین مطالب کتب‌درسی ریاضیات‌دبیرستانی با کتب درسی ریاضیات دانشگاهی وجود دارد. بلکه تفاوتی است بین مطالب‌ریاضی که ریاضی‌کاران دبیرستانی در کتب غیر- درسی یا مجلات مربوط منتشرمی‌کننـد با ریاضیاتی است‌که ریاضی‌کاران‌دانشگاهی در کتب غیردرسی یا مجلات مربوط منتشر می‌کنند. اولین چیزی‌که باید درنظر گرفته شود این موضـوع است که ریاضیات در هر مقطعی‌که باشد چه‌دبیرستانی‌وچه‌دانشگاهی دارای‌اهمیت یکسان است. ولی تفاوتی‌که بین این دو وجـود دارد به‌طـور خـلاصه این است‌کـه در ریاضیات دبیرستانی با مطالبی نظیـر «با فـرض داشتن p ثابت کنید q برقراراست» مواجه هستیم ولی‌در ریاضیات دانشگاهی با مطالبـی نظیر «با داشتن p چه می‌توان‌گفت؟» مواجه هستیم و همین موضـوع بـاعث شده است‌کـه در ریاضیات‌دبیرستانی‌همه مشغول حل‌مسئله‌یی هستند که دیگـری آن را حل‌کرده است. اگرچه این نوع کار ریاضی‌کاریست مشکل ولی حتـی اگر شخص موفق به حل صدها مسئله ازاین نوع شود متأسفانه امتیازی‌در ریاضی‌کسب نمی‌کنـد. ولی ریاضـی کار دانشگـاهی با فـرض p بالاخـره چیزی می‌گوید ومقاله‌یی‌منتشرمی‌کند. یعنی‌خودش برای خودش مسئله مطرح می‌کند وجوابی به‌آن می‌دهد وهمیشه هم شرایـط مسئله را طوری تعیین‌می‌کندکه بتواند به‌آن جوابی بدهد. و وقتـی‌در این ریـاضیـات کسی مسئله‌یی طرح کنـد تا دیگران حل کننـد معمولا مسئله سالها حل نمی‌شود و به‌عنوان مسئله حل نشده سالها درمنابـع می‌ماند. با این همه وقتی درجامعه صحبت از ریاضی- دان می‌شود اکثر به‌ریاضـی‌کار دانشگاهی فکرمی‌کنند. متأسفانه ریاضی‌کار دبیرستانی بیشتروقت خود را صـرف حل مسائل حل شده می‌کند. باید توجه داشت کـه گرچه همه به اهمیت حل مسئله در ریـاضیـات واقف‌اند ولی مسائل باید بگونه‌ای باشند که مجموعه‌ای از آنها ما را درحل مسائل بعدی‌کمك‌کند. حل مسئله اگر برای همان مسئله باشد متأسفانه نه تنها مفید نیست‌بلکه ضرر هم دارد. هدف ریاضیات این نیست که عده‌یی مسئله طرح‌کنند وخودشان‌آن را حل‌کنند وبعد دیگران را برای حل آن به مبارزه دعوت‌کننـد. حتی هدف مسابقات ریاضـی نیزاین نیست. تعداد زیـادی از مسائل‌کـه درنشریـات مطـرح می‌شود و مخصوصاً درمسابقات ریاضی، برای‌ریاضی مضرند.

ظاهراً از موضوع سخنرانی خارج شده‌ام ولی چون مسئله وحل مسئله قسمت مهمی از کاریك ریاضی‌کار دبیرستـانـی را شامل می‌شود می‌بایست به آن اشاره‌یـی می‌شد. البته بحث مضربودن بعضی از مسائل خود می‌تواند موضوع سخنرانی‌دیگری باشدکه شاید روزی مفصل درموردآن صحبت‌کنم. برگردیم به اینکه چرا دو ریاضی‌کار یکی دبیرستانـی و دیگـری دانشگاهـی با یك توانایی وانجـام کارمساوی، دومی درنزد ما ریاضیدان‌تراست. ریاضیات دبیرستانی خود یك تخصص است ولـی مانند نظریه گروهها، حلقه‌هـا، توپـولـوژی، آنالیز، هندسه جبـری و ... در ریـاضیات بـه عنوان تخصص درنظرگرفتـه نشده است و تقصیر بیشتر متـوجـه خود ریاضـی‌کاران دبیرستـانی است کـه‌ بعداً به آن اشاره خواهم‌کرد ریاضیات‌دبیرستانی یعنی به‌کار بردن‌روش‌های مقدماتی‌درمطالعه وشناخت

قسمت‌هایی از ریاضی که معمولا روش‌های پیشرفته این مطالعه را سریعتر ولی آسانتر نمی‌کنـد. متأسفانه معمولا تعداد ریاضی‌دانانی که هم در ریاضیات دانشگاهی کار می‌کنند وهم در ریاضیات دبیرستانی،خیلی کم‌اند. یک علت آن این است که بیشتر افراد مطالعه جدی ریاضیات را از زمان دانشگاه به‌بعد انجام داده‌اند و ریاضیات دبیرستانی را در زمان‌مناسب به‌طور جدی مطالعه نکرده‌اند وفرصت تسلط بر آن را از دست داده‌اند. متأسفانه در صورت نداشتن تسلط بر این ریاضیات حتی با بردن جایزه فیلدز نیز نمی‌توان آن را بسادگی به‌دست آورد. علت دیگر تخصص‌گرایی بیش ازحد ریاضی‌کاران است. این پدیده تخصص‌گرایی برای ریاضی‌کاران دانشگاهی تا آنجا پیش رفته است که مثلا متخصص نظریه گروههای متناهی چیز چندانی درمورد گروههای غیرمتناهی نمی‌داند یا متخصص حلقه‌های جابجایی چیزی درمورد حلقه‌های ناجابجایی نمی‌داند متخصص هندسه منیفلد است چیزی راجع به هندسه جبری نمی‌داند و غیره. در محافل ریاضی به شوخی گفته می‌شود درآینده به‌جای ریاضیدانی که مثلا متخصص حلقه است فردی خواهیم داشت که حلقه‌دان است و متخصص عنصر خود توان یا گروه‌دانی است متخصص عضو خنثی یا آنالیزدانی است متخصص عدد π و .... از همه اینها بدتر اینکه متخصصین هر شاخه از ریاضی فقط شاخه خود را ریاضی خوب می‌دانند و معمولاً شاخه‌های‌دیگر را دارای‌اهمیت نمی‌دانند. مخصوصاً هرچه شاخه پیشرفته‌تر باشد شاخه‌های دیگر را ناچیزمی‌دانند و درنتیجه همه اینها شاخه ریاضیات دبیرستانی را ناچیزمی‌دانند. باید توجه داشت همان‌طور که بدون ریاضیات دبیرستانی امکان موفقیت درهر شاخه پیشرفته‌یی هم بدون تسلط به‌سایر شاخه‌های ریاضی وجوددارد. بنابراین صرف تسلط برفلان شاخه پیشرفته ریاضی امتیازی نسبت به تسلط به‌ریاضیات دبیرستانی یا هرشاخه دیگر نیست.درست است در ریاضیات دبیرستانی تحقیقات اصیل نمی‌شود و با تسلط در ریاضیات دبیرستانی‌نمی‌توان دکترای ریاضی‌گرفت، ولی به هیچ وجه نه ساده‌ترست و نه کم‌اهمیت‌تر. مثلا وقتی هیلبرت شروع به نوشتن اصول هندسه کرد وتصمیم به انتشار آن به‌صورت کتاب «اساس هندسه» گرفت خیلی‌ها اظهار می‌کردند که کارهیلبرت مقدماتی و کم‌اهمیت است‌و درشأن‌هیلبرت نیست ولی‌وقتی این‌کتاب منتشرشد باچنان استقبالی روبه‌رو شد که در زمان حیات خود هیلبرت هفت بار تجدیدچاپ شد.همه می‌دانیم که هیلبرت تقریباً درتمام‌شاخه‌های ریاضی کارهای اساسی کرده است ولی کارهای خیلی تخصصی او درهر کشور تعداد زیادی خواننده نداشته است ولی این کتاب بدون شك مورداستفاده‌میلیون‌ها دانش‌آموز، دانشجو، معلم، استاد و تقریباً تمام ریاضی‌کاران بوده است و می‌توان گفت که این کتاب جان تازه‌یی به هندسه بعد از اقلیدس داده است. با همه این صحبت‌ها نمی‌شود از ریاضیات‌دبیرستانی و ریاضی‌کاران آن انتقاد نکرد. زیرا این افراد درسالهای گذشته همیشه این فرصت را داشته‌اند که شاخه‌هایی از ریاضیات‌را که مطالعه‌آن با روش‌های مقدماتی امکان‌پذیر بوده است به ریاضیات دبیرستانی ببرند درآن تحقیق‌کنند وبا روش‌های‌خود آن را به‌پیش برند ولی همیشه این فرصت را از دست داده‌اند و این‌کار را به‌ریاضی کاران دانشگاهی سپرده‌اند و بعد از اینکه مجلات دانشگاهی آن شاخه خاص ریاضی پیشرفت‌کرد به‌فکر می‌افتند که قسمت‌هایی ازآن را به‌شکل مسئله به ریاضیات دبیرستانی ببرند و برای خود و دیگران معماسازی کنند. خوشبختانه همیشه‌می‌توان شاخه‌یی مناسب یافت و کار تحقیقی اصیل با همان روش مقدماتی را شروع کرد.یکی ازشاخه‌های مناسب بدون شك ریاضیات ترکیبیاتی است که خود شاخه‌یی وسیع است. می‌توان این بخش از ریاضیات را مطالعه زیرمجموعه‌های یك‌مجموعه متناهی دانست. در زیر به قسمت‌هایی از این شاخه یعنی اشکال گوژ که خود کاربردهای مهمی در آنالیز، نظریه اعداد و دربیشترشاخه‌های ریاضی دارد اشاره‌یی خواهیم‌کرد. به‌یاد می‌آوریم‌که مجموعه‌یی از نقاط درصفحه را گوژ گوئیم هرگاه به ازای هر دو نقطه A و B مجموعه تمام نقاط پاره‌خط AB دراین مجموعه باشند. آشکارست‌که‌اشتراك هردسته‌ازمجموعه‌های گوژ همواره یك مجموعه گوژاست.

یکی ازنتایج جالب ومقدماتی و خیلی مهم این مبحث قضیه‌یی است به نام قضیه هلی (Helly) که به‌عنوان یك مسئله خوب موردتوجه دانش‌آموزان‌المپیاد قرارگرفته است.

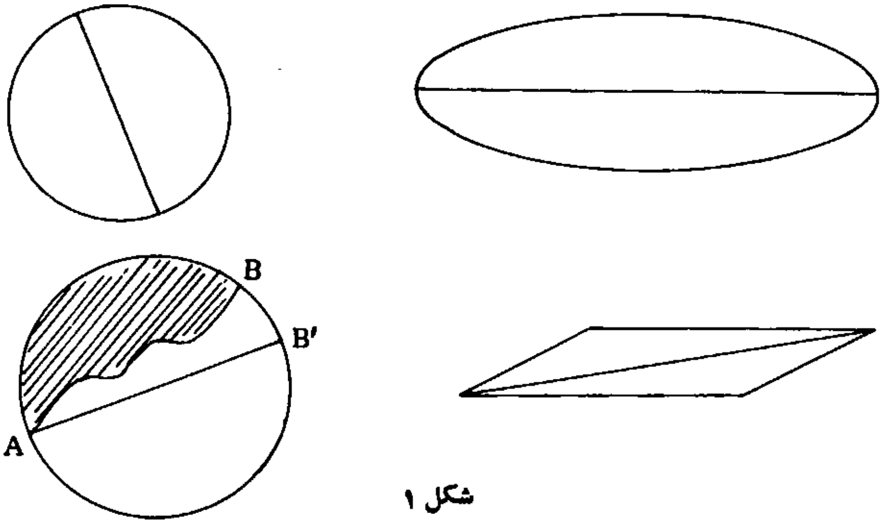
قضیه هلی: اگر n شکل گوژ کراندار در صفحه داده شده باشد به‌طوری که هر سه تای‌آنها همدیگر را قطع کنند آنگاه همه آنها همدیگر را قطع می‌کنند.

برای‌اثبات‌کافیست ثابت‌کنید هرچهارتای آنها همدیگر را قطع می‌کنند به [۱] مراجعه شود. البته باید توجه داشت که قضیه هلی درهرفضایی درست است. یعنی اگر n شکل‌گوژکراندار درفضای k بعدی($k=1, 2, 3, \ldots$) داشته باشیم به‌طوری‌که هر $k+1$ تای آنها همدیگر را قطع‌کنند آنگاه همه همدیگر را قطع می‌کنند.

تعریف قطر یك مجموعه: قطر یك مجموعه عبارتست از بیشترین فاصله بین دونقطه از نقاط آن البته برای آنکه تعریف شامل مجموعه‌های زیادتری شود بهتر است قطر

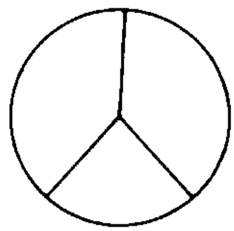
یك مجموعه را کوچکترین کران بالای فاصله‌های نقاط آن ازهم تعریف کرد، ولی ما مجموعه‌هایی را درنظرمی‌گیریم که شامل تعریف اول بشوند. مانند اشکال زیر.

حال فرض کنیم که برای یك شکل F عدد $a(F)$ کوچکترین عدد طبیعی باشد که بتوان F را به $a(F)$ قسمت تقسیم کرد به طوری‌که قطر هرقسمت کمتر از قطر E



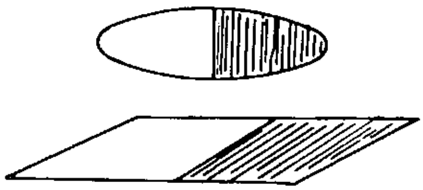
شکل ۱

حال توجه می‌کنیم که اگر هرقرص دایره‌یی شکل بقطر d را به‌دوقسمت تقسیم کنیم آنگاه یکی از قسمت‌ها شکل (۱) دارای قطر d است. زیرا اگر A را به مرکز دایره وصل کنیم تا دایره را در B' قطع کند B' در یکی از قسمت‌هاست و $AB'=d$. وآشکارست که می‌توان آن را به‌سه قسمت تقسیم کردکه قطر هرقسمت از d کمترشود شکل (۲)



شکل ۲

به‌راحتی می‌توان دیدکه این موضوع برای مثلث متساوی‌الاضلاع نیزدرست است. ولی مثلاً برای متوازی‌الاضلاع و بیضی درست نیست یعنی می‌توان هریك را به‌دو قسمت تقسیم کرد بطوری‌که قطر هرقسمت ازقطرشکل اول کمتر باشد شکل (۳).



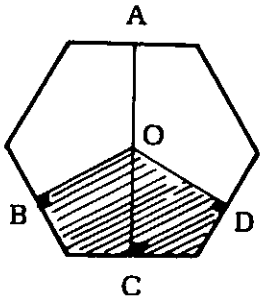
شکل ۳

شود. بورساك ریاضیدان لهستانی قضیه زیررا در ۱۹۳۳ اثبات کرده است.

قضیه: اگر F یك شکل با قطر d باشد آنگاه $a(f)\leqslant ۳$.

اثبات قضیه فوق با استفاده از لمی‌است که توسط ریاضی‌دان مجارستانی به‌نام، ج. پال در ۱۹۲۰ اثبات شده است. او نشان داده است که هرشکل مسطح با قطر d می‌تواند داخل یك شش‌ضلعی منتظم قرار گیرد که فاصله اضلاع مقابل‌آن برابر d است. پس‌کافیست نشان دهیم که این شش‌ضلعی منتظم را می‌توان به سه قسمت تقسیم کردکه قطر هرقسمت کمتر از d شود.

در شکل زیر A و B و C و D پاهای عمود از O، مرکز شش‌ضلعی می‌باشند. آشکارست که مثلث ABC قائم‌الزاویه است و $AB<AC=d$.



حال اگر بخواهیم قضیه را به فضا ببریم توجه می‌کنیم که یك میله استوانه‌یی شکل را می‌توان به‌دوقسمت تقسیم کرد به‌طوری که قطر هرقسمت ازقطراستوانه کمتر باشد ولی مثلاً یك چهاروجهی منتظم به‌یال d را حتی نمی‌توان به‌سه‌قسمت تقسیم کرد به طوری که قطر هرقسمت کمتر از d شود. زیرا یکی ازقسمت‌ها حتماً شامل دو رأس خواهد شد و درنتیجه قطر آن d خواهد شد. درموردکره نیزچنین است یعنی:

قضیه. یك‌کره به‌قطر d را نمی‌توان به سه قسمت تقسیم‌کرد به‌طوری‌که قطرهرقسمت کمتراز d شود.

ولی‌توجه می‌کنیم که‌یك‌کره‌به‌قطر d را می‌توان به‌چهارقسمت تقسیم‌کرد به طوری که قطرهرقسمت کمتر از d شود. زیرا کافیست چهاروجهی منتظم ABCD محاط دراین کره را درنظرگرفت واز O مرکز کره به رئوس D و C و B و A وصل کردوچهاروجهی‌هایABCDو OACD و OBCD و OABD را در نظر گرفت که‌کره را به‌چهارقسمت تقسیم می‌کنند که قطرهریك‌کمتر از d است. حال سؤال‌این است‌آیا عدد ۴ برای همه اجسام درفضا کافیست؟ جواب‌آری است یعنی:

قضیه. اگر F یك جسم با قطر d باشد آنگاه می‌توان آن را به‌چهارقسمت تقسیم کرد به‌طوری‌که قطر هرقسمت کمتر از d شود یعنی $a(F)\leqslant ۴$.

آیا تشابهی بین این قضایا و قضیه‌هلی نمی‌بینید؟

در فضای n بعدی قضیه فوق به چه شکلی است؟

حدس بورساك (۱۹۳۳): برای هرجسم n بعدی به‌قطر d خواهیم داشت

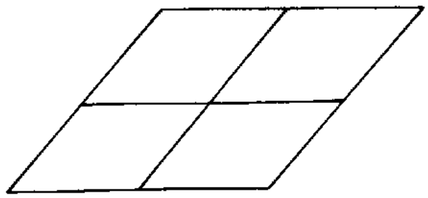
$$a(F) \leqslant n+1.$$

درست ۲۲ سال طول کشید تا حدس فوق در حالت $n=3$ که همان قضیه بالاست توسط ریاضیدان انگلیسی اگلستون در ۱۹۵۷ حل شود و چون حل خیلی بغرنجی بود در همان سال حل ساده‌یی توسط ریاضیدان دیگری به‌نام «گرون‌بام» ارائه شد ولی این حدس درحالت کلی تا به امروز حل نشده است. حتی برای $n=4$ نیز حل نشده است. حال به ذکر یك مسئله دیگر درهمین زمینه می‌پردازیم.

تعریف. یك نسخه تقلیل‌یافته یك شکل، شکلی است متجانس با آن شکل و کوچکتر از آن (یعنی نسبت تجانس کوچکتر از ۱) ومنظور از یك شکل کراندار شکلی است که تمام آن درون یك دایره جای گیرد.

حال فرض کنیم شکل گوژ و کراندار F داده شده باشد. می‌خواهیم کمترین تعداد نسخه‌های تقلیل‌یافته این شکل را بیابیم به طوری که با آنها بتوانیم شکل را بپوشانیم. این تعداد را به $b(F)$ نشان می‌دهیم. یك مسئله ساده هندسه به ما نشان می‌دهد که هیچ قرص دایره‌یی‌شکل را نمی‌توان بادو دایره کوچکتر پوشاند ولی با سه‌تا می‌توان این کار را کرد مثلاً وقتی F یك متوازی‌الاضلاع باشد آشکارست که هیچ متوازی‌الاضلاعی که با آن متجانس و کوچکتر باشد نمی‌تواند همزمان دو رأس آنرا شامل شود پس در این حالت $b(F) \geqslant 4$ وآشکارست که دراین حالت $b(F)=4$. شکل زیراین موضوع را ثابت می‌کند.

بدیهی است که همواره $a(F) \leqslant b(F)$.



دراین موردقضیه زیررا که درسال ۱۹۶۰ ثابت شده است داریم.

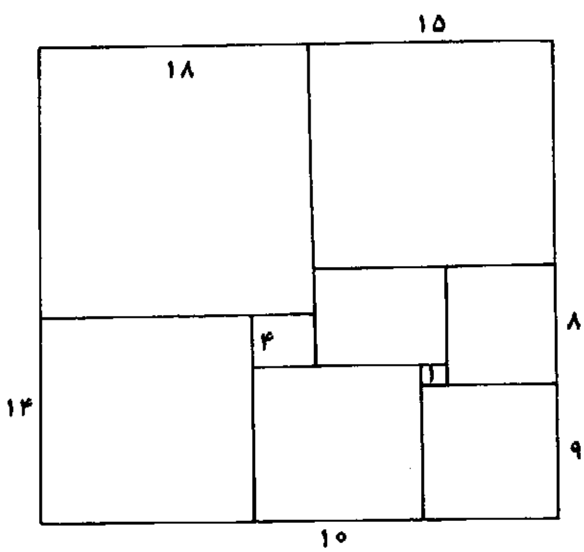
قضیه. اگر F یك شکل گوژ وکراندار در صفحه، به‌غیراز متوازی‌الاضلاع، باشدآنگاه $b(F)=3$ واگر F متوازی‌الاضلاع باشد $b(F)=4$.

توجه می‌کنیم که در میان تمام اشکال گوژ و کراندار متوازی‌الاضلاع حالت منحصر به‌فردی پیدا کرده است.

حال می‌توان مانند قبل قضیه را برای ابعاد بالاترمطرح کرد. اگر F یك جسم گوژ و کراندار باشد ماکسیمم $b(F)$ چند است؟ طبیعی‌است که‌سراغ متوازی‌السطوح برویم که برای‌آن $b(F)=8$ درحالت n بعدی مسئله به‌شکل زیراست و تا حالا هم حل نشده است.

مسئله. اگر F یك جسم n‌بعدی گوژ و کراندارباشد آنگاه $b(F) \leqslant 2^n$. واگر F یك متوازی‌السطوح باشد (n بعدی) آنگاه $b(F)=2^n$.

ریاضیات بدون شك مانند سایر چیزها دارای مد است یعنی هر مدتی یك قسمت خاصی از ریاضیات رونق پیدا می‌کند، تبلیغات زیادی روی آن می‌شود، تحقیقات زیادی روی‌آن انجام می‌گیرد و همه جا صحبت از آن قسمت است. ریاضیات دبیرستانی نیز باید با این مد خود را هم‌آهنگ کند وهمزمان با انتشارطالبی در آن زمینه‌ها اقدام نماید. غیر از قسمت پیشین که مطالبی برای تحقیق درآن عنوان شد پیشنهاد می‌کنم که خود دراین زمینه‌ها مسئله مطرح کنید ومبادرت به‌حل‌آن نمائید وبعد آنرا منتشر کنید. بخش دیگری از ریاضیات که تقریباً مد است و می‌تواند وارد ریاضیات دبیرستانی بشود قسمت فرش‌کردن (Tiling) است مثلاً آشکار است که یك مستطیل به‌اضلاع m و n (اعداد طبیعی) را می‌توان با mn مربع به ضلع یك فرش‌کرد وبعد هر کدام ازاین مربع‌ها را به x^2 مربع کوچکتر تقسیم کرد. یعنی می‌توان هر مستطیل به اضلاع درست را به بی‌نهایت شکل مختلف با مربعهای هم‌اندازه فرش کرد. بسادگی می‌توان نشان دادکه:



قضیه: یك مستطیل را می‌توان با مربعهای مساوی فرش کرد اگر وتنها اگر نسبت طول به‌عرض آن گویا باشد.

حال درمورد مربعهای نامساوی چه می‌توان گفت.

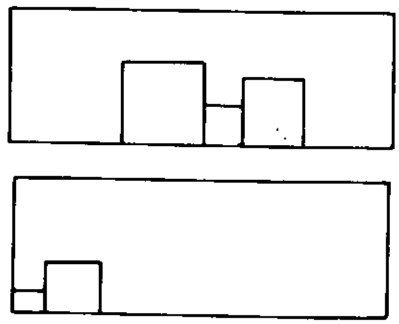
شکل زیر نشان می‌دهد که امکان فرش کردن مستطیل (مثلاً با ابعاد ۳۲ و ۳۳) با مربع‌های نامساوی وجود دارد.

آیا می‌توانید مثال دیگری بیاورید؟

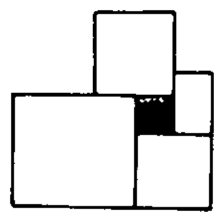
نتایج زیر را دراین مورد داریم.

قضیه. اگر یك مستطیل با مربعهای دو به دو نامساوی فرش شود در آن صورت کوچکترین مربع روی اضلاع مستطیل قرار نمی‌گیرد.

اثبات. شکل‌های زیر اثبات را تمام می‌کند.



قضیه. اگر یك مستطیل با مربعهای دو به دو نامساوی فرش شود در آن صورت کوچکترین مربع به‌وسیلهٔ چهار مربع دیگر احاطه می‌شود.

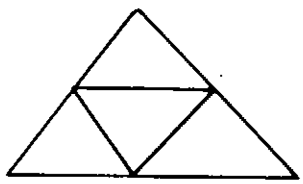


توجه. اگر فرش کردن یك مستطیل طوری باشد که هیچ زیرمجموعه‌یی از مربعها تشکیل مستطیل ندهد آن را فرش ساده نامند. مسئله‌یی که هنوز به‌طور کامل حل نشده این است که چه مستطیل‌هایی دارای فرش ساده هستند؟

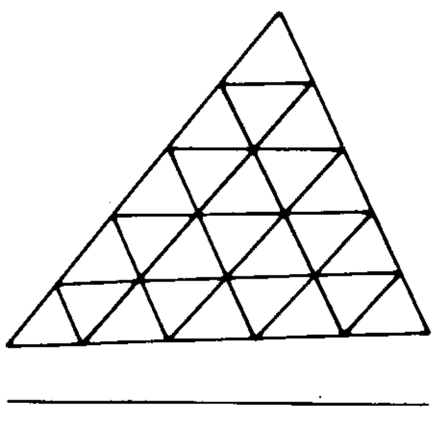
با استفاده از خاصیت کوچکترین مربع در دو قضیه فوق بسادگی می‌توان نشان داد که هیچ جعبه مکعب مستطیل را نمی‌توان با مکعب‌های دو به‌دو نامساوی پر کرد. چرا؟.

سالها قبل خبری پخش شده بود که یکی از کشورها با کمك مهندسی ژنتیك درصدد تهیه یك نوع گوجه فرنگی به شکل مکعب است تا بتواند برای صادرات آن را به راحتی در جعبه‌های مقوایی مکعب مستطیل بسته‌بندی کند. مطلب بالا نشان می‌دهد که درآن صورت در هرجعبه حداقل دو گوجه فرنگی یك اندازه وجود دارد.

اما درمورد مثلث چه می‌توان گفت. آشکار است که هرمثلث را می‌توان با چهار مثلث مساوی فرش کرد. کافیست اوساط اضلاع را به‌هم وصل کنیم.



به‌طور کلی اگر هر ضلع مثلث را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم می‌توان هرمثلث را با n^2 مثلث مساوی فرش کرد که همگی با مثلث اصلی متشابه‌اند.



حال می‌توان سؤال کرد که آیا هرمثلث را می‌توان با مثلث‌های متشابه با مثلث اصلی ولی دو به‌دو نامساوی فرش کرد.

جواب این سؤال توسط ریاضی‌دانی بنام «تات» درقضیه زیر داده شده است.

قضیه . نمی‌توان یك مثلث متساوی‌الاضلاع را با مثلث‌های متساوی‌الاضلاع دو به‌دو نامساوی فرش کرد.

اثبات. به [۶] مراجعه شود.

مسئله‌یی که دراین زمینه هنوز حل نشده است به‌صورت زیر است.

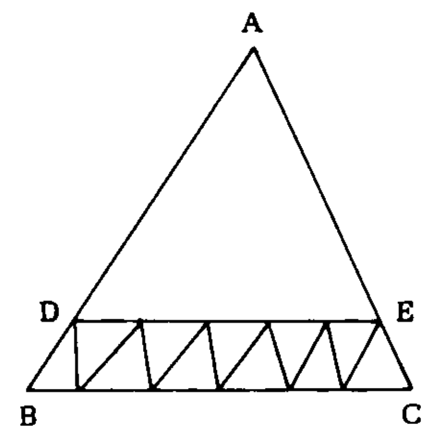
آیا هرمثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین را می‌توان با مثلث‌های متشابه با مثلث اصلی دو به‌دو نامساوی فرش کرد؟

حال می‌خواهیم مسئله‌یی زیبا در این مورد مطرح کنیم و آنرا کاملاً حل کنیم. دیدیم که هرمثلث را می‌توان با n^2 مثلث متساوی با یکدیگر ومتشابه با مثلث اصلی فرش کرد. می‌توان پرسید به‌ازای کدام عدد طبیعی m می‌توان یك مثلث را با m مثلث متشابه با هم فرش کرد.

کافیست ضلع BC ازمثلث ABC را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم و D و E را طوری انتخاب کنیم که

$$\frac{BD}{AB}=\frac{CE}{AC}=\frac{1}{n}$$

و DE را نیز به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم درآن صورت $2n-1$ مثلث بین DE و BC به‌دست می‌آید و یك مثلث هم ADE است، پس روی هم $2n$ مثلث متشابه خواهیم داشت. پس برای m زوج وبزرگتر از ۲ مسئله بدیهی است. حال اگر ADE را به‌چهار مثلث متساوی تقسیم کنیم آنگاه مثلث ABC را با $2n+3$ مثلث متشابه فرش کرده‌ایم. پس تا حالا ثابت کردیم هرمثلث را می‌توان برای تمام اعداد $m\geqslant 6$ با m مثلث متشابه فرش کرد. حال نشان می‌دهیم که هر مثلث را



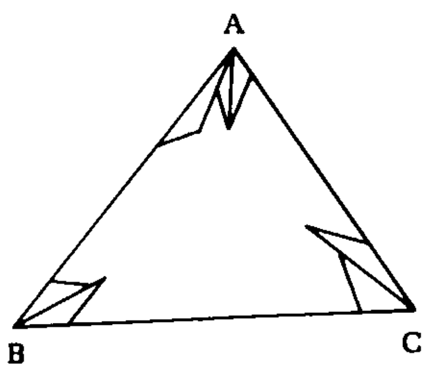
نمی‌توان با ۲ یا ۳ یا ۵ مثلث متشابه فرش کرد و در نتیجه حل این مسئله تمام است. قبل از اینکه به حل این قسمت برای $m=2, 3, 5$ بپردازیم. ذکر این نکته جالب است که این مسئله «یعنی آیا هر مثلث را می‌توان با ۵ مثلث متشابه فرش کرد» در سال ۱۹۷۰ توسط کمیته برگزاری مسابقات المپیاد شوروی (زمانی که این سخنرانی ایراد شد کشور شوروی وجود داشت) برای مسابقات داخلی پیشنهاد شد ولی کولموگروف ریاضیدان برجسته این قرن که اخیراً فوت کرده است به علت مشکلی آن را ردکرد. کولموگروف اقرار کردکه حل این مسئله درچند ساعت یاحتی چند روز برای خود اومشکل است و بهتر است حذف شود. این احساسی که کولموگروف نسبت به این مسئله ابراز کرد احساسی است ریاضی که نمی‌توان آن را تعریف کرد و ساده هم به‌دست نمی‌آید. کولموگروف گر چه مانند هیلبرت تقریباً درتمام شاخه‌های پیشرفته ریاضی کارهای اساسی کرده است ولی این احساس را با صرف سالها کار در ریاضیات دبیرستانی به‌دست آورده بود. حال به‌حل مسئله در حالت $m=2, 3, 5$ می‌پردازیم.

در حالت $m=2$ بدیهی است زیرا اگر مثلث ABC با دو مثلث متشابه فرش شود این دومثلث باید قائم‌الزاویه باشند و خود مثلث باید متساوی‌الساقین یا قائم‌الزاویه باشد. پس هرمثلث را نمی‌توان با دومثلث متشابه فرش کرد. برای حالت $m=3$ نیز به راحتی دیده می‌شود که اگر مثلث با سه مثلث متشابه فرش شود آنگاه این سه مثلث باید قائم‌الزاویه باشند و مثلث ABC باید متساوی‌الساقین یا قائم‌الزاویه باشد.

پس هر مثلثی را نمی‌توان با سه مثلث متشابه فرش کرد.

برای حالت $m=5$ به‌لم زیر نیاز داریم.

لم. ABC مثلثی است با زوایای مستقل خطی روی اعدادگویا (مانند $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 180-\sqrt{2}-\sqrt{3}$) اگر ABC با مثلث‌های متشابه فرش شود آنگاه همه این مثلث‌های متشابه، با مثلث ABC متشابه‌اند.



اثبات، فرض کنیم زاویه‌های مثلث‌ها متشابه γ، β، α، باشند. پس

$$\begin{cases} A=a\alpha+b\beta+c\gamma \\ B=a'\alpha+b'\beta+c'\gamma \\ C=a''\alpha+b''\beta+c''\gamma \end{cases}$$

توجه می‌کنیم که

a, a', a'' و b, b', b'' و c, c', c''

اعداد صحیح نامنفی هستند. حال اگر $a=a'=a''=0$ آنگاه A, B, C مستقل خطی نخواهند بود پس

$$a+a'+a''\geqslant 1$$

به طور مشابه $b+b'+b''\geqslant 1$ و $c+c'+c''\geqslant 1$. حال چون

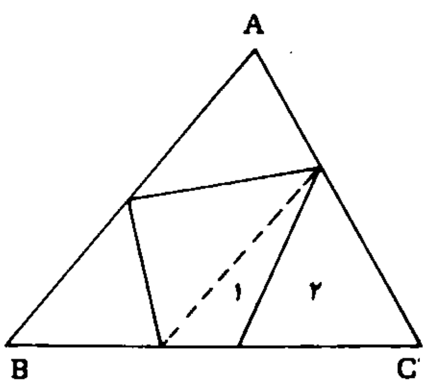
$$A+B+C=\alpha+\beta+\gamma$$

پس

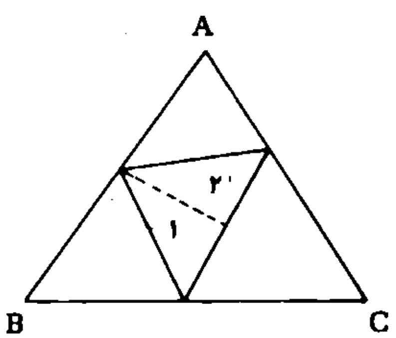
$$a+a'+a''=b+b'+b''=c+c'+c''=1$$

در نتیجه از a, a', a'' باید دوتا صفر و دیگری یک باشد و همین طور برای b, b', b'' و c, c', c''، پس A, B, C همان زوایای α, β, γ با یک جایگشت می‌باشند.

نتیجه. اگر ABC مثلثی با زوایای مستقل خطی روی اعداد گویا باشدآنگاه‌نمی‌توان آن را با ۵ مثلث متشابه فرش‌کرد.



اثبات. طبق لم قبل، حداقل چهارقسمت در مثلث ایجاد می‌شودکه قسمت وسط یا باید چهارضلعی باشد یا مثلث (شکل زیر) حال



آشکارست که مثلث‌های ۱ و ۲ که متشابه‌اند باید قائم‌الزاویه باشند در نتیجه مثلث ABC باید قائم‌الزاویه باشد. اما می‌دانیم که زوایای مثلث قائم‌الزاویه مستقل خطی نیستند. یعنی اثبات تمام‌است.

حال می‌رویم به سراغ مسئله فرش کردن مثلث با k مثلث متساوی.

در زیر نشان می‌دهیم هرگاه هر مثلث را بتوان با k مثلث متساوی فرش کرد آنگاه k یك عدد صحیح مربع کامل است.

فرض کنیم ABC مثلثی با زوایای مستقل خطی روی اعداد گویا باشد به‌طوری‌که $A<B<۱^\circ$. به‌ازای هرعدد طبیعی n مثلث T_n با زوایای A_n, B_n, C_n را در نظرمی‌گیریم که

$$A_n=\frac{۳}{\pi}\left(۱-\frac{A}{n}\right)$$

$$B_n=\frac{\pi}{۳}\left(۱-\frac{B}{n}\right)$$

$$C_n=\frac{\pi}{۳}\left(۱+\frac{A+B}{n}\right)$$

$A_n=\dots$

$B_n=\dots$

$C_n=\dots$

اگر بتوانیم هر T_n را با k مثلث متساوی فرش کنیم وهرکدام ازاین مثلث‌ها را T'_n بنامیم. طبق لمی که دیدیم T_n با T'_n متشابه است. اگر بزرگترین و کوچکترین ضلع در T_n را به‌ترتیب M_n و L_n بنامیم و در T'_n آنها را M'_n و L'_n بنامیم. آنگاه هرگاه x_n تعداد مثلث‌های T'_n باشندکه روی محیط T_n قرار می‌گیرند خواهیم داشت

$$۳\,\frac{L_n}{M'_n}\leqslant x_n\leqslant ۳\,\frac{M_n}{L'_n}$$

یعنی

$$۳\,\frac{L_n}{L'_n}\times\frac{L'_n}{M'_n}\leqslant x_n\leqslant ۳\,\frac{M_n}{M'_n}\times\frac{M'_n}{L'_n}$$

آشکارست که نسبت تشابه بین T_n و T'_n برابراست با $\sqrt{k}$. پس خواهیم داشت

$$۳\sqrt{k}\,.\frac{\sin\frac{\pi}{۳}\left(۱-\frac{B}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{۳}\left(۱+\frac{A+B}{n}\right)}\leqslant x_n$$

$$\leqslant ۳\sqrt{k}\,\frac{\sin\frac{\pi}{۳}\left(۱+\frac{A+B}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{۳}\left(۱-\frac{B}{n}\right)}$$

درنتیجه $\lim x_n=۳\sqrt{k}$. اما x_nها اعداد طبیعی هستند پس $۳\sqrt{k}$ باید طبیعی باشد یعنی k باید مربع‌کامل باشد.

حال چند مسئله برای افراد علاقه‌مند.

۱ـ برای یك مثلث مشخص ABC تمام اعداد صحیح k را بیابیدکه بتوان آن را با k مثلث متشابه فرش‌کرد. (تا به‌حال حل نشده است).

۲ـ آیا یك مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین را می‌توان با مثلث‌های متشابه با مثلث اصلی ونامساوی فرش‌کرد. (تا به‌حال حل نشده است).

۳ـ تمام مثلث‌هایی را بیابیدکه فقط بتوان آنها را با $k^۲$ مثلث مساوی فرش کرد، (یعنی فقط برای اعداد مربع‌کامل).

۴ـ تمام اعداد طبیعی n را بیابید که بتوان حداقل یك مثلث را با n مثلث متساوی فرش کرد. (تا به حال حل نشده است)

۵ـ ثابت کنید تمام اعدادی که مجموع مربعات‌دوعدد طبیعی‌هستند یك جواب برای مسئله (۴) می‌باشند. همچنین اعداد بشکل $۳n^۲$ و $۶n^۲$ نیز اعدادی هستند که در شرایط مسئله (۴) صدق می‌کنند.

۶ـ یك‌مثلث‌منفرجه‌الزاویه داده شده‌است. با حداقل چند مثلث حاده‌الزاویه می‌توان آن را فرش‌کرد؟

۷ـ درمسئله قبل جای منفرجه وحاده را با هم عوض‌کنید.

۸ـ درمسئلهٔ (۶) به‌جای دوکلمه منفرجه و حاده یك‌کلمه منفرجه یا حاده به‌کاربرید.

۹ـ یك مثلث دلخواه داده شده است. با حداقل چند مثلث منفرجه‌الزاویه (حاده‌الزاویه) می‌توان‌آن را فرش‌کرد.

ما اکنون چندین مسئله حل نشده وحل شده داریم که خودمان هم می‌توانیم هرتعدادکه بخواهیم به‌آنها بیفزاییم و بعد با صرف وقت زیاد و مراجعه به منابع مربوطه و دیدن حل مسئله‌های حل شده و با به‌کار بردن همان روش‌های مقدماتی ریاضیات دبیرستانی درحل تعدادی از آنها موفقیت‌هایی به‌دست آوریم و بعد این حل‌ها را منتشر کنیم و این تفاوت‌کاری بین یك ریاضی‌کار دبیرستانی و یك ریاضی‌کار دانشگاهی را از بین ببریم.

منابع:

1- Boltjanky , V. Gohberg , I. Results and Problems in Combinatorial Geometry , Cambridge Univ, Press. 1985.

2- Erdos , P. Some Unsolved Problems, Michigan Math. J. 4 (1957), 291–300.

3- Grunbaum, B. A Simple Proof of Bursk's Conjecture, inThree dimensions. Proc. Cam, Philo. Society, (1957) 776–778.

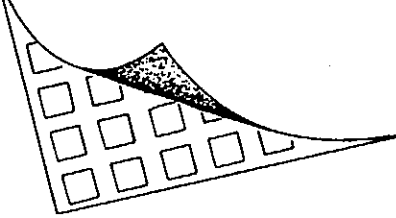
4- Hilbert, D. Foundations of Geometry, Open Court, 1971.

5- Lgusternik, L. A . Convex Figures and Polyhedra, Dover, 1963.

6- Tutte. W. T. The dissection of equilateral triangles, Proc. Com. Philoso. Society, (1948) 565–482.

7- Yaglom, I. M and Boltyaskji, Convex Figures, New york, 1961.

ملاحظاتی پیرامون شیوه‌های امتحانی تستی و تشریحی



محمدقاسم وحیدی اصل

موضوع امتحان وکیفیت و نوع آن نقش مهمی در روند آموزشی در سطوح مختلف تحصیلی دارد وشیوهٔ برگزاری آن، نوع آموزش را خواه ناخواه تحت‌تأثیر قرارمی‌دهد. مثلاً، بسته به اینکه امتحان تستی یا تشریحی باشد، دانشجو یا دانش‌آموز، مبنای آمادگی خود را با نحوه امتحان تطبیق می‌دهد. وجود موسسات مختلف وشیوهٔ کارآنها ونیز کتب ونشریات منتشرشده در سالهای اخیر پس از رواج کنکورتستی گواهی براین مدعاست. بنابراین بجاست که اهمیت امتحان به‌خوبی درك شود تا ازطریق آن درشیوهٔ یادگیری تأثیر مثبتی گذاشته شود. کسانی که با موضوع علم آمار آشنا می‌باشند، می‌دانند که روند امتحان و هدف از برگزاری آن یکی ازمسائل عادی است‌که درآمارمطرح است و در واقع اساس این علم راتشکیل می‌دهد، یعنی هدف استخراج نمونه، به منظوراستنباط درمورد جامعه است. به عبارت دیگر برای ارزیابی معلومات دانش‌آموز یا دانشجو که در اینجا جامعهٔ آماری ما را تشکیل می‌دهد، نمونه‌ای (تعدادی سؤال) به‌او داده شده و برمبنای نمرات اخذ شده، میزان معلومات او ارزیابی (برآورد) می‌شود. نتایج این ارزیابی وقتی با واقعیت تطبیق می‌کندکه نمونه به خوبی استخراج شده باشد، یعنی امتحان باکیفیت درستی برگزارشده‌باشد. طبق قوانین آمار، هرچه اندازه نمونه بزرگتر یعنی، تعداد سؤالات امتحانی بیشتر باشد، ارزیابی دقیقتراست، و همین امر و مسائل دیگری‌که البته جنبه‌های منفی‌دارند (مثل سادگی درتصحیح اوراق و ماشینی شدن آن) عده‌ای را متمایل به انتخاب سؤالات تستی وبرگزاری امتحان به شیوهٔ تستی‌می‌نماید. امادر زیر به‌کمك مسئله‌ای* ازاحتمالات وتفسیرآن متوجه می‌شویم که این نوع امتحان، همواره معلومات‌دانشجو را (به‌جز وقتی‌که معلومات او «صفر» یا «صددرصد» باشد) بالاتر از حد واقعی ارزیابی‌می‌کند وبرآورد به‌اصطلاح‌اضافی است.

واما مسئله موردبحث چنین است:

فرض‌کنید که دانشجویی در یك امتحان تستی شرکت کرده است. دریك سؤال مفروض، دانشجو یا پاسخ صحیح‌رامی‌داند یا نمی‌داندکه دراین صورت پاسخ خود را با حدس زدن انتخاب می‌کند. فرض کنیدکه هرسؤال چهارگزینه دارد.مدرس مربوطه در مقابل این سؤال قرار دارد: با مشاهدهٔ اینکه دانشجو پاسخ صحیح به سؤال داده است، می‌خواهد احتمال این پیشامد را حساب‌کندکه آیا دانشجوپاسخ صحیح را می‌دانسته یا خیر؟ فرض‌کنید p عبارت ازاحتمال‌آن باشدکه او جواب‌را می‌داند و $1-p$ احتمال آن باشدکه‌پاسخ را حدس می‌زند. فرض‌کنید احتمال اینکه با حدس زدن پاسخ صحیح به‌سؤال بدهد ۱/۴ باشد (این فرض ممکن است واقع‌بینانه نباشد، چه هرچند اوپاسخ سؤال را نمی‌داند، می‌داند که برخی گزینه‌ها نادرست‌اند و دراین‌صورت‌احتمال‌درست حدس زدن بیشتر از ۱/۴ خواهد بود و دانشجوی حدس‌زننده وضعیت حتی بهتری خواهد داشت.)

فرض کنید که A عبارت از این پیشامد باشد که دانشجو پاسخ صحیح به سؤال بدهد و B معرف این پیشامد باشد

که او پاسخ صحیح را می‌دانسته است. باید $P(B|A)$ را حساب کنیم. با استفاده از فرمول بیز[۲] داریم:

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})}$$

$$=\frac{۱\cdot p}{۱\cdot p+\frac{۱}{۴}\cdot(۱-p)}=\frac{۴p}{۱+۳p}$$

توجه کنید که

$$\frac{۴p}{۱+۳p}\geqslant p$$ یعنی

$$(۱)\quad P(B|A)\geqslant P(B)$$

تفسیر: با توجه به تعبیر فراوانی احتمال، درصورت کافی بودن تعداد سؤالات،

$$P(B)=p$$

را می‌توان میزان معلومات دانشجو درباره موضوع امتحان و

$$P(B|A)=\frac{۳p}{۱+۳p}$$

را می‌توان ارزیابی (یا برآورد) از میزان معلومات او دانست. نامساوی

$$P(B|A)=\frac{۴p}{۱+۳p}\geqslant p=P(B)$$

که در نمودار زیر به نحو بارزی نمود پیدا می‌کند، نشان می‌دهد که این برآورد یا تخمین همواره برآوردی اضافی[۱] از میزان معلومات دانشجو و لذا غیرواقعی است.

لازم است توجه شود که آن چنان که درصورت مسئله هم ذکر شد، این منحنی هنوز هم با مقدار واقعی مطابقت ندارد، یعنی فرض حدس زدن با احتمال ۱/۴ منحنی را پایینتر از حد واقعی خود (که دانشجو بعضی گزینه‌ها را حذف و شانس خود را افزایش داده است) درآورده است، بنابراین مشکل مطرح شده باید کاملاً محسوس باشد.

ممکن است دادن نمرهٔ منفی چاره‌ای برای این مشکل و بازداشتن دانشجو از توسل به حدس صرف باشد. اما به دلایلی که در زیر به برخی از آنها اشاره می‌کنیم، این کار نیز مشکل اصلی را برطرف نمی‌کند.

فرض کنیم یک امتحان تستی n-گزینه‌ای شامل ۲۰ سؤال به مجموعه‌ای از دانشجویان یا دانش‌آموزان داده باشیم. نمرهٔ منفی که برای هر سؤال درنظرمی‌گیریم باید چنان انتخاب شود که اگر دانشجو با حدس زدن مطلق پاسخ صحیح را برگزیند، «متوسط» نمرهٔ او در هر سؤال برابر صفر باشد. به زبان احتمالات، اگر X نمرهٔ دانشجو در سؤالی مفروض باشد، آنگاه امید ریاضی متغیر تصادفی X باید صفر باشد. اما

$$x=\begin{cases} ۱\ , & \text{با احتمال } \frac{۱}{n} \\ -a\ ,\ ۱-\frac{۱}{n} & \text{با احتمال} \end{cases}$$

که در آن $a>۰$ و $-a$ نمره منفی دانشجو در صورت دادن پاسخ نادرست به سؤال است. بنابر بحث بالا باید $E(X)=۰$ یعنی

$$E(X)=۱\cdot\frac{۱}{n}-a\left(۱-\frac{۱}{n}\right)=۰$$

که دراین‌صورت

$$a=\frac{۱}{n-۱}$$

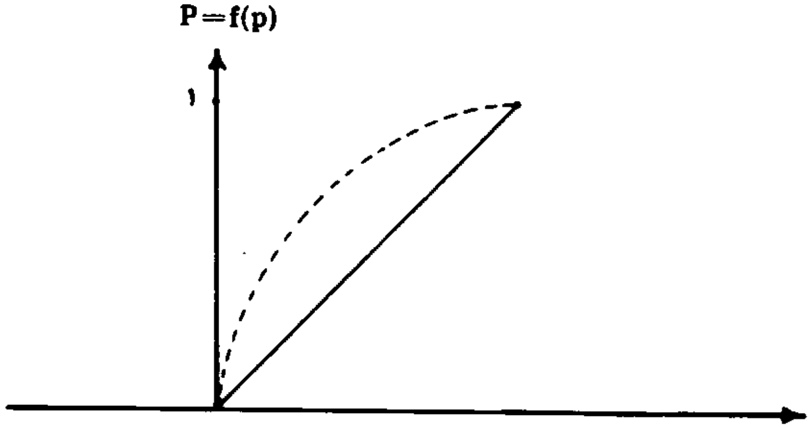
مثلاً اگر $n=۴$ آنگاه

$$-a=-\frac{۱}{۳}$$

یعنی هر سه سؤال نادرست یک نمرهٔ منفی دارد.

حال فرض کنید که دانشجویی به همهٔ سؤالات پاسخ نادرست دهد (اگر $n=۴$، یعنی امتحان چهارگزینه‌ای باشد، احتمال این پیشامد $\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲۰}$ است که گرچه احتمال کمی است ولی به هرحال قابل وقوع است). دراین صورت نمرهٔ او

$$\frac{-۲۰}{۳}=-۶/۶۶$$



(نمودار مربوط به مقایسهٔ معلومات دانشجو با ارزیابی معلومات او از طریق امتحان تستی چهارگزینه‌ای. نمودار تابع

$$f(p)=\frac{۴p}{۱+۳p}$$

با نقطه‌چین و نمودار $f(p)=p$ با خط پر رسم شده است.)

است. چون بنابر مقررات و آیین‌نامه‌ها نمرات دانشجویان و دانش‌آموزان در کشور مابین صفر و بیست پیش‌بینی شده است باید نمرهٔ او را صفر بدهیم، یعنی به بدترین دانشجو یا دانش‌آموز حدود هفت نمره ارفاق کنیم! آیا این کار منصفانه است؟

تعداد چنین دانشجویانی که معلوماتشان هیچ است، انگشت‌شمار است، در مقابل دانشجویان ضعیف که اندك معلوماتی داشته باشند، می‌توانند با کنار گذاشتن برخی از گزینه‌ها (با به‌کار بردن معلومات اندك خود) شانس خود را افزایش داده و نمره‌ای بسیار بالاتر از میزان استحقاق خود بگیرند (به ابتدای بحث مراجعه کنید).

از مجموعهٔ این بحثها نتیجه می‌شود که امتحان تستی معلومات همه، جز دانش‌آموزان و دانشجویان نمره بیست، را بالاتر از حد واقعی ارزیابی می‌کند و تنها به کسانی ارفاق نمی‌کند که نمره‌شان بیست باشد! ناگفته نماند که ایراد عمدهٔ فوق بر امتحانات به اصطلاح «کلاسی» که نمره باید بین صفر و بیست باشد وارد است و درمسابقات و کنکورها که فقط مسئله مقایسهٔ نمرات مطرح است و حد پایینی برای نمرات درنظر گرفته نمی‌شود، این ایراد کمتر وارد است اما در هر حال امتحانات تستی ضعفهایی دارند که اهم آنها به قرار زیر است:

۱ـ سؤالات امتحان تستی سطحی است و جنبهٔ عمقی سؤالات تشریحی را ندارد.

۲ـ سؤالات امتحان تستی جنبه فنی و محاسباتی و اطلاعاتی دارد و امکان ارزیابی شیوهٔ تفکر و قدرت استدلال (به ویژه در دروس ریاضی و پایه) در آن مقدور نیست.

۳ـ متأسفانه امکان تقلب در این نوع امتحان بسیار زیاد است و برای انتقال پاسخها حتی ایما و اشاره هم کفایت می‌کند.

۴ـ گرچه تصحیح سؤالات تستی آسان و قابل مکانیزه شدن است، امکان خطا در آن زیادتر از سؤالات تشریحی است، چه مثلا با جابه‌جایی یك سؤال در پاسخنامه، کلیهٔ دانشجویان یا دانش‌آموزانی که پاسخ درست داده‌اند، از دریافت نمره محروم خواهند شد یا نمرهٔ منفی خواهند گرفت!

۵ـ کوچکترین اختلاف سلیقه بین طراح سؤال و پاسخ‌دهنده باعث خواهد شد که پاسخ‌دهنده نمره از سؤال نگیرد یا نمرهٔ منفی دریافت کند.

برای طرح مثالی برای تشریح مورد اخیر و نیز توجه به میزان رسوخ تست در نهادهای آموزشی مختلف، از مدرسه تا دانشگاه، یکی از سؤالاتی را که اخیراً در یکی از مدارس در بین سؤالات مسابقه علمی دانش‌آموزان ارائه شده است، مطرح می‌کنیم. سؤال چنین است:

کدام کلمه با سه کلمهٔ دیگر مطابقت ندارد؟

الف: سوزن ☐	ب: قیچی ☐
ج: نخ ☐	د: سنجاق ☐

عده‌ای از دانش‌آموزان با این استدلال که سوزن و قیچی و سنجاق هر سه فلزی‌اند و نخ از جنس فلز نیست، گزینه ج را علامت زده‌اند، اما منظور طراح محترم سنجاق بوده است زیرا ظاهراً سه مورد اول جزو لوازم خیاطی‌اند و چهارمی نیست (ولی مگر سنجاق در بساط هر خیاطی پیدا نمی‌شود؟) به‌هر حال چنین برداشتهای متفاوتی از یك سؤال باعث می‌شود که پاسخ‌دهنده به ناحق از گرفتن نمره محروم گردد.

شك نیست که بر امتحانات تشریحی نیز می‌توان ایرادهایی گرفت، اما درمجموع برطرف کردن این ایرادها به‌مراتب آسانتر از ایرادهای فوق است که بر امتحانات تستی وارد است. با در نظر گرفتن این مراتب، باید دامنهٔ تست را درمدارس و دانشگاهها محدود کرد و حتی در کنکور نیز بالا بودن تعداد داوطلبین، علت روی‌آوردن به سؤالات تستی عنوان می‌شود، می‌توان با تمهیداتی، مثلا گرفتن امتحان دو بار یا بیشتر در یك سال و معتبر دانستن نمرات برای مثلاً دو سال و انتخاب دانشجو از بین کسانی که حداقل نمرات موردنظر دانشگاهی را داشته باشند (مثل امتحانات توفل[3] در زبان انگلیسی)، تعداد داوطلبین را به حداقل رساند.

پانوشتها:

1) Overestimation

2) Bayes

3) TOEFL

* این مسئله از کتاب Introduction to The Theory of Statistic , Franklin A. Graybill, Alexander V. Mood تألیف Daune C. Boes اخذ شده است.

اعداد کامل[1]

از استن واگن[2]

ترجمهٔ: کریم احمدی‌دلیر

۶

۲۸

۴۹۶

۸۱۲۸

۳۳۵۵۰۳۳۶

۸۵۸۹۸۶۹۰۵۶

۱۳۷۴۳۸۶۹۱۳۲۸

۲۳۰۵۸۴۳۰۰۸۱۳۹۹۵۲۱۲۸

۲۶۵۸۴۵۵۹۹۱۵۶۹۸۳۱۷۴۴۶۵۴۶۹۲۶۱۵۹۵۳۸۴۲۱۷۶

شاید جستجوی اعداد کامل، قدیمی‌ترین طرح ناتمام ریاضیات باشد. عددی کامل است که برابر با مجموع مقسوم‌علیه‌هایش به غیراز خودش باشد. به عبارت دیگر، $\sigma(n)=2n$، که در آن $\sigma(n)$ مجموع همهٔ مقسوم‌علیه‌های n است. یونانیان نخستین چهارعدد کامل را می‌شناختند (لیست بالا شامل همهٔ اعداد کامل کوچکتر از 10^{50} است). اقلیدس ثابت کرد که $2^{n-1}(2^n-1)$ کامل است هرگاه 2^n-1 اول باشد. همان‌طور که اویلر ثابت کرد، چون همهٔ اعداد کامل زوج به‌این شکل هستند (به‌شکل ۱ مراجعه کنید). مسأله نامتناهی بودن مجموعهٔ اعداد کامل زوج با مسأله نامتناهی بردن مجموعهٔ اعداد اول مرسن[3]، یعنی اعداد اول به‌شکل 2^n-1، معادل است.

از طرف دیگر، تاکنون هیچ عدد کامل فردی (OPN[4]) را نیافته‌اند ومعمای وجود یك OPN یکی از مشهورترین مسائل نظریهٔ اعداد شده است. کار روی مسألهٔ اعداد کامل فرد عمدتاً جامع است و وابستگی اندکی با مابقی نظریهٔ اعداد دارد، لذا شهرت آن بیشتر ناشی از تاریخ طولانی آن است تا اهمیت آن.

درباب اعداد کامل افسانه‌های زیادی وجود دارد، برای مثال، سن آگوستین[5] (و دیگران) تذکر داده‌اندکه خدا آسمان و زمین را درشش روز آفرید تا به‌کمال خلقت مفهوم بخشد. جی. جی. سیلوستر[6] کسی‌که نتایج زیادی را دربارهٔ اعداد کامل فرد به‌دست آورد، هیچ تردیدی دراهمیت مسأله نداشت. اوبخشی ازکارش را چنین شرح می‌دهد: «این نظریه جهت‌غلبه برمشکلات مشخصی به‌وجود آمد که روح مرا احاطه کرده‌اند. هرکسی‌که موفق به‌اثبات عدم وجود مطلق آنها شود، یك مسأله اعصار را حل‌کرده است که ازلحاظ دشواری قابل قیاس با تربیع دایره است‌که قبلاً هرمیت[7] ولیندمان[8] درموردآنها کار کرده‌اند.»

چرا سیلوستر (و دیگران) چنین احساس راسخی داشتند که هیچ OPNی موجودنیست؟ مسلماً دوهزارسال جستجوی بی‌ثمر محققان را تحت تأثیر قرار داد. اما شواهدواقع‌بینانهٔ بیشتری علیه یك OPN دراواخر قرن نوزدهم به‌دست آمد. محققان بسیاری نتایجی دربارهٔ شکلی‌که یك OPN باید داشته باشد، به‌دست آوردند. بازهم نقل‌قولی ازسیلوستر: «شاید بتوان‌گفت: وجود (یك‌عددکامل‌فرد)وخلاصی آن ازتارهای پیچیدهٔ شرایطی که آن را ازهرسو احاطه‌کرده‌اند، شبیه به‌یك معجزه است.»

یك تناظر یك به‌یك بین اعداد کامل زوج واعداد اول مرسن موجود است.

فرض کنید 2^n-1 اول باشد، آنگاه

$$\sigma(2^{n-1}(2^n-1))=\sigma(2^{n-1})\,\sigma(2^n-1)$$
$$=(1+2+\dots+2^{n-1})2^n=2\cdot 2^{n-1}(2^n-1).$$

برعکس (این اثبات منسوب به دیکسون[9] است)، فرض کنید $2^{n-1}m$ کامل باشد، که در آن $n>1$ و m فرد است. آنگاه

$$2^n m=\sigma(2^{n-1}m)=(2^n-1)\,\sigma(m)$$

که ازآنجا $\sigma(m)=m+m/(2^n-1)$. اما در آن صورت هم m وهم $m/(2^n-1)$ اعدادی صحیح هستندکه m را عاد می‌کنند، بنابراین عبارت‌نظیر $\sigma(m)$ نتیجه می‌دهدکه $m/(2^n-1)=1$ و m دارای عاملهای محض نیست. لذا $m=2^n-1$، اول است، وهوالمطلوب.

شکل ۱

تحت چنین شرایطی، کار درقرن بیستم به‌کندی ادامه یافت، اما کامپیوترها پیشرفت را به‌طور مهیجی سرعت بخشیدند. شواهد عددی حاضرعلیه وجود یك OPN را می‌توان در دونتیجهٔ زیر خلاصه‌کرد (برای سیرتکامل این نتایج به‌شکل ۲ مراجعه‌کنید):

(آ) یك OPN باید بزرگتراز 10^{50} باشد.

(ب) یك OPN حداقل دارای هشت عامل اول متمایزاست.

چندین شرط دیگر نیز وجود دارندکه یك OPN باید در آنها صدق‌کند، وما تنها چند تا ازآنها را می‌آوریم:

(پ) یك OPN را می‌توان به‌شکل $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ نوشت که در آن $p_1\equiv\alpha_1\equiv 1 \pmod 4$، و هر α_i، $2\leqslant i\leqslant k$، زوج‌است. عدداول p_1 را عامل‌اول خاص OPN نامند.

(ت) یك OPN دارای عامل اولی بزرگتر از ۳۰۰۰۰۰۰ است، دومین بزرگترین عامل اول آن، بیشتراز ۱۰۰۰ است.

(ث) اگر n یك OPN باشد آنگاه

$$0.569<\sum 1/p<0.694$$

که درآن p روی تمامی اعداد اول که n را عاد می‌کنند تغییر می‌کند.

حکم (پ) منسوب به‌اویلراست ومی‌توان‌آن را مستقیماً ازتعریف اثبات‌کرد. حکم (ث) منسوب به هاگیس [10] و سوریانارایانا[11] است. درحالی‌که قسمت اول (ت) را یك دانشجوی کالج به‌نام جی. کاندیکت[12] اثبات نموده است.

شاید قطعیت حکم (ب) کمتراز حکم (آ) باشد هرگاه آن را به‌عنوان شواهدی علیه OPNها درنظر بگیریم. اما (ب) دارای تاریخ غنی‌تری است. در واقع، سیلوستراحساس کردکه روش حل این مسأله عبارت است ازنشان دادن این‌که به‌ازای هر k یك OPN نمی‌تواند دارای دقیقاً k عامل متمایز باشد. اما به‌ازای $k\leqslant 4$ موفق شد (که اثبات کوتاهی ازآن درشکل ۳ به‌ازای $k=2$ منعکس است)، اما پیشرفت دراین جهت‌مشکل بوده است و آگاهی اخیر که ۸ عامل اول ضروری‌اند، به نظر می‌آید که پیشرفت اندکی درقبال یك قرن تلاش باشد.

کرانهای پایین برای یك عددکامل فرد:

۲۰۰۰۰۰۰	تورکانینوف[13]	(۱۹۰۸)
$1/4\times10^{14}$	کانولد[14]	(۱۹۴۴)
10^{18}	موسکات[15]	(۱۹۴۸)
10^{20}	کانولد	(۱۹۵۷)
10^{36}	توکرمان[16]	(۱۹۶۷)
10^{50}	هاگیس	(۱۹۷۳)

کرانهای پایین درتعداد عاملهای اول متمایز یك عدد کامل فرد:

۳ نوکو[17] (۱۸۶۳)

۴ سروایس[18] (۱۸۸۸)، سیلوستر (۱۸۸۸)

۵ سیلوستر (۱۸۸۸)

۶ گرادشتاین[19] (۱۹۲۵)، کوهنل[20]، وبر[21] (۱۹۵۱)

۷ رابینز[22] (۱۹۷۲)، پامرانس[23] (۱۹۷۲)

۸ هاگیس (۱۹۷۵)، چین[23] (۱۹۷۹)

شکل ۲

نمی‌دانیم که یك عدد کامل فرد باید حداقل دارای ۸ عامل اول باشد. در اینجا برهان سیلوستر را که لااقل ۳ عامل اول ضروری است می‌آوریم:

فرض‌کنید $n=p^aq^b$ کامل باشد، که درآن p و q اعداد اول متمایز فرد هستند ($n=p^a$ حالت مشابهی است). آنگاه به ترتیب زیر به‌یك تناقض می‌رسیم:

$$2=\frac{\sigma(n)}{n}=\frac{\sigma(p^a)}{p^a}\,\frac{\sigma(q^b)}{q^b}$$

$$=\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\dots+\frac{1}{p^a}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\dots+\frac{1}{q^b}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{p^2}+\dots+\frac{1}{q^b}\right)$$

$$<\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\cdots\right)=\frac{3}{2}\,\frac{5}{4}<2.$$

شکل ۳

بعلاوه، پیترهاگیس، در سال ۱۹۸۳، نظرخویش را چنین بیان کردکه یك پیشرفت به ۹ عامل اول، درحالی که قابل حصول باشد، لازمهٔ مقدار زیادی تلاش و زمان‌کامپیوتر است که غیرضروری می‌نماید. در ۱۹۵۶، در حین برهانی ادعایی شده بود مبنی براین که یك OPN حداقل به ۲۸۰۰ عامل اول نیاز دارد (به Math. Rev.، ۱۸، صفحهٔ ۱۹۳ مراجعه کنید) اما این ادعا را پس‌گرفتند.

اثباتهای کامل (آ) و (ب) استفادهٔ سنگین ازکامپیوترها را

برای تجزیه به‌یاری می‌طلبد و نیاز به چند صدصفحه دارد. شاید اثبات (ب) جالبتر باشد چون این اثبات به‌چندین گزاره دربارهٔ چندجمله‌ایهای دایره بر متکی است. این چندجمله‌ایها وابسته به اعداد کامل هستند زیرا اگر $n=\prod_i p_i^{\alpha_i}$، یک OPN باشد آنگاه

$$2n=\prod_i\sigma(p_i^{\alpha_i})=\prod_i(1+p_i+\cdots+p_i^{\alpha_i})$$
$$=\prod_i\ \prod_{\substack{d\mid\alpha_i+1\\ d>1}}F_d(p_i),$$

که در آن F_d، d امین چندجمله‌ای دایره بر است (که درجهٔ آن $\Phi(d)$ است). ازاین نتیجه می‌شود که هرعدد اول فرد که n را عاد کند $F_d(p_i)$ی را عاد می‌کند و بعکس. لذا واقعیات مربوط به اعداد اول و چندجمله‌ای‌های دایره‌بر نقشی مهم در نتایج مربوط به‌اعداد کامل ومخصوصاً در اثبات (ب) بازی می‌کنند.

اثبات (آ) با در نظر گرفتن ۱۷۵ حالت ممکن می‌شود. درهر حالت، هاگیس حقایق شناخته شدهٔ متفاوتی را در بارهٔ OPNها (شامل (ب) که به جای ۸، ۷ قرار گرفته است) می‌طلبد، وهرجا لازم باشد، مقداری‌روی‌تجزیهٔ بعضی‌از$\sigma(p^\alpha)$ کار کامپیوتری انجام می‌دهد تا نتیجه بگیرد که OPN بزرگتر از 10^{50} است. نمونه‌ای را درشکل ۴ نشان داده‌ایم.

یك حالت برهان ۱۷۵ حالتهٔ هاگیس‌که یك OPN از 10^{50} بزرگتراست:

فرضهای‌این حالت: فرض‌کنید n یك OPN باشدکه $3^{40}\,|\,n$، $3^{41}\nmid n$ و $3^2\,|\,p_1+1$، که در آن p_1، مقسوم‌علیه اول خاص n است.

اثبات. ابتدا توجه کنیدکه، به‌این دلیل‌که

$$3^{41}\equiv 3(-2)^{10}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 83)$$

عدد $\sigma(3^{40})=(3^{41}-1)/2$ بر ۸۳ بخش‌پذیراست. به‌علاوه، یك‌آزمون‌کامپیوتری نشان می‌دهد که $\sigma(3^{40})=83M$ که در آن M دارای هیچ عامل اولی‌کمتراز 10^5 نیست. چون

$$\sigma(3^{40})=1+3+9+\cdots+3^{40}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$$

M باید به‌هنگ ۴ همنهشت ۱− باشد، که از آنجا M مربع نیست. حال، $M\cong 2.2\times 10^{17}$ بنابراین M یکی ازاشکال p_1، p_1^2، p_1p_2 $p_1p_2^2$، $p_1p_2p_3$ را داراست. به‌ازای هریك ازاین پنج حالت می‌توان نشان داد که $n>10^{50}$. برای مثال اگر $M=p_1p_2^2$، آنگاه بنابر نتیجه اویلر (ب)، فرضهای این حالت و این واقعیات که n دارای حداقل ۷ عامل اول است و $\sigma(3^{40})\,|\,n$،

$$n\geqslant 53(5\cdot 7\cdot 83)^2 3^{30}p_1M>$$
$$53(5\cdot 7\cdot 83)^2 3^{40}10^5(2\times 10^{17})>10^{50}.$$

شکل ۴

درمورد OPNها چند نتیجه عمیقتر به دست آمده است. در ۱۹۵۹، ویرسینگ[۲۴] نتیجهٔ با ارزش زیر را دربارهٔ $V(x)$، تعداد اعدادکامل کمتریا مساوی با x، اثبات نمود: به‌ازای‌عدد ثابتی چون c، $V(x)<x^{c/\ln\ln x}$ از این مطلب می‌توان نتیجه گرفت که حتی اگر چند OPN موجود باشند، حداقل تعداد آنها برای مثال بسیار کمتر از تعداد اعداد اول است. به‌ویژه، مجموع معکوسهای اعداد کامل یك‌سری همگرا است. احتمال دارد که نتوان دربارهٔ مسأله OPN تصمیم گرفت، بدین معنی که هیچ اثباتی با استفاده ازاصول موضوعهٔ پئانویاترملوفرانکل موجود نباشد. اما اگربتوان اثبات نمودکه قادر به‌تصمیم‌گیری نیستیم، آنگاه، همان‌طورکه این حالت درمورد بسیاری از مسائل نظریهٔ اعداد صادق است، مسأله را می‌توان در «دنیای واقعی»، یعنی درمدل‌استاندارد حساب{... ,۵ ,۴ ,۳ ,۱ ,۰}، حل کرد. زیرا اگر یك OPN دراین مدل موجود می‌بود، می‌توانستیم ثابت‌کنیم‌که یك OPN وجود دارد. که متناقض با غیرقابل اثبات بودن است. شاید پیشرفت در چنین مسیرهایی مأیوس‌کننده باشد، اما ارتباطهای دیگری با منطق وجود دارند که ممکن است مثمرثمر باشند. سی. دبلیو. آندرسن[۲۵] (به مقالهٔ پامرانس مراجعه کنید) حدس زده است که مجموعهٔ اعداد گویای r که به‌صورت $\sigma(n)/n$ به‌ازای nی ظاهر می‌شوند یك مجموعهٔ بازگشتی است. گرچه این حدس، مسألهٔ OPN را حل نخواهدکرد، اما دارای چند مفهوم جالب است. برای مثال، می‌توان نشان داد که اگر $\sigma(n)/n=5/3$، آنگاه نه ۲ ونه ۵ n را عاد نمی‌کنند، نتیجه‌آن که $\sigma(5n)=10n$، یعنی، $5n$ یك OPN است. برعکس، هر OPN که بر ۵ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۲۵ بخش‌پذیر نباشد، به شکل $5n$ است، که درآن $\sigma(n)/n=5/3$. لذا اگر حدس آندرسن درست‌باشد، مسأله جستجوی یك OPN که بر ۵ بخش‌پذیربوده ولی بر ۲۵ بخش‌پذیرنیست، به‌هدفی معین تبدیل می‌شود.

یك نتیجهٔ جالب درمورد قابل محاسبه بودن، به پرسش زیرمربوط می‌شود. به‌ازای چه مقدار k، یك OPN دارای دقیقاً k عامل اول متمایز موجود است؟ تنها چیزی‌که می‌دانیم، پاسخی منفی به‌ازای $k\leqslant 7$ است. به‌هرحال پومرانس نشان داده است‌که مجموعهٔ چنین kهایی، بازگشتی است. این مطلب

از نتیجهٔ او که هر OPN با k عامل اول متمایز از

$$(۴k)^{(۴k)^{۲^{k^۲}}}$$

کوچکتر است، نتیجه می‌شود. به‌علاوه، او این کار را برای حل حالت دیگری از حدس آندرسن ساخته است. او ثابت نموده است که، به‌ازای هر k ثابت، مجموعهٔ اعداد گویا که به‌ازای nی باحداکثر k عامل اول، به‌صورت $\sigma(n)/n$ ظاهرمی‌شوند بازگشتی است.

علیرغم صورتهای متنوع شواهد علیه OPNها، یك مثال منسوب به‌دکارت کمك می‌کند تا توجه خود را روی امکان‌خلاف آن متمرکز کنیم. دکارت دریافت که

$$n = ۲۲۰۲۱ \cdot ۳^۲ \cdot ۷^۲ \cdot ۱۱^۲ \cdot ۱۳^۲$$

به‌طور امیدوارکننده‌ای به‌کامل بودن نزدیك است:

$$(۲۲۰۲۱+۱)(۱+۳+۳^۲)(۱+۷+۷^۲)$$
$$(۱+۱۱+۱۱^۲)(۱+۱۳+۱۳^۲)=۲n.$$

این «اثبات» که n کامل است، گمراه‌کننده است. (چرا؟) به‌علاوه، امیدواری دکارت که ازاعداد اول مختلف، یك OPN با ۵ عامل اول حاصل می‌شود، غلط از آب درآمده است، در واقع، می‌دانیم که اگر M خالی ازمربع باشد $p^\alpha M^۲$، یك OPN نیست. با این وجود، مثال دکارت، ماهیت شکنندهٔ مسأله را روشن می‌سازد. در واقع، شاید ترکیب ساده‌ای از چندین عدد اول، یك عددکامل فرد را به‌دست دهد!

THE MATHEMATICAL INTELLIGENCER

VOL. 7, NO 2, 1985.

مراجع:

L. E. Dickson, (1919) *History of the Theory of Numbers*, Vol. 1. Washington: Carnegie Insitute

P. Hagis, (1973) A lower bound for the set of odd perfect numbers. *Math. Comp.* 27, 951-953

P. Hagis, (1980) Outline of a proof that every odd perfect number has at least eight prime factors. *Math. Comp. 35*, 1027.1032

C. Pomerance, (1977) Multiply perfect numbers, Mersenne primes, and effective computability. *Math. Ann. 226*, 195-206

D. suryanarayana and P. Hagis, (1970) A theorem concerning odd perfect numbers. *Fibonacci Quart. 8*, 337-347

J. J. Sylvester, (1887) Note on a proposed addition to the vocabulary of ordinary arithmetic. *Nature 37*, 152-153 (correction, ibid. p. 179)

J. J. Sylvester, (1888) On the divisors of the sum of a geometrical series whose first term is unity and common ratio any positive or negative integer. *Nature 37*, 417-418

E. Wirsing, (1959) Bemerkung zu der Arbeit uber vollkommene Zahlen. *Math Ann. 137*, 316.318

پانویسها:

1. Perfect Numbers
2. Stan Wagon
3. Mersenne Primes.

تاکنون، ۲۹ عدد اول مرسن شناخته شده است، بزرگترین آنها متناظربا ۱۳۲, ۰۴۹ = n است و دارای ۳۹, ۷۵۱ رقم است.

4. Odd Perfect Number (OPN).
5. Saint Augustine
6. J. J. Sylvester
7. Hermite
8. Lindemann
9. Dickson
10. Hagis
11. Suryanarayana
12. J. Condict
13. Turcaninov
14. Kanold
15. Muskat
16. Tuckerman
17. Nocco
18. Servais
19. Gradstein
20. Kuhnel
21. Webber
22. Robbins
23. Pomerance, Chein
24. Wirsing
25. C. W. Anderson.

نگرشی به ساختمان عدد ۱۳۷۱

محمدرضا رهبر دانشجوی مهندسی دانشگاه صنعتی امیرکبیر

درسال جدید ۱۳۷۱ می‌خواهیم این عدد را به‌صورتهای مختلف نشان دهیم. درابتدا با روابطی برای ارقام تشکیل‌دهنده عدد شروع می‌کنیم:

$$۱=۱+۳!-۷+۱ \text{ ،} ۳=-۱\times(۳-۷+۱) \text{ ،}$$

$$۷=۱۳-۷+۱ \text{ ،} ۱=۱\times(۳^{۲}-۷-۱) \text{ ،}$$

$$۱۳=\sqrt{۱+۳}\times۷-۱$$

$$۷۱=-۱+(۳^{۲}(۷+۱))$$

$$۱۰۰۰=۱\times(۳+۷)^{۳}\times۱$$

$$۳۰۰=(۱\times۳!)\cdot(۷^{۲}+۱)$$

$$\Longrightarrow ۱۳۷۱=(۱+۳)\times۷^{۳}-۱$$

$$۷۰=(۱+۳^{۲})\cdot(۷\times۱)$$

$$۱=۱\times\sqrt{-۳+۷}-۱$$

اعداد ۱ تا ۹ به‌ترتیب به‌صورتی با استفاده از علائم ریاضی به‌کار رفته‌اند تا عدد سال جدید حاصل شود.

$$۱\times۲۳+۴+(۵۶\times(۷+۸+۹))=۱۳۷۱$$

$$-۱-۲+(۳\times۴۵۶)+۷+۸-۹=۱۳۷۱$$

$$(۱+(۲۳\times۴)+۵-۶)\times(۷+۸)-۹=۱۳۷۱$$

وبه‌عکس ترتیب بالا حاصل می‌شود.

$$(۹۸\times۷)\times(۶-۵+۴-۳)-۲+۱=۱۳۷۱$$

$$(۹+۸)(۷۶+۵)-(۴\times۳\div۲\times۱)=۱۳۷۱$$

$$(۹-۸)(۷۶\times۵۴)\div۳+۲+۱=۱۳۷۱$$

همچنین نمایش ۱۳۷۱ با ارقام صفرتا ۹ به‌صورتی دیگر

$$۶+\frac{۵۸۹۱۰}{۴۳}+۲-۷=۱۳۷۱ \text{ و } ۵+\frac{۶۷۱۳۰}{۴۹}-\frac{۸}{۲}=۱۳۷۱$$

$$۶-۳+\frac{۷۹۴۰۲}{۵۸}-۱=۱۳۷۱$$

وبا تکرار ارقام مشابه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}۱۳۷۱&=(۹\times۹)\times(۹+۹)+(۹\div۹)-۹۹\\&+(۹۹\div۹)=(۸\times۸\times۸)+(۸۸۸-۸۸)\\&+(۸\times۸)+(۸۸\div۸)-(۸+۸)\\&=(۵۵\times۵\times۵)+۵-(۵\div۵)=(۳۳۳\times۳)\\&+۳۳۳+۳۳+۳+۳=۱+((۱۱۱\times۱۱۱)\\&\div(۱۱-۱-۱))+۱\end{aligned}$$

عدد ۱۳۷۱ با استفاده ازارقام‌آن

$$۱۳۷۱=(۱۳\times۷\times۱۱)+(۳۷\times۱۱)-۳۷\times۱$$

$$۱۳۷۱=۱۳\times۷۱+۱\times۳۷۱-۱۳+۷۱-۱+۳\times۷-۱$$

$$۱۳۷۱=(۱+۳۷۱)\times۱\times۳-۷+(۱۱\times۳\times۷)+۱۱+۳\times۷-۱$$

$$۱۳۷۱=(۱\times۳+۷\times۱)^{۳}+(۱\times۳۷۱)$$

درمربع جادویی سال ۱۳۷۱ اعداد ۴۵۴ تا ۴۶۱ طوری به‌کار رفته‌اند که مجموع اعداد واقع در ردیف‌ها، ستونها و اقطار برابر ۱۳۷۱ می‌باشد.

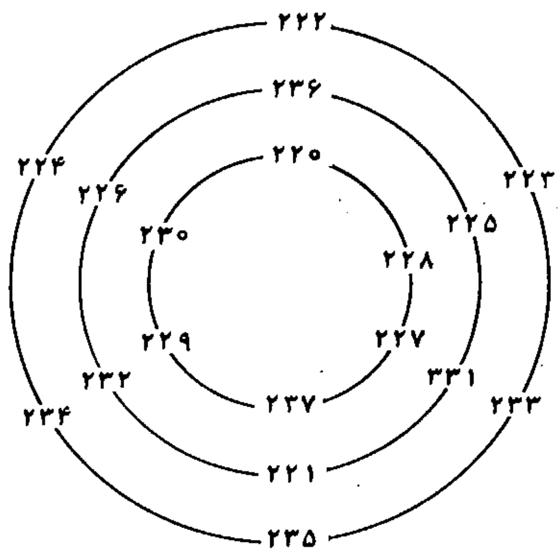
۴۵۴	۴۶۱	۴۵۶
۴۵۹	۴۵۷	۴۵۵
۴۵۸	۴۵۳	۴۶۰

$$\sum_{i=۱۳}^{۷۱} i=(۱\times۳\times۷)\times(۱+۱)(۳^{۲}+۷^{۲}+۱)$$

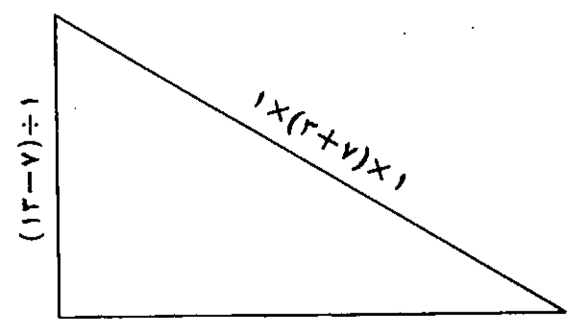
$$\begin{vmatrix}۱ & ۳\\ ۷ & ۱\end{vmatrix}=۱-(۳\times۷\times۱)$$

$$\frac{۱+۳+۷+۱}{۱\times۳\times۷\times۱}=\frac{۱+۳}{۷\times۱}$$

دایره جادویی سال ۱۳۷۱ که درآن مجمـوع اعداد هرقطر و محیط هر دایره برابر ۱۳۷۱ می‌باشد.



درمثلث قائم‌الزاویه زیر ازعدد ۱۳۷۱ کمك‌گرفته‌ایم



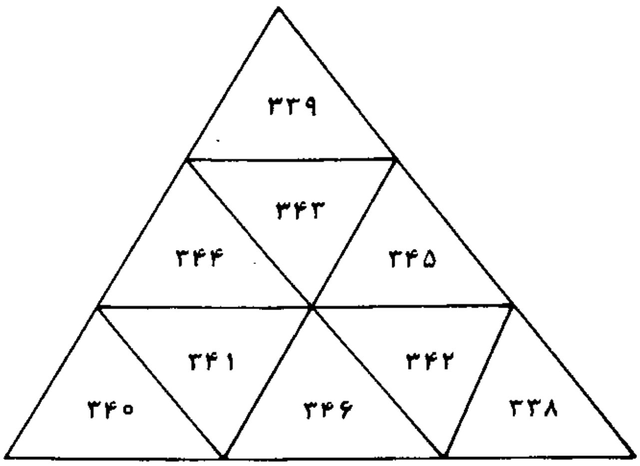
$۱+۳/۷+۰/۱ =$ ارتفاع وارد بروتر،

$(۱+۳)(۷-۱) =$ عدد مساحت $=$ عدد محیط

$۱-۳+۷\div۱ =$ شعاع‌دایره محیطی،

$۱-۳+۷-۱- =$ شعاع دایره محاطی

درمثلث جادویی ۱۳۷۱ مجموع اعداد سه‌مثلث داخلی‌زیر هرمثلث‌گوشه‌ای با عدد داخل این مثلث برابر ۱۳۷۱ می‌شود. همچنین مجموع اعداد سه ذوزنقه داخلـی (که قاعدهٔ هر یـك ضلعی ازمثلث است) با هم برابرند.



عدد ۱۳۷۱ را به‌دوحالت مـی‌تـوان به‌صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت.

$$۱۳۷۱=۴۵۶+۴۵۷+۴۵۸=۲۲۶+۲۲۷+۲۲۸+۲۲۹+۲۳۰+۲۳۱$$

* *

$$۱\times۳۷\times۱\times۱\times(۳+۷)\times۱=۱\times(۳^۳+۷^۳)\times۱$$

$$۱\times۳۷\times۱+۱\times۳\times۷\times۱=۱\times۳^۲+۷^۲\times۱$$

$$۱^۳+۳^۳+۷^۳+۱^۳=۱+۳۷۱=(۱\times۳!)(۷^۲+۱)$$

$$+(۱^۳+۳^۲+۷^۲+۱^۲)+(۱+۳+۷+۱)$$

* *

$$۱۳=۱-۲-۳+۴-۵۶+۷۸-۹$$

$$۱۳=۹۸-۷۶-۵-۴+۳-۲-۱$$

$$۷۱=۱+۲۳+۴۵-۶+۷-۸+۹$$

$$۷۱=۹-۸+۷-۶+۵+۴۳+۲۱$$

$$۱۳+۷۱=-۱۲+۳۴+۵۶+۷+۸-۹$$

$$=۹۸-۷-۶-۵+۴+۳-۲-۱$$

$$۱۳-۷۱=۱۲-۳-۴۵+۶۷-۸۹$$

$$=-۹+۸-۷+۶-۵۴-۳+۲-۱$$

رهیافت مختصاتی به نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی

ترجمه واقتباس: محمود نصیری

فرض‌می‌کنیم a_1، a_2، ...، a_n عدد n مثبت باشند، واسطه حسابی آنها را به A و واسطه هندسی‌آنها را به‌G نشان‌می‌دهیم. نامساوی واسطه حسابی و هندسی بیان می‌کند که $A \geqslant G$ و تساوی برقرار است اگر وفقط اگر

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n.$$

نمودار $y = e^{\frac{x}{G}}$ به‌سمت بالا محدب است ومماس برمعادله $y = \frac{e}{G}x$ در نقطه (G, e) روی آن زیر نمودار قرار دارد.

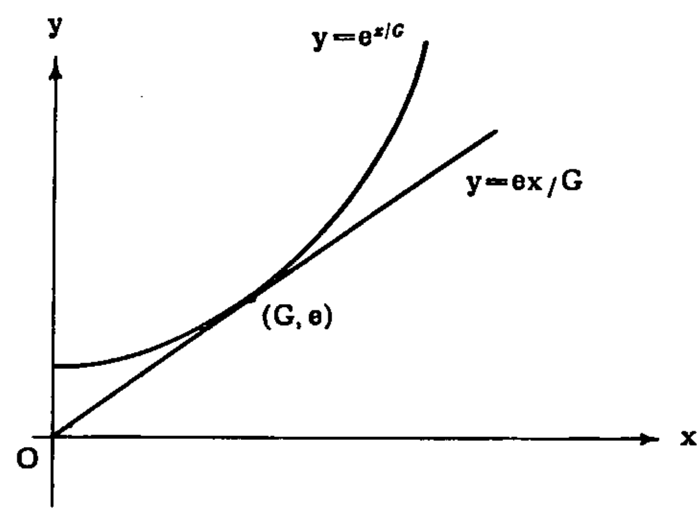
برای نشان دادن $A \geqslant G$، به ترتیب $x = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ را در نامساوی $e^{x/G} \geqslant ex/G$ قرار داده وآنها را درهم ضرب می‌کنیم.

بنابراین،

$$e^{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/G} \geqslant \left(\frac{ea_1}{G}\right)\left(\frac{ea_2}{G}\right) \cdots \left(\frac{ea_n}{G}\right) = e^n.$$

لذا، داریم $n \geqslant \frac{nA}{G}$ یا $A \geqslant G$، تساوی برقراراست اگروفقط اگر

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$



مرجع:

MATHEMATICS MAGAZINE, Vol. 64 NO. 4 October 1991

بقیه از صفحه ۳

در ورای شرائط و امکانات جامعه و محیط انجام گیرد باید با توجه به‌مجموعه جهات و شرائط قضاوت‌کرد. فرض کنید هشترودی در فرانسه اقامت می‌گزید و به کارهای تحقیقاتی می‌پرداخت و مسلماً در این راستا پیشرفت زیادی می‌کرد و به پیشگامان‌کاروان‌علم‌می‌پیوست. دراین‌صورت‌او در زمرهٔخبرگان جهانی‌دربخشی‌از دانش ریاضی‌درمی‌آمد ویکی ازقافله‌سالاران این علم می‌شد وما همه ازاو به‌عنوان یکی از دانشمندان‌بزرگ جهان تجلیل می‌کردیم! بدون شك سرمقاله حاوی مطالب بسیار آموزنده‌ای است‌که اشعار برانحرافات دربعضی از محیطهای علمی وفرهنگی ما دارد اما سخن ناصواب هم فراوان است. یا باید در یك تحلیل منصفانهٔ زندگی یك فرد را مورد ارزیابی قرار داد ویا باید جنبه‌های مثبت زندگی او را نشان داد. مگر هدف غیر ازاین است‌که جوانان این مرز وبوم را به علم و دانش سوق داد و از کج‌فهمیها وانحرافات و خودخواهیها و خودمحوریها وتکبرهای بی‌مورد وجهالت به‌دور داشت. دراین راستا وظیفه ارباب دانش وتخصص، نخست اجتناب ازضعفهای گذشتگان و بعد رسالت واقعی آنها، ایجاد تحول درآموزش‌و پژوهش‌است. اگر به قول نگارنده مقاله، هشترودی نفس‌گرمی داشت‌این نفس‌گرم را ارج نهیم که‌با سخنرانیهای آتشین خود درمجامع‌علمی و دانشگاهی مشوق افرادی شده‌است که به‌دانش ریاضی علاقمند شده و دراین راه خود متبحرومتخصص شده‌اند. واگر او در پیشرفت ریاضیات نقش عمده‌ای ایفا نکرد و یا نهادی بنا ننهاد ویا مکتبی ایجاد نکرد، کوشش کنیم که باسعه صدر وهمکاری و همآهنگی با یکدیگر وبه دور از وابستگیها و تعصبات نقشی ایفا کنیم، نهادی بناگذاریم ویا مکتبی درریاضی ایجادکنیم.

نگارنده سرمقالهٔ مجله نشر فیزیك بحق گفته است که حسابی برای جامعهٔ فیزیك ایران محترمتر از آن است که با عبدالسلام مقایسه شود. این سخن درستی است ومحتوایی عمیق دارد، اتفاقاً شمول این سخن سایر شئونات علمی و بویژه ریاضی را هم دربرمی‌گیرد . یعنی، مقایسه افراد و پیشرفتهای علمی‌درچهارچوب واقعیتهای‌هرجامعه موردبحث وبررسی‌قرار می‌گیرند. دانش ریاضی ابعاد گوناگونی دارد، از یك‌سو از بررسی‌کمیتهای‌عددی‌شروع شده وتاکاربردی‌ترین دانش‌ها‌پیش می‌رود وآن چنان‌کاربردی پیدا می‌کندکه درتمام زمینه‌های‌علوم وتکنولوژی وحتی مهندسی وپزشکی مورداستفاده قرارمی‌گیرد. ازسوی دیگر در قلمرو مجردترین مفاهیم منطق تحت عنوان منطق ریاضی ونظریه مدلها، دامنه‌ای وسیع برای تحقیق وتفحص دارد. مسائلی دراین دانش مطرح می‌شوندکه صرفاً زیبا هستند چون یك تابلو زیبا ویا منظره دیدنی. دراین دانش وسیع که به قول دکارت تنها دانش‌کامل است راههای ممکن برای تشویق و ترغیب دانش پژوهان فراوان است. این بخش از دانش‌بشری هم بینش وتفکر منطقی را ایجاد می‌کند وهم حربه‌ای قوی برای تسلط به‌پدیده‌های فیزیکی است و هم شامل و حاوی مسائل گوناگونی است‌که صرفاً زیبایی آنها هرانسان جستجوگر علمی را راضی‌می‌کند. دراین میدان وسیع هرریاضی‌دان ویا ریاضی کاری به‌بعد خاصی ازاین ابعاد می‌پردازد، زمانی که هشترووی درکلاس دروس ریاضی‌بانفس‌گرم وبا بیانی‌شیوا مواردِاستفاده نظریه معادلات دیفرانسیل را درمسائل فیزیك و فیزیك نظری ارائه می‌داد، مسلماً هیچگونه تکنیك و روش خاصی برای‌درس بخصوصی ارائه نمی‌داد اما آن‌چنان این سخنان دانشجویان وشنوندگان را شیفته می‌کردکه عده‌ای زیاد از دانشجویان‌برای ادامه دراین رشته ترغیب وتشویق می‌شدند و اکنون عده‌ای از شاگردان‌آن روانشاد خود جزو خبرگان این دانش درآمده‌اند. آن روز در جامعهٔ ریاضی ما یك هشتردوی بود که با سخنان آتشین خود دروازهٔ دانش ریاضی و بهشت این دانش را به دانشجویان نشان می‌دادند ویك مصاحب که با ایجاد نهادی آموزشی تعداد زیادی مدرسین باکفایت برای انتقال دانش ریاضی تربیت نمود وچه بسا افراد ناشناختهٔ دیگری‌که خدمات شایسته‌ای دراین راه انجام داده‌اند. منظورمن بیان این واقعیت است که‌این‌کوشش‌ها وتقلاها درجهات مختلف شایسته تقدیرند. وبا بهره‌گیری ازنکات مثبت این‌فعالیتها وتلفیق وهم‌آهنگی‌آنها راه نو درجهت ارتقاء دانش ریاضی ایجادکنیم.

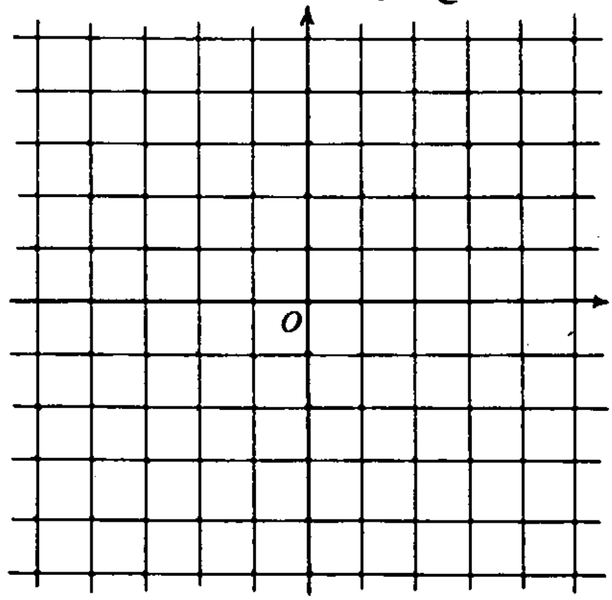
اکنون‌که به‌برکت انقلاب اسلامی دوره‌های کارشناسی ارشد و دکترا تقویت و ایجاد شده‌اند امیدواریم که دهها هشترودی ومصاحب تربیت شوند و خود را وقف فرزندان این مرز وبوم نمایند و در داخل‌کشور به‌تربیت جوانان بپردازند.

سردبیر

تداخل حساب با هندسه[۱]

دکتر آدینه محمد نارنجانی
گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه فردوسی «مشهد»

۱) **مقدمه.** در روی یک صفحه‌ی کاغذ خطوطی موازی لبه‌های آن با فواصل مساوی رسم کنید. به‌این وسیله یک صفحه‌ی شطرنجی به‌دست خواهدآمد (شکل ۱). اگر یکی از این خطوط افقی را محور طولها و یک خط قائم را محور عرضها درنظر بگیریم، این صفحه شامل یک دستگاه مختصات خواهد بود و دراین‌صورت محل برخورد خطوط قائم با خطوط افقی نقطه‌های با مختصات صحیح داخل صفحه خواهند بود.



(شکل ۱)

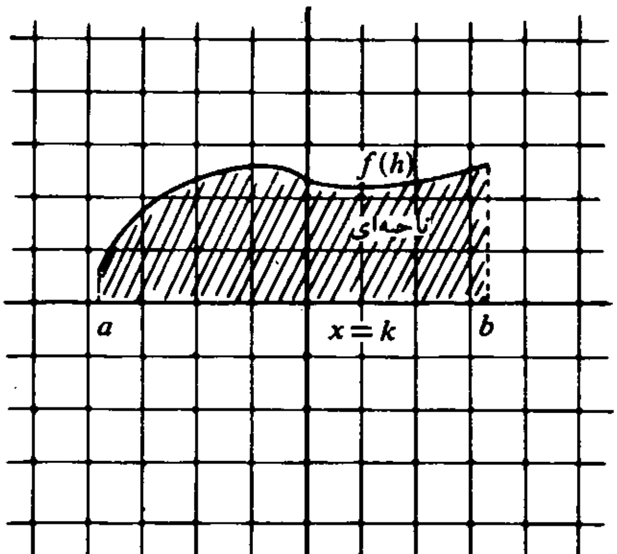
حال می‌توان دراین مجموعه، که یک مشبکه اطلاق می‌شود، مسائل جالبی را مطرح کرد. مثلاً سئوال کنیم کـه در داخل دایره‌ای مفروض به مرکز یکی ازنقاط مشبکه چند نقطه از مشبکه قرار دارد؟ یا با احتساب نقاط مشبکه داخل یک مستطیل به‌طرق گوناگون اتحادهایی نظیر اتحاد آیزنشتاین (۱، صفحه‌ی ۳۸۹) که درمبحث قانون تقابل مربعی یا به قول گاوس گوهر نظریهٔ اعداد (۱، صفحه‌ی ۱۶۲۵) مورداستفاده دارد را اثبات کرد.

همچنین می‌توان سئوال کرد که آیا به ازای هر n، دایره‌ای وجود دارد کـه در داخل‌آن درست n، نقطـه ازنقاط شبکه قرار داشته باشد؟

یا دایره‌ای وجود دارد که در روی‌آن n نقطه از نقاط مشبکه باشد.

منظور ازمقاله‌ی حاضر بررسی مسائلی ازاین نوع می‌باشد.

۲) فرض‌کنیم $y=f(x)$، $a\leqslant x\leqslant b$ معادله‌ی یک‌منحنی نسبت به‌محورهای‌مختصات دریک مشبکه‌باشد وفرض‌کنیم $f(x)\geqslant 0$ فرض کنیم $D=\{(x, y) \mid a\leqslant x\leqslant b \& 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$



(شکل ۲)

ناحیه‌ای ازصفحه‌ی مشبکه باشد (شکل ۲) منظور یافتن تعداد نقاط مشبکه (نقاط با مختصات صحیح) داخل D است.

فرض کنیم k عددی صحیح بین a و b باشد، تعداد نقاط صحیح روی خط $x=k$ عبارتست از تعداد yهای صحیحی که $0 \leqslant y \leqslant f(k)$ وازآنجا $0 \leqslant y \leqslant [f(k)]$ (دراینجا کروشه بمعنی جزء صحیح است.) بنابراین

$N=$ تعداد نقاط با مختصات صحیح (۲۰۱) داخل ناحیه‌ی D $\quad \sum_{\substack{a<k<b \\ k\in z}} ([f(k)]+1)$

۳) فرض کنیم $x^2+y^2=R^2$ معادله‌ی دایره‌ای به شعاع R باشد. مطلوبست تعیین نقاط مشبکه درون و روی دایره. به عبارت دیگر مطلوبست تعداد زوجهای (x, y) صحیح که

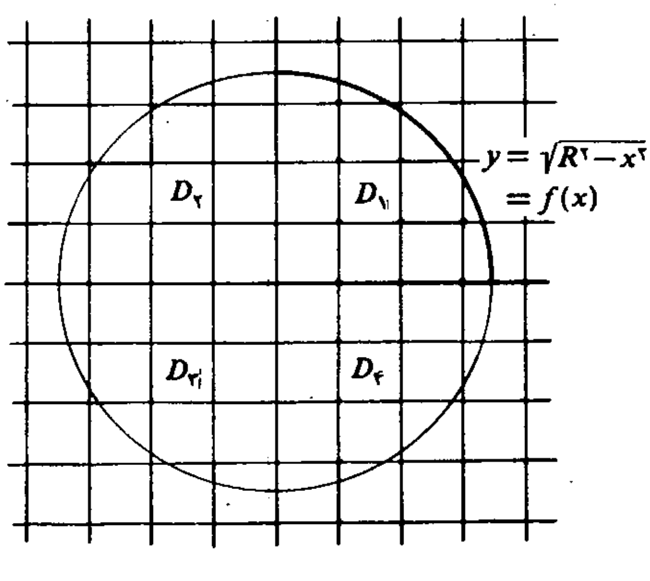
$x^2+y^2 \leqslant R^2$

ناحیه‌ی داخل و روی دایره را می‌توان به چهار قسمت جزء تقسیم کرد.

مجموعه‌ی نقاط واقع در ربع اول داخل و روی دایره و نیم‌محور مثبت طولها =

$D1=\{(x, y) \mid 1\leqslant x\leqslant R \& 0\leqslant y\leqslant \sqrt{R^2-x^2}\}$

ناحیه‌های D_2، D_3، و D_4 قرینه‌های D_1 اند نسبت به محورها. بنابراین تعداد نقاط داخل و روی دایره عبارتند ازچهار برابر نقاط واقع در D_1 بعلاوه ۱ (مبدأ مختصات، مرکزدایره $(0, 0)$) (شکل زیر). اینک بنابر ۲۰۱ داریم:



$N=$ تعداد نقاط با مختصات‌صحیح واقع در درون و روی‌دایره

$$=4\sum_{1\leqslant k\leqslant R}\left([\sqrt{R^2-k^2}]+1\right)+1$$

$$=4\sum_{k=1}^{[R]}[\sqrt{R^2-k^2}]+4\sum_{k=1}^{[R]}1+1$$

یا

$$N=4\sum_{k=1}^{[R]}[\sqrt{R^2-k^2}]+4[R]+1 \qquad (۳۰۱)$$

جهت نشان دادن قدرت این استنتاج و یافتن اتحادی بر حسب‌تابع جزء صحیح، دستور (۳۰۱) را به‌طریقی دیگرمحاسبه می‌کنیم (رجوع شود به صفحه‌ی ۳۹۴ مسئله‌ی ۱۰ ازمأخذا).

دیدیم که تعداد نقاط با مختصات صحیح داخل و روی دایره برابر بود با ۴ برابرنقاط مشبکه واقع در D_1 بعلاوه ۱. در این روش به‌جای به‌کاربردن دستور (۲۰۱) جهت محاسبه‌ی نقاط شبکه واقع در D_1 ابتدا D_1 را به ناحیه‌های جزء دیگری تقسیم می‌کنیم وسپس دستور (۲۰۱) را به‌کارمی‌گیریم. واضح است که محل تلاقی دایره با خط $x=y$ در مشبکه نقطه‌ی $A\left(\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ می‌باشد. اینک ناحیه‌های D_1' و D_2' و D_3' را مطابق شکل ۳ (آ)، (ب)، (ج) درنظرمی‌گیریم

$$D_1'=\left\{(x, y) \mid 1\leqslant y\leqslant \frac{R}{\sqrt{2}} \& \ 1\leqslant y\leqslant\frac{R}{\sqrt{2}}\right\}$$

ناحیه‌ی مربع‌شکل $ABOC$ (شکل ۳ (آ))

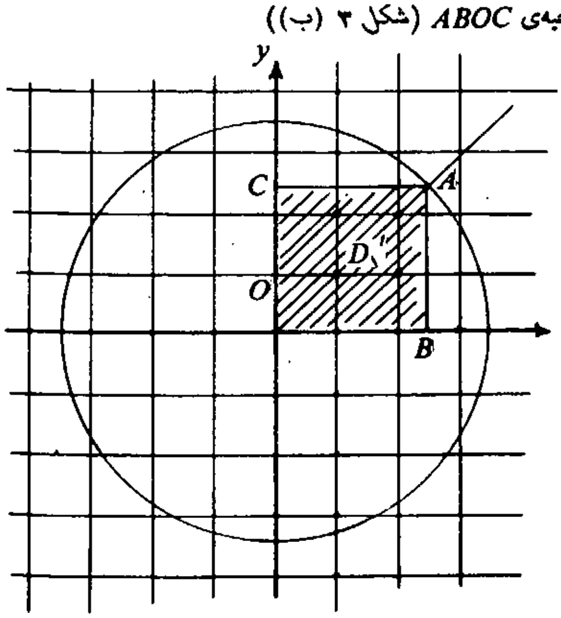
= تعداد نقاط با مختصات صحیح درون و روی D_1'

$$N_1'=\sum_{k=1}^{\left[\frac{R}{\sqrt{2}}\right]}\left(\sum_{l=1}^{\left[\frac{R}{\sqrt{2}}\right]}1\right)=\left[\frac{R}{\sqrt{2}}\right]^2$$

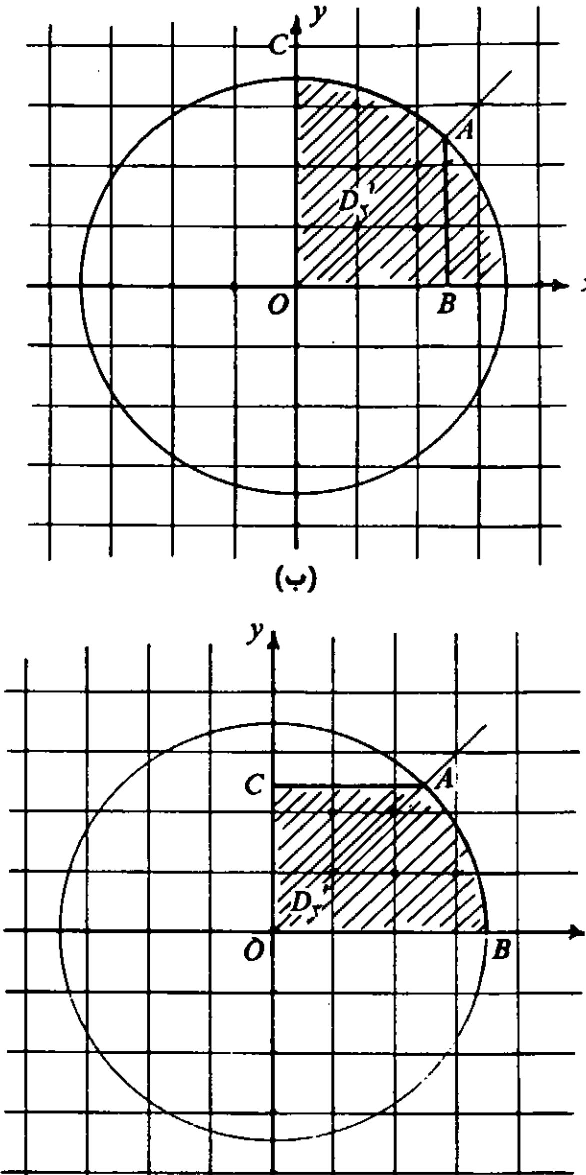
(منظور ازکروشه، جزء صحیح است.)

$$D_2'=\left\{(x, y) \mid 1\leqslant x\leqslant\frac{R}{\sqrt{2}} \ \& \ 1\leqslant y\leqslant\sqrt{R^2-x^2}\right\}$$

ناحیه‌ی $ABOC$ (شکل ۳ (ب))



(آ)



(ب)

(ج)

(شکل ۳)

بنا بردستور (۲۰۱)

$$N_۲' = \sum_{\substack{۱\leqslant k\leqslant \frac{R}{\sqrt{۲}}\\ k\in Z}} [\sqrt{R^۲-k^۲}] \quad = \text{تعداد نقاط با مختصات صحیح درون و روی } D_۲'$$

$$D_۲' = \left\{(x,\, y) \mid ۱\leqslant x\leqslant \sqrt{R^۲-y^۲} \ \&\ ۱\leqslant y\leqslant \frac{R}{\sqrt{۲}}\right\}$$

ناحیه‌ی $ABOC$ (شکل ۳ (ج)). بنـا بردستور (۲۰۱) و تقـارن شکلهای $D_۲'$ و $D_۴'$.

$$N_۴' = \sum_{\substack{۱\leqslant k\leqslant \frac{R}{\sqrt{۲}}\\ k\in Z}} [\sqrt{R^۲-k^۲}]. \quad = \text{تعداد نقاط با مختصات صحیح درون } D_۴'$$

واضح است کـه روی محور ox تعداد نقاط صحیـح غیراز مبدأ عبارتند از $[R]$. پس با توجه به شکل ۳

$$\text{تعداد نقاط شبکه درون و روی } D_۱ = N_۱ = N_۲' + N_۴' - N_۱' + [R]$$

$$= ۲\sum_{k=۱}^{\left[\frac{R}{\sqrt{۲}}\right]} [\sqrt{R^۲-k^۲}] - \left[\frac{R}{\sqrt{۲}}\right]^۲ + [R]$$

وبالاخره،

$$\text{تعداد نقاط درون دایره و روی‌آن} = N = ۴N_۱ + ۱$$

$$= ۸\sum_{k=۱}^{\left[\frac{R}{\sqrt{۲}}\right]} [\sqrt{R^۲-k^۲}] - ۴\left[\frac{R}{\sqrt{۲}}\right]^۲ + ۴[R] + ۱$$

حال بامساوی قرار دادن رابطه‌ی اخیر با (۳۰۱) وحذف جملات مساوی خواهیم داشت

$$(۳۰۲) \quad \sum_{k=۱}^{[R]} [\sqrt{R^۲-k^۲}] = ۲\sum_{k=۱}^{\left[\frac{R}{\sqrt{۲}}\right]} [\sqrt{R^۲-k^۲}] - \left[\frac{R}{\sqrt{۲}}\right]^۲$$

اتحادی که به هیچ‌وجه بدیهی نیست.

۴) دربخش قبل دیـدیم کـه مرکز دایـره (۰ , ۰) یعنـی مبدأ مختصات بود، اگر به‌طور کلـی مختصـات مرکز دایره اعدادی صحیح باشند با توجه به انتقال محور یا تقارن نقاط شبکه بدون اینکه به کلیت خللی واردآید می‌توان مرکز را به‌مبدأ انتقال داد اما درحالی که لااقل یکی ازمختصات مرکز دایره عددی صحیح نباشد، مسئله صورت دیگری پیدا می‌کند که هم‌اینک به‌آن‌جواب می‌گوییم

فرض کنیم منظوریافتن تعداد اعداد صحیح x و y باشند به طوری که

$$(۴۰۱) \quad (x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ \leqslant R^۲$$

یا به‌عبارت هندسی منظوریافتن نقـاط داخل و روی دایره‌ای با مرکز $(\alpha,\, \beta)$ وشعاع R است (لزومی ندارد $(\alpha,\, \beta)\in Z\times Z$) همان گونه که دربخش ۲ دیدیم اگرتعداد نقاط صحیح روی‌خط $x=K\in Z$ و داخل یاروی دایره فوق‌را بیابیم وسپس k طوری تغییرکند که خط از دایـره خـارج نشود مجمـوع حاصل تعداد نقاط مطلوب خواهد بود.

ابتدا معادله (۴۰۱) را به صورت زیرمی‌نویسیم.

$$x^۲ + y^۲ - ۲\alpha x - ۲\beta y + \alpha^۲ + \beta^۲ - R^۲ \leqslant ۰$$

فرض کنیم $x=k\in Z$، داریم

$$y^۲ - ۲\beta y - (R^۲-\alpha^۲-\beta^۲) + k^۲ - ۲\alpha k \leqslant ۰$$

ریشه‌های معادله عبارتند از:

$$y=\frac{\beta\pm\sqrt{\beta^2+R^2-\alpha^2-\beta^2-k^2+2\alpha k}}{1}$$

یا

$$y=\beta\pm\sqrt{R^2-\alpha^2-k^2+2\alpha k}$$

پس اولاً، لازم است (شکل ۴)

$$(4.2)\quad y_1=\beta-\sqrt{R^2-\alpha^2-k^2+2\alpha k}\leqslant y\leqslant\beta+\sqrt{R^2-\alpha^2-k^2+2\alpha k}=y_2$$

وثانیاً k طوری باشد که این ریشه‌ها موجود باشند یعنی

$$R^2-\alpha^2-k^2+2\alpha k\geqslant 0$$

یا

$R^2-(k-\alpha)^2\geqslant 0$ یا $|k-\alpha|\leqslant R$ ویا

$$(4.3)\quad \alpha-R\leqslant k\leqslant\alpha+R$$

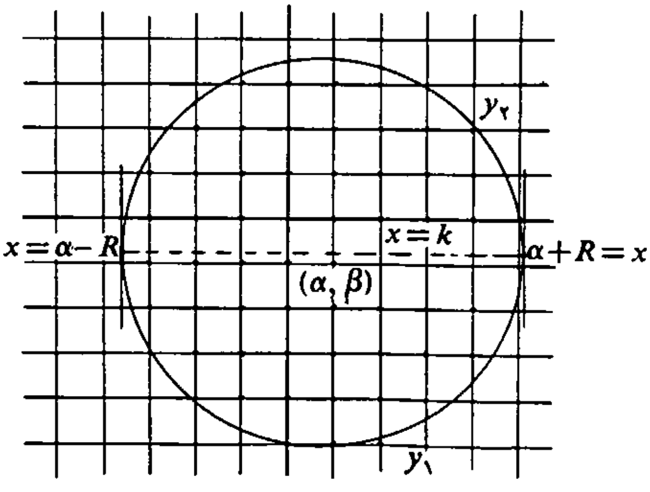
واضح است‌که تعداد نقاط صحیحی مانند y که درنامساویهای $y_1\leqslant y\leqslant y_2$ صدق کند عبارتست از تعـداد نقاط صحیحی که درنامساویهای $-[-y_1]\leqslant y\leqslant[y_2]$ صـدق می‌کننـد چرا؟ (کروشه به‌معنی جزء صحیح است.) وتعداد این y ها عبارتند از

$$[y_2]+[-y_1]+1$$

بنابراین، تعداد نقاط بـا مختصات صحیـح واقع در درون و روی دایره، N، عبارتست از:

$$(4.3)\quad N=\sum_{\substack{\alpha-R\leqslant k\leqslant\alpha+R\\ k\in Z}}\left([\beta+\sqrt{R^2-\alpha^2-k^2+2\alpha h}]+[-\beta+\sqrt{R^2-\alpha^2-k^2+2\alpha h}]+1\right)$$

می‌توانید حالت خـاص $(\alpha,\beta)=(0,0)$ را در دستـور



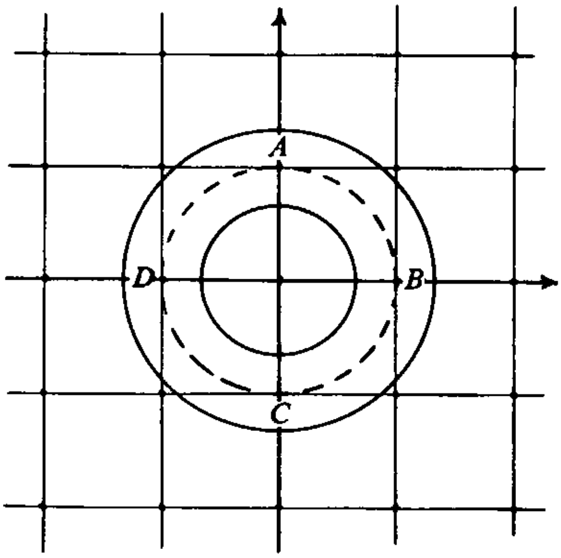
(شکل ۴)

(۴.۳) بررسی کنید و دستور (۳.۱) را استخراج کنید.

۵) حال می‌توان به مسئله ازنقطه‌نظر دیگـری نگاه کرد. فرض کنیم یك مشبکه دراختیار داشته باشیـم و n عددی طبیعـی باشد، آیا دایره‌ای وجود داردکه درون‌آن n نقطه ازنقاط مشبکه وجود داشته باشد (به مأخذ ۲ رجوع کنید.)

اگر بخواهیم ازمبحث قبلی استفاده کنیم در واقع باید α، β، و Rی را بیابیم کـه N در دستور (۴.۳) برابر عدد طبیعـی n گردد. جهت سهولت می‌توان سئوال را به طریق دیگری مطرح کرد، α و βی ثابتی (مستقـل از n) و R_nی بیابید به قسمی که دایره‌ی $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R_n^2$ دارای n نقطـه از نقاط شبکه باشد. بحث روی این مسئله را به‌طریق زیرانجام می‌دهیم.

ابتدا فرض میکنیم (α,β) منطبق بریکی ازنقاط مشبکه باشد $(\alpha,\beta\in Z)$. بدون اینکه خللی به‌کلیت وارد آید می‌توان فرض کرد که این نقطه همان مبـدأ مختصـات باشد. در اینحالت اگر $R<1$ درون دایره‌ی به مرکز $(0,0)$ وشعاع R تنها یك نقطه از نقاط مشبکه قرارمیگیردکه همان مرکز دایره یا مبدأ مختصات است. اما اگر $R>1$ درون دایـره حداقل پنـج نقطـه از نقاط مشبکه قرار دارد یکی درمرکز وچهارنقطـه‌ی دیگر نقاط A، B، C، و D (شکـل ۵). بالاخـره، اگر $R=1$ یک نقطـه درون دایره وچهارنقطه روی دایره قرار میگیرند (شکل ۵). بنابراین، مثلاً دایره‌ای به این مرکز نمی‌توان یافت که دارای ۲، ۳، یا ۴ نقطه درون یـا درون و روی‌آن قـرار داشتـه باشد. پس دراین صورت جواب مسئله منفی است.

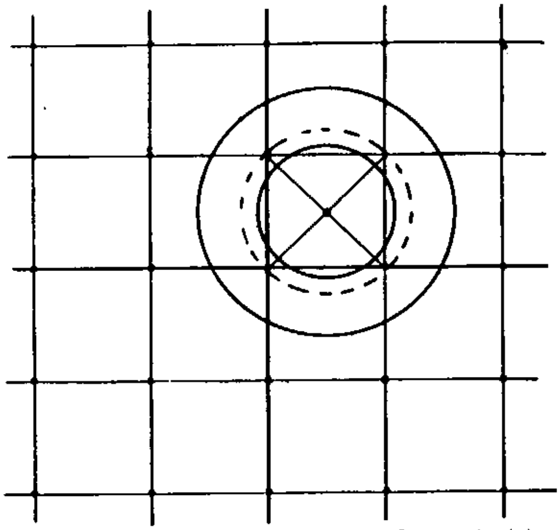


شکل ۵

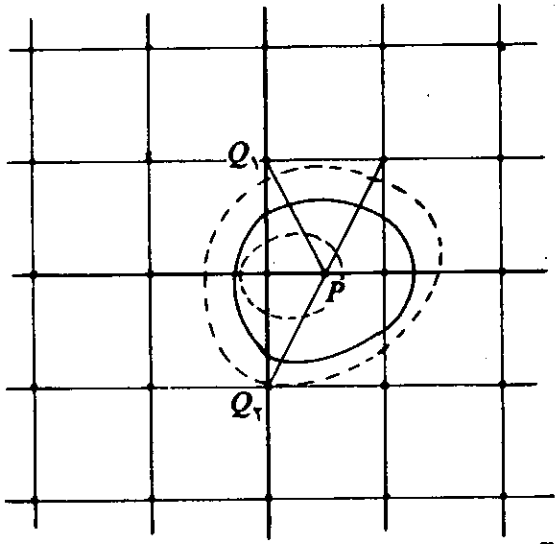
۱.۵ نتیجه. اگر $\alpha,\beta\in Z$ دایره‌ای به‌مرکز (α,β) وجود ندارد که درون‌آن ۲، ۳، یا ۴ نقطه ازنقاط مشبکه قرار داشته باشد.

تحقیق مشابهی نشان می‌دهد که (α,β) نمی‌تواند مرکزیکی ازخانه‌های مشبکه یا روی‌خطوط مشبکه باشد (شکل ۶).

حال اگر به‌ازای هرعدد طبیعـی n، چنین دایره‌ای موجـود



(ب) دایره‌ای که شامل ۳ نقطه باشد وجود ندارد.



(آ) دایره‌ای که شامل ۱، ۲، ۳، نقطه باشد وجود ندارد.

شکل ۶

باشد مرکز دایره $P(\alpha, \beta)$ باید طوری باشد که فاصله‌ی نقاط متمایزمشبکه از نقطه‌ی P اعداد متمایز باشند.

زیرا اگرمثلاً Q_2 و Q_1 دونقطه از نقاط مشبکه باشند به‌قسمی‌که $PQ_1 = PQ_2$ (شکل ۶ (ب)) دراین صورت اگر دایره‌ای به مرکز P و به شعاع $R<PQ_1$ دارای m نقطه ازنقاط مشبکه باشد دایره‌ای به شعاع PQ_1 دارای حداقل $m+2$ نقطه است. بنابراین دایره‌ای شامل $m+1$ نقطه وجود ندارد. درنتیجه،

شرط لازم وکافی برای وجود چنین دایره‌ای آنست که فواصل نقاط متمایز شبکه ازمرکز دایره متمایز باشند.

حال فرض کنیم $P(\alpha, \beta)$ مرکز دایره باشد و Q_1 و Q_2 دو نقطه‌ی دلخواه از نقاط مشبکه و

$Q_1(x_1, y_1)$, $Q_2(x_2, y_2)$ (x_1، x_2، y_1، و y_2 اعداد صحیح‌اند) باشند و $PQ_1 = PQ_2$ (حال شرطی‌را میجوئیم که Q_1 بر Q_2 منطبق باشد). می‌دانیم که

$$PQ_1^2 = (x_1-\alpha)^2 + (y_1-\beta)^2,$$
$$PQ_2^2 = (x_2-\alpha)^2 + (y_2-\beta)^2$$

بنابراین

$$(x_1-\alpha)^2 + (y_1-\beta)^2 = (x_2-\alpha)^2 + (y_2-\beta)^2$$

یا

$$x_1^2+y_1^2-2\alpha x_1-2\beta y_1+\alpha^2+\beta^2 =$$
$$x_2^2+y_2^2-2\alpha x_2-2\beta y_2+\alpha^2\ \beta^2$$
$$(1)\quad x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2-2\alpha(x_1-x_2)+ 2\beta(y_1-y_2)=0$$

چون x_1، x_2، y_1، و y_2 اعداد صحیحند اگر یکی از α, β مثلاً α عددی‌اصم باشد (مثلاً $\alpha=\sqrt{2}$) β, عددی منطق ازمعادله‌ی (۱) معلوم می‌شود که $x_1-x_2=0$ زیرا درغیر این صورت α به‌صورت کسری ازاعداد منطق و در نتیجه منطق خواهد بود.
بنابراین از $x_1-x_2=0$ داریم

$$y_1^2-y_2^2+2\beta(y_1-y_2)=0$$

یا

$$(y_1-y_2)(y_1+y_2+2\beta)=0$$

حال اگر $\beta=1/3$ (به‌عنوان مثال) $y_1+y_2+2\beta\neq 0$ زیرا $y_1+y_2+2\beta\notin Z$، آنگاه $y_1-y_2=0$ یا $y_1=y_2$ و بنابراین Q_1 بر Q_2 منطبق است. پس،

۲.۵ نتیجه. اگر $\alpha=\sqrt{2}$ و $\beta=1/3$ و $P(\sqrt{2}, 1/3)$ آنگاه به‌ازای هردو نقطه‌ی متمایز از نقاط مشبکه مانند Q_1 و Q_2 داریم $PQ_1\neq PQ_2$.

(همانگونه که دیده شد α, β منحصر به‌فرد نیستند.)

حال اگر نقاط Q_1 و Q_2، ... از نقاط مشبکه طوری مرتب شوند که

$$PQ_1<PQ_2<PQ_3<\cdots$$

درآن صورت هر دایره به شعاع $PQ_n<R_n<PQ_{n+1}$ دارای دقیقاً n نقطه ازنقاط مشبکه است.

(ادامه دارد)

مراجع

۱ـ غلامحسین مصاحب، تئوری مقدماتی اعداد، جلد دوم، انتشارات سروش ۱۳۵۸

2– W. Sierpinski. A Selection of Problems in the Theory of Numbers. Perzamon Press 1964.

اولین دورهٔ المپیاد کامپیوتر و انفورماتیك
آزمون مرحلهٔ اول

توجه: حل این مسائل درشمارهٔ قبل آمده است.

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده‌کردن روح جستجو و کشف‌واقعیتها وحقیقتهاست.
«امام خمینی قدس سره‌الشریف»

درمسائل زیر، الگوریتم‌های خواسته شده در هر قسمت را می‌توانید با هریك از روشهای گام‌به‌گام، نمودارگردشی یا زبان‌برنامه‌نویسی (بیسیك یا پاسکال) بیان‌کنید. از نظر ارزشیابی هیچیك بر دیگری مزیتی ندارد و فقط درستی یا نادرستی راه‌حل مدنظر قرار می‌گیرد.

مسئلهٔ ۱:

الف. الگوریتمی بنویسیدکه عددطبیعی N را از ورودی بگیرد وتعداد زیر مجموعه‌های ۴ عضوی یك مجموعهٔ N عضوی را پیداکرده، درمتغیر K ذخیره نماید.

ب. الگوریتمی بنویسیدکه اعداد طبیعی M و N را از ورودی بگیرد و تعداد زیر مجموعه‌های M عضوی یك مجموعهٔ N عضوی را پیداکرده، درمتغیر L ذخیره نماید.

ج. الگوریتمی بنویسید که عدد طبیعی N را از ورودی بگیرد و زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعه $(1, 2, \dots, N)$ راتولید کرده، دریك ماتریس $K \times 4$ ذخیره نماید. K تعداد این زیرمجموعه‌هاست‌که ازقسمت «الف» به‌دست می‌آید.

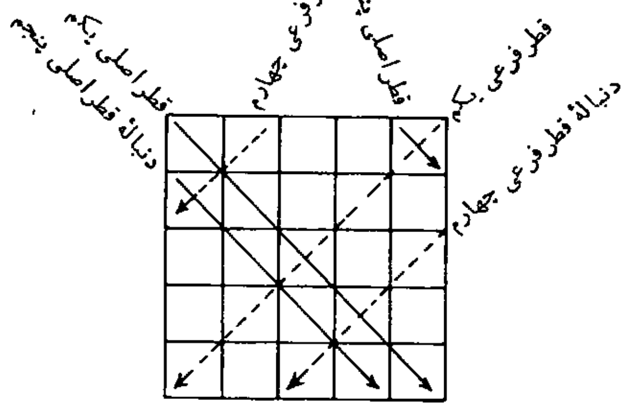
د. الگوریتمی بنویسیدکه اعدادطبیعی M و N را ازورودی بگیرد و زیرمجموعه‌های M عضوی مجموعهٔ $\{1, 2, \dots, N\}$ را تولیدکرده، در یك ماترین $L \times M$ ذخیره نماید. L تعداد این زیرمجموعه‌هاست‌که ازقسمت «ب» به‌دست می‌آید.

مسئلهٔ ۲: فرض‌کنید A و B ماتریس‌های $N \times N$ ی هستند که درهر درایهٔ آنها یك عدد صحیح قرارداده شده است.

الف. مجموعهٔ $S = \{1, 2, \dots, N\}$ مفروض است. الگوریتمی بنویسیدکه ماتریس $N \times N$، D را درنظر بگیرد و برای‌درایهٔ ماتریس A درصورتی‌که‌آن درایه متعلق به‌مجموعهٔ S باشد درایهٔ متناظر را در ماتریس D مساوی یك و در غیر این صورت مساوی صفر قرار دهد.

ب. الگوریتمی بنویسیدکه دو بردار Nتایی IQ و JQ را در نظر بگیرد و درصورتی کـه در سطر i ام ماتریس A عضو تکراری وجود داشته باشد مؤلفهٔ iام بردار IQ را مساوی یك و درغیراین‌صورت مساوی صفر قرار دهد. مشابهاً چنانچه در ستون j ام ماتریس A عضو تکراری وجود داشته باشد مؤلفهٔ j ام بردار JQ را مساوی یك و درغیراین‌صورت مساوی‌صفر قرار دهد.

ج. الگوریتمی بنویسیدکـه حاصل‌ضرب قطـری $A * B$ را به‌دست‌آورده، دریك‌ماتریس $N \times N$ دیگر، C، قراردهد. ضرب قطری دو ماتریس، $A * B$، شبیه ضرب معمولی آن دو می‌باشد. بااین تفاوت‌که به‌جای ضرب‌شدن سطر i ام ماتریس اول در ستون j ام ماتریس دوم، قطر اصلی i ام ماتریس اول در قطـر فرعی j ام مـاتریس دوم ضرب می‌شود. بـرای مثال قطرهای اصلی‌وفرعی یك ماتریس ۵ × ۵ درشکل زیرنشان داده شده است:



د. با استفاده از الگوریتم‌های فوق، الگوریتمی بنویسید کـه درصورتی‌که اعضای دو مـاتریس A و B متعلق به‌مجموعهٔ S باشند و درهیچ سطر و ستون‌آنها عدد تکراری وجود نداشته باشد، حاصل‌ضرب قطری $A * B$ را محاسبه نماید.

مسایل ویژه دانش‌آموزان

تهیه و تنظیم از: ابراهیم دارابی

۱ـ کوچکترین عدد طبیعی پیداکنید‌که بر ۱۱ بخشپذیر باشد و مجموع ارقام‌آن ۱۳ شود.

راهنمایی:

جواب ۳۱۹. ثابت کنید این عدد نمی‌تواند دو رقمی باشد. با نمایش عدد به‌صورت $\overline{xyz}$ واستفاده ازشرایط مسئله جواب را پیدا کنید.

۲ـ مستطیلی راکه‌مساحت آن $۱۰۰\ cm^۲$ است به ۹مستطیل افرازمی‌کنیم (مطابق شکل) مساحت چهار تا ازاین مستطیل‌ها برای ما معلوم است.

$A=۴cm^۲$ ،$B=۱۴cm^۲$ ،$C=۳cm^۲$ ،$D=۶cm^۲$

مساحت مستطیل E را پیداکنید.

		C
E	A	D
	B	

جواب $۱۰cm^۲$

X	x	۱/۸ x	
		C	۰/۵y
E	A	D	y
	B		۳/۵y

راهنمایی: روی شکل نسبت طول‌های اضلاع مستطیل‌های‌حاصل نشان داده شده است که با نسبت مساحت‌های مستطیل‌های نظیر برابرمی‌باشد. بنابراین $xy=۴$ و

$$(X+x+۱/۵x)(۰/۵y+y+۳/۵y)=۱۰۰$$

۳ـ اگر a و b و c اعداد نامنفی باشند ثابت‌کنید

$$\frac{۱+a}{۱+b}+\frac{۱+b}{۱+c}+\frac{۱+c}{۱+a}\leqslant ۳+a^۲+b^۲+c^۲$$

راهنمایی: کسرها را تفکیک‌کنید ونتیجه بگیرید:

$$\left(\frac{۱}{۱+b}+\frac{۱}{۱+c}+\frac{۱}{۱+a}\right)+$$

$$\left(\frac{a}{۱+b}+\frac{b}{۱+c}+\frac{c}{۱+c}\right)\leqslant$$

$$\left(\frac{۱+b^۳}{۱+b}+\frac{۱+c^۳}{۱+c}+\frac{۱+a^۳}{۱+a}\right)+(a+b+c)$$

۴ـ ثابت‌کنید ازدومعادله زیرلااقل‌یکی‌از آنها ریشه‌های حقیقی دارد.

$$۱۹ax^۲+ax+۹۱b=۰\quad,\quad abx^۲-bx-۹۱=۰$$

راهنمایی: ثابت‌کنید مجموع مبین‌های دومعادله نامنفی است.

۵ـ ثابت کنید به‌ازای هر سه عدد حقیقی x و y و z نامساوی زیر برقراراست.

$$\sin x\cos y\sin z+\cos x\sin y\cos z\leqslant ۱$$

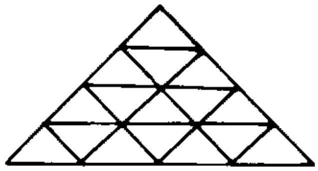
راهنمایی: $\sin x\cos y\sin z+\cos x\sin y\cos z\leqslant$

$$\leqslant \max(\pm\sin x\sin y\pm\cos x\cos y)$$

که در آن ترکیب همه علائم امکان‌پذیر است. از آنجا نتیجه لازم را بگیرید.

۶ـ ثابت کنید مثلثی وجود دارد که بتوان آنرا به ۱۹۸۹ مثلث مساوی افراز کرد.

راهنمایی: مثلث قائم‌الزاویه‌ای درنظر بگیرید که دوضلع مجاور قائمه‌آن ۳۰ و ۳۳ سانتیمتر باشد. ارتفاع وارد بر وتر، مثلث را به‌دومثلث متشابه با مثلث اصلی تقسیم می‌کند. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی هریک از این مثلث‌ها را می‌توان به n^2 مثلث متشابه با مثلث اصلی افراز کرد. مثلاً به‌ازای $n=4$ شکل زیر را داریم.



ازآنجا نتیجه بگیرید $30^2+33^2=1989$

۷ـ روی ضلع ABC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC نقطه E را اختیارمی‌کنیم. از E به C وصل کرده و CE را قاعده مثلث‌متساوی‌الاضلاع دیگری‌درنظرمی‌گیریم که رأس‌دیگر آن‌در همان طرفی باشدکه رأس B قرار دارد. ثابت‌کنید

$$BK\parallel AC$$

راهنمایی: ثابت‌کنید مثلث‌های ACE و BCK برابرندوازآنجا

$$\widehat{CBK}=\widehat{ACB}=60$$

۸ـ مثلث قائم‌الزاویه ABC به‌مساحت ۱ داده‌شده‌است. قرینه‌های رئوس مثلث را نسبت به اضلاع روبرو پیدا می‌کنیم وآنها را A' و B' و C' می‌نامیم. مساحت $A'B'C'$ را پیدا کنید.

جواب ۳.

۹ـ به‌ازای بعضی‌مقادیرمثبت‌اعداد a و b، xای است‌که

$$\frac{\sin^4x}{a}+\frac{\cos^4x}{b}=\frac{1}{a+b}$$

ثابت‌کنید به‌ازای هرمقدارطبیعی n تساوی زیر برقرار است

$$\frac{\sin^{2n}x}{a^{n-1}}+\frac{\cos^{2n}x}{b^{n-1}}=\frac{1}{(a+b)^{n-1}}$$

راهنمایی: تساوی را به‌صورت زیرمی‌نویسیم

$$\frac{\sin^4x}{a}+\frac{\cos^4x}{b}=\frac{(\sin^2x+\cos^2x)^2}{a+b}\Longleftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}\right)\sin^4x-\frac{2\sin^2x\cos^2x}{a+b}+$$

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}\right)\cos^4x=0\Longleftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\sin^2x-\sqrt{\frac{a}{b}}\cos^2x\right)=0$$

پس

$$\frac{\sin^2x}{a}=\frac{\cos^2x}{b}$$

یا $\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{\sin^4x}{a}+\dfrac{\cos^4x}{b}=\dfrac{\sin^2x}{a}\times$

$$(\sin^2x+\cos^2x)=\frac{\sin^2x}{a}$$

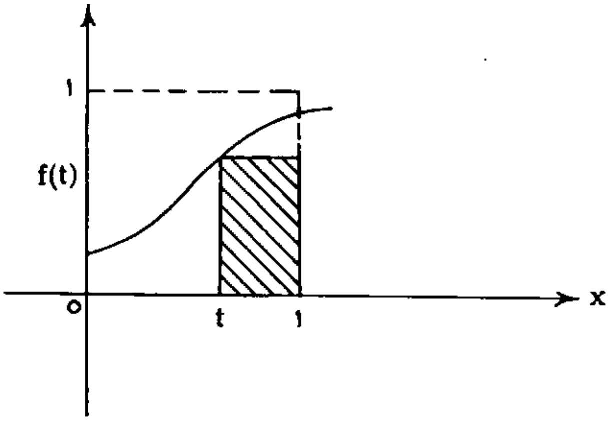
به‌این ترتیب $\dfrac{\sin^2x}{a}=\dfrac{\cos^2x}{b}=\dfrac{1}{a+b}$

۱۰ـ دو تابع پیوسته $f, g: [0,1]\to[0,1]$ داده شده‌اند. می‌دانیم f صعودی است. ثابت کنید

$$\int_0^1 f(g(x))\,dx\leqslant\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 g(x)\,dx$$

راهنمایی: به‌ازای هر $t\in[0,1]$ مساحت مستطیل زیرشکل از مساحت سطح زیرتابع f تجاوزنمی‌کند یعنی

$$\int_0^1 f(x)\,dx\geqslant(1-t)f(t)$$



چون $f(1)\geqslant 1$ پس

$$(1-t)f(t)\geqslant f(t)-t$$

یا

$$\int_0^1 f(x)\,dx\geqslant f(t)-t$$

با قرار دادن $g(x)$ به‌جای t و انتگرال‌گیری ازنامساوی بالا برروی بازه $[0,1]$ نتیجه لازم را بگیرید.

۱۱- روی میز گردی به‌شعاع R، n سکه به‌شعاع γ قرار داده‌ایم، به‌قسمی که سکه دیگری برروی آنها جا نمی‌گیرد. ثابت کنید

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R}{\gamma}-1\right)<\sqrt{n}<\frac{R}{\gamma}$$

(فرستندگان: عباس گلمکانی- حمیدرضا غفاریان ازمشهد)

راهنمایی: $n\pi\gamma^2<\pi R^2$ و $ns_1<s$ که در آن S و S_1 به‌ترتیب مساحت روی میز و سطح سکه می‌باشد. اگر شعاع دایره‌های کوچك را دوبرابر کنیم تمام سطح دایره بزرگ را می‌پوشانند (چند تا ازسکه رویهم قرارمی‌گیرند) زیرا درغیر این صورت سکه دیگری روی میز جا می‌گیرد. ازآنجا نامساوی دیگری را نتیجه بگیرید.

$$-2(\text{sin gn}\,(x^2-1))$$

۱۲- نمودار $f(x)=x$ را رسم کنید.

$$f:R\rightarrow R$$

(فرستنده: بهرام پرویزی دانش‌آموز ازتبریز)

راهنمایی:

$$x<-1 \text{ یا } x>1 \Longrightarrow \text{sin gn}\,(x^2-1)=1 \Longrightarrow$$

$$f(x)=\frac{1}{x^2}$$

درفواصل لازم دیگرهم $f(x)$ را تعیین کنید.

۱۳- نامعادله $\log^2_{\frac{1}{2}}x\geq 36$ را حل کنید.

(فرستنده: احمدکریمی، دانش‌آموز ازتهران)

راهنمایی $\Longleftrightarrow \begin{cases}\log_{1/2}x>6\\ \log_{1/2}x<-6\end{cases} \Longleftrightarrow |\log_{\frac{1}{2}}x|>6$

$$x\in]x>\frac{1}{64}[\cup]64,+\infty[$$

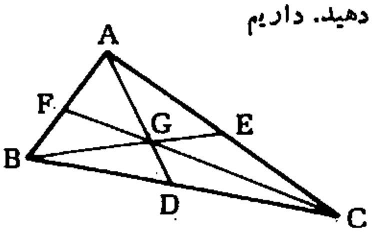
۱۴- اگر G محل تلاقی میانه‌های مثلث باشد، ثابت کنید

$$\text{cotg}\,\widehat{AGF}+\text{cotg}\,\widehat{BGD}+\text{cotg}\,CGE=\text{cotg}\,A$$
$$\text{cotg}\,B\,\text{cotg}\,C$$

که درآن AD و BE و CF میانه‌های مثلث هستند.

(فرستنده: عباس نجاتی، دانش‌آموز، از مرند.)

راهنمایی: اگر m_a و m_b و m_c میانه‌های نظیر اضلاع مثلث باشند، زوایای سمت چپ در صورت مسئله را به‌ترتیب با α و γ و β نشان دهید. داریم



$$\frac{C^2}{4}=\frac{4}{9}m_a^2+\frac{1}{9}m_c^2-\frac{4}{9}m_a m_c\cos\alpha$$

$$\Longrightarrow 64m_a^2m_c^2\cos^2\alpha=(5b^2-c^2-a^2)^2\Longrightarrow$$

$$\text{cotg}^2\alpha=\frac{(5b^2-c^2-a^2)^2}{144\,S}$$

به‌همین ترتیب روابط دیگری هم می‌توانید بنویسید.

۱۵- درمثلث ABC طول اضلاع نظیر زوایای A و B و C را با a و b و c نشان‌می‌دهیم. پای ارتفاعات رابهم وصل می‌کنیم تا مثلث جدیدی بدست آید. ثابت‌کنید محیط این مثلث برابراست با $\frac{8S^2}{abc}$، که درآن S مساحت مثلث اولیه است.

راهنمایی: می‌دانیم $R=\frac{abc}{4S}$ ثابت‌کنید مثلث‌های MNC و ABC متشابه‌اند. ازآنجا نتیجه بگیرید

$$\frac{MN}{R_1}=\frac{C}{R}\Longrightarrow MN=CR_1:R\Longrightarrow R_1=\frac{OC}{2}$$

R_1 شعاع دایره محیطی مثلث متشابه است.

$$MN=\frac{S-S_1}{R}$$

به‌همین ترتیب NP و PM را محاسبه‌کنید.

(O محل برخورد ارتفاعات مثلث، S_1 مساحت مثلث ABO است.)

جستجوی ریشه‌های گویای چندجمله‌ایها

حمیدرضا فنالی- دانشجوی رشته ریاضی

این موضوع شناخته شده است که اگر چندجمله‌ای:

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0 \qquad (*)$$

با ضرایب صحیح ریشهٔ گویایی مانند $\frac{p}{q}$ داشته باشد که $(p,q)=1$ آنگاه، $q|a_n$ ، $p|a_0$.

نتیجهٔ جالب وساده‌ای درقضیهٔ زیر بیان شده است:

قضیه: اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای با درجهٔ حداقل ۲ باشد که در (*) عنوان شد و a_0 و a_n و $f(1)$ همگی فرد باشند، آنگاه $f(x)$ ریشهٔ گویا ندارد.

برهان. روش برهان خلف را پیش می‌گیریم. فرض کنید

$$(p,q)=1,\ f\left(\frac{p}{q}\right)=0$$

چون $p|a_0$ و $q|a_n$ و a_0 و a_n فردند درنتیجه p و q نیزفرد هستند. درنتیجه برای هردوعدد صحیح نامنفی k و j داریم:

$$(1)\quad p^kq^j-1\equiv 0 \ (\text{پیمانه } 2)$$

$$(2)\quad f(1)-q^nf(p/q)=f(1)\equiv 1 \ (\text{پیمانهٔ } 2)$$

پس:

$$(3)\quad f(1)-q^nf(p/q)=a_n(1-p^n)+\cdots+a_0(1-q^n)\equiv 0 \ (\text{پیمانهٔ } 2)$$

روابط (۲) و (۳) تناقض را نشان می‌دهند.

توجه کنید فرض اینکه درجهٔ $f(x)$ حداقل ۲ باشد لازم است زیرا اگر $f(x)=a_1x+a_0$ و a_0 و a_1 فرد باشند، آنگاه $f(1)=a_1+a_0$ همواره زوج است.

مثال: چندجمله‌ای

$$x^5+7x^4-28x^3+125x^2+x-3275$$

ریشهٔ گویا ندارد. زیرا، $f(1)=-3169$ و a_0، a_n فرد هستند.

اکنون مطلب قبل را می‌توان کمی تعمیم داد. فرض کنید $f(x)$ همان (*) است و a_0 و a_n فرد هستند.

فرض کنید $f\left(\frac{p}{q}\right)=0$ که $(p,q)=1$. می‌دانیم دراین صورت حتماً $f(1)$ زوج است. قرار دهید:

$$f(x)=\left(x-\frac{p}{q}\right)g(x)$$

که درآن $g(x)$ چندجمله‌ای با ضرائب گویا با درجهٔ $n-1$ است. اگر $g(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$ به راحتی به‌دست می‌آید:

$$b_{n-1}=a_n$$

$$b_{n-2}=\frac{p}{q}a_n+a_{n-1}$$

$$b_{n-3}=\frac{p^2}{q^2}a_n+\frac{p}{q}a_{n-1}+a_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$b_1=\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}}a_n+\frac{p^{n-3}}{q^{n-3}}a_{n-1}+\cdots+\frac{p}{q}a_3+a_2$$

$$b_0=\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}a_n+\cdots+\frac{p}{q}a_2+a_1=-\frac{q}{p}a_0$$

درنتیجه چندجمله‌ای $q^{n-1}\cdot g(x)$ با ضرائب صحیح است و:

$$q^{n-1}\cdot g(x)=(q^{n-1}\cdot a_n)x^{n-1}+\cdots+\left(-\frac{q^n}{p}a_0\right)$$

و می‌دانیم که $q^{n-1}\cdot a_n$ ، $-\frac{q^n}{p}a_0$ هردو فرد هستند. یعنی $q^{n-1}\cdot g(x)$ همان خاصیت $f(x)$ را دارد. حال

$$q^n\cdot f(x)=(qx-p)\cdot(q^{n-1}\cdot g(x))$$

پس،

$$q^n\cdot f(1)=(q-p)\cdot q^{n-1}g(1)$$

پس،

$$(4)\quad q^nf(1)=(q-p)\,g_0(1)$$

که $g_0(x)=q^{n-1}\cdot g(x)$. اگر: $f(1)=2\times(\text{عددی فرد})$ آنگاه چون $q-p$ زوج است، از (۴) نتیجه می‌شود که $g_0(1)$

فرداست. درنتیجه $g_0(x)$ همهٔ شرایط قضیهٔ قبل را خواهدداشت ولذا $g_0(x)$ نمی‌تواند ریشهٔ گویا داشته باشد. درنتیجه $g(x)$ نمی‌تواند ریشهٔ گویا داشته باشد و بنابراین $f(x)$ فقط همان یك ریشهٔ گویای $\frac{p}{q}$ را داراست. پس نتیجهٔ بعدی را ثابت کرده‌ایم:

نتیجه ۱. اگر $f(x)$ همانند (*) و a_0 و a_n فرد و $f(1)$ زوج باشد و $4 \nmid f(1)$، آنگاه $f(x)$ حداکثر یك ریشهٔ گویا دارد.

اکنون نتیجهٔ بالا را می‌توان به شیوه‌ای سرراست به‌شرح زیر تعمیم داد:

نتیجه ۲. اگر $f(x)$ همان (*) و a_n, a_0 فرد و $f(1)$ زوج باشد و $2^k \nmid f(1)$، $(k \geqslant 2)$ آنگاه $f(x)$ حداکثر $k-1$ ریشهٔ گویا دارد.

قضیه. $f(x)$ را مانند (*) می‌گیریم که ضرائب آن صحیح‌هستند. اگر a عددی صحیح باشدکه $f(a) \neq 0$، و $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ که $(p, q) = 1$، آنگاه: $(p-aq) | f(a)$.

برهان. چندجمله‌ای $g(x)$ با ضرائب صحیح وجود داردکه:

$$f(x)-f(a)=(x-a)\,g(x),$$

پس

$$\left(\frac{p}{q}-a\right) g\left(\frac{p}{q}\right)=f\left(\frac{p}{q}\right)-f(a)=-f(a)$$

درجه g برابر $n-1$ است و لذا $q^{n-1} \cdot g(p/q)$ عددی صحیح است. چون p و q نسبت به‌هم اولند پس $q, p-aq$ نیز نسبت به‌هم اولند ولذا چون:

$$q^{n-1}(p-aq)\,g\left(\frac{q}{p}\right)=-q^{n} \cdot f(a)$$

و $p-aq$ طرف چپ تساوی را عاد می‌کند باید طرف راست را نیز عاد کندوچون $(p-aq, q)=1$، پس:

$$(p-aq)|f(a)$$

توضیح. توجه‌کنید اگر $f(a)=0$ حکم واضح بود. اگر $a=0$ آنگاه: $p-aq=p|a_0=f(0)=f(a)$ یعنی کافی است a را ناصفر بگیریم.

محاسبهٔ تقریبی

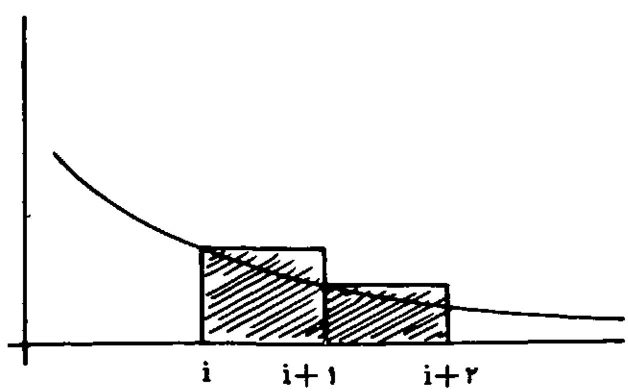
دکتر اسماعیل بابلیان عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت معلم

فرض‌کنید تابع f بر $[1, \infty)$ تعریف شده باشد و بر این بازه مثبت و نزولی باشد و به‌ازای هرعدد طبیعی M،

$$\int_{M}^{\infty} f(x)dx$$

موجودباشد. هدف‌تعیین تقریبی از $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ است، که در آن i عددی‌طبیعی‌است و $f_i=f(i)$، باخطای مطلق‌کمتر از ε (ε عدد کوچك مفروضی است.) برای این منظور گوئیم اگر $i \leqslant x \leqslant i+1$ آنگاه

$$f_i \geqslant f(x)$$



شکل ۱

باتوجه به‌شکل (۱) داریم:

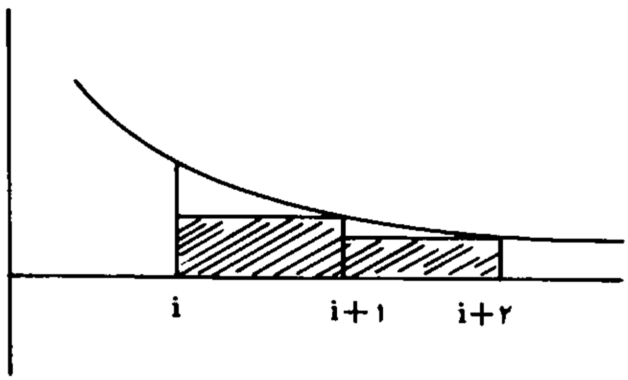
$$f_i \times 1 = f_i > \int_{i}^{i+1} f(x)dx \qquad (*)$$

بعضی سریهای با جملات مثبت

(مساحت مستطیل هاشور زده شده، که طول یك ضلـع آن f_i و طول ضلع دیگرش واحداست برابر f_i می‌باشد.) حال اگر M عددی طبیعی باشد از(*) نتیجه می‌شود:

$$\sum_{i=M}^{\infty} f_i > \int_M^{\infty} f(x)dx$$

به‌طریقی مشابه، وبا توجه به‌شکل (۲)، داریم:



شکل۲

$$f_{i+1} \times 1 = f_{i+1} < \int_i^{i+1} f(x)dx$$

و درنتیجه،

$$\sum_{i=M+1}^{\infty} f_i < \int_M^{\infty} f(x)dx$$

بنابراین،

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i = \sum_{i=1}^{M} f_i + \sum_{i=M+1}^{\infty} f_i < \sum_{i=1}^{M} f_i + \int_M^{\infty} f(x)dx$$

و

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i = \sum_{i=1}^{M-1} f_i + \sum_{i=M}^{\infty} f_i > \sum_{i=1}^{M-1} f_i + \int_M^{\infty} f(x)dx$$

از دو نامساوی فوق به‌دست می‌آید:

$$\left(\sum_{i=1}^{M-1} f_i + \int_M^{\infty} f(x)dx\right) < \sum_{i=1}^{\infty} f_i < \left(\sum_{i=1}^{M-1} f_i + \int_M^{\infty} f(x)dx\right) + f_M$$

درنتیجه،

$$(**)\quad 0 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} f_i - \left(\sum_{i=1}^{M-1} f_i + \int_M^{\infty} f(x)dx\right) < f_M$$

پس، عبارت داخل پرانتزها تقریبی از $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ باخطای کمتر از f_M است. حال برای اینکه این‌خطا از ε کمتر باشدکافی است قرار دهیم:

$$f_M \leqslant \varepsilon$$

و M را به‌دست‌آوریم. با معلوم بودن M مقدارعبارت داخل پرانتزهای رابطه (**)، به‌شرطی‌که بتوان $\int_M^{\infty} f(x)dx$ را حساب کرد، قابل محاسبه است. برای محاسبهٔ $\sum_{i=1}^{M-1} f_i$، وقتی M عدد بزرگی است، به‌ملاحظات مندرج در [۱] توجه کنید.

مثالهای عددی

۱ـ مقدار $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}$ را با خطای کمتر از 10^{-2} حساب کنید.

حل. ابتدا M را چنان پیدا می‌کنیم که

$$\frac{1}{M^2}\leqslant 10^{-2}$$

که از آن $M=10$ به‌دست می‌آید. بعد چنین ادامه می‌دهیم

$$\int_{10}^{\infty}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{10}^{\infty}=0/1$$

بنابراین،

$$\sum_{i=1}^{9}\frac{1}{i^2}+0/1=1/64\ (2D)$$

تقریب مطلوب است (مقدار واقعی $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}$ برابر است با $\frac{\pi^2}{6}\simeq 1/6454$).

۲ـ تقریبی از $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{1+i^4}$ را با خطای کمتر از 10^{-2} حساب کنید.

حل. قرار می‌دهیم

$$\frac{M}{1+M^4}\leqslant 10^{-2}$$

با توجه به‌اینکه

$$\frac{M}{1+M^4}\leqslant\frac{1}{M^3}$$

کافی است M را چنان پیداکنیم که $\frac{1}{M^3}\leqslant 10^{-2}$. که از آن $M=5$ حاصل می‌شود. سپس باید انتگرال زیر را حساب کنیم:

$$\int_{5}^{\infty}\frac{x}{1+x^4}dx$$

با قرار دادن $x^2=U$ داریم $2xdx=du$ و از اینجا

$$\int\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} u$$

بنابراین،

$$\int_{5}^{\infty}\frac{x}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x^2\Big|_{5}^{\infty}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}25$$

$$\simeq 0/786-0/766$$

$$=0/02$$

پس تقریب مطلوب عبارت است از

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{i}{1+i^4}+\int_{5}^{\infty}\frac{x}{1+x^4}dx\simeq 0/671+0/02=0/691$$

تمرین ـ تقریبی از هریك از سریهای زیر را با خطای کمتر از 10^{-3} حساب کنید و با مقدار واقعی آنها (که می‌توانید بدست آورید) مقایسه نمائید.

(آ) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)}$

(ب) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)^2}$

(ج) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+2)}$

مراجع

۱ـ درسهایی از آنالیز عددی[۳]، تولید وانتشارخطا، اسماعیل بابلیان، رشد آموزش ریاضی، شمارهٔ ۲۷، پاییز ۶۹.

2_ Froberg, Carl_Erik, Numerical Mathematics, Theory and computer Application, 1985, Benjamin/Cummings Publishing Company,Inc.

تعمیم مسأله‌ای

از مسابقات ریاضی دانش‌آموزی کشور

علی‌محمد کارپرور، دانشجوی ریاضی محض، دانشگاه شیراز

درمجله رشدآموزش ریاضی، شماره مسلسل ۲۱، بهار ۱۳۶۸، درسومین مسئله از مسائل مرحله نهایی ششمین دورهٔ مسابقات ریاضی دانش‌آموزی کشور، پس از ارائه راه‌حل، جمله‌ای آورده شده است، که صورت مسأله، وآن جمله چنین است:

۳ـ ثابت کنید که تابع همانی تنها تابع پوشایی‌مانند f از N (مجموعه اعداد طبیعی) به N است که درشرط

$$f(f(n)+f(m))=n+m \quad (n,\ m\in N)$$

صدق می‌کند.

درپایان راه‌حل این جمله آورده شده است (... اگر شرط پوشا بودن f را حذف کنیم این مسأله بسیارمشکل خواهد شد)

ذیلاً، برای مسأله مذکور راه‌حلی‌که نیازی به‌پوشابودن تابع f نیست ارائه می‌شود.

حل. ابتدا ثابت می‌کنیم که تابع f یك به‌یك است.

فرض‌کنیدکه m و n دوعدد طبیعی باشندکه

$f(n)=f(m)$.

با توجه به‌فرض مسأله

$$n+m=f(f(n)+f(m))=f(f(m)+f(m))=m+m$$

یا $n+m=2m$، بنابراین $n=m$.

حال ثابت می‌کنیم که $f(1)=1$. فرض‌کنید چنین نباشد؛ یعنی،

$$f(1)=n \text{ و } n>1 \ (n\in N)$$

پس می‌توان n را به صورت مجموع دوعدد طبیعی n_1 و n_2 نوشت. بنابرفرض مسأله،

$$f(1)=n=n_1+n_2=f(f(n_1)+f(n_2))$$

چون f یك به‌یك است، پس،

$$f(n_1)+f(n_2)=1$$

اما، $f(n_1)$ و $f(n_2)$، هردو، عدد طبیعی‌اند، بنابراین، مجموع آنها همیشه عددطبیعی بزرگتر از یك خواهد شد واین یك‌تناقض است. این تناقض ثابت می‌کندکه

$$f(1)=1$$

اینك ادعا می‌کنیم که به ازای هرعدد طبیعی n، $f(n)=n$. فرض کنید چنین نباشد. پس عدد طبیعی مانند k هست که $f(k)\neq k$. ازاینجا نتیجه می‌شودکه مجموعه

$$A=\{n|n\in N,\ f(n)\neq n\}$$

یك مجموعه ناتهی ازاعداد طبیعی است وبنابراصل خوشترتیبی ابتدا دارد. فرض کنید که p ابتدای A باشد، بنابراین چون $1\notin A$، پس، $p\geqslant 2$ و

$$f(p)\neq p\ ,\ f(p-1)=p-1$$

بنابرفرض مسأله وتساویهای فوق،

$$f(p)=f((p-1)+1)=f(f(p-1)+f(1))$$
$$=p-1+1=p$$

یا $f(p)=p$ واین یك‌تناقض است. پس $A=\varnothing$ و به‌ازای هر عدد طبیعی n، $n\notin A$؛ یعنی،

$$f(n)=n$$

یعنی f تابع همانی است.

فهرست مواد جبر و مثلثات دبیرستان

تنظیم در شورای برنامه‌ریزی

جبر: یادآوری و تعمیق مطالب جبر دورهٔ راهنمایی

۱.۱ـ یادآوری مجموعه‌های N و Z و Q - کسرهای متعارفی و درصد - استفاده از نسبتهای واحد مثلاً مقیاس - بخش‌پذیری بر اعداد ۲، ۳، ۵، ۶، ۷، ۹ و ۱۱ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک چند عدد - اعمال بر کسرها و استخراج قیمت‌های تخفیف یافته - تبدیل کسرهای متعارفی و اعشاری.

۱.۲ـ استفاده از روشهای آزمون و پیشرفت و استفاده از تخمین وتقریب برای بررسی نتایج

$$\left[۱۴ \approx \frac{۰/۲۵ + ۸۳/۴}{۵/۷} \text{ یا } ۷ \approx ۲۷۹ \div ۳۹ \right]$$

۱.۳ـ مضاعف کردن و نصف کردن و تکنیک‌های مشابه برای محاسبات.

۱.۴ـ عدد اول، مرکب، مربع و مکعب. ریشه دوم، ریشه سوم (مفهوم بدون محاسبه) - مضرب - عامل (اعداد مربعی و مثلثی به‌صورت تمرین و بازی ریاضی ارائه شود).

۱.۵ـ آشنایی با رشته‌های اعداد و ساختن رشته‌های تراجعی با استفاده از داده‌ها ضمن تمرین - استفاده از نمادهای علامتی برای بیان قواعد رشته‌های خطی و درجه دوم و کسرهای ساده:

$$۱,\ ۳,\ ۵,\ \cdots [۲n - ۱]$$

$$۱,\ ۴,\ ۹,\ \cdots [n^۲]$$

$$\frac{۱}{۲},\ \frac{۲}{۳},\ \frac{۳}{۴},\ \cdots \left[\frac{n}{n+۱}\right]$$

۱.۶ـ نقش مثال نقض در بررسی قواعد رشته‌ها و زدن‌حدسیات و احکام غلط.

۲ـ اعداد حقیقی

۲.۱ـ محوراعداد حقیقی و معرفی اعداد گنگ واینکه $\sqrt{۲}$ گویا نیست - معرفی مجموعه اعداد حقیقی به صورت اجتماع اعداد گویا و گنگ.

۲.۲ـ خواص اعمال جمع و ضرب درمجموعه اعداد حقیقی (بسته بودن مجموعهٔ R نسبت به‌جمع وضرب، جابه‌جایی وشرکت‌پذیری - عضو خنثی وعضو قرینه نسبت به اعمال جمع وضرب واینکه $a = (-a) -$ ، ...).

۲.۳ـ محاسبات جبری در R - تمرین و یادآوری نوشتن عبارتهای متناظر عبارتهای کلامی - تعریف چندجمله‌ایهای یک متغیره و چندمتغیره - عبارات جبری گویا و گنگ و اینکه کسر $\frac{x+۵}{x-۲}$ به $x = ۲$ تعریف نشده است - یک‌جمله‌ای - درجه یک جمله‌ای - یک‌جمله‌ایهای متشابه - جمع جبری یک جمله‌ایهای متشابه - چندجمله‌ایها - حاصلضرب یک‌جمله‌ایها درچند جمله‌ایها - درجه یک چندجمله‌ای - مرتب کردن چندجمله‌ایها برحسب قوای متغیر - مجموع چندجمله‌ایها و قرینه یک چندجمله‌ای - چندجمله‌ای صفر - حاصلضرب چندجمله‌ایها.

۲.۴ـ اتحادهای مهم وکاربرد آنها در محاسبه ماگزیموم و می‌نیموم عبارات ومحاسبات عددی مانند:

$$x^۲ - ۴x + ۵ = (x-۲)^۲ + ۱ \Rightarrow$$

$$\min(x^۲ - ۴x + ۵) = ۱$$

۲.۵ـ چندجمله‌ایها (مطالب دیگر) - عامل مشترک - ب. م. م و ک. م. م یک‌جمله‌ایها وچندجمله‌ایها - کسرهای جبری‌گویا و اعمال برآنها - توانهای منفی توان صفر یک عدد مخالف صفر - چندجمله‌ایهای متقارن وهمگن.

۲.۶ـ رادیکالها - قدرمطلق یک عدد و ریشه دوم یک عدد و اینکه $\sqrt{a^۲} = |a|$ ریشه nام یک عدد مانند b عددی است مانند a به‌قسمی که $a^n = b$.

الف- وقتی n زوج باشد برای $b > ۰$ دو ریشه قرینه $\sqrt[n]{b}$ و $-\sqrt[n]{b}$ وبرای $b < ۰$ ریشه nام وجود ندارد،

ب- n فرد است،

$$b > ۰ \Rightarrow \overset{a>۰}{\sqrt[n]{b} = a}\ ,\ \sqrt[۳]{۸} = ۲$$

$a>۰$
$b<۰ \Rightarrow \sqrt[n]{b}=-a\ ,\ \sqrt[۳]{-۲۷}=-۳$

۲.۷ـ اعمال روی رادیکالها ـ توانهای کسری (گویا) ـ گویا کردن مخرج کسرهایی که گنگ هستند.

۲.۸ـ درك و استفاده ازمعادله‌ها وفرمولهای ساده مانند
$p=۲(a+b)$
محیط مستطیل، فرق بین معادله وفرمول وارتباط آنها.

۲.۹ـ خواص ترتیب در R و ذکراصول آن.

۲.۱۰ـ خواص نامساویها ونامعادلاتی که حل آنها به حل یک معادله درجه اول یک مجهولی منجر می‌شوند.

۲.۱۱ـ خواص مقدماتی قدرمطلق، حل‌معادلات قدرمطلقی درجه اول مانند $|x-۲|=۳$ و نامعادلات قدر مطلقی مانند $|x-۲|<۳$

۳: معادلات درجه دوم

۳.۱ـ حل معادلهٔ درجه دوم با استفاده از فاکتورگیری و تجزیه، حل معادلهٔ درجه دوم با روش تبدیل به مربع کامل.

۳.۲ـ دستور کلی حل معادله درجه دوم، حل و بحث معادلات پارامتری درجه دوم با روابط بین ضرایب و ریشه‌ها، حل معادلات قدرمطلقی درجه ۲، محاسبه عبارتهای متقارن و مسائل مربوطه، نامساویهای برنولی، کوشی‌شوارتز، میانگین حسابی وهندسی با ارائه چند مثال.

۳.۳ـ تعیین علامت عبارت $ax+b$ و $ax^۲+bx+c$.

۳.۴ـ حل نامعادلات درجه اول و درجه دوم، طرح نامعادلاتی نظیر $\sqrt{(x-۱)^۲}+(x-۱)^۲-۲<۰$ جهت تمرین.

۳.۵ـ معادلات دومجذوری، معادلات اصم، دستگاههایی که حل آنها به حل معادلهٔ درجه ۲ منجر می‌شود. دستگاههای معادلات متقارن با کاربرد معادله درجه دوم درحل مسائل عددی مثلاً محیط مستطیلی ۱۰۰ متر و مساحت آن ۶۰۰ مترمربع است، طول قطرآن چند است:

۴.۱ـ محور ـ بردار ـ اندازه جبری یک بردار روی یک‌محور ـ دستگاه محورهای مختصات ـ مختصات نقطه وسط یک پاره‌خط، محاسبه فاصله بین دونقطه، مختصات مرکز ثقل مثلث، روابط بین مختصات رئوس متوازی‌الاضلاع و تمرینات مربوطه.

۴.۲ـ استفاده از مختصات دکارتی برای نمایش مجموعه نقاطی که درضابطه‌هائی نظیر $y=x^۲$ یا $y=x+۱$ صدق می‌کنند، حل معادله‌هایی نظیر $x^۲-x=۰$ با کمک رسم نمودار.

۴.۳ـ معادله خط راست و رسم آن با استفاده از دونقطه ومسائل مربوطه ضریب زاویه‌ای خط راست ـ زاویه بین دوخط، شرط موازی بودن دوخط، شرط عمود بودن دوخط، حل وبحث دستگاه دومعادله دومجهولی درجه اول با کمک رسم ـ محاسبه فاصله نقطه از خط تمریناتی که به‌کمك آنها بتوان فاصله دوخط موازی ومعادلات نیمسازهای دو خط متقاطع را بدست‌آورد.

۴.۴ـ حل نامعادله خطی دومجهولی مانند ($y<۲x+۳$ ،$y>۶$ ،$x<۳$)، با کمک رسم.

۴.۵ـ رسم نمودارهای قدرمطلقی مانند $y=|x|$، $y=|x|+۲$، $y=|x-۵|$
$|x|+|y|=۲$، «بصورت تمرین»

۴.۶ـ رشته‌های تصاعد حسابی و هندسی ـ «رشته‌های تراجعی و رشته فیبوناتچی بصورت تمرین و اطلاع آورده شود» ـ محاسبه رشد، کاهش و کاربرد آن در مسائل رشد اقتصادی یا جمعیت و کاهش مقدار عناصر رادیوآکتیو و نصف عمر.

۴.۷ـ معرفی لگاریتم یک عدد در مبنای a ($a\neq۱$, $a>۰$) وقضایای مربوط به‌آن

۴.۸ـ چند اصل ریاضی (اصل استقراء، اصل لانه کبوتری و استفاده ازآنها درحل تمرینات)

۴.۹ـ معرفی نمادهای $\sum$ و $\prod$ متناهی و بعضی اعمال جبری روی $\sum$ و $\prod$

۵.۱ـ نسبت عاد کردن دراعداد صحیح

(آ) اگر $a\neq۰$ آنگاه: $a|۰$، $a|a$

(ب) بهازای هر b، $۱|b$

(پ) اگر $a|b$ و $b|c$ آنگاه $a|c$

(ت) اگر $a|b$ و $a|c$ آنگاه بهازاء هر x و y، $a|bx+cy$

(ث) اگر $a|b$ و $b\neq۰$ آنگاه $|a|\leqslant|b|$.

(ج) اگر $a|b$ و $|b|<|a|$ آنگاه $b=۰$.

(چ) اگر $a|b$ و $b|a$ آنگاه $a=\pm b$.

۵.۲ـ اعداد اول، اعداد مرکب و چند قضیه درمورد اعداد اول:

(آ) اگر p عدد اول و $p|ab$ آنگاه $p|a$ یا $p|b$.

۵.۳ـ هرعدد اول کـه عدد اولی را، عاد کند با آن مساوی است «پ» هرعدد طبیعی حداقل دارای یک عامل اول

است «ت» مجموعه اعداد اول نامتناهی است، (تعریف دنباله اعداد اول . . . و ۱۱ و ۷ و ۵ و ۳ و ۲) «ث» هر عدد طبیعی حداقل دارای یک عامل اول است.

۵.۴ـ تعریف حاصلضرب $a=\prod_{i=1}^{n} P^{a_i}$، قضیه اساسی علم حساب: هر عدد طبیعی تجزیه به یکتا به عوامل اول دارد. تعریف بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك و کوچکترین مضرب مشترك.

۶ـ همنهشتی‌ها

۶.۱ـ بیان قضیه‌های فرما و ویلسون (بدون اثبات)

۶.۲ـ اطلاعاتی در مورد اعداد اول فرما: $F_n = 2^{2^n}$ اعداد اول مرسن $H_n = 2^n - 1$ و رابطه آنها با اعداد تام (کامل) $a = 2^{n-1}(2^n - 1)$ ($2^n - 1$ اول) به‌صورت «اطلاعات عمومی».

۶.۳ـ همنهشتی‌ها: صورت نمایش یک عدد به‌یك هنگ، تعریف همنهشتی اعمال جبری برهمنهشتی‌ها:

$(a\equiv b \Rightarrow a^n\equiv b^n,\ n\geqslant 1)$

کاربرد درمحاسبه باقیمانده تقسیم مثلاً 2^{515} بر ۷ ـ احکام بخشپذیری بر ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۱، ۲۵ و ۱۲۵.

۷.۱ـ تعریف: دوعدد صحیح a و b را نسبت بهم اول گویندکه

ب ـ م ـ م $= d = (a, b) = 1$

۷.۲ـ قضیه تقسیم (بدون اثبات)، آلگوریتم اقلیدسی، قضیه بزو و اثبات آن بـه کمك آلگوریتم اقلیدسی (قضیـه آلگوریتـم اقلیدسی بدون اثبات) و حالت خاص آن که اگر $(a, b)=1$ آنگاه $\exists x, y\in Z$ بطوریکه

$xa+yb=1$

ـ ویژگیهای مربوط به ب ـ م ـ م،

(آ) قضیه گاوس $(a, b)=1,\ a|bc \Rightarrow a|c$

(ب) $(a, b)=d,\ k\in N \Longleftrightarrow (ka, kb)=kd$

(پ) $(a, b)=d \Rightarrow \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)=1$

(ت) $(a, b)=1,\ (a, c)=1 \Rightarrow (a, bc)=2$

اثبات بعهده دانش‌آموز

۷.۳ـ طریقه بدست آوردن ب ـ م ـ م دوعدد به طریق تجزیه و نردبانی و بـدست آوردن ك ـ م ـ م چند عـدد به طریق تجزیه ـ بیان قضیه $[a, b](a, b)=|ab|$ (اثبـات در حالت $a, b\in N$ بصورت تمرین خواسته شود) ـ ویژگی مربوط به ك ـ م ـ م:

$[ta, tb]=|t|[a, b]$

۷.۴ـ نمایش یـك عدد به هنگ m، صـورت نمـایش اعداد صحیح به هنگ ۳ $[3k, 3k\pm 1]$ بیان اینکه این نتیجه مستقیم قضیه تقسیم است. مثلاً (باقیمانده یك عددکه مربع کامل است بر ۸ مساوی صفریا یک یا چهار است پس معادله $(x+1)^2=8x+3$ جواب صحیح ندارد)

۷.۵ـ شرط لازم وکافی برای اینکه معادله سیاله $ax+by=c$ دارای جواب باشد آنستکه $d|c$، استفاده از قضیه بزو، آلگوریتم اقلیدسی جهت تعیین کلیه جوابها.

۷.۶ـ طرح مسائلی که برخـورد به حل معادله سیاله می‌نماید نظیرمجموع سکـه‌های ۵ ریـالی و دو ریالی، جعبـه‌ای محتوای ۳۱ ریال است، مطلـوبست تعـداد سکه‌های ۵ ریالی و دو ریالی.

۸ـ اعداد مختلط

۸.۱ـ معـرفـی اعـداد مختلـط و اعـداد مـوهومـی محض ـ حساب اعداد مختلط ـ حل، معادله درجه دوم ـ فرم مثلثاتی اعداد مختلط ـ فرمول‌موآور وکاربرد آن، تعیین ریشه‌های nام واحد وتعیین ریشه‌های nام یک عدد حقیقی.

۹ـ حل معادله درجه ۳ با استفاده از گراف آن

۹.۱ـ تبدیل معادلـهٔ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ (۱) به معادلهٔ

(۲) $x^3+px+q=0$

(۲)ـ تعیین روابط بین ضرایب و ریشه‌های معـادله (۱) وتعمیم آن روابط به معادلهٔ درجـه n ـ بحث در وجـود ریشه‌های (۱) با استفاده از (۲)ـ تعیین علامت ریشه‌های معادلهٔ (۲) قضیه: ریشه‌های گویای معادلهٔ

$A_0x^n+A_1x^{n-1}+\dots+A_{n-1}x+A_n=0$

در بین مقادیر $\pm\frac{p}{q}$ قابل جستجو هستنـد به طـوریکـه $(p, q)=1$ و $p|A_0$ ، $q|A_n$. فرمـول کاردان برای معادلهٔ (۲)ـ هرمعادله درجه فرد حداقل یک ریشه حقیقی دارد. هر کثیـرالجمله درجه n با ضـرایب حقیقی قابل تجزیه به‌عوامل درجه اول و درجه دوم است.

۱۰.۱ـ معرفی گروهها با ذکر مثالهای عددی و هندسی ملموس (گروههای متناهی) واصل موضوعه گروه و استخراج بعضی ازقضیـه‌های اساسی به‌صـورت تمرین (اینکه

عنصر خنثی منحصر بفرد است و نیز عضو عکس)

۱۰.۲ــ بعضی ساختارهای جبری: جبر بول در حد یك ساختار جبری با دو عمل مثلاً جبر مجموعه‌ها ـ جبر چند جمله‌ایها ـ کاربرد گروهها در تقارنهای هندسی و در صورت امکان تقارن‌های شیمیائی.

۱۰.۳ــ ماتریس‌ها ـ آشنائی با ماتریسها با ذکر مثالهای ساده و کاربردی ومعرفی ماتریس‌های صفر ومربعی و واحد (یگانه) وقطری ـ بالا مثلثی ـ پائین مثلثی و اعمال روی ماتریس‌ها (جمع وتفریق وضرب) شرکت‌پذیری ماتریس‌ها نسبت به‌اعمال‌جمع وضرب وتوزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع (شرکت‌پذیری ماتریس‌ها نسبت به ضرب، بدون اثبات گفته شود) و اینکه ضرب ماتریس‌ها تعویض‌پذیر نیست و همچنین ممکن است $AB=\overline{O}$ ولی $A\neq O$ و $B\neq O$ و بصورت تمرین داده شود که ($A\neq\overline{O}$) وجود دارد که $A^2=\overline{O}$ و یا $A\neq\overline{O}$ هست‌که $A^2=A$ وماتریسی‌که $A^2=-I$، $A^2=I$) ـ ضرب عدد در ماتریس ـ معرفی ماتریس ترانهاده ـ متقارن ـ پادمتقارن ـ ویژگیهای‌عمل ترانهاده کردن درماتریس‌ها.

$$(A')'=A,\ (A+B)'=A'+B',\ (\lambda A)'=\lambda A',\ (AB)'=B'A',\ \lambda\in R$$

۱۱.۱ــ تعریف دترمینان ماتریس ۲ × ۲ و استفاده از آن درحل دستگاه دومعادله دومجهولی‌درجه اول ـ بررسی‌خواص و ویژگیهای دترمینان‌های ۲ × ۲ و تعمیم آن برای دترمینانهای ۳ × ۳ همراه با طریقه محاسبه دترمینان ۳ × ۳ وبیان شرط وجود جواب غیرصفر برای‌دستگاه معادلات همگن ـ حل دستگاهها با استفاده از روش حذفی‌گاوس ـ بدست‌آوردن جوابهای دستگاه ناهمگن از دستگاه همگن وابسته (حالات کلی در ریاضی کاربردی)

۱۱.۲ــ تعریف وارون ماتریس و محاسبه A^{-1} در ماتریسهای ۲ × ۲ وحل معادله $AX=B$ وقتیکه A^{-1} موجود باشد (برای ماتریسهای ۲ × ۲)

۱۲ــ درآمدی برجبر خطی

۱۲.۱ــ فضای R^2، بیان اینکه تناظر یك یکی بین نقاط صفحه و R^2 بعنوان مجموعه زوجهای‌مرتب عناصر R وجود دارد وتناظر یک یکی بین بردارهای مکان بمبدأ O و R^2 بعنوان مجموعه زوج‌های مرتب عناصر R وجود دارد.

۱۲.۲ــ معرفی اصول فضای‌برداری با ذکر مثالهائی.ازمجموعه اعداد حقیقی بدون ذکر نام فضای‌برداری.

۱۲.۳ــ پایه در صفحه ـ استقلال خطی ـ وابستگی خطی بردارها درصفحه وفضا توضیح: تبدیلات هندسی درصفحه با کمک‌ماتریس‌دوران، تجانس، انتقال، تقارن درهندسه آورده میشود.

۱۳ــ مثلثات

۱۳.۱ــ زاویه و واحدهای اندازه‌گیری آن، تبدیل واحدهای اندازه‌گیری به یکدیگر

۱۳.۲ــ جهت‌ها و زاویهٔ مثلثاتی

۱۳.۳ــ روابط اصلی بین نسبتهای مثلثاتی، تغییرات نسبتهای مثلثاتی، و گسترانیدن دایره برمحور xها،

۱۳.۴ــ ساده کردن عبارت مثلثاتی، اتحادهای مثلثاتی

۱۳.۵ــ محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی °۳۰، °۴۵، °۶۰

۱۳.۶ــ ازطریق شکل بیان روابط بین‌نسبتهای مثلثاتی، زوایای قرینه، مکمل، تفاضل π، زوایای متمم، تفاضل $\frac{\pi}{2}$ زوایای $2K\pi$

۱۳.۷ــ جدول مثلثاتی و استفاده از آن برای تعیین نسبتهای مثلثاتی وبالعکس. (Arc)

۱۳.۸ــ حل معادلات مثلثاتی و نامعادلات مثلثاتی

۱۳.۹ــ محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی $3a,\ 2a,\ a\pm b$

۱۳.۱۰ــ محاسبهٔ نسبتهای‌مثلثاتی $\sin a$، $\cos a$، $\operatorname{tg} a$ برحسب $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$

۱۳.۱۱ــ **حل مثلث قائم‌الزاویه، زوایای‌نشیب وفراز**

۱۳.۱۲ــ تبدیل مجموع به‌حاصلضرب وبالعکس

۱۳.۱۳ــ حل مثلث (دراین‌فصل قضیهٔ سینوسها وقضیهٔ کسینوس بیان میشود).

۱۳.۱۴ــ حل دستگاههای مثلثاتی

۱۳.۱۵ــ مختصری ازکاربرد مثلثات درنقشه‌برداری

روش حذف اعداد غیراول فرد کوچکتر یا مساوی عدد طبیعی m

آرش جوانبخت
دانش‌آموز سال دوم رشته ریاضی‌فیزیک مشهد

منظور از این مقاله تعیین اعداد اول فرد نابیشتر از عدد مفروض وطبیعی m است. روش کار این است که اعداد فرد بزرگتر از ۳ و کوچکتر یا مساوی m را که مرکب هستند بنابر قضیه زیر حذف می‌کنیم. واضح است که اعداد زوج بین ۳ و m اول نیستند.

قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه عدد g، که $۳\leqslant g\leqslant m$، فرد و مرکب باشد آن است که اعداد طبیعی k و n وجود داشته باشند به‌طوری که

$$g=(۲k-۳)(۲n+۱) \text{ و } ۱\leqslant n\leqslant \frac{m-۳}{۲}$$

$$\text{و } ۳\leqslant k\leqslant \frac{m+۱}{۲}$$

برهان. اگر g به‌شکل بالا باشد داریم

$$m>۲n+۱\geqslant ۳ \text{ و } m>۲k-۳\geqslant ۲\times ۳-۳=۳$$

که درنتیجه g فرد ومرکب خواهد بود.

بعکس، فرض می‌کنیم g فرد ومرکب باشد و $۳\leqslant g\leqslant m$.

پس $g=ab$ که $۱<a\leqslant b<g$ و a و b فردند.

لذا، چون a و b فردند، می‌توان قرار داد $a=۲k-۳$

که درنتیجه $۱<۲k-۳<m$ یعنی $۲<k<\frac{m+۳}{۲}$

از نامساویهای اخیر نتیجه می‌شود که $۳\leqslant k\leqslant \frac{m+۱}{۲}$ (چرا؟)

همچنین می‌توان قرارداد $b=۲n+۱$ که درنتیجه

$$۱<۲n+۱<m \text{ یعنی } ۰<n<\frac{m-۱}{۲}$$

ازنامساویهای اخیر نتیجه می‌گیریم که (چرا؟)

$$۱\leqslant n\leqslant \frac{m-۳}{۲}$$

بنابر قضیه بالا برای حذف اعداد فرد مرکب بین ۳ و m چنین عمل می‌کنیم.

عدد k را بین ۳ و $\frac{m+۱}{۲}$ (مثلاً، درابتدا $k=۳$) اختیار می‌کنیم سپس این مقدار k را در رابطهٔ $a=۲k-۳$ قرار می‌دهیم بعد تمام مقادیر $k+na$ را، به‌ازای nهای طبیعی کوچکتر یا مساوی $\frac{m-۳}{۲}$ محاسبه وازمجموعهٔ اعداد بین ۳ و $\frac{m+۱}{۲}$ حذف می‌کنیم، واضح است که

$$۲(k+na)-۳=۲k-۳+۲na=(۲k-۳)(۲n+۱)$$

که بنابر قضیه ثابت شده مرکب است. عمل حذف را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.

اما عمل حذف کردن را خیلی زود می‌توان متوقف کرد. توجه کنید که داریم

$$a=۲k-۳\leqslant b=۲n+۱$$

که ازآن نتیجه می‌شود

$$۲n\geqslant ۲k-۴ \text{ یا } n\geqslant k-۲$$

پس،

$$m\geqslant g=ab=(۲K-۳)(۲n+۱)\geqslant (۲k-۳)(۲k-۳)=(۲k-۳)^۲$$

پس

$$(۲k-۳)\leqslant \sqrt{m}$$

ویا

$$k\leqslant \frac{\sqrt{m}+۳}{۲}.$$

روش بالا مزایای زیر را نسبت به‌غربال اراتستن دارد:

۱ـ اعداد زوج را اصلاً در محاسبه وارد نمی‌کند ولی در غربال‌اراتستن اعداد زوج را نیز باید حذف کرد.

۲ـ درغربال‌اراتستن حذف تا حد $\sqrt{m}$ انجام می‌گیرد ولی دراینجا تا $\frac{\sqrt{m}+3}{2}$.

۳ـ حذف اعداد، پس از تعیین k، تا حد $\frac{m+1}{2}$ صورت می‌گیرد درحالی‌که درغربال‌اراتستن تا m.

برنامه کامپیوتری ذیل براساس روشی‌که شرح داده شد نوشته شده است.

```
10 CLS
20 INPUT M : V=M : M=(M+1)/2 :
   DIM B(M):L =(V · 5+3)/2
30 FOR C=3 TO M: B(C)=C
40 NEXT C
45 REM * START OF CALCULATION *
50 FOR I=3 TO L
60 IF B(I)=0 THEN 130
70 D=I : E=I * 2-3
80 FOR J=1 TO INT ((M-D)/E)
90 D=D+E
110 B(D)=0
120 NEXT J
130 NEXT I
135 REM * END OF CALCULATION *
140 FOR Z=3 TO M
150 IF B(Z)=0 THEN 180
160 S=B(Z)* 2-3
170 PRINT S;
180 NEXT Z
190 END
```

```
3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73
79 83 89 97
```

```
3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73
79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137 139 149 151 157
163 167 173 179 181 191 193 197
```

حل مسائل شماره ۳۰

محمود نصیری

۱ـ تابع درجه سوم $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ با شرط $a^2-3b>3\sqrt{3}$ $(a,\ b,\ c\in R)$ مفروض‌است. ثابت‌کنید دقیقاً دوخط وجود دارد که هریك در دونقطه تقاطع برمنحنی فوق عمود است (خط قائم) واین دوخط درنقطه عطف تابع متقاطع‌اند.

حل. برای‌سادگی در محاسبات می‌توانیم فرض‌کنیم $a=c=0$ یعنی محورهای مختصات را به‌موازات خودچنان انتقال می‌دهیم تا مبدأ مختصات روی نقطه عطف تابع قرار گیرد. ضریب زاویه خط مماس بر نمودار تابع درنقطه عطف برابر $b-\frac{a^2}{3}$ است ولذا مقدارآن تحت این انتقال تغییرنمی‌کند.

بنابراین ضابطه تابع را به‌صورت

$y=f(x)=x^3+bx$،

با شرط $b<-\sqrt{3}$ درنظرمی‌گیریم.

فرض می‌کنیم $M(p,\ f(p))$ و $N(q,\ f(q))$ دونقطه روی نمودارتابع باشند، بطوری‌که خط MN یك خط قائم بر منحنی در M و N است. معادله خط MN را $y=mx+d$ فرض‌می‌کنیم. چون‌مماس‌های‌برمنحنی درنقاط M و N موازیند لذا $f'(p)=f'(q)$ یا $-\frac{1}{m}=3p^2+b=3q^2+b$.

ازاین رابطه نتیجه می‌گیریم که

$$f(p)=-f(q)\ ،q=-p$$

پس

$$m=\frac{f(p)-f(q)}{p-q}=\frac{f(p)}{p}=p^2+b\ ,\ \ d=0$$

بنابراین

$$-\frac{1}{m}=f'(p)=3p^2+b=3m-2b$$

یعنی،

$$3m^2-2bm+1=0$$

ازحل این معادله نسبت به m داریم؛

$$m=\frac{b\pm\sqrt{b^2-3}}{3}$$

به‌ازای $b<-\sqrt{3}$ همواره دو جواب برای m وجود دارد. چون $d=0$، دوخط یکدیگر را درنقطه $(0\ ,\ 0)$ که نقطه عطف تابع است قطع می‌کنند.

۲ـ اگر $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$، ثابت کنید

$$\sin 2\alpha\geqslant(\operatorname{tg}\alpha)^{\cos 2\alpha}$$

حل. قبل ازحل مسأله نامساوی واسطه‌های حسابی و هندسی وزن‌دار را تعریف می‌کنیم،

اگر P دنباله‌ای از اوزان باشد واسطه عددی وزن‌دار aها یعنی $A(a,\ P)$ و واسطه هندسی وزن‌دار aها یعنی $G(a,\ P)$، به‌ترتیب چنین تعریف می‌شود

$$A(a,P)=\frac{p_1a_1+\cdots+P_na_n}{p_1+p_2+\cdots+P_n}$$

$$G(a,\ P)=(a_1^{P_1}\cdots a_n^{P_n})^{1/(P_1+\cdots+P_n)}$$

ولذا

$$\boxed{A(a,\ P)\geqslant G(a,P)}$$

مثلا

$$A(a,\ 1)=A(a)=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

$$G(a,\ 1)=(a_1\ \ldots\ a_n)^{\frac{1}{n}}$$

که همان واسطه‌های حسابی وهندسی بین n عددمی‌باشند دراین حالت هر یك ازاین اوزان برابر یك می‌باشد.

اثبات نامساوی فوق را برای حالت $n=2$ بیان می‌کنیم می‌توان درحالت‌کلی نیز آن را ثابت کرد.
(برای اطلاع بیشتر، خوانندگان گرامی را به‌کتاب آنالیز ریاضی شادروان دکترغلامحسین مصاحب ارجاع می‌دهیم.)

برای اثبات‌کافی است آن را درحالتی‌که مجموع اوزان برابر یك باشد ثابت‌کنیم.

یعنی $P_1+\cdots+P_n=1$ ولذا نامساوی به‌صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$a_1P_1+\cdots+a_nP_n\geqslant a_1^{P_1}\cdots a_n^{P_n}\qquad (\Sigma P_i=1)$$

اکنون نامساوی را به‌ازای $n=2$ بیان وثابت می‌کنیم. این نامساوی را نامساوی هولدر می‌نامند.

قضیه. اگر $a\geqslant 0$ و $b\geqslant 0$ و $\alpha>0$ و $\beta>0$ و $\alpha+\beta=1$

آنگاه $\qquad a\alpha+b\beta\geqslant a^\alpha b^\beta$

اگر $a\neq b$ آنگاه نامساوی اکید است.

اثبات.

$$a^\alpha b^\beta\leqslant \alpha a+\beta b$$

به‌ازای $a=0$ یا $b=0$ حکم بدیهی‌است. تابع‌زیر را درنظر می‌گیریم

$$f(t)=t^\lambda-\lambda t+\lambda-1\qquad 0<\lambda<1$$

$$f'(t)=\lambda t^{\lambda-1}-\lambda=\lambda(t^{\lambda-1}-1)$$

اگر $t\geqslant 1$، آنگاه $f'(t)<0$ پس f اکیداً نزولی است

$$f(t)\leqslant f(1)=0$$

اگر $t<1$، آنگاه $f'(t)>0$ پس f اکیداً صعودی است

$$f(t)\leqslant f(1)=0$$

پس، به‌هرحال $f(t)\leqslant 0$ یعنی،

$$t^\lambda-\lambda t+\lambda-1\leqslant 0$$

$$t^\lambda\leqslant\lambda t+1-\lambda$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\lambda\leqslant\lambda\left(\frac{a}{b}\right)+(1-\lambda)$$

$$a^\lambda b^{1-\lambda}\leqslant\lambda a+(1-\lambda)b$$

به‌ازاء $\lambda=\alpha$ حکم به‌دست می‌آید.

حال به‌حل مسأله می‌پردازیم.

می‌دانیم، $\quad \sin^2\alpha(\mathrm{cosec}^2\alpha)+\cos^2\alpha(\sec^2\alpha)=2$

با توجه به‌نامساوی واسطه‌های حسابی وهندسی وزن‌دار، چون $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ چنین داریم

$$\sqrt{2}=[\sin^2\alpha(\csc^2\alpha)+\cos^2\alpha(\sec^2\alpha)]^{1/2}\geqslant$$

$$[(\mathrm{cosec}^2\alpha)^{\sin^2\alpha}(\sec^2\alpha)^{\cos^2\alpha}]^{1/2}=$$

$$\frac{1}{(\sin\alpha)^{\sin^2\alpha}(\cos\alpha)^{\cos^2\alpha}}$$

لذا با به‌توان دو رساندن ومعکوس‌کردن نامساوی داریم.

$$(\sin\alpha)^{2\sin^2\alpha}(\cos\alpha)^{2\cos^2\alpha}\geqslant\frac{1}{2}$$

یا

$$2\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha)^{2\sin^2\alpha-1}(\cos\alpha)^{2\cos^2\alpha-1}\geqslant 1$$

$$\sin 2\alpha(\sin\alpha)^{-\cos 2\alpha}(\cos\alpha)^{\cos 2\alpha}\geqslant 1$$

$$\sin 2\alpha(\mathrm{cotg}\,\alpha)^{\cos 2\alpha}\geqslant 1$$

ولذا

$$\sin 2\alpha\geqslant \mathrm{tg}\,\alpha^{\cos 2\alpha}$$

۳ـ فرض می‌کنیم N مجموعه اعداد طبیعی باشد. ثابت کنید فقط یك نگاشت f از $N\times N$ به N وجود دارد بطوری که به‌ازای هر $n,m\in N$، سه شرط زیر برقراراست.

(i) $\quad f(n,\ m)=f(m,\ n)$

(ii) $\quad f(n,\ n)=n$

(iii) $\quad (n-m)f(n,m)=nf(m,n-m)\quad (n>m)$

حل کوچکترین مضرب مشترك دو عدد در شرطهای فوق صدق می‌کنند. برای اثبات یکتائی f گوئیم اگر f_1 و f_2 دونگاشت

متمایز با خواص فوق باشند، آنگاه اعداد طبیعی مانند a و b وجود دارند بطوری که حاصلضرب ab حداقل بوده و $f_1(a,b)\neq f_2(a,b)$.
بنا به خاصیت (ii)، $a\neq b$، بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $a<b$.
اکنون بنا به‌خاصیت (iii) به‌دست می‌آید:

$$f_1(a,b)=\frac{bf_1(a,b-a)}{b-a},$$

$$f_2(a,b)=\frac{bf_2(a,b-a)}{b-a}.$$

درنتیجه، $f_1(a,b-a)\neq f_2(a,b-a)$، که متناقض با انتخاب a و b است.

۴ـ اگر A یك بردار و B، C بردارهای یکانی باشند نشان دهید،

$$[(A+B)\times(A+C)]\times(B\times C)\cdot(B+C)=0.$$

حل. بنا به‌خاصیت ضرب برداری داریم:

$$(D\times E)\times F=(F\cdot D)E-(F\cdot E)D$$

لذا از رابطه فوق نتیجه می‌گیریم:

$$[(A+B)\times(A+C)]\times[B\times C]=$$
$$[(B\times C)\cdot(A+B)][A+C]-[(B\times C)\cdot(A+C)]$$
$$[A+B]=[(B\times C)\cdot A][A+C]-[(B\times C)\cdot A]$$
$$[A+B]=[(B\times C)\cdot A][C-B]$$

که از آن نتیجه مطلوب حاصل می‌شود زیرا،

$$(C-B)\cdot(B+C)=C\cdot C-B\cdot B=1-1=0$$

۵ـ اگر $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}>0$، ثابت‌کنید

$$a_1a_2\cdots a_{n+1}\left(\frac{1}{a_1^n}+\frac{1}{a_2^n}+\dots+\frac{1}{a_{n+1}^n}\right)$$
$$\geqslant a_1+a_2\dots+a_{n+1}$$

حل. فرض‌کنیم $P=a_1a_2\cdots a_{n+1}$ و

$$S=\frac{1}{a_1^n}+\frac{1}{a_2^n}+\dots+\frac{1}{a_{n+1}^n}$$

بنابراین نامساوی فوق را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$PS\geqslant a_1+a_2+\dots+a_{n+1}$$

یا،

$$P[(n+1)S-S]\geqslant n(a_1+a_2+\dots+a_{n+1})$$

لذا،

$$P\left[\left(S-\frac{1}{a_1^n}\right)+\left(S-\frac{1}{a_2^n}\right)+\dots+\left(S-\frac{1}{a_{n+1}^n}\right)\right]\geqslant n(a_1+a_2+\dots>a_{n+1}).$$

اکنون بنا به نامساوی واسطه حسابی وهندسی،

$$S-\frac{1}{a_i^n}=\frac{1}{a_1^n}+\dots+\frac{1}{a_{i-1}^n}+\frac{1}{a_{i+1}^n}+\dots+\frac{1}{a_{n+1}^n}$$
$$\geqslant n\sqrt[n]{\frac{a_i^n}{P^n}}$$

درنتیجه،

$$(*)\ S-\frac{1}{a_i^n}\geqslant\frac{na_i}{P}$$

هرگاه نامساوی (*) را به‌ازای $i=1, 2, \dots, n+1$ به‌کار ببریم ونامساوی‌ها را با هم جمع کنیم، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

نتیجه: اگر $a_k=\frac{1}{x_k}$، چون $x_k>0$ لذا ازنامساوی فوق نامساوی زیر نتیجه می‌شود؛

$$x_1^n+x_2^n+\dots+x_{n+1}^n\geqslant x_1x_2\cdots x_n+x_2x_3\cdots x_{n+1}$$
$$+\dots+x_{n+1}x_1\cdots x_{n-1}$$

۶ـ ثابت‌کنید مساحت مثلث فیثاغورثی (مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اضلاع آن اعداد صحیح‌اند) هرگز نمی‌تواند مربع کامل باشد.

حل. اثبات به‌برهان خلف است، فرض می‌کنیم مثلث فیثاغورثی وجود داشته باشد که مساحت آن مربع‌کامل است. و فرض‌کنیم W^2 کمترین‌مساحت این مثلث‌ها باشد. x و y را اضلاع‌زاویه قائمه مثلثی درنظرمی‌گیریم که مساحت آن W^2 است.

چون $x^2+y^2=z^2$ و $\frac{xy}{2}=W^2$ و W مینیمم است، x و y نسبت به‌هم اولند. بدون آنکه به‌کلیت برهان خللی وارد شود می‌توانیم فرض‌کنیم که x فرد و y زوج است.
بنابه‌قضیه فیثاغورث، اعداد صحیح ومثبتی مانند r و s، که نسبت به‌هم اولند، وجود دارند بطوری‌که

$$y=2rs \quad \text{و} \quad x=r^2-s^2$$

بنابراین $(r^2-s^2)rs=W^2$ و $\frac{s}{4}<s\leqslant W^2$

چون r، s، $r-s$ و $r+s$ دوبه دونسبت به‌هم اولند وچون $rs(r+s)(r-s)=W^2$، نتیجه می‌گیریم که اعدادصحیح ومثبتی مانند a، b، c و d وجود دارند بطوری‌که $r=a^2$، $s=b^2$، $a^2-b^2=r-s=c^2$ و

$$a^2+b^2=r+s=d^2$$

توجه داریم که c و d نسبت به‌هم اولند، چون $r-s$ و $r+s$ نسبت به‌هم اولند. با توجه به آنکه c و d فرد هستند، فرض می‌کنیم

$$X=\frac{c+d}{2} \text{ و } Y=\frac{d-c}{2}.$$

پس X و Y نسبت به‌هم اولند و $X^2+Y^2=a^2$. بنابراین یکی از X و Y زوج است، و

$$\frac{XY}{2}=\frac{(d^2-c^2)}{8}=\frac{b^2}{4}=\frac{s}{4}$$

مربع یك عدد صحیح است. چون مثلثی با اضلاع X، Y و a یك مثلث فیثاغورثی با مساحت $\frac{s}{4}$ است، از مینیمم بودن W^2 نتیجه می‌گیریم $\frac{s}{4}\geqslant W^2$. که یك تناقض است.

۷ـ الف) ثابت کنید هیچ عدد صحیح و مثبتی مانند x وجود ندارد بطوری‌که $2x^4+1$ مربع‌کامل باشد.

ب) ثابت‌کنید فقط به ازای $x=1$، $8x^4+1$ مربع کامل است.

حل. الف) اثبات به برهان خلف است، فرض کنیم (x, y) کوچکترین زوج ازاعداد صحیح ومثبتی باشند که در معادله $2x^4+1=y^2$ صدق می‌کنند. پس عدد صحیح و مثبتی مانند s وجود دارد که، $y=2s+1$ و $x^4=2s(s+1)$. اگر s فرد باشد آنگاه s و $2(s+1)$ نسبت‌به‌هم اولند، لذا اعدادی صحیح مانند u و v وجود دارند بطوری‌که

$$s=u^4 \text{ و } 2(s+1)=v^4.$$

درنتیجه $2(u^4+1)=v^4$ که u فرد و v زوج است.

بنابراین داریم، $2(1+1)\equiv 0 \pmod 8$.

واین غیرممکن است. پس s نمی‌تواند فرد باشد.

چون s زوج است، $2s$ و $s+1$ نسبت به‌هم اولند و اعداد صحیح u و v بزرگتر از یك وجود دارند، بطوری که $2s=u^4$ و $s+1=v^4$.

فرض‌کنیم w عدد صحیح ومثبتی باشد بطوری‌که $u=2w$.

فرض می‌کنیم a عدد صحیح ومثبتی باشد بطوری‌که $v^2=2a+1$.

پس $v^4=s+1=\frac{u^4}{2}+1$. بنابراین،

$$2w^4=(v^4-1)/4=a(a+1)$$

چون $v^2=2a+1$، با توجه به‌اینکه $v\overset{2}{\equiv}1(4)$ پس a زوج است.

چون $2w^4=a(a+1)$، نتیجه می‌گیریم که اعداد صحیح و مثبتی مانند b و c وجود دارند بطوری که $a=2b^4$ و $a+1=c^4$.

لذا، نتیجه می‌گیریم که $2b^4+1=(c^2)^2$ وبنابراین $y\leqslant c^2$ (با توجه به‌مینیمم بودن (x, y))

ازطرف دیگر

$$c^2\leqslant a+1<v^2\leqslant s+1<y$$

که یك تناقض است.

ب) فرض می‌کنیم $8x^4+1=(2s+1)^2$. پس

$$2x^4=s(s+1)$$

اگر s زوج باشدآنگاه اعداد صحیحی مانند u و v وجود دارند بطوری‌که $s=2u^4$ و $s+1=v^4$. در این صورت، $v^4=s+1=2u^4+1$ و به‌وسیله مسأله قبل، $u=0$ و، بنابراین، $x=0$. اگر s فرد باشد آنگاه اعداد صحیحی مانند u و v وجود دارند بطوری که $s=u^4$ و $s+1=2v^4$.

در این صورت، $u^4+1=2v^2$.

چون u فرد است، درهمنهشتی به‌پیمانه ۴ می‌توان نشان دادکه v فرد است.

دوطرف رابطه $u^4+1=2v^4$ را به‌توان دو می‌رسانیم، داریم $u^8-2u^4+1=4v^8-4u^4$ وبنابراین

$$(v^4-u^2)(v^4+u^2)=\left(\frac{u^4-1}{2}\right)^2$$

که مربع یك عدد صحیح است. چون v^4 و u^2 نسبت به هم اولند، نتیجه می‌گیریم که $\frac{v^4-u^2}{2}$ و $\frac{v^4+u^2}{2}$ مربع اعداد صحیح می‌باشند. حال

$$(1)\quad (v^2-u)^2+(v^2+u)^2=\frac{4(v^4+u^2)}{2}=A^2$$

و

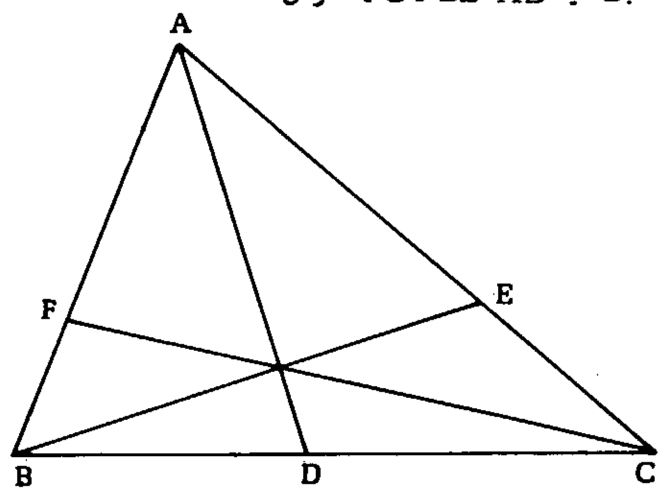
$$(2)\quad \frac{(v^2-u)(v^2+u)}{2}=\frac{v^4-u^2}{2}=B^2.$$

واین امکان ندارد مگر آن که $v^2=\pm u$.
(زیرا، v^2-u و v^2+u، A^2 را می‌توان اضلاع یك مثلث قائم‌الزاویه فرض کرد که B^2 مساحت آن است. ومساحت هرگز نمی‌تواند مربع کامل باشد، مسأله ۶).
چون $u^4+1=2v^4$، به‌دست می‌آید $u^4-2u^2+1=0$ و $u^2=1$. ازاینجا نتیجه می‌شود، $s=1$ و $x=\pm 1$.

۸ـ مثلث ABC مفروض است. نقاط D و E و F به ترتیب روی اضلاع BC و CA و AB چنان قرار دارند که هرکدام محیط مثلث را نصف می‌کنند، مثلاً

$$AB+BD=DC+CA$$

ثابت کنید AD، BE و FC همرس‌اند.



حل. داریم

$$BD=\frac{a+b+c}{2}-c=\frac{a+b-c}{2}$$

به‌همین ترتیب

$$CE=\frac{-a+b+c}{2},\quad DC=\frac{a-b+c}{2}$$

$$AF=\frac{a-b+c}{2} \text{ و } FB=\frac{-a+b+c}{2}$$

$$EA=\frac{a+b-c}{2},$$

بنابراین:

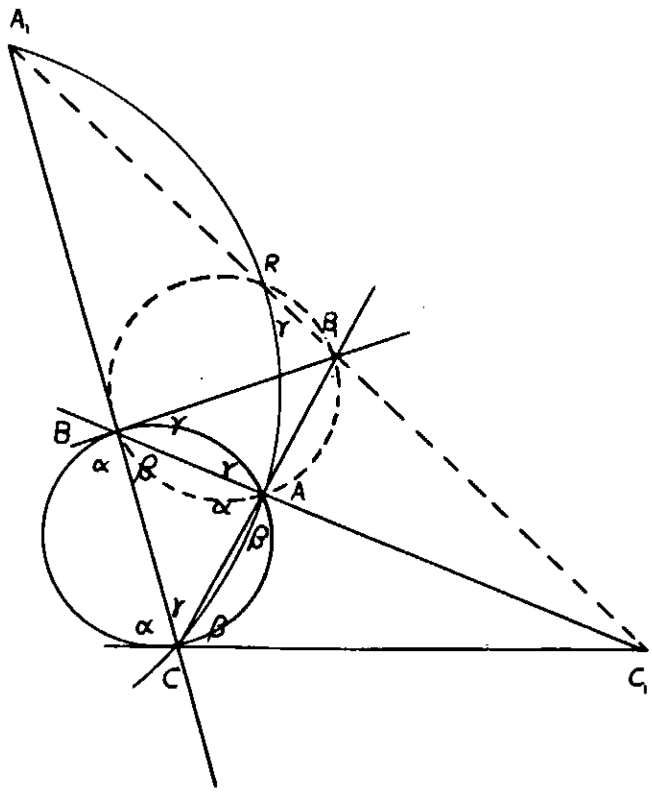
$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

وبه‌وسیله عکس قضیه سوا، AD و BE و CF همرس‌اند.

۹ـ فرض می‌کنیم A، B، C سه نقطه روی یك دایره باشند.

فرض‌می‌کنیم A_1 (به‌همین‌ترتیب، B_1، C_1) نقطه تقاطع مماس درنقطه A (به‌همین ترتیب، B، C) با خطی باشد که از BC (به همین ترتیب، CA و AB) می‌گذرد. ثابت کنید دایره‌های ABB_1، BCC_1، CAA_1 وخط $A_1B_1C_1$ از یك نقطه می‌گذرند.

حل. فرض‌کنیم مثلث ABC دارای زوایای $\alpha>\beta>\gamma$ باشد. چون $\overline{AA_1}^2=\overline{A_1C}\cdot\overline{A_1B}$، مثلثهای AA_1C و BA_1A متشابهند، همچنین مثلثهای BB_1A با CB_1B و CC_1B با AC_1C متشابهند. چون $\alpha+\beta+\gamma=\pi$، ازتشابه مثلثهای فوق زاویه‌هائی راکه اضلاع مثلث ABC با مماس‌در رأس‌می‌سازند به‌ترتیب دوری به‌دست می‌آیند. این زوایا برابر α، β، γ، α، γ، β می‌باشند. فرض کنیم R نقطه تقاطع دیگر دایره ABB_1 با دایره CAA_1 باشد. باتوجه به‌اندازه زوایای محاطی‌وفرض $\alpha>\beta>\gamma$ داریم، $\angle ABB_1=\angle ACA_1=\gamma$



(درغیراین‌صورت یکی‌یا هردو می‌توانند برابر $\pi-\gamma$ باشند)، ازاینجا نتیجه می‌گیریم که

$\angle ARB_1=\gamma$ و $\angle ARA_1=\pi-\gamma$

بنابراین، A_1، R، B_1 دریک امتدادند، و R بین A_1 و B_1 واقع است. به‌همین طریق، فرض‌می‌کنیم R' نقطه تقاطع دایره CAA_1 با دایره BCC_1 باشد. داریم

$CBC_1=\beta$ و $\angle CAA_1=\pi-\beta$

در نتیجه

$\angle CR'C_1=\beta$ و $\angle CR'A_1=\pi-\beta$

بنابراین A_1، R' و C_1 نیز در یك امتدادند و R' بین A_1 و C_1 واقع است. اکنون با تعیین زوایای A_1RB و $A_1R'B$ نشان می‌دهیم، R و R' برهم منطبق‌اند. چون

$\angle B_1AB=\pi-\alpha$

داریم، $\angle B_1RB=\alpha$ و $\angle A_1RB=\pi-\alpha$. به‌همین‌طریق، $\angle C_1CB=\pi-\alpha$ واز اینجا نتیجه می‌گیریم که

$\angle A_1R'B=\pi-\alpha$ و $\angle C_1R'B=\alpha$

بنابراین، $\angle A_1RB=\angle A_1R'B$، لذا A_1، R، R' و B روی یك دایره قرار دارند (درترسیم غیرممکن است) یا R منطبق بر R' است.

۱۰ــ مثلث ABC که هریك از زوایای آن کمتراز °۱۲۰ است مفروض است. روی اضلاع مثلث و درخارج آن سه مثلث متساوی‌الاضلاع ABF و ACE و BCD را می‌سازیم و AD، BE و CF را وصل می‌کنیم. ثابت کنید: سه پاره‌خط AD و BE و CF مساوی و در یك نقطه p همرس‌اند، و p نقطه‌ای است که دربین تمام نقاط درون مثلث مجموع فواصلش ازسه رأس مثلث مینیمم است.

حل. دومثلث ADC و BCE مساوی‌اند.

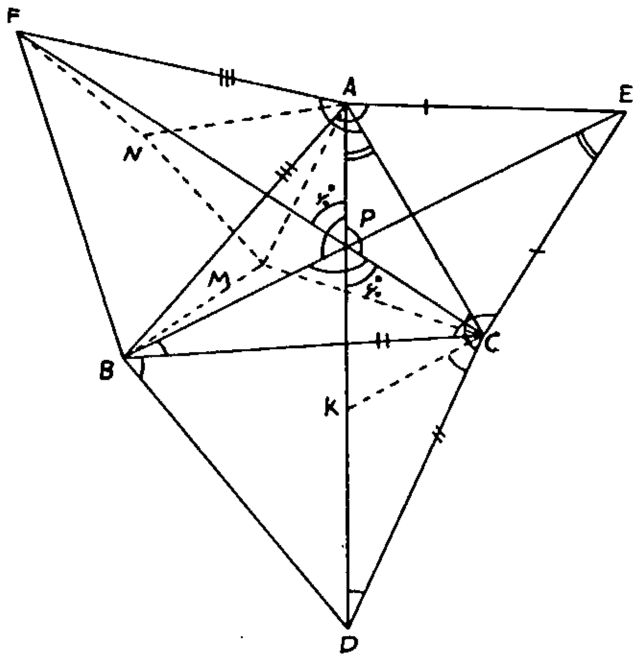
($\angle ACD=\angle BCE$ و $CD=BC$ و $AC=CE$)

لذا $AD=BE$

وبه‌همین ترتیب ازتساوی مثلثهای ACF و ABE نتیجه می‌گیریم $FC=BE$.

همچنین ازتساوی دومثلث ADC و BCE نتیجه می‌گیریم دو زاویه $\angle DAC$ و $\angle BEC$ برابراند، لذا چهارضلعی $APCE$ محاطی و بنابراین $\angle APC=120°$ و مانند آن $\angle APB=120°$، $\angle BPC=120°$.

اکنون فرض‌کنیم BE و FC در P متقاطع‌اند، از P به A و D وصل می‌کنیم، چون هریك از زوایای APF و CPD برابر °۶۰ است لذا AP و PD دریك امتداد می‌باشند.



برای اثبات قسمت دوم مسأله نخست ثابت می‌کنیم،

$AD=PA+PB+PC$.

اگر از C پاره‌خط CK را چنان رسم‌کنیم که زاویه PCK برابر °۶۰ باشد آنگاه مثلث PCK متساوی‌الاضلاع و دو مثلث KCD و PBC مساوی‌اند.

بنابراین $KD=PB$ وچون $PK=PC$ درنتیجه

$BE=FC=AD=PA+PK+KD=PA+PC+PB$.

اکنون اگر M نقطه دلخواهی‌باشد، مثلث‌متساوی‌الاضلاع AMN را روی AM می‌سازیم،

دومثلث AMB و ANF مساوی‌اند.

($\angle FAN=\angle BAM$ و $AB=AF$ و $AM=AN$)

درنتیجه $NF=MB$.

دراین‌صورت

$MB+MA+MC=FN+NM+MC>FC$

یا

$MA+MB+MC>PA+PB+PC$

یعنی مجموع فواصل P ازسه رأس مثلث از مجموع فواصل هرنقطه دیگر ازسه رأس کوچکتر است.

نهمین دورهٔ مسابقه ریاضی

آزمون مرحلهٔ نهایی

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده‌کردن روح جستجـــو وکشف واقعیتهاست.

«امام خمینی قدس سره‌الشریف»

۱ـ ثابت‌کنید معادلهٔ $x+x^2=y+y^2+y^3$ درمجمـوعهٔ اعداد صحیح مثبت جواب ندارد.

۲ـ چهاروجهی $ABCD$ داده شده است.

الف) اگرصفحه‌ای مانند (P) این‌چهاروجهی را قطع‌کند؛ شرط لازم وکافی برای اینکه مقطع حاصل متوازی‌الاضلاع‌گردد چیست؟ نشان دهید دراین صورت مسأله دارای ۳ دسته‌جواب است.

ب) اکنون یکی ازاین سه دسته جواب‌را درنظرمی‌گیریم. وضع صفحهٔ (P) را چگـونه بـاید انتخـاب‌کرد تـا مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل ماگزیمم گردد.

ج) صفحهٔ (P) را به‌گونه‌ای اختیار کنید که مقطع حاصل لوزی گردد و در این صورت انـدازهٔ ضلع لوزی را برحسب اندازه‌های یالهای چهاروجهی به‌دست‌آورید.

۳ـ فرض می‌کنیم: $f: R\to R$ تعریف شده است و $f(1)=1$،

$$(x,\ y\in R)\ f(x+y)=f(x)+f(y)$$

وبرای $x\in R\neq 0$داریم: $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$.

همهٔ توابع $f(x)$ را به‌دست‌آورید.

۴ـ نشان دهید حداقل شش نقطه با مختصات گویا روی منحنی، $y^2=x^3+x+1370^{1370}$ وجود دارد.

۵ـ مثلث ABC در دایرهٔ (C) محـاط است. نیمساز درونـی زوایای مثلث مزبور دایرهٔ (C) را مجدداً در A'، B'، و C' قطع می‌کنـد. اگـر I نقطـهٔ برخورد نیمسازها بـاشد. ثابت‌کنید:

$$\frac{IA'}{IA}+\frac{IB'}{IB}+\frac{IC'}{IC}\geqslant 3,$$

$$IA'+IB'+IC'\geqslant IA+IB+IC.$$

۶ـ سه گروه A، B، و C از دانشمندان ریاضی از سه کشور مختلف‌درکنفرانس‌گردآمده‌اند. می‌خواهیم جلسات سه‌نفری از این دانشمندان تشکیل دهیم به‌طوری‌که ازهرگروه فقط یك نفر شرکت داشته باشد و هردونفر دقیقاً در یك جلسه شرکت‌کرده باشند.

آ) اگر این عمل تحقق یافتنی باشد نشان دهید تعداد افراد هرسه گروه مساویند.

ب) درحالی کـه تعداد افراد هرگروه ۳ باشد نشان دهید این عمل تحقق‌یافتنی است.

ج) ثابت کنید درحالت‌کلی تساوی تعداد اعضای سه‌گروه، این عمل تحقق‌یافتنی است.

حل مسأله ۱. فرض می‌کنیم $a=(y,\ x-y)$، بنابراین

$$y=ba,\ x-y=ca,\ (b,\ c)=1$$

بالنتیجه،

$$ab+ac+a^2b^2+a^2c^2+2a^2bc=$$
$$ab+a^2b^2+a^3b^3$$

اگر $a=0$، آنگاه $x=y=0$

اگر $a\neq 0$، آنگاه $c+ac^2+2abc=a^2b^3$

پس $c|a^2b^3$ یعنی $c|a^2$ پس $a^2=dc$، پس

$$1+ac+2ab=db^3$$

بالنتیجه، $(d,\ a)=1$

اما $a^2=dc$ و درنتیجه اگر $d\neq 1$ آنگاه $(d,\ a)\neq 1$ پس $d=1$ و $a^2=c$.

$$\begin{cases}1+a^3+2ab=b^3\\ c=a^2,\ (b,\ a^2)=1\end{cases}$$

پس، $(a,\ b)=1$

از $b^3=1+a^3+2ab,\ (b>a)$

نتیجه می‌شود:

$$(b-a)[(b-a)^2+3ab]=1+2ab,\ b-a=S,$$

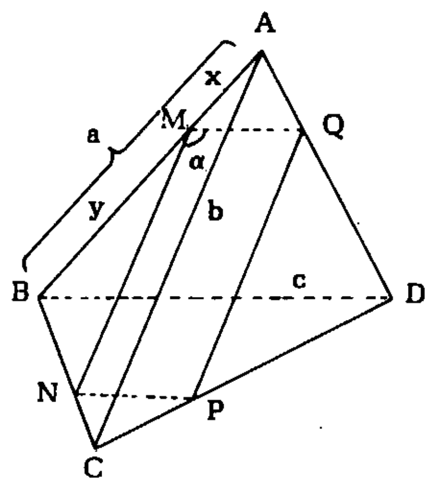
$$ab=P$$

$$S(S^2+3P)=1+2P$$

اما $a,\ b\neq 1$ و درنتیجه $P>1$ ولهذا، $1+2P<3P$ و بنابراین تساوی فوق نمی‌تواند برقرار باشد.

حل مسأله ۲.

الف) فرض می‌کنیم MNPQ متوازی‌الاضلاع باشد در این صورت $MQ\parallel NP$ و چون $NP\subset BCD$ پس $MQ\parallel BD$ و به دلیل مشابه $MN\parallel AC$ یعنی صفحه (P) با دویال AC و BD موازی است بعکس اگر (P) با دویال AC و BD موازی باشد به سهولت ثابت می‌شود که MNPQ متوازی‌الاضلاع است.



اکنون می‌نویسیم $S_{MNPQ}=\frac{1}{2}MN\cdot MQ\cdot\sin\alpha$ بدیهی است که چون α ثابت است (زاویه بین دویال متنافر AC و BD) پس $\frac{1}{2}\sin\alpha$ مقدار ثابت‌است‌درنتیجه باید $MN\cdot MQ$ ماگزیمم گردد داریم:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MQ}{BD},\ \frac{x}{a}=\frac{MQ}{c},\ MQ=\frac{c\,x}{a}$$

$$\frac{BM}{AB}=\frac{MN}{AC},\ \frac{y}{a}=\frac{MN}{b},\ MN=\frac{b\cdot y}{a}$$

درنتیجه:

$$MN\cdot MQ=\frac{c\cdot x}{a}\times\frac{b\cdot y}{a}=\frac{b\cdot cxy}{az}$$

چون $x+y=a$ است پس ماگزیمم $x.y$ در صورتی ممکن است‌که $x=y$ باشد یعنی باید M وسط AB باشد درنهایت رأسهای متوازی‌الاضلاع با مساحت ماگزیمم وسطهای AB و BC و CD و DA است.

ب) اگر MNPQ لوزی باشد داریم

$$MN=MQ,\ \frac{c\cdot x}{a}=\frac{b\cdot y}{a},$$

$$\frac{x}{y}=\frac{b}{c}$$

یعنی باید نقطه M یال AB را به‌نسبت $\frac{b}{c}$ تقسیم کنند. در اینصورت:

$$\frac{x}{y}=\frac{b}{c},\ \frac{x+y}{y}=\frac{b+c}{c},\ \frac{a}{y}=\frac{b+c}{c},\ y=\frac{a\cdot c}{b+c}$$

پس

$$MN=\frac{b\cdot y}{a}=\frac{b\times\frac{a\cdot c}{b+c}}{a}=\frac{b\cdot c}{b+c}$$

حل مسأله ۳.

واضح است‌که $f(0)=0$ و $f(n)=n$ (استقراء) وهمچنین، $1=f(1)=nf\left(\frac{1}{n}\right)$ و درنتیجه، بازاء هر $r\in Q$، $f(r)=r$.

ازطرفی f یك به‌یك است زیرا، اگر $f(x)=f(y)$ آنگاه،

$$f(y)=f(y-x+x)=f(y-x)+f(x)$$

و درنتیجه، $f(y-x)=0$ حال اگر $y-x=\alpha\neq 0$ آنگاه

$$f(\alpha)\cdot f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=1$$

و درنتیجهٔ، $1=0$ بنابراین $x=y$. یعنی f یك به‌یك است. و همچنین واضح است‌که $f(-x)=-f(x)$ حال نشان‌می‌دهیم که: $f(x^2)=(f(x))^2$. واضح است که اگر $f(x)=f(x^2)$ آنگاه رابطهٔ فوق با توجه به‌یك به‌یك بودن f ($x=0$ یا 1) برقرار است واگر $f(x^2)\neq f(x)$ آنگاه داریم:

$$\frac{1}{f(x)-f(x^2)}=\frac{1}{f(x-x^2)}=\frac{1}{f(x(1-x))}$$

$$=f\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)=f\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)=f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{1-f(x)}$$

$$=\frac{1}{f(x)-(f(x))^2}\Longrightarrow f(x^2)=(f(x))^2$$

بنا براین اگر $0<x$ آنگاه $0<f(x)$ و درنتیجه f صعودی است حال با توجه به‌اینکه دو دنبالهٔ از اعداد گویا مانند r_n و S_n وجود داردکه به‌ازاء هر n، $r_n<x<S_n$ و x تنها عددی است که در آن نامساوی صدق می‌کند داریم:

$$r_n=f(r_n)<f(x)<f(S_n)=S_n$$

درنتیجه $f(x)=x$.

حل مسالهٔ ۴.

نشان می‌دهیم حداقل شش نقطـه با مختصات گویا روی منحنی $y^2=x^3+x+1370^{1370}$ وجود دارد
اگر $x=0$ آنگاه،

$$A\left|\begin{matrix}0\\ 1370^{685}=a\end{matrix}\right.,\quad B\left|\begin{matrix}0\\ -a\end{matrix}\right.$$

$y'=\frac{1}{2a}$ ضریب زاویه مماس درA

$y=\frac{x}{2a}+a$ معادله مماس در A

$$\left(\frac{x}{2a}+a\right)^2=x^3+x+1370^{1370}$$

پس، $x=\frac{1}{4a^2}$

$$C\left|\begin{matrix}\frac{1}{4a^2}\\ \frac{1+8a^4}{8a^3}\end{matrix}\right.\quad D\left|\begin{matrix}\frac{1}{4a^2}\\ -\frac{1+8a^4}{8a^3}\end{matrix}\right.$$

حال خط BC را با منحنی قطع می‌دهیم و ادعا می‌کنیم که این خط در C برمنحنی مماس نیست پس دریـک نقطهٔ $E\neq B, C$ با مختصات گویا منحنی را قطع می‌کنند. زیرا

$$\text{BC ضریب زاویه}=\frac{\frac{1+8a^4}{8a^3}+a}{\frac{1}{4a^2}}=\frac{1+16a^4}{2a}$$

$$2yy'=3x^2+1\Longrightarrow y'=\frac{\frac{3}{16a^4}+1}{2\left(\frac{1+8a^4}{8a^3}\right)}$$

$$=\frac{3+16a^4}{4a(1+8a^4)}$$

حال واضح است که:

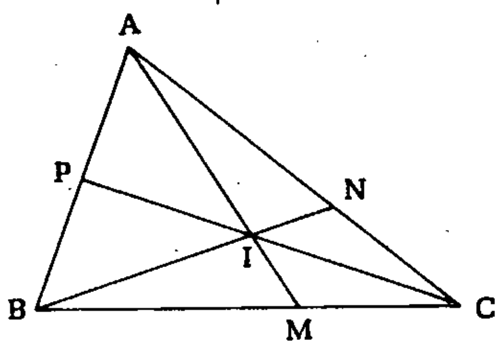
$$\frac{1+16a^4}{2a}\neq\frac{3+16a^4}{4a(1+8a^4)}$$

$$2(1+16a^4)(1+8a^4)>3+16a^4$$

همچنین خط DA به‌همین دلیل منحنی را در نقطه دیگری مانند F با مختصات گویا قطع می‌کند.

حل مسالهٔ ۵.

۱) برای هر سه خط همرس داریم:



(۱) $\frac{AI}{IM}+\frac{BI}{IN}+\frac{CI}{IP}\geqslant 6$

زیرا با درنظرگرفتن مساحت‌ها داریم:

$$\frac{IM}{MA}+\frac{IN}{BN}+\frac{IP}{CP}=1$$

پس،

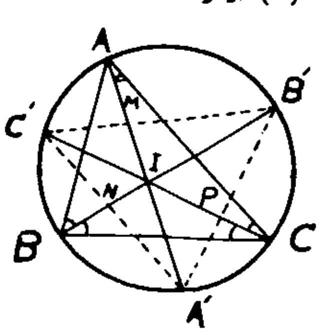
$$\frac{AM}{IM}+\frac{BN}{IN}+\frac{CP}{IP}\geqslant 9$$

ویا:

$$\frac{AI+IM}{IM}+\frac{BI+IN}{IN}+\frac{CI+IP}{IP}=3+$$

$$\frac{AI}{IM}+\frac{BI}{IN}+\frac{CI}{IP}\geqslant 9$$

و درنتیجه رابطه (۱) برقراراست.



حال با توجه به‌شکل مقابل بدیهی است که $A'C'$ عمودمنصف IB و $A'B'$ عمودمنصف IC و $B'C'$ عمودمنصف IA است پس:

$$\frac{IA'}{IM}+\frac{IB'}{IN}+\frac{IC'}{IP}\geqslant 6$$

و از آنجا:

$$\frac{IA'}{IA}+\frac{IB'}{IB}+\frac{IC'}{IC}\geqslant 3$$

اکنون طبق نامساوی «اردیش-مردل» داریم:

$$IA'+IB'+IC'\geqslant 2(IM+IN+IP)$$

و یا،

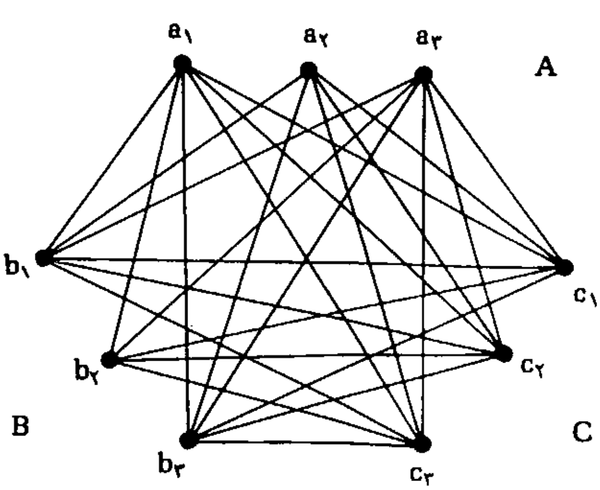
$$IA'+IB'+IC'\geqslant IA+IB+IC$$

حل مسألهٔ ۶.

فرض کنید دانشمندان مجموعه‌های $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$, $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ و $C=\{c_1, c_2, \cdots, c_p\}$ باشند. برای هریك ازمجموعه‌ها نقاطی روی صفحه متناظرمی‌کنیم (شکل زیر برای

$$m=n=p=3$$

نشان داده شده است). اگر یك دانشمند مثلاً a_i با یك دانشمند دیگرمثلاً b_j دریك جلسه شرکت داشته باشد یك خط بین a_i و b_j رسم می‌کنیم. تمام نقاط A را به‌هریك ازنقاط B و C وصل‌می‌کنیم وهمین‌طور هریك از نقاط B را به‌هریك‌از نقاط C متصل‌می‌نمائیم. منظورمسئله، افرازخطوط حاصل به‌مثلثهائی‌مانند $a_i\ b_j\ c_k$ می‌باشد.



الف) هرمثلث $a_i \cdot b_j \cdot c_k$ ازهرقسمت $\{A, B\}$ و $\{B, C\}$ و $\{A, C\}$ دقیقاً یك خط دربردارد.

پس تعداد خطوط بین این قسمت‌ها با هم باید مساوی باشند:

پس،

$$mn=np,\ mn=mp$$

یعنی،

$$m=n=p$$

ب) مثلثها می‌توانند به‌صورت زیر باشند.

$$a_1b_1c_1,\ a_1b_2c_2,\ a_1b_3c_3,\ \cdots,\ a_3b_3c_3$$

جدول زیر بیانگر حل این حالت ازمسئله می‌باشد (a_i و b_j با c_k که ازجدول به‌دست می‌آید تشکیل یك جلسه خواهند داد)

	a_1	a_2	a_3
b_1	c_1	c_2	c_3
b_2	c_2	c_3	c_1
b_3	c_3	c_1	c_2

ج) درحالت کلی نیز کافیست مثلاً ازجدول زیراستفاده کنیم

	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
b_1	c_1	c_2	c_3	$\cdots$	c_{n-1}	c_n
b_2	c_2	c_3	c_4	$\cdots$	c_n	c_1
b_3	c_3	c_4	c_5	$\cdots$	c_1	c_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
b_n	c_n	c_1	c_2	$\cdots$	c_{n-2}	c_{n-1}

در داخل این‌جدول درهر سطرهیچ c_i تکرارنشده است وهمین طور درهرستون.

برای هر دونفر a_i و b_j، c_k را از جدول پیدا کرده و جلسه $a_ib_jc_k$ را تشکیل می‌دهیم.

خوانندگانی که حل مسایل شماره ۲۹ را برای مجله فرستاده‌اند

خانم الهام‌مقدم راد، دانش‌آموز، تبریز ۸

آقای واحد نورزاده، دانشجو، تبریز ۹

آقایان آرش یاوری و محمدرضا تجلی، بندرعباس وسمنان ۳–۸–۹–۱۰

آقای رضا سهند، دیپلمه، ارومیه ۸–۹

آقای علی‌زرع چارکی، دانش‌آموز، تبریز ۸

آقای محمدانصاری، دانش‌آموز، گچساران ۷–۸

آقای شهرام حاتمی، دانشجو، بروجرد ۱–۲–۳–۹

آقای علیرضا نوری، سرباز وظیفه، تهران ۷–۸–۹–۱۰

آقای شهرام معطرمحمدی، دیپلمه، تهران ۱–۲–۴–۹–۱۰

آقای اکبر شاهسوران، دانش‌آموز، بروجرد ۱–۳–۴–۷–۸–۹

●

خوانندگانی که حل مسایل شماره ۳۱ را برای مجله فرستاده‌اند

آقای آرش طبیعی‌آذر، دیپلمه، تبریز ۲–۵–۸–۹

آقای حسین پیرهادی، دانشجو، تهران ۲–۵–۶–۸–۹–۱۰

آقای واحد نورزاده، دانشجو، تبریز ۱۰

آقای غضنفر جلالی، هفشجان ۵–۶–۸–۹–۱۰

آقای حسین رستمی، آشتیان ۵–۹–۱۰

آقای مهدی اسدی، دانشجو، تبریز ۴–۵–۹–۱۰

آقای محمدحسن خالدی، دانشجو، مشهد ۵–۹–۱۰

آقای ارشام برومند سعید، دانش‌آموز، کرمان ۲–۷–۱۰–۱۵

آقای فرشید شعبانی، دانشجو، نوشهر ۱–۵–۶–۸–۹–۱۰

آقای مهدی عسکریه، دانش‌آموز، اصفهان ۲–۸–۹

خانم مریم میرزاخانی، تهران ۳–۶–۷–۸–۹

آقای یوسف نظری‌گنجه‌لو، دانشجو، تبریز ۵–۱۰

آقای رضا سهند، ارومیه ۱۰

آقای بهنام کامرانی، دانش‌آموز، کرج ۵–۶–۸–۹

آقای حمیدرضا شهریاری، دانش‌آموز، شهرکرد ۸

آقای محمدرضا غباری، دانش‌آموز، بروجرد ۸

آقای علیرضا نوری، سرباز، تهران ۵–۶–۸–۹–۱۰

آقای عزیزالله آزادمنش، دانشجو، کرمان ۵–۱۰

آقای امیرعطاصهبایی، تهران ۵–۶–۸–۱۰

آقای علی سلیمانی، کاشان ۵–۸–۱۰

●

جواب نامه‌ها

آقای حسین نوروزی، دانش‌آموز، تفرش
ضمن آرزوی موفقیت برای شما، روش رسم نیمساز زاویه‌ای که ارائه داده‌اید صحیح است. امیدواریم همچنانکه نوشته‌اید، در رشته ریاضی به تحصیلات خودتان ادامه دهید.

خانم راحله نظری، دانش‌آموز، رشت
جواب کامل به سؤال آقای امیر شقاقی مستدلاً توسط فرد دیگری، حتی برای هر عدد فردی به‌جای ۳، ارسال شده که بزودی چاپ خواهد شد. از توجه شما متشکریم.

آقای وحید رشدی، دانش‌آموز، تبریز
با تشکر از مسئله ارسالی شما، در صورت لزوم از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای علی. ق، اصفهان
با تشکر از شما پیشنهادات اصلاحی شما را با مسئولین ذی‌ربط درمیان گذاشتیم امیدواریم نظریات شما تأمین بشود.

آقای رحیم علیزاده، دانش‌آموز، بابل
با تشکر از مسایل ارسالی شما، به موقع از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای ناصر شتابنده، دانشجو، شیراز
با تشکر از شما، مسایل ارسالی تان را دریافت کردیم

آقای حمیدرضا عسگر، دانش‌آموز، الیگودرز
با تشکر از شما، مسایل ارسالی تان را دریافت کردیم.

آقای عیسی عباسی، دانش‌آموز، تبریز
با تشکر از شما، مسایل ارسالی تان را دریافت کردیم.

آقای رضا ساغری، دانش‌آموز، بندرعباس
ضمن تشکر، مطلب شما را در باره اینکه مساحت مثلث فیثاغورثی هرگز نمی‌تواند مربع کامل باشد دریافت کردیم.

آقای محمد یوسفی نژاد، دانش‌آموز، رودسر-املش
ضمن تشکر از شما مطلب شمارا تحت عنوان «شگفتیهای اعداد» را دریافت کردیم. همان‌طور که خودتان نوشته‌اید چون همه آنها در جزوات کنکور درج گردیده، درج دوباره آن در مجله رشد قابل تأمل است.

آقای عباس محمدی، دانش‌آموز، باختران
نامه شما را که حاوی یك مسئله بود دریافت کردیم.

آقای پویا باقری، دانش‌آموز، شیراز
با تشکر از شما، مقاله شمارا «برای به‌دست آوردن مجذور یك پاره‌خط» دریافت کردیم. روشهای دیگری هم وجود دارد.

آقای علی‌اصغر پورحاجی‌کاظم، دانش‌آموز چهارم ریاضی، تبریز
راه‌حل مسائل ارسالی شما دیر به دستمان رسید و لهذا، نتوانستیم از راه‌حل شما استفاده کنیم. درضمن، چون مسائل ویژه دانش-آموز، همراه با راهنمایی، درمجله درج می‌شود، معمولاً حل آنها را در مجله نمی‌آوریم.

آقای مهدی آب‌خو، هنرجوی سال چهارم برق هنرستان، میانه
بهتر بود که برای قاعده خود برهانی ارائه می‌دادید. درضمن، دستور شما برای محاسبه یك عدد به‌توان ۲، بسیار مشکل است و اگر اعداد را بتوان ۲ برسانیم وقت کمتری خواهد گرفت.

آقای مهران یکالی‌جری، دانش‌آموز، اصفهان
مطالب ارسالی شما جالب بود. اگر شما برای روابط عددی خود برهان کاملی ارائه

جواب نامه‌ها

می‌دادید از نظر ریاضی با ارزش می‌شد، بطور کلی در ریاضیات، با محاسبه چند عدد، نمی‌توان یك حکم کلی را نتیجه گرفت

آقای قربانعلی عالیشاهی، دانش‌آموز مازندران

ذیلاً خلاصه نامه شما را جهت اطلاع خوانندگان درج می‌کنیم تا تذکر شما در مورد این استدلال مورد استفاده دانش‌آموزان قرار گیرد.

«ادعا می‌کنیم که $4=3$ کجای استدلال ذیل نادرست است؟»

حل. می‌دانیم که

$$-12=-12$$

$$9-21=16-28$$

$$9-2\times\frac{7}{2}\times3+\left(\frac{7}{2}\right)^2=16-2\times\frac{7}{2}\times4+\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$\left(3-\frac{7^2}{2}\right)=\left(4-\frac{7}{2}\right)^2$$

$$3-\frac{7}{2}=4-\frac{7}{2}$$

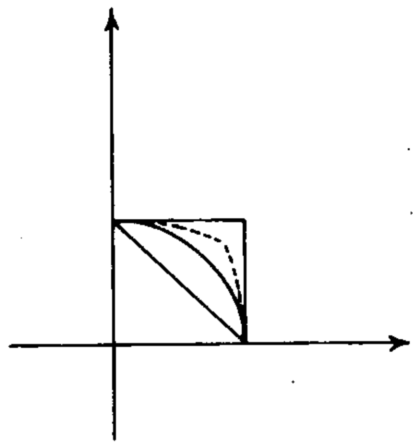
$$3=4$$

آقای غضنفر مددی، گرگان

جهت اطلاع خوانندگان خلاصه نامه شما را درج می‌کنیم

نمودار $x^n+y^n=r^n$ را، وقتی که $x>0$ و $y>0$ رسم کنید

حل. اگر $n=1$ یك خط است، به ازای $n=2$، ربع دایره است وهر چه n افزایش یابد، نمودار به مربع نزدیك می‌گردد



آقای حسین زابلی، دانش‌آموز یاسوج

برهانی که برای آخرین قضیه فرما فرستاده‌اید درست نیست. بارها این تذکر را داده‌ایم که قضیه فرما یکی از مسائلی است که سالهای سال به عنوان مسئله بازمطرح است و با روشهای مقدماتی نمی‌توان به این مسئله جواب داد.

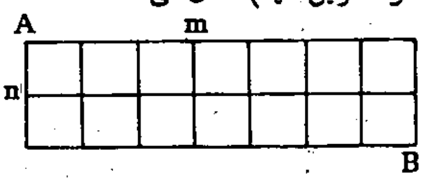
آقای منصور خضرائی منش، مشهد

نامه مفصل وانتقادآمیز شما را مبنی بر اینکه درمجله مقالاتی درباره توپولوژی، هندسه نااقلیدسی، گزاره‌هایی از نوع گزاره گودل و... آورده نمی‌شود، دریافت کردیم. با تشکر از شما که علاوه بر این مطالب، مسایل وسؤالاتی را هم مطرح کرده‌اید، یادآور می‌شویم که:

سعی خواهیم کرد در این موارد درحد مجله مطالبی درج کنیم. اما کاش خود شما هم به‌جای اینکه چهارصفحه بزرگ را از مطالبی که به‌قول شما در کتاب دیگران چاپ شده برای ما بفرستید ومسایلی را برای ما طرح کنید که آنها را حل کنیم (هیئت تحریریه چنین فرصتی را ندارند.) یارما می‌شدید ومقاله‌ای درباره یکی از این مطالب برای ما می‌فرستادید.

اما در مورد اثبات قضیه فیثاغورث، مطلب مفصلی در مجله درج شده که نوشته شما یکی ویا نتیجه‌ای از یکی از آنها می‌تواند باشد.

درمورد فرمول $\frac{m+n}{m!n!}$ هم که ادعا دارید درمستطیل $m\times n$ درباره تعداد راههای ممکن برروی خطوط شبکه از A به B (در کوتاهترین آنها) صدق می‌کند



هم توضیح بیشتری لازم است و هم فرمول احتیاج به‌اثبات دارد.

وبالاخره اصل پئانو چنین است:

حدود اولیه: مجموعه مانند S وشیئی، که به «۱» نمایش می‌دهیم، وتالی x را به x' نمایش می‌دهیم، واینها سه حد اولیه‌اند و اصول آن به‌شرح زیر است:

۱) $1\in S$.

۲) به‌ازای هر $x\in S$ یك وتنها یك x' موجود است که $x'\in S$.

۳) عدد یك تالی هیچ عضو S نیست.

۴) به‌ازای هر x و y از S، اگر $x'=y'$ آنگاه $x=y$.

۵) (اصل موضوع استقراء) فرض کنید

که زیرمجموعه T از S دارای خواص ذیل باشد:

(الف) $1\in T$؛

(ب) بهازای هر x از S، اگر $x\in T$ آنگاه $x'\in T$. دراین صورت، $T=S$.

هرعضو S را یك عدد طبیعی میخوانند.

تحلیل اصول موضوعه پئانو؛ اصل موضوع اول بدین معنی است که $S\neq\varphi$ وشیئی «۱» بیشترجنبه اصطلاح دارد ومیتوان آن را با نماد «α» نمایش داد واصل موضوع دوم وسوم وچهارم بدین معنی است که تابعی بر S بتوی S مانند f موجود است که $x'=f(x)$ (که آن را تالی x مینامیم) و $f(x)\neq 1$ و f تابعی یك به یك است. اصل موضوع پنجم حکم بهاین میکند که $f(T)\subseteq T$.

اصول موضوعه پئانو دستگاه واحدی(۱ مشخص نمیکند. در میان زیرمجموعههای R، زیرمجموعههای بیشماری هست که در اصول موضوعهٔ پئانو صدق میکندکه یکی ازآنها مجموعه اعداد طبیعی است که

$$f(n)=n+1$$

همچنین اگر $S=\{m, m+1, \dots\}$ و «۱» بهمعنی m باشد و $f: S\to S$ با ضابطه $f(n)=n+1$ در اصول موضوعهٔ پئانو صدق میکند. اگر

$$S=\{\dots, -2, -1\}$$

و «۱» بهمعنی عدد حقیقی ۱- باشد و

$$f(n)=n-1$$

این نیز در اصول موضوعه پئانو صدق میکند.

آقای مهریار فروزانمهر، دانشآموز، اراك

با تشکر، نامه شما را که حاوی چند مسئله بود دریافت کردیم. ازاینپس برایمسایلی که میفرستید راهحل ومأخذ هم بفرستید.

آقای محمدرضا افسرده دل، دانشآموز، ملایر

برای اینکه ثابت کنید

$$x^5+2x^3+x=0$$

تنها ریشه صفر دارد. کافیست ازتابع

$$f(x)=x^5+2x^3+x$$

مشتق بگیریدکه همواره مثبت میشود. پس تابع همواره صعودی وفقط یك ریشه صفر دارد.

آقای آرش گرامینژاد

مسائل بهاصطلاح مبارزهطلب شما را مشاهده کردیم وبهسادگی توانستیم دومسئلهاز مسائل ارسالی شما را حل کنیم و دریافتیم که چندان هم مبارزهطلب نیستند؛ ما حل دو مسئله را برایتان ارسال میداریم تا شایدنسبت بهتصمیمی که گرفتهایدتجدیدنظر کنید. زیرا، چنین تصمیمی ممکن است برایتان مشکلات مادی به همراه داشته باشد.

حل مسئله ۱. حاصلجمعهای $\sum\alpha_i$، $\sum\alpha_i^4$ ازحیث زوجیت یکسانند؛ یعنی اگریکی از آنها فرد ویا زوج باشد دیگری نیز چنین است. بنابراین، حاصلجمع دوسیگما بر ۲ بخشپذیراست واگر i ای موجود باشد که $\alpha_i\geqslant 2$، حاصلعدد اولی نیست؛ مگر آنکه

$$\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=1,$$

که در چنین حالتی،

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^4=2$$

وچنین حالتی امکانپذیر نیست.

حل مسئله ۲. چون

$$\sqrt[n]{\alpha\cdot\beta-\gamma}\leqslant\sqrt[n]{36}$$

پس اگر n عدد بزرگی باشد آنگاه عدد فوق صحیح نیست. بالنتیجه، n برابر ۳ یا ۵ است که برای حالتها ممکن میتوان میتوان مسئله را بررسی کرد.

آقای علی صفری، دانشجو، اراك

قضیه که ثابت کردهاید تازگی ندارد و بسیار سادهتر اثبات میشود. ضمناً برنامه شما برای تعیین تعداد مقسومعلیهها نیاز به اصلاحاتی دارد، مثلاً بهازای $n=16$

آقای یاسین میار، دانشآموز، کرج

نامه شما قرائت شد وبه هیأت مؤلفان کتب ریاضی دبیرستان ارجاع گردید تا در صورت امکان جوابهای عددی مسائل را در انتهای هرمسأله درج نمائید.

آقای آرتا امیرجمشیدی، دانشآموز، تبریز

عدد نپر راکه بهکمك کامپیوتر تا صد رقم اعشار حساب کرده و ارسال داشتهاید جهت اطلاع خوانندگان درج میکنیم. امیدواریم که همواره موفق باشید.

اطلاعیه

دربارهٔ نشریات رشد آموزش تخصصی

مجلات رشد آموزش مواد درسی مدارس کشور که به منظور ارتقاء سطح دانش معلمان و ایجاد ارتباط متقابل میان صاحبنظران، معلمان و دانشجویان با برنامه‌ریزان امور درسی از سوی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کُتب درسی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش هر سه ماه یکبار ــ چهار شماره در سال ــ منتشر می‌شود و در حال حاضر عبارتند از:

۱ ــ آموزش ریاضی ۳۴
۲ ــ آموزش شیمی ۲۹
۳ ــ آموزش جغرافیای ۲۸
۴ ــ آموزش ادب فارسی ۲۸
۵ ــ آموزش زیست‌شناسی ۲۶
۶ ــ آموزش زبان ۲۹
۷ ــ آموزش زمین‌شناسی ۲۴
۸ ــ آموزش فیزیک ۲۷
۹ ــ آموزش معارف اسلامی ۱۵
۱۰ ــ آموزش علوم اجتماعی ۱۰

دبیران، دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر علاقه‌مندان به اشتراک این مجلات می‌توانند جهت دریافت چهار مجله در سال مبلغ ۸۰۰ ریال به حساب ۹۰۰۵۷ نزد بانک ملی شعبه خردمند جنوبی ـ قابل پرداخت در کلیهٔ شعب بانک ملی ـ واریز و فیش آن را همراه با فرم تکمیل شده زیر به نشانی تهران، جاده آبعلی، خیابان سازمان آب، بیست‌متری خورشید، مرکز توزیع انتشارات کمک آموزشی کد پستی ۱۶۵۹۸ ــ تلفن ۷۷۵۱۱۰ ــ ارسال دارند. ضمناً: معلمان، کارشناسان، مدیران، پژوهشگران و سایر علاقه‌مندان به امور تعلیم و تربیت جهت آگاهی بیشتر از یافته‌های صاحبنظران می‌توانند با پرداخت مبلغ ۸۰۰ ریال در هر سال ۴ جلد **فصلنامه تعلیم و تربیت** دریافت نمایند.

مجلات رشد تخصصی در مراکز استان در کتابفروشیهای زیر و سایر شهرستانها در فروشگاههای معتبر مطبوعات بصورت فروش آزاد عرضه می‌شود

- تهران: انتشارات مدرسه ــ اوّل خیابان ایرانشهر شمالی
- اهواز: کتابفروشی ایرانپور زیتون کارمندی خیابان کمیل بین زاویه و زهره پلاک ۲۰
- اصفهان: کتابفروشی مهرگان چهار باغ ابتدای سید علی خان
- ارومیه: کتابفروشی زینالپور نمایندگی و خبرنگاری روزنامه
- اراک: کتابفروشی گنج دانش بازارچه امیرکبیر
- بندرعباس: کتابفروشی مالوک خیابان سید جمال الدین اسدآبادی
- باختران: کتابفروشی دانشمند خیابان مدرس مقابل پارکینگ شهرداری
- خرم‌آباد: کتابفروشی آسیا خیابان شهدا شرقی
- رشت: کتابفروشی فرهنگستان خیابان نامجو جنب دانشگاه
- زنجان: کتابفروشی شهید بهشتی خیابان آیت‌ا... طالقانی
- سنندج: کتابفروشی شهریار خیابان فردوسی
- ساری: شرکت ملزومات و معارف خیابان انقلاب روبروی اداره برق داخل کوچه
- شیراز: پیام قرآن میدان شهدا جنب اداره آموزش و پرورش مرکز فرهنگی
- کرمان: فرهنگ‌سرای زمین پارک مطهری
- مشهد: انتشارات آستان قدس رضوی خیابان امام خمینی روبروی باغ ملی
- یاسوج: کتابفروشی فرهنگ جنب سینما دنا خیابان شهید هرمزپور.

٭ دانشجویان مرکز تربیت معلم می‌توانند با ارسال فتوکپی کارت تحصیلی خود از ۵۰٪ تخفیف برخوردار شوند.

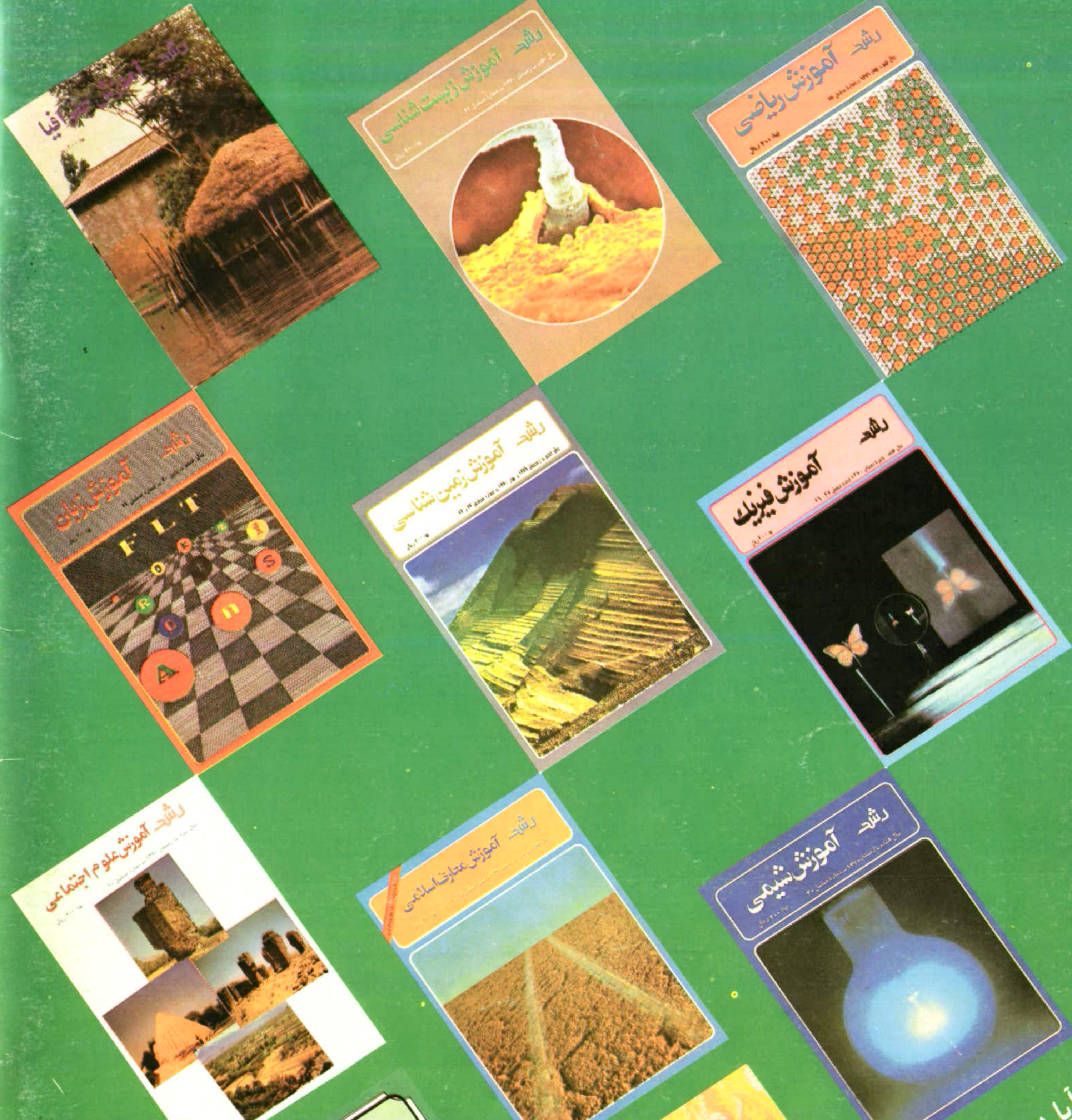
فرم اشتراک مجلات رشد تخصصی

اینجانب .... با ارسال فیش واریز مبلغ ۸۰۰ ریال، متقاضی اشتراک یکسالهٔ مجلهٔ رشد آموزش .... هستم.

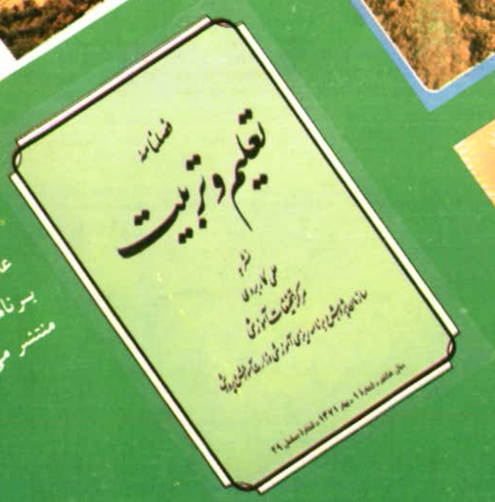
نشانی دقیق متقاضی: استان .... شهرستان .... خیابان ....

کوچهٔ .... پلاک .... کُدپستی .... تلفن ....

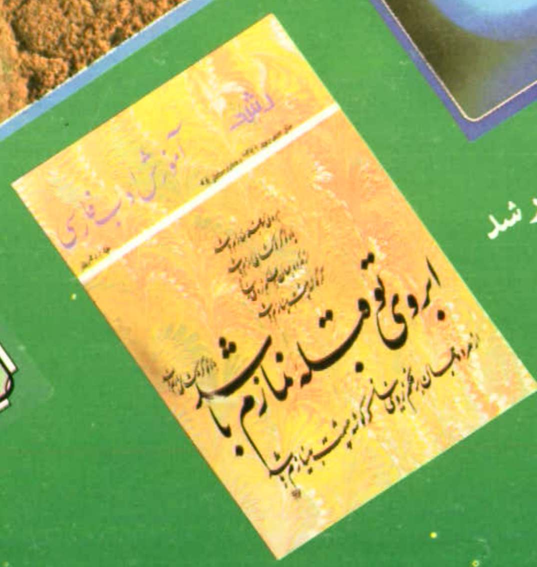

نخستین کنفرانس آمار ایران
۵ تا ۷ خرداد ۱۳۷۱
دانشگاه صنعتی اصفهان
با همکاری انجمن آمار ایران
$P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq a\right) \longrightarrow \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$
FIRST IRANIAN
STATISTICS
CONFERENCE
26-28 May 1992
1992
ISFAHAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



رشد آموزش جغرافیا
رشد آموزش زیست شناسی
رشد آموزش ریاضی
رشد آموزش زبان
رشد آموزش زمین شناسی
رشد آموزش فیزیک
رشد آموزش علوم اجتماعی
رشد آموزش معارف اسلامی
رشد آموزش شیمی



تعلیم و تربیت



رشد
آموزش ادب فارسی