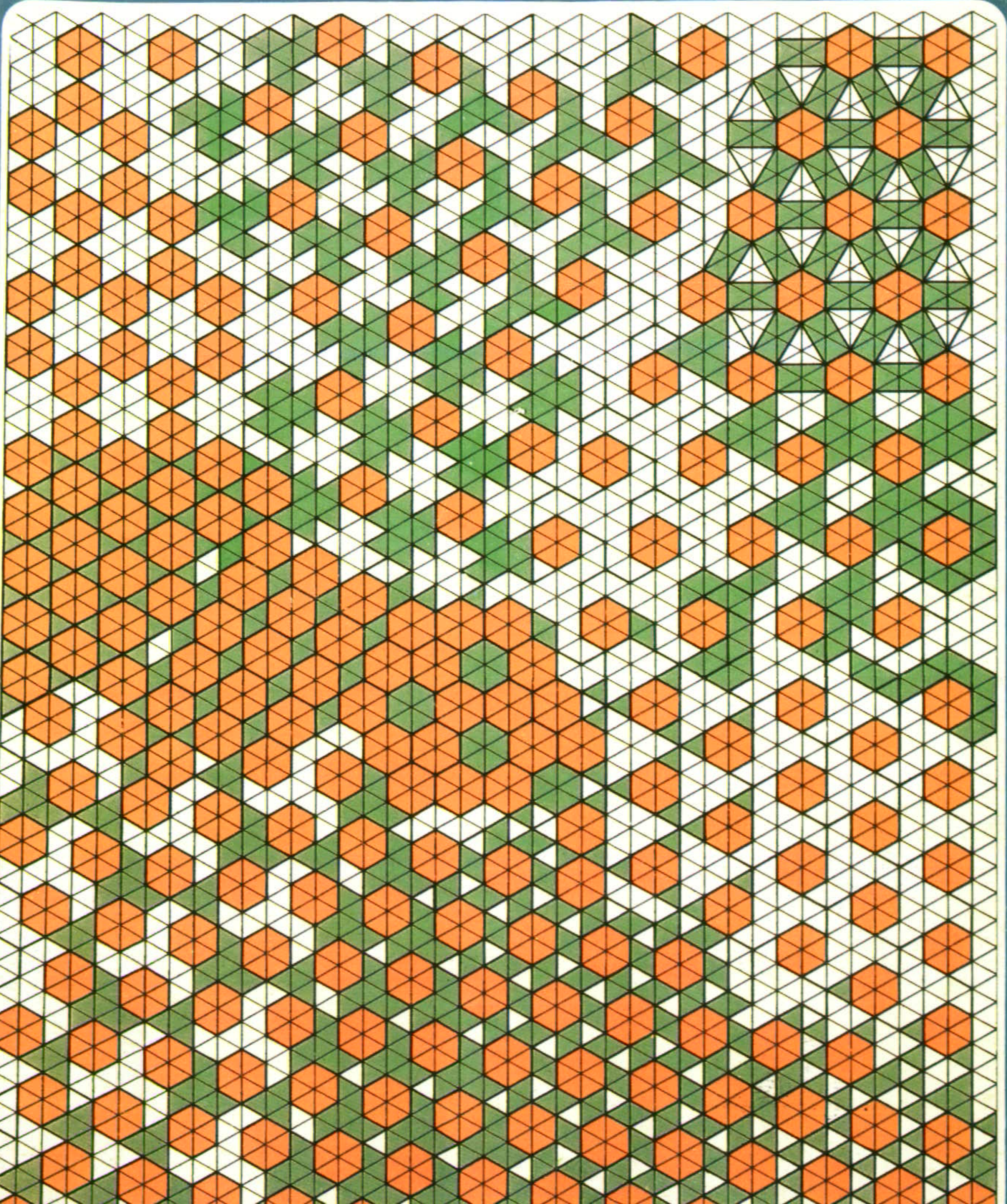
# رشد آموزش ریاضی

سال نهم - بهار ۱۳۷۱ - شمارهٔ مسلسل ۳۳

بها: ۲۰۰ ریال



بسم‌الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یکبار از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی منتشر می‌شود هدف از انتشار این مجله اعتلای دانش ریاضی دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلّم است. علاوه بر این ایجاد ارتباط متقابل بین معلّمین ریاضی و دفتر برنامه‌ریزی، به‌منظور تبادل تجارب، ارائه روشهای جدید آموزش ریاضی، معرفی جنبه‌های تاریخی، فلسفی، کاربردی ریاضیات در سطح پیش دانشگاهی است.هیأت تحریریه از مشارکت و همکاری همهٔ علاقه‌مندان بویژه دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان در ارائه مقالاتی در زمینه‌های زیر استقبال می‌کند:

الف) آموزش ریاضی (طرح و بررسی آموزش ریاضی، بویژه آموزش ریاضی در دوره‌های پیش دانشگاهی).

ب) تاریخ ریاضی (مشتمل بر سیر تحول مفاهیم ریاضی، شرح و احوال ریاضیدانان و کارهای علمی آنها، بویژه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی).

ج) فلسفه ریاضی (تبیین مفاهیم ریاضی، ریاضیات چیست، بررسی مکاتب ریاضی، بررسی ارتباط تاریخ و فلسفه ریاضی).

ریاضی کاربردی (مشتمل بر مباحثی در زمینه‌های آنالیز عددی، کامپیوتر و برنامه‌ریزی، تحقیق در عملیات، آمار و احتمال).

د) سایر مباحث ریاضی (مشتمل بر مقالات مختلفی در زمینه‌های مختلف، ارائه راه‌حلهای مختلف برای مباحث ریاضی، ارائه مسائل نمونه).

رعایت نکات زیر در مورد مقالات ارسالی ضروری است:

۱) مقالات ارسالی باید در چهارچوب اهداف فوق و با سبکی مشابه با سبک مقالات چاپ شده در رشد ریاضی باشد و در سطحی عرضه شوند که ضمن داشتن محتوی مطلوب دارای کیفیت عرضه مطلوب هم باشند؛

۲) مقالات باید با خط خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) و به صورت یک سطر در میان و با در نظر گرفتن جای کافی در حاشیه تهیه شود و صفحات به طور دقیق شماره‌گذاری شود؛

۳) فهرست مراجع مقاله به طور کامل و در دو قسمت فارسی و خارجی و به ترتیب الفبایی و طبق استاندارد مقالات علمی درج شود؛

۴) مقالات ترجمه شده از زبانهای خارجی همراه با متن اصلی ارسال شود؛

۵) مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور به چاپ رسیده باشد؛

۶) رد یا قبول و حک و اصلاح و ویراستاری مقالات به عهدهٔ هیأت تحریریه است.

# رشد آموزش ریاضی

**سال نهم ــ بهار ۱۳۷۱ ــ شمارهٔ مسلسل ۳۳**
**نشریهٔ گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تلفن ۴ ــ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۵۰)**

**سردبیر:** دکتر علیرضا مدقالچی
**مدیر داخلی:** میرزا جلیلی
**مسوول هماهنگی و تولید:** فتح‌ا... فروغی
**امور فنی، صفحه‌آرا و رسام:** محمد پریسای
**دستیار ناظرچاپ:** محمد کشمیری

*مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر دانش‌پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. جهت ارتقاء کیفی آن نظرات ارزنده خود را به صندوق پستی تهران ۳۶۳ ــ ۱۵۸۵۵ ارسال فرمایند.*


فهرست



بسم الله الرحمن الرحیم

## پیشگفتار

مجله رشد آموزش ریاضی امسال نهمین سال آغاز خود را شروع می کند. ۸ سال فعالیت مستمر، که متضمن ارتباط مستقیم با دانش آموزان و دبیران ریاضی سراسر کشور می باشد. در طی این سالها، غالب اعضای هیأت تحریریه در کنفرانسهای ریاضی استانی، در کنفرانسهای ریاضی سالانه انجمن ریاضی ایران، از طریق ایراد سخنرانیها، یاشرکت درمیز گردها بادبیران محترم ریاضی پیرامون مسائل آموزشی ریاضی، برنامه‌ریزیها و بخصوص محتوای مجله به بحث و تبادل نظر نشسته‌اند.

جلسات هفتگی مجله تقریباً بدون وقفه، در گروه ریاضی دفتر برنامه ریزی و تألیف کتب درسی تشکیل می شود. پیش از شروع مباحثات رسمی پیرامون مقالات رسیده، مدیر داخلی مجله، نامه‌ها و مقاله‌های واصله را توزیع می کند. غالب نامه‌ها، متضمن عبارات و کلماتی است که همگی اعضای هیات تحریریه راخشنود و دلگرم می کند. باسلام و احوالپرسی وخسته نباشید نامه‌ها شروع می‌شود. سپس به اظهار نظر پیرامون مباحث ریاضی، ارائه مسئله و پیشنهادهای آموزشی واحیاناً ارائه مقاله‌ای می انجامد.

صرفنظر از تبادلات نوشتاری وحضوری با همکاران محترم دبیر، دانش آموزان علاقه‌مند به علوم ریاضی، بعضاً مطالبی پیرامون محتوای مجله اظهار می گردد. هدف هیات تحریریه ارائه مطالب متنوع ریاضی در چار چوب اهداف تعیین شده می باشد.

# مصاحبه با یک دبیر ریاضی

من شغل‌معلمی را انتخاب کردم زیرا پیغمبر اسلام نیز معلم بزرگ بشریت بود

آقای امام‌جمعه‌زاده از سال ۱۳۳۷ به‌عنوان دبیر ریاضی به‌تدریس ریاضیات در اصفهان و در شهرستانهای این استان مشغول بوده اند. مشاغل اجرایی که ایشان به عهده داشته‌اند شامل مسئول آموزش و پرورش ناحیه ۲ اصفهان، معاونت آموزش و پرورش استان اصفهان: مسئول دفتر تیزهوشان استان می‌باشد. ذیلاً مصاحبه‌ای را که هیات تحریریه مجله با ایشان داشته است درج می‌گردد.

## ۱- چرا شغل معلمی را اختیار کرده‌اید؟

**آقای امام‌جمعه‌زاده:** لازم به ذکر است معلمی بیش از آنچه یك شغل باشد یك‌ذوق است و افراد ذاتاً و فطرتاً به‌این شغل علاقمند هستند. این شغل کار انبیاء و اولیاء است و خداوند در قرآن میفرماید «یعلمکم الله» پس خداوند تعلیم دهنده ومعلم بشر است وپیغمبر اسلام نیزمعلم بزرگ بشریت بود و اساس دین اسلام برتعلیم و تربیت ورشد وتکامل بنا نهاده شده من‌نیز به‌لحاظ اینکه درخانواده مذهبی وروحانی بزرگ شده‌ام به‌این‌شغل علاقه‌مندبودم وهمیشه به‌دوستان می‌گفتم آرزو دارم معلم بشوم ضمناً عامل دیگرمرحوم پدرم بودند ومعتقدبودند حال که روحانی نشده‌ام شغل معلمی را که در همان مسیرحرکت دارد انتخاب نمایم و چنین نیزشد. ناگفته نماندکه درآن زمان هنوزشغل‌معلمی جاذبه‌مناسبی‌داشت‌ومعلمین ازموقعیت‌اجتماعی‌نسبتاً مناسبی برخوردار بودند لازم به‌ذکر است باهمه مشکلات و محرومیتهائی که در این موقعیت برای طبقه معلم وجود دارد وشامل حال‌من نیز می‌شود. هنوز به این شغل علاقمند می‌باشم و به‌لحاظ داشتن شغل معلمی احساس غرور می‌نمایم.

## ۲- برای جلب افراد به‌حرفه معلمی ریاضی چه‌راهنمائی‌های را پیشنهاد می‌کنید؟

**امام جمعه‌زاده:** همان‌طوری که گفتم افراد ذاتاً به‌کار معلمی علاقمند وآن‌را یك وظیفه‌الهی وشرعی‌خود می‌دانندلذا موارد زیر را پیشنهاد می‌کنم.

الف) مسئولین محترم آموزش‌وپرورش بیش از پیش‌باید اهمیت‌این شغل‌واثری‌که کارمعلم می‌تواند درجامعه‌بگذارد وارزش والای این شغل مقدس را درجامعه مطرح وازصحبتها وکارهائی‌که لطمه به‌این شغل می‌زند جداً خودداری نمایند.

ب) مسئولین محترم آموزش وپرورش عملاً نیز باید باتغییرفاحش‌حقوقها ومزایای مادی علاقه‌مندی خود را به‌این وظیفه مهم نشان بدهندووسیله رفاه‌نسبی‌معلم‌رادرجامعه فراهم نمایند.

ج) از هرگونه تبعیض بین کارمندان وزارتخانه‌ها ونهادها خودداری نموده وبا توجه به‌وظیفه افراد و اهمیت وحساسیت شغل ولیاقت افراد به‌آنها توجه گردد.

د) با تشکیل کلاسهای مختلف در دانشگاهها سطح‌علمی ومعنوی معلمین‌را بالا ببرند.

ه) باتوجه به‌اینکه هرچه ارزش علمی معلم‌بیشتر باشد بین‌دانش‌آموزان ازشهرت واعتبار بیشتری برخوردار میشود لذاعلاوه برتعهد اخلاقی اسلامی درانتخاب معلم استعداد ومعلومات‌کاملاً مدنظر باشد و از افراد ضعیف باسوادهای پائین دراین‌شغل استفاده نگردد.

و) برای شناخت‌معلمین وبرنامه‌ریزهای آموزشی وسیله مسافرت به کشورهای پیشرفته فراهم‌گردد تا معلمین‌صاحب‌نظر در مسائل‌آموزشی باآشنا شدن به‌آموزشهائی که درآنجا هست در جهت‌کم‌شدن افت تحصیلی وارتقاء علمی‌دانش‌آموزان‌قدمهای مؤثری بردارند.

## ۳- تاچه حدی فن معلمی‌را ذاتی وتا چه اندازه اکتسابی می‌دانید؟

**امام‌جمعه زاده:** واضح است فردی در این‌شغل موفق است‌که عشق و علاقه داشته باشد ولی مطمئناً کسب معلومات وآمادگی معلم‌برای جوابگوئی وهدایت علمی‌دانش‌آموزان بسیار ضروری است.

## ۴- کتابهای ریاضی دبیرستانی چه نقائصی دارند؟

**امام‌جمعه‌زاده:** به این پرسش بیشتر افرادی باید جواب دهندکه از آموزش ریاضی دردنیا باخبرهستند منتهی بایدگفت با توجه به استعدادهای مختلفی‌که دانش‌آموزان دارند و آمادگی برای آموزش ریاضی متفاوتی‌که درآنها هست باید در تهیه‌کتاب تفاوتهای فردی دانش‌آموزان درنظرگرفته شود وباتوجه به‌ضرورتهای

علمی که اجتماع دارد مجله‌های دیگری مانند رشد ریاضی در اختیار معلمین و دانش‌آموزان قرار گیرد تا علاقه به مطالعه در آنها بوجود آید ضمناً در نوشتن کتابهای ریاضی از دبیران سرشناس و مجرب استفاده کامل گردد.

**۵ـ به‌طوری که می‌دانید هر تحول در برنامه‌های ریاضی دبیرستانی بالاخص در کشور ما ایجاب می کند که دبیران ریاضی خود را با آن تحولات منطبق سازند نحوه اجرای آن را چگونه پیشنهاد می کنید؟**

**امام جمعه زاده :** مسلماً معلمین بالاخص معلم ریاضی باید با مطالب جدید و پیشرفته دنیا آشنا گردند تا بتوانند برای دانش‌آموزان در موارد مختلف راهنمای خوبی باشد و این کار با آموزش دبیران ریاضی به‌طور مستمر و با در اختیار گذاشتن جزوات علمی و تشکیل کلاسهای درسی در دانشگاهها انجام می گیرد لکن باید در نظر داشت معلمی که اجباراً هفته‌ای بیش از ۴۰ ساعت کار می کند فرصت مطالعه و رفتن به کلاسها را ندارد و باید عوامل بازدارنده در کار معلم از بین برود.

**۶ـ به‌نظر شما ریاضیات باید چگونه تدریس شود تا ضمن فراهم آوردن انگیزهٔ یادگیری در دانش‌آموزان اولا قضایا را حفظ نکنند بلکه واقعاً یاد بگیرد. ثانیاً طریقه حل مسئله را بیاموزد؟**

**امام جمعه زاده:** در تدریس ریاضی باید رعایت ذوق و استعداد و تفاوتهای فردی دانش‌آموزان بشود و با ایجاد انگیزه‌های مناسب در آنها ذوق یادگیری ریاضی را به‌وجود آورد و از سختگیری در امتحان و دادن سؤالات مشکل و غیرضروری خودداری کرد.

**۷ـ با توجه به اینکه تجربه زیادی درامر تدریس دارید به نظر شما در آموزش مطالب دبیرستانی ارائه آنها به صورت طولی بهتر است یا به‌صورت عرضی؟**

**امام جمعه زاده :** با توجه به رشته‌ای که دانش‌آموز انتخاب می کند باید مطالب ضروری ریاضی به او یاد داد منتهی برای دانش‌آموزان با استعداد که رشته ریاضی را انتخاب می کنند و می‌خواهند بعداً در دانشگاه‌ها رشته ریاضی یا مهندسی را ادامه دهند باید نحوه تفکر در ریاضی را به او یاد داد و سعی گردد. مطالب را به‌طور عمقی یاد بگیرد و بتواند در مطالب ریاضی تفکر کند و تجزیه تحلیل داشته باشد و باید تا حد ممکن و ضروری به‌مفاهیم و تعاریف و نکته‌های ریاضی توجه بیشتر نمود.

**۸ـ نظر شما درمورد مجله رشد آموزش ریاضی چیست؟**

**امام جمعه‌زاده:** همان طوری که مطرح کردم علاوه بر کتاب درسی مجلات و کتابهای جنبی دیگری باید در اختیار دانش‌آموزان باشد تا مطابق استعداد و علاقه و کششی که دارد و با راهنمائی دبیران خود مطالعه نماید و مسلماً این رسالت را درحال حاضر مجله رشد انجام می‌دهد و در بالا بردن سطح علمی دانش‌آموزان مؤثر می باشد و مناسب است در مسابقات علمی و یا مسابقه دیگر مطالب نوشته شده از دانش‌آموزان سؤال و بهترین آنها جایزه بگیرند.

**۹ـ اگر تألیفاتی در ریاضی دارید بیان کنید.**

**امام جمعه زاده:** قبلاً عرض کردم حدود ۱۲ سال در پستهای مختلف اداری مشغول هستم و فقط تعداد چندساعت تدریس دارم ولی جزوه‌ای در ریاضی کاربردی برای دانش‌آموزان فوق دیپلم نوشته‌ام.

**۱۰ـ نظر شما راجع به گنجاندن درس کامپیوتر در دوره متوسطه چیست؟**

**امام جمعه زاده :** درس کامپیوتر هم ضروری و هم مورد توجه دانش‌آموزان است ومطمئناً باید درمتوسطه مورد نظر قرار گیرد.

**۱۱ـ معیار شما برای یک معلم موفق چیست؟ و شما چه‌قدر در کار خود موفق بوده‌اید؟**

**امام جمعه زاده :** معیار من برای معلم خوب داشتن معلومات در رشته خود و داشتن اخلاق اسلامی در برخورد با دانش‌آموزان و داشتن صبر و حوصله واحترام به شخصیت دانش‌آموزان و عدم تبعیض بین آنهاست ضمناً فکر می کنم درمدت ۲۲ سال تدریس کامل و چند ساعتی که در دوران مسئولیت تدریس داشته‌ام موفق بوده‌ام و این مطلب از برخوردی که دانش‌آموزان گذشته من که فعلا پست و مقام مناسبی دارند روشن می‌شود.

**۱۲ـ همانگونه که اظهار شده تغییرات در کتابها الزامی است چه توصیه‌ای برای شورای برنامه‌ریزی ریاضی که مدتی است دست‌اندرکار تدوین کتابهای جدید ریاضی دوره متوسطه می‌باشند دارید؟**

**امام جمعه زاده :** در این باره موارد زیر را پیشنهاد می کنم:

الف) اهداف مختلف از تدریس ریاضی در دبیرستانها مشخص گردد.

ب) در تنظیم مطالب درسی استعداد و توانمندیهای دانش‌آموزان مورد توجه قرار گیرد.

ج) از نظریات معلمین سرشناس و صاحب نظر و موفق ریاضی در کشور استفاده گردد.

د) از کتابهای درسی کشورهای پیشرفته استفاده گردد.

ه) میزان توان و آمادگی دبیران ریاضی بررسی و آموزشهای لازم داده شود.

# پارادوکسها[1] در ریاضیات و علوم

نوشتهٔ: مارتین گاردنر
ترجمهٔ: حسن نصیرنیا

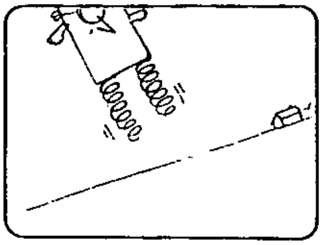
**اشاره:**

پارادوکسها در ریاضیات، همچون در علوم، می‌توانند بسیار فراتر از لطیفه باشند و به پیدایش بینشهایی ژرف منجر شوند. برای اندیشمندان متقدم یونانی‌یك پارادوکس زحمت‌افزا آن بود که قطر مربعی به ضلع واحد را نمی‌توان حتی با خط‌کش مدرج بسیار ظریف به‌درستی اندازه گرفت. این حقیقت دردسرآفرین‌قلمرو پهناور نظریهٔ اعداد اصم را کشف کرد. در نظر ریاضیدانان قرن نوزدهم آنچه بسیار پارادوکسی می‌نمود این بود که همهٔ عضوهای یك مجموعهٔ نامتناهی نمی‌توانند با عضوهای یکی از زیر مجموعه‌های آن‌در تناظر یك به یك قرار بگیرند لهذا دو مجموعهٔ نامتناهی وقتی می‌توانند وجود داشته باشند که عضوهای آنها را نشود در وضعیت تناظر یك‌به‌یك نهاد. این پارادوکسها به پیدایش نظریهٔ جدید مجموعه‌ها منجر گردید و این نظریه نیز تأثیری قوی بر فلسفهٔ علوم گذاشت. پارادوکسها می‌توانند بسیار آموزنده باشند. پارادوکسها، مانند حقه‌های شعبده‌بازی، آن چنان شگفت‌آورند که آدمی بدون درنگ‌می‌خواهد ازچگونگی انجام آنها آگاه بشود. شعبده‌بازان هرگز کم و کیف کار خود را آشکار نمی‌کنند، اما ریاضیدانان هیچ نیازی به حفظ اسرار ندارند.

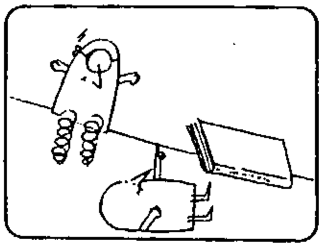
***

## نظام رمزنگاری و رمزگشایی‌شگفت‌آور

روزی‌دکتر زتا دانشمندی از اهالی هلیکس، کهکشانی‌در «بعد جای‌ـگاه»[2] خارج از کهکشان ما ــ به دیدار زمین آمد تا اطلاعاتی دربارهٔ‌انسانها به‌دست آورد. میزبان او دانشمندی امریکایی موسوم به هرمان بود.



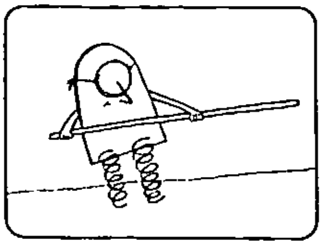
هرمان: چرا یك دورهٔ کامل از دایرةالمعارف بریتانیکا را که شامل خلاصه‌ای عظیم از معارف ماست، با خود نمی‌برید؟



**دکتر زتا:** فکر بسیار خوبی است، هرمان. ولی متأسفانه من نمی‌توانم چیزهایی با این حجم زیاد را با خود حمل کنم.

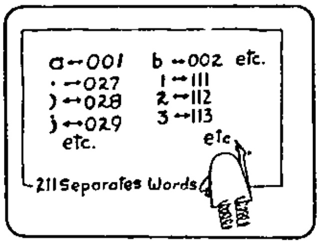
**دکتر زتا:** اما من می‌توانم تمامی محتوای دایرةالمعارف را به صورت رمز درآورم و آن را روی این میلهٔ فلزی منتقل کنم. یك علامت روی این میله هست که شگرد کار در آن نهفته است.

**هرمان:** دارید مزاح‌می‌کنید؟ چطور

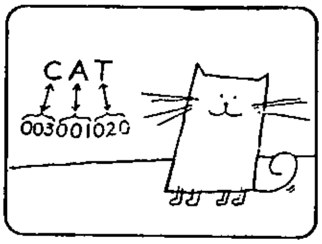


ممکن است یك علامت کوچك این‌همه اطلاعات در بر داشته باشد؟

**دکتر زتا:** هرمان عزیز، این برای ما کاری سهل و پیش پا افتاده است. دایرةالمعارف شما کمتر از یك هزار حرف و نشانه دارد. من هر یك از اعداد ۱ تا ۹۹۹ را به یك حرف یا نشانه منتسب می‌کنم و در صورت لزوم صفرهایی در سمت چپ آن می‌گذارم تا هر عدد مورد استفاده شامل سه رقم بشود.

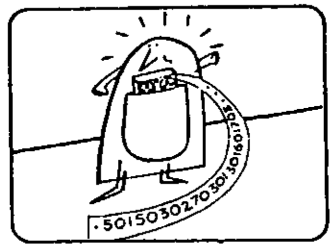



**هرمان:** سر در نمی‌آورم. چگونه کلمهٔ Cat (گربه) را به صورت رمز درمی‌آورید؟

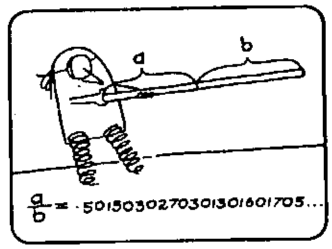



**دکتر زتا:** خیلی ساده. ما از همان نوع رمزی که حالا برای شما شرح دادم، استفاده می‌کنیم. رمز کلمهٔ Cat ممکن است 003001020 بشود.

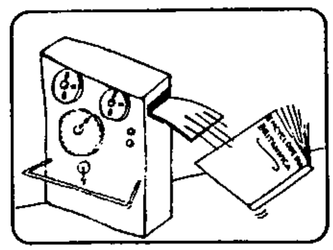
دکتر زتا با استفاده از کامپیوتر جیبی کارآمدخود، دایرةالمعارف را به سرعت تقطیع کرد و تمامی محتوای آن را به صورت یك عدد بسیار کلان ترجمه کرد. سپس با گذاشتن یك ممیز در جلو عدد، آنرا به یك‌کسر اعشاری تبدیل کرد.




آنگاه دکتر زتا علامتی روی میله گذاشت و آن را دقیقاً به دو طول a و b تقسیم کرد تا کسر $\frac{a}{b}$ برابر کسر اعشاری رمز او باشد.




**دکتر زتا:** وقتی به سیاره‌ام باز گردم، یکی‌ازکامپیوترهای ما، a و b را دقیقاً اندازه خواهد گرفت و سپس



کسر $\frac{a}{b}$ را محاسبه خواهد کرد. این کسر اعشاری از صورت رمز درخواهد آمد و کامپیوتر دایرةالمعارف شما را برای ما چاپ کرده و بیرون خواهد داد.

***

اگر با نظام‌کاربرد علائم و نشانه‌های رمزی آشنایی ندارید، می‌توانید از رمزنگاری و رمزگشایی عددی برخی پیامهای ساده ــ مانند آنچه در اینجا ذکر آن رفت ــ لذت ببرید. نظامهای علائم و نشانه‌های رمزی نمایانگر اهمیت تناظر یك به یك و انتقال (نگاشت) یك ساختار بر یك ساختار همریخت (ایزومورفیك)است. از این گونه علائم و نشنه‌های رمزی معمولا در نظریهٔ برهان پیشرفته استفاده می‌شود. بنابر برهان‌معروفی که **کورت گودل**[۳] ارائه داده است، هر نظام استنتاجی **پیچیدهٔ** متضمن اعداد صحیح، **قضایایی** در بر دارد که نمی‌توان درستی یا نادرستی آنها را در درون آن نظام اثبات کرد. برهان گودل مبتنی بر یك نظام رمزی عددی است که هر قضیهٔ یك نظام‌استنتاجی را به یك عدد منحصر به فرد وبسیار بزرگ تبدیل می‌کند.

به رمز درآوردن تمامی یك دایرة‌المعارف با قرار دادن یك علامت بر یك میله فقط از دیدگاه نظری امکان‌پذیر است و نه در عمل. مشکل از آنجا ناشی می‌شود که دستیابی به دقت لازم برای علامت‌گذاری چنین میله‌ای نامکن است. این علامت‌باید بسیار بسیار کوچکتر از یك الکترون باشد و اندازه‌های دو طول جدا شده از نظر دقت بر اساس چنین مقیاس ظریفی مبتنی باشد. اگر بپذیریم که این دو طول را بتوان با چنان دقتی اندازه گرفت که کسر مورد نظر دکتر زتا دست یافتنی باشد، در این صورت روش او عملی خواهد بود.

به عنوان توضیحی دربارهٔ اعداد اصم و ارتباط آنها با روش دکتر زتا باید اضافه کرد که ریاضیدانان معتقدند که بسط اعشاری $\pi$ (پی) درست‌مانندهردنبالهٔ نامتناهی‌نمونه‌وار ارقام تصادفی «**الگوناپذیر**» است. این اندیشه، اگر درست باشد، به معنای آن است که در مرحله‌ای از جریان بسط، امکان پدید آمدن هر نوع‌دنبالهٔ متناهی ارقام مسلم خواهد بود.

به سخن دیگر، در نقطه‌ای در ضمن بسط اعشاری $\pi$ دنباله‌ای هست که دایرةالمعارف بریتانیکا را، مانند آنچه دکتر زتا انجام داد، به رمز درمی‌آورد. یا در واقع دنباله‌ای که هر اثر دیگری را که به چاپ رسیده یا قابل چاپ شدن‌باشد، به‌رمزدرمی‌آورد!

از این گذشته، اعداد اصم کاملا الگوپذیری وجود دارند که شامل دنباله‌ای متناهی از ارقام هستند. یك نمونه از اینها عدد

۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲۱۳۱۴۱۵۰۰۰

است که با نوشتن اعداد صحیح‌متوالی به ترتیب شمارش درست شده است.

### زیرنویسها:

۱ــ **پارادوکس** (Paradox) **یا شگفت نما**، واژه‌ای یونانی به مفهوم «فراتر از اعتقاد» است و منظور از آن احکامی است که با عقل متعارف یا اصول مقدماتی منطق در تضاد باشد.(م.)

۲ــ منظور بعدازجای‌گاه Space - Time dimension یا (Space - Time Continuum پیوستار جای‌ــ گاه) نظام مختصات چهار بعدی شامل بعد زمان (چهارمین بعد) است. محمودمصاحب در ترجمهٔ کتاب «نسبیت عام برای همگان»، اثر مؤلف (مارتین گاردنر) عبارت جای ــ گاه را به جای Space - Time آورده است.(م.)

3- Kurt Gödel

### ماخذ

Aha! Gotcha, Paradoxes to Puzzle and delight, Freeman, N. Y. 1986
اثر مارتین‌گاردنر

# درباره اندازه زاویه فضایی

فولکه اریکسون
ترجمه ابراهیم دارابی

اندازه زاویه فضایی (زاویه جسمی) درفضای ۳- بعدی، با مساحت $E$ متناظر مثلث کروی $T=ABC$ برروی کره واحد به مرکز رأس $O$ تعریف می‌شود. (شکل ۱)

(توضیح مترجم: برای تعیین اندازه زاویه فضایی از نوع کنج، کره‌ای به‌شعاع واحد و به رأس کنج رسم می‌کنیم، محل برخورد این کره را با یالهای آن $A$ و $B$ و $C$ می‌نامیم، اندازه مساحت مثلث کروی $ABC$، اندازه زاویه فضایی خواهد بود.

بردارهای یکه $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ را به‌ترتیب با $a$ و $b$ و $c$ نشان می‌دهیم. اندازه $E$ را می‌توان برحسب حاصلضرب داخلی وضرب سه‌تایی $[a, b, c]=a\cdot(b\times c)$ نوشت.

$$(1)\quad \operatorname{tg}\frac{E}{2}=\frac{|[a,b,c]|}{{}^{2}a+b\cdot c+c\cdot a+a\cdot b}$$

ممکن‌است تصورشودکه چنین فرمول زیبایی، فرمول مشهور وشناخته شده قدیمی باشد، اما من تاکنون نتوانسته‌ام آن را در متون ریاضی پیدا بکنم. هرچند تقریباً چنین نتیجه‌ای، برای اویلر [4 . P . 215] و لاگرانژ [8, P . 340] شناخته بود. (عنوان بالا، ترجمه عنوان لاتین [۴] می‌باشد).

برای اضلاع مثلث $T$ ازنامگذاری استانداردد $a$ و $b$ و $c$ استفاده می‌کنیم و زوایای‌آن را با $A$ و $B$ و $C$ نشان می‌دهیم. مساحت $T$ برابر با تفاضل $E=A+B+C-\pi$ می‌باشد و نتیجه بالا را می‌توان چنین نوشت:

$$(2)\quad \operatorname{tg}\frac{E}{2}=\frac{P}{1+\cos a+\cos b+\cos c}$$

که درآن

$$(3)\quad P=(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c)^{1/2}$$

واضح است که مخرجهای (۱) و (۲) یکسان هستند. همچنین اویلر ولاگرانژ می‌دانستندکه صورت(۳)حجم متوازی‌السطوحی با یالهای $a$ و $b$ و $c$ می‌باشد.

این موضوع را با استفاده ازعبارت جدید حجم برحسب مؤلفه‌های بردارهای‌یکه ثابت می‌کنیم.

$$V=|[a,b,c]|=\pm\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ c_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

$$V^2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} a\cdot a & a\cdot b & a\cdot c\\ b\cdot a & b\cdot b & b\cdot c\\ c\cdot a & c\cdot b & c\cdot c\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b\\ \cos c & 1 & \cos a\\ \cos b & \cos a & 1\end{vmatrix}=$$

$$1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c$$

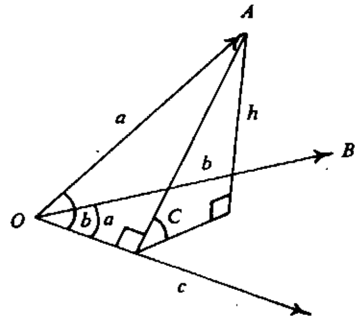
پس، هم‌ارز بودن (۱) و (۲) ثابت شده است.

ارتفاع نظیر رأس $A$ از متوازی‌السطوح به یالهای $a$ و $b$ و $c$ برابراست (شکل ۲) با

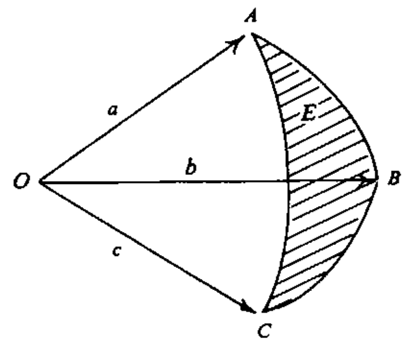
$$h=\sin b\sin C=\sin c\sin B$$

واین با استفاده ازقانون سینوسها بدست می‌آید.

$$(4)\quad \frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}\left(=\frac{\sin a}{\sin A}\right)$$




شکل ۱




شکل ۲

چون

حجم = (مساحت قاعده) . ارتفاع

داریم

(۵) $P=V=\sin a \sin b \sin C$

اثبات (۲) را می‌توان در [۴]، [8] تادهانتر لیثم Todhunter – Leathem [(30). eq, ۱۰۴, p. ۹] و [(17). eq, 28 .p] پیدا نمود.

من برای یافتن برهان ساده‌ای قادر نبودم تا اینکه داور، توجه مرا به یک قضیه قدیمی جلب نمود که نمایش یک زاویه $\left(\frac{1}{2}\right)(\pi-E)$ ارائه‌نموده‌است. این‌قضیه [9, p. 116. eq (20)] ازترسیم زیر به‌دست آمده است (شکل ۳)

فرض‌کنید نقاط $L$ و $M$ را به‌ترتیب اوساط $BC$ و $AC$ درمثلث کروی $ABC$ باشند. دایره‌های عظیمه $AB$ و $LM$ یکدیگر را در نقاط متقاطر $P$ و $Q$ قطع می‌کنند. کمانهای $AA'$ و $BB'$ و $CC'$ را عمود بر $LM$ رسم‌کنید. ازاین‌رو مثلثهای $AMA'$ و $CMC'$ همچنین مثلثهای $BLB'$ و $CLC'$ با هم مساویند. بنابراین

$(A, MA')=(C, MC')=u$[1]

همچنین

$(B, B'L)=(C, C'L)=V$

بعلاوه

$AA'=CC'=BB'$

پس مثلث‌های $AA'P$ و $BB'Q$ مساویند زیرا زوایای $P$ و $Q$ مساویند. و زوایای $A'$ و $B'$ قائمه می‌باشند. ازآنجا

$(A, A'P)=(B, QB')$

این زاویه را $t$ بنامید. اکنون داریم (شکل ۳)

$A+u+t=\pi,\ B+V+t=\pi,\ C=u+V$

با جمع آنها

$A+B+C+2t=2\pi$

یا

$2t=2\pi-(A+B+C)=\pi-E$

$\frac{1}{2}(\pi-E)=t=(A, A'P)$

واین قضیه‌ای است که به‌آن نیاز داشتیم.

اثبات (۲)

از (۶) وشکل (۳) با کمك مثلث کروی مقدماتی $\operatorname{tg}\frac{E}{2}$ را به دست می‌آوریم:

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2}=\frac{1}{\operatorname{tg} t}=\frac{\sin AA'}{\operatorname{tg} PA'}=\frac{\sin AA'}{\operatorname{cotg} ML}=\frac{\sin CC' \sin ML}{\cos ML}$$

$$(7)\quad =\frac{\sin\frac{b}{2}\sin M\sin ML}{\cos ML}=\frac{\sin\frac{b}{2}\sin C\sin\frac{a}{2}}{\cos ML}$$

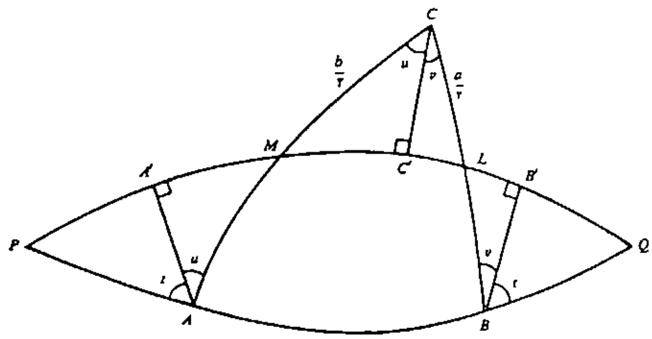
(درتساوی دوم $\operatorname{tg} t$ را با فرمول مشهور درمثلث قائم‌الزاویه $AA'P$ بیان کرده‌ایم.

تساوی سوم از $PA'+ML=\frac{1}{2}PQ=\pi/2$ و تساوی آخر از قانون سینوسها درمثلث $CML$ به‌دست آمده است.)

$$\cos ML=\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\cos C\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}$$

$$=\frac{4\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}+\cos C\sin a\sin b}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}$$

$$=\frac{(1+\cos a)(1+\cos b)+\cos c-\cos a\cos b}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}$$




شکل ۳

$$=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{a}{2}\ \cos\frac{b}{2}}$$

با قرار دادن این مقدار درآخرین عضو (۷) خواهیم داشت

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2}=\frac{\sin a\sin b\sin C}{1+\cos a+\cos b+\cos c}$$

واین (۲) می‌باشد که صورت آن با استفاده از (۵) نوشته شده است.

یادآوری ۱. اهمیت کمیت $P$ توسط لاگرانژ در [8] شناخته شده بود.

$P$ که اکنون قطب سینوسی زاویه جسمی نامیده می‌شود دوگان آن درسینوس ۳ بعدی

$$S=\sin T=\sin a\sin B\sin C$$

توسط جی. جونگان $G.\ junghann$ درحدود سال ۱۸۶۰ بطور گسترده‌ای موردمطالعه قرار گرفته است. [7 ,6]. نتیجه بسیار برجسته درچهار وجهی جونگان، قانون سینوسها می‌باشد: مساحتهای وجوه چهاروجهی، متناسب با سینوسهای سه بعدی زوایای متقابل هستند.

این قانون پیش از ۱۸۵۰ توسط جوآچیمستال ($J$ - $u$ - $a$ $Chimsthal$) [5, $p$ . 40] آورده شده و در همین ماگازین در سال ۱۸۵۰ توسط آلن‌دئرفر مورد بررسی قرار گرفته است. [۱]. [۳] را هم مقایسه کنید.

نتیجه دوگان (۲) عبارت است از.

$$\operatorname{tg}\frac{a+b+c}{2}=\frac{S}{\cos A+\cos B+\cos C-1}$$

یادآوری (۲)ــ فرمول ساده دیگری برای تفاضل $E$ از مثلث کروی $T$ درقضیه‌کیوف $Keagh$ [9, $p$ . 119] آورده شده است. بیان روشن آن چنین است:

$$\sin\frac{E}{2}=pol\ \sin T'$$

که درآن عامل سمت راست سینوس قطبی مثلث $T'=L\ MN$ می‌باشد که رئوس آن اوساط مثلث $T$ است.

۳ــ $R$ و $r$ شعاعهای دایره‌های محیطی و محاطی مثلث کروی $T$ برحسب $S$ و $P$ به‌سادگی بیان می‌شوند:

$$\operatorname{tg}R=\frac{2}{S}\ \sin\frac{E}{2}$$

$$\operatorname{cotg}r=\frac{2}{P}\ \sin\frac{a+b+c}{2}$$

که درکتاب ساکسه‌تر $Coxeter$ آورده شده است.

[2, $p$. 236 $f$]

۱ــ مناسب است که زاویه علامت‌دار $A$ را که $AM$ به $AA'$ جهت‌دار شده است با ($A$ و $MA'$) نشان داد. در بعضی حالات، که زاویه $A$ منفرجه است $u$ باید منفی در نظر گرفته شود، درمورد $v$ و $t$ (در زیر) چنین است.

۲ــ منشاء این قضیه را نمی‌شناسم. چون [9] هیچ مرجعی نمی‌دهد واین نتیجه در ویرایش‌های اولیه کتاب هم به‌وسیله فقط تادهانتر ($Tadhunter$) پیدا نمی‌شود. باید حدس بزنم که این، ازآن خود لئتم ($Leathem$) است.

## مراجع:

1. C. ALLENDOEREFER . GENERALIZATION OF THEOREMS ABOUT TRIANGLES. THIS MAGAZIN 38 (1965), 253 - 259

2. H. S. M. COXETER, NON - EUCLIDEAN GEOMETRY. TORONTO 1942.

3. F. ERIKSS ON. THE LAW OF SINES FOR TETRAHEDRA AND N. SIMPLICES. GEOM. DEDICATA. 7 (1978) 71 - 80

4. L. EULER. DE MENSURA ANGULORUM SOLIDORAM IN OPERA OMINA 26. 204 - 223

5. F. JOACHIMSTHAL. SUR QUELQUES APPLICATIONS DES DETERMINANTS A LA GEOMETRIE. J. MATH. (CRELLE) 40 (1850)

6. C. JUNGHANN, BERTRAGE, TETRAEDROMETRIE 1 - 11. GOTHA 1862 - 63

7. LAGRANGE. SOLUTIONS DE QULQUES PROBLEMS RELATIFS AN TRIANGLES SPHERIQUES 331 - 359 (ORIG IN 1798)

8. I. TODHUNTERANDJ. GLEATHEM. SPHERICAL TRIGONOMETRY. MACMILLAN. LONDON. 19.1

# شواهد تجربی و منطقی قواعد ضرب اعداد جبری

دکتر محمدحسن بیژن‌زاده

**مقدمه:** دانش‌آموزان با قواعد ضرب اعداد جبری در دورهٔ راهنمایی آشنا می‌شوند. برای تعبیر و توجیه ضرب اعداد مثبت مشکلی وجود ندارد زیرا دقیقاً مشابه ضرب اعداد طبیعی است. برای تعبیر ضرب یک عدد مثبت در یک عدد منفی نیز مشکلی نیست و این امر با ذکر مثالهای ملموس توسط دبیران به دانش‌آموزان تفهیم می‌شود. لیکن برای توجیه ضرب یک عدد منفی در یک عدد منفی، که حاصل یک عدد مثبت می‌شود، معمولاً توجیه‌های ساده و ملموس ذکر نمی‌گردد. در کتب درسی نیز ذکر قواعد ضرب اعداد جبری، به طریقی صوری و بدون ذکر شواهد تجربی ذکر می‌گردد.

بنابراین غالب دانش‌آموزان و حتی دانشجویان این سؤال را مطرح می‌کنند که چگونه ضرب اعداد منفی توجیه و تعبیر می‌گردد. ذیلاً با ذکر مثالی ساده و ملموس قواعد ضرب اعداد جبری توجیه می‌گردد. در پایان نیز، به استثناء نظریه مقدماتی حلقه‌ها، به‌گونه‌ای منطقی این قواعد اثبات می‌گردد.

در ساعت ۱۲، وضعیت سطح آب در یک بشکهٔ استوانه‌ای از آب به‌وسیله علامتی که بر بدنهٔ بشکه است نشان داده می‌شود. هرگاه آب به‌درون بشکه اضافه شود به‌طوری که سطح آب به میزان ۲ سانتی‌متر بر دقیقه بالا رود، پس از ۳ دقیقه بعد از ساعت ۱۲ سطح آب چه‌وضعی خواهد داشت؟ قبل از ۳ دقیقه از ساعت ۱۲ چه‌وضعی داشته است؟

از سوی دیگر، هرگاه آب از بشکه خارج شود (توسط شیری که در زیر آن تعبیه شده‌است) به‌طوری که سطح آب به میزان ۲ سانتی‌متر در دقیقه پایین آید سطح آب در سه دقیقه بعد از ساعت ۱۲ در چه وضعی خواهد بود؟ و در سه دقیقه قبل از ساعت ۱۲ در چه‌وضعی بوده است؟

اکنون چهار گزارهٔ درست مرکب از این عبارات می‌سازیم: «بالا آمدن ۲ سانتی‌متر در دقیقه»، یا «پایین آمدن ۲ سانتی‌متر در دقیقه» در خانه اول «۳ دقیقه بعد از» یا «۳ دقیقه قبل از» در خانه دوم؛ و «۶ سانتی‌متر بالای» یا «۶ سانتی‌متر پایین» در خانه سوم.

وقتی‌که سطح آب در حال [ ] است سطح آن در [ ] ساعت ۱۲ در [ ] علامت قرار دارد.

در این‌صورت عدد «۶» را به‌آسانی با ضرب ۲ و ۳ برای گزارهٔ فوق به‌دست می‌آورید لیکن در هر حالت مجبورید که دقیقاً فکر کرده و تعیین نمائید که آیا سطح آب ۶ سانتی‌متر **بالای** یا ۶ سانتی‌متر **پایین** علامت قرار دارد. می‌توانیم با استفاده از اعداد صحیح مثبت و منفی بین «۶ سانتی‌متر بالای» و «۶ سانتی‌متر پایین» و نیز بین 'و بالا آمدن ۲ سانتی‌متر در دقیقه' 'و پایین آمدن ۲ سانتی‌متر در دقیقه' و همچنین بین «۳ دقیقه بعد از» و «۳ دقیقه قبل از» فرق قائل شویم لذا می‌نویسیم:

$^{+}6$ cm، برای ۶ سانتی‌متر بالای

$^{-}6$ cm، برای ۶ سانتی‌متر پایین

تغییر $^{+}2$ سانتی‌متر در دقیقه، برای بالا آمدن ۲ سانتی‌متر در دقیقه

تغییر $^{-}2$ سانتی‌متر در دقیقه برای پایین آمدن ۲ سانتی‌متر در دقیقه

$^{+}3$ دقیقه برای «۳ دقیقه بعد از»

$^{-}3$ دقیقه برای «دقیقه قبل از»

اکنون ۴ گزارهٔ درست با استفاده از قراردادن $^{+}2$ یا $^{-}2$ در اولین خانه، $^{+}3$ یا $^{-}3$ در دومین خانه، و $^{+}6$ و $^{-}6$ در سومین خانه تشکیل می‌دهیم.

وقتی که سطح آب به اندازهٔ [ ] در دقیقه تغییر می‌کند، سطح آن [ ] دقیقه از ساعت ۱۲ برابر است با [ ] نسبت به‌علامت روی بشکه.

اکنون جواب مساله را در هر حالت با ضرب دو عدد خانه‌های اول به‌صورت کامل (با علامت درست) به‌دست می‌آوریم:

$$^{+}2 \times {}^{+}3 = {}^{+}6 \qquad (1)$$

۲ $\quad {}^{+}2 \times {}^{-}3 = {}^{-}6$

۳ $\quad {}^{-}2 \times {}^{+}3 = {}^{-}6$

۴ $\quad {}^{-}2 \times {}^{-}3 = {}^{+}6$

این چهار نتیجه را بررسی کنید. تساوی ۲ متناظر کدام گزاره درباره آب است؟ تساوی ۴ درباب کدام گزاره است؟

مسلماً نتایج مشابهی به‌جای اعداد ${}^{+}2$، ${}^{-}2$، ${}^{+}3$ و ${}^{-}3$ به‌دست می‌آوریم.

درواقع نشان‌داده‌ایم که هرگاه موارد ذیل‌را قراردادکنیم می‌توانیم با استفاده حاصلضرب اعدادمثبت ومنفی جواب صحیح سؤالات را به‌دست‌آوریم.

۱ـ حاصلضرب دوعدد صحیح مثبت است هرگاه هردوی آنها مثبت باشند.

۲ـ حاصلضرب دوعدد منفی است هرگاه یکی ازآنها مثبت ودیگری منفی باشد.

۳ـ حاصلضرب دوعدد مثبت است هرگاه هردوی آنها منفی باشند.

$${}^{+}m \times {}^{-}n = {}^{+}(m \times n)$$
$${}^{+}m \times {}^{-}n = {}^{-}(m \times n)$$
$${}^{-}m \times {}^{+}n = {}^{-}(m \times n)$$
$${}^{-}m \times {}^{-}n = {}^{+}(m \times n)$$

اینک به‌روش جبری، که‌همان‌روش اصل‌موضوعی است، نتایج شهودی فوق‌را به‌طریقی منطقی‌اثبات می‌کنیم. قبل ازهـر چیز به‌یادآوری تعریف حلقه می‌پردازیم.

مجموعه $R$ با دوعمل $+$ و∘ را یك **حلقه** نامیم هرگاه شرایط ذیل برقرار باشند:

۱ـ $(+$ و $R)$ یك گروه آبلی است،

۲ـ ضرب $R$ شرکتپذیر است، یعنی همواره

$$a(bc)=(ab)c$$

۳ـ برای هر $a$ و $b$ و $c \in R$،

$$a(b+c)=ab+ac \qquad \text{(قوانین توزیعپذیری)}$$
$$(b+c)a=ba+ca$$

متذکر می‌شویم که $+$ و∘ صرفاً نام دوعمل $R$ اند ولزوماً جمع وضرب عددی نیستند.

شرایط ۱ تا ۳ را اصول موضوعه حلقه می‌نامیم. درواقع شرط ۱ خود مشتمل بر ۴ شرط یا اصل مربوط به‌تعریف گروههای آبلی است.

اکنون برمبنای این اصول می‌توانیم قضیه ذیل‌را ثابت کنیم، قبلا متذکرمی‌شویم که‌چون $(+$ و$R)$ یك‌گروه آبلی‌است عنصر $a \in R$ دارای عکس جمعی است‌که آن‌را قرینه $a$ نامیده وبه $-a$ نشان می‌دهیم.

قضیه: به‌ازای هر $a,b,c \in R$ احکام زیر برقرار است.

۱ $\quad \circ . a = \circ$

۲ $\quad a(-b)=(-a)(b)=-(ab)$

۳ $\quad (-a)(-b)=ab$

برهان (۱) داریم $\quad \circ = \circ + \circ$

بنابراین $\quad \circ a = \circ a + \circ a$

ویا،

$$\circ a + \circ = \circ a + \circ a$$
$$\circ a = \circ$$

بنابرحذف در $(+$و$R)$،

برهان (۲) بنابر خاصیت گروه

$$a(-b)+ab=a(-b+b)=a\circ=\circ$$

لذا $a(-b)$ قرینه $ab$ است یعنی

$$-(ab)=a(-b)$$

برهان (۳) بنابر (۲)، $(-a)(-b) = -((-a)b)$

مجدداً بنابر (۲) $\quad = -(-(ab))$

$$= ab$$

زیرا درهرگروه عکس‌عکس هـر عضو برابر است با خود آن عضو.حال وقتی قضیه فوق رابه(∘ و $+$ و $Z$) یعنی‌حلقه اعداد صحیح اعمال‌کنیم ملاحظه می‌کنیم که

$$(+a)(+b)=ab\ ,\ (-a)(-b)=+(ab)$$

ولذا اگر $a$ و $b$ را مثبت فرض‌کنیم $ab$ نیز مثبت است و اگر $-a$ و $-b$ منفی‌بود، وحاصلضرب آنها برابر $ab$، ولذامثبت است.

## مراجع:

1. Primary Mathematics today

۲ـ یادداشت‌های درسی

# حلقه‌های متناهی را در دور دست نجویید

مهدی نجفی‌خواه دانشجوی دانشگاه علم وصنعت ایران

**«جدی بودن» یك قضیه ریاضی درنتایج عملی آن، که معمولا ناچیزاند، نیست بلکه در مضمون آن ایده‌های ریاضی است که به‌وسیله آن قضیه به‌هم می‌پیوندند. به طورکلی می‌توان گفت که یك‌ایدهٔ ریاضی درصورتی «پرمضمون» است‌که بتواند به‌شکلی طبیعی وروشنگر بادسته بزرگی از ایده‌های ریاضی دیگر درارتباط قرار گیرد.**

**گاد فری‌هرلدهاردی**

## ۱) مقدمه

به‌سادگی می‌توان نشان دادکه هرگروه متناهی را به عنوان گروهی از ماتریس‌های مربعی می‌توان درنظر گرفت. درواقع اگر $<G,*>$ یك گروه‌متناهی باشد و $G=\{g_1,\ldots,g_n\}$ واگر باعضو $g$ از $G$ ماتریس $n\times n$ مربعی $A_g=[a_{ij}]_{n\times n}$ را متناظر کنیم که

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{اگر } g_ig=g_j\,;\\ 0 & \text{اگر } g_ig\neq g_j\,;\end{cases}$$

آنگاه تناظر $A_g \longrightarrow g$ یك هومومورفیسم یك به‌یك از $G$ به توی گروه ضربی ماتریس‌های $n\times n$ مربعی معکوس‌پذیر با درآیه‌های صحیح خواهد بود. دراین‌حالت اصطلاحاً می‌گوئیم گروه $G$ درگروه ماتریس‌ها نشانده شده است. بجااست‌پرسیم که آیا مشابه این‌گفته درمورد اولین ساختار جبری دیگر، یعنی حلقه، مصداق دارد؟ این‌مقاله جواب مثبتی برای این‌سؤال تهیه می‌کند. مقاله به‌دوبخش تقسیم می‌شود، دربخش نخست سعی براین‌است‌تاچند قرارداد و حکم ابتدایی‌را ثابت کند وخواننده آشنا بامقدمات جبرمی‌تواند آن‌را به‌صورت گذرا مطالعه‌کند، بخش بعدی مشتمل است برپنج قضیه وچهارلم. دوقضیه اول از قضایای‌کلاسیك نظریه حلقه‌ها هستند وقضیه سوم‌که به‌کیشیکتا تعلق دارد (رجوع‌کنید به‌کتاب‌کوروش [۲]) حالت خاصی‌از قضیه‌ای است‌که وی در سال ۱۹۴۵ ثابت نموده است، این قضیه ازجالب‌ترین قضایای نظریه گروههای آبلی می‌باشد. مزیت‌قضایای این‌نوشته بردوچیز است اول‌آنکه ساختی هستند (یعنی درآنهااز برهان‌خلف‌استفاده نشده) ودوم آنکه بامقدمات بسیار ناچیزی ازجبر ثابت می‌شوند. بهترین منبع برای مطالعه پیرامون این موضوع کتاب سورجیت سینگ و زمیرالدین[۴] و کتاب کوروش [۲] است. اطلاعات زمینه‌ای را ازکتاب درفشه[۶]ویا فرالی[۷] می‌توانید به‌دست آورید.

## ۲) تعریف هومومورفیسم واندومورفیسم گروهی

فرض‌کنیم $<G_1,*_1>$ و $<G_2,*_2>$ دوگروه‌باشند. تابع $\varphi:G_1\longrightarrow G_2$ را یك هومومورفیسم از $G_1$ به $G_2$ گوئیم هرگاه بازاء هر $g$ و $h$ از $G_1$،

$$(h *_1 g)\varphi = (h\varphi) *_2 (g\varphi)$$

به‌یك همومورفیسم از $G_1$ به $G_1$، یك اندومورفیسم از $G_1$ می‌گوئیم.

### ۳) چند قرارداد

درصورتی‌که $n\in Z^+$، منظور از $<Z_n , +>$ گروه جمعی اعداد صحیح به‌هنگ n است: $Z_n=\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$؛ به‌جای m از m استفاده می‌کنیم. منظور از $<Z_n^*, \cdot>$ گروه ضربی اعداد صحیح نسبت به n اول، باعمل ضرب درهنگ n است. منظور از $<Z_n, +, \circ>$ حلقه اعداد صحیح با اعمال هنگی است. $<S_n, \circ>$ و $<A_n, \circ>$ به‌ترتیب گروه تقارنی وگروه تناوبی اعداد ۱ تا n هستند.

### ۴) تعریف. جمع وضرب دوهمومورفیسم

(i) فرض‌کنیم $G_1$ ، $G_2$ ، و $G_3$ سه‌گروه باشند، و $\varphi_1 : G_1 \longrightarrow G_2$ و $\varphi_2 : G_2 \longrightarrow G_3$ همومورفیسم باشند.

حاصلضرب(ضرب) $\varphi_1$ در $\varphi_2$ را به‌شکل $\varphi_1\varphi_2$ نشان‌داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(\varphi_1\varphi_2)=(g\varphi_1)\varphi_2 \quad (g\in G_1)$$

یعنی، ضرب همان عمل ترکیب توابع است.

(ii) فرض کنیم $\varphi_1 : G_1 \longrightarrow G_2$ و $\varphi_2 : G_1 \longrightarrow G_2$ دوهمومرفیسم باشند. حاصلجمع(جمع) $\varphi_1$ با $\varphi_2$ را با $\varphi_1+\varphi_2$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$g(\varphi_1+\varphi_2)=g\varphi_1 *_2 g\varphi_2 \quad (g\in G_1)$$

که دراینجا $*_2$ عمل در $G_2$ است.

### ۵) لم. معرفی گروه همومورفیسم‌های ازیك گروه به یك گروه دیگر

درصورتی‌که $G_1$ و $G_2$ دوگروه و $G_2$ آبلی باشد. مجموعه همه همومورفیسم‌های از $G_1$ به‌توی $G_2$ را $\mathrm{Hom}(G_1 , G_2)$ می‌نامیم.

این‌مجموعه همراه باعمل جمع‌همومورفیسم‌ها تشکیل‌یك گروه آبلی می‌دهد. به‌این‌گروه، گروه جمعی‌همومورفیسم‌های‌از $G_1$ به $G_2$ می‌گوئیم. درحالتی‌که $G_1=G_2$ ، آنرا با‌نماد $\mathrm{End}(G_1)$ نشان می‌دهیم‌وبه آن‌گروه جمعی اندومورفیسم‌های $G_1$ می‌گوئیم.

برهان. فرض‌کنیم

$\varphi_1 , \varphi_2 , \varphi \in \mathrm{Hom}(G_1 , G_2)$ و $g_1 , g_2 , \varphi \in G_1$

دراین‌صورت (برای سادگی کار، عمل گروه‌ها را با + نشان می‌دهیم)

$$(g_1+g_2)(\varphi_1+\varphi_2)=(g_1+g_2)\varphi_1+(g_1+g_2)\varphi_2$$

$$=g_1\varphi_1+g_2\varphi_1+g_1\varphi_2+g_2\varphi_2$$

چون $G_2$ آبلی است

$$=(g_1\varphi_1+g_1\varphi_2)+(g_2\varphi_1+g_2\varphi_2)$$

$$=g_1(\varphi_1+\varphi_2)+g_2(\varphi_1+\varphi_2)$$

پس $\varphi_1+\varphi_2$ هم یك‌همومورفیسم‌است، یعنی $\mathrm{Hom}(G_1 , G_2)$ نسبت به‌عمل + بسته‌است. شرکت‌پذیری جمع + بدیهی‌است عضو خنثی عمل جمع، همومورفیسم صفر $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ است که هرعضو از $G_1$ را به عضوهمانی $G_2$، یعنی 0، می‌برد همومورفیسم صفر را با O نشان‌می‌دهیم. معکوس $\varphi$ نسبت به‌عمل +، همومورفیسم

$$\psi : G_1 \longrightarrow G_2$$

$$g\psi = -(g\varphi)$$

می‌باشد

معکوس $\varphi$ را بانماد $-\varphi$ نشان می‌دهیم. بعلاوه گروه ما آبلی است:

$$g(\varphi_1+\varphi_2)=g\varphi_1+g\varphi_2$$

چون $G_2$ آبلی است

$$=g\varphi_2+g\varphi_1=g(\varphi_2+\varphi_1)$$

لذا $\varphi_2+\varphi_1=\varphi_1+\varphi_2$.

### ۶) مثال

ملاحظه‌می‌شود که اگر $m, n\in Z^+$، آنگاه به‌ازای هرعدد صحیح‌مثبت s بین صفر و $n-1$ ، تابع

$$\varphi_s : Z_m^+ \longrightarrow Z_n^+$$

$$k\varphi_s = sk \qquad (k\in Z_m^+)$$

یك همومورفیسم از $Z_m$ به $Z_n$ است. زیرا اگر $l , k\in Z_m$، آنگاه

$$(l+k)\varphi_s=s(l+k)=sl+sk=l\varphi_s+k\varphi_s$$

بعکس، اگر $\varphi\in \mathrm{Hom}(Z_m , Z_n)$ و $1\varphi=s$، آنگاه $\varphi=\varphi_s$.
زیرا به‌ازای هر $k\in Z_m$ داریم

$$k\varphi = \underbrace{1\varphi + 1\varphi + \cdots + 1\varphi}_{\text{بار } k} = \underbrace{s+s+\cdots+s}_{\text{بار } k} = sk = k\varphi_s$$

پس بنابراین چون برای $s \neq s'$، $\varphi_s \neq \varphi_{s'}$ داریم

$$Hom(\mathbf{Z}_m, \mathbf{Z}_n) = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}\}$$

اکنون تابع

$$\zeta : Hom(\mathbf{Z}_m, \mathbf{Z}_n) \longrightarrow \mathbf{Z}_n$$

$$(\varphi_s)\zeta = s$$

یک‌هومورفیسم یک‌به‌یک و پوشا از $Hom(\mathbf{Z}_m, \mathbf{Z}_n)$ به $Z_n$ می‌باشد. پس $<Hom(\mathbf{Z}_m, \mathbf{Z}_n), +>$ با گروه $<Z_n, +>$ ایزومورف است (یعنی تنها دراسم اسامی متفاوت است). به صورت نمادی می‌نویسیم

$$<Hom(\mathbf{Z}_m, \mathbf{Z}_n), +> \cong <Z_n, +>.$$

$$<End(\mathbf{Z}_n), +> \cong <Z_n, +>.$$

مشابهاً روابط زیر را می‌توانیم ثابت کنیم:

$$<Hom(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}), +> \cong <\mathbf{Z}, +>$$

$$<End(\mathbf{Z}), +> \cong <\mathbf{Z}, +>$$

$$<Hom(\mathbf{Z}_n, \mathbf{R}), +> \cong <\mathbf{R}, +>$$

$$<Hom(\mathbf{Z}, \mathbf{R}), +> \cong <\mathbf{R}, +>$$

$$<End(\mathbf{R})> \cong <\mathbf{R}, +>$$

وبسیاری روابط مشابه دیگر.

### ۷) لم. معرفی حلقه‌اندومورفیسم‌های یک‌گروه آبلی

فرض کنیم $<G, +>$ یک گروه آبلی باشد. دراین‌صورت مجموعه $End(G)$ با اعمال جمع وضرب اندومورفیسم‌های $G$ تشکیل یک‌میدان یکدارمی‌دهد. به‌این‌حلقه، حلقه‌اندومورفیسم‌های گروه آبلی $G$ می‌گوئیم.

اثبات.

فقط بسته بودن عمل‌ضرب را نشان می‌دهیم: فرض کنیم $g, h \in G$ و $\varphi_1, \varphi_1 \in End(G)$، در این‌صورت $\varphi_1\varphi_2 \in End(G)$، زیرا

$$(g+h)(\varphi_1\varphi_2) = ((g+h)\varphi_1)\varphi_2$$

چون $\varphi_1$ هومورفیسم است،

$$= (g\varphi_1 + h\varphi_1)\varphi_2$$

چون $\varphi_2$ هومورفیسم است.

$$= (g\varphi_1)\varphi_2 + (h\varphi_1)\varphi_2$$

$$= g(\varphi_1\varphi_2) + h(\varphi_1\varphi_2)$$

دراینجا یک‌حلقه (= عضوهمانی عمل ضرب) موجود است و عبارت است از هومورفیسم بدیهی

$$\varphi : G \longrightarrow G$$

$$g\varphi = g \qquad (g \in G)$$

ما این هومورفیسم را بانماد ۱ نشان می‌دهیم. تحقیق سایر قسمت‌ها به‌عنوان تمرین برعهده خواننده است. ■

تذکر: درحالت‌کلی (مثل بالا) می‌توان ثابت‌کرد که اگر $G_1$، $G_2$، و $G_3$ سه‌گروه و$G_2$ و $G_3$ آبلی باشد، واگر $\varphi_1 \in Hom(G_1, G_2)$ و $\varphi_2 \in Hom(G_2, G_3)$، آنگاه $\varphi_1\varphi_2 \in Hom(G_1 G_3)$. از این مطلب دراثبات قضیه استفاده خواهد شد.

### ۸) مثال

با استفاده از احکام مثال ۶ می‌توانیم نشان دهیم‌که اگر $n \in Z^+$، آنگاه

$$<End(\mathbf{Z}_n), +, \cdot> \cong <\mathbf{Z}_n, +, \cdot>$$

$$<End(\mathbf{Z}), +, \cdot> \cong <\mathbf{Z}, +, \cdot>$$

$$<End(\mathbf{R}), +, \cdot> \cong <\mathbf{R}, +, \cdot>$$

ولی چنین نیست که برای هرگروه آبلی $<G, +>$، چنین چیزی داشته‌باشیم یا حتی $|<End(\mathbf{R}), +, \cdot>| = |<G, +>|$، مثلاً اگر $G = \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$، آنگاه (باکمی محاسبه می‌شود نشان داد که)

$$<End(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2), +, \cdot> \cong <Mat_2(\mathbf{Z}_2), +, \cdot>$$

(اگر $R$ یک حلقه تعویض‌پذیر یکدار باشد، آنگاه

$$<Mat_n(R), +, \cdot>$$

حلقه ماتریس‌های $n \times n$ با درآیه‌های از $R$ و با اعمال جمع وضرب معمولی ماتریس‌ها می‌باشد.) درحالی‌که

$$16 = |<Mat_2(\mathbf{Z}_2), +, \cdot>| \neq |\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2, +, \cdot| = 4$$

پس حتماً

$$<End(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2), +, \cdot> \ncong <\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2, +, \cdot>.$$

## ۹) لم. معرفی گروه اتومورفیسم‌های یك‌گروه

فرض‌کنیم $\langle G,+\rangle$ یك‌گروه دلخواه باشد. دراین‌صورت به هر اندومورفیسم یك‌به‌یك وپوشا از G، یك اتومورفیسم از G می‌گوئیم ومجموعه کلیه اتومورفیسم‌های‌گروه G را با $Aut(G)$ نشان می‌دهیم. مجموعه $Aut(G)$ با عمل ضرب هومومورفیسم‌ها تشکیل یك‌گروه ضربی، بنام گروه اتومورفیسم‌های G، می‌دهد. درصورتی‌که G آبلی باشد، $\langle Aut(G),\cdot\rangle$ گروه یکه‌های حلقه $\langle End(G),+,\cdot\rangle$ است.

اثبات.

بدیهی است‌که

$$I: G\longrightarrow G$$

$$gI=g$$

یك اتومورفیسم از G است، پس $Aut(G)\neq\varnothing$. بعلاوه چون ترکیب دوتابع یك‌به‌یك وبرو، یك‌تابع یك به‌یك و برواست، عمل ضرب در $Aut(G)$ بسته میباشد. شرکت‌پذیری محرز است. بعلاوه I عضو همانی نسبت به این عمل است و معکوس هر اتومورفیسم $\varphi$ موجود است، فرض کنیم این تابع $\psi$ باشد، دراین‌صورت اولاً $\psi$ یك تابع یك‌به‌یك و پوشا است (چرا؟)، ثانیاً اگر $h,k\in G$، آنگاه $h_1$ و $k_1$ ای در G هست‌که $h_1\varphi=h$ و $k_1\varphi=k$، پس

$$(hk)\psi=((h_1\varphi)(k_1\varphi))\psi=((h_1k_1)\varphi)\psi$$
$$=h_1k_1=(h\psi)(k\psi).$$

ادعای دیگر لم، بدیهی‌اند. ■

## ۱۰) مثال

از مثال ۸ داریم‌که اگر $n\in Z^+$، آنگاه

$$\langle Aut(Z_n),\cdot\rangle\cong\langle Z_n^*,\cdot\rangle$$
$$\langle Aut(Z),\cdot\rangle\cong\langle\{1,-1\},\cdot\rangle\cong\langle Z_2,+\rangle$$
$$\langle Aut(R),\cdot\rangle\cong\langle R^*,\cdot\rangle$$

به‌علاوه می‌شود ثابت کرد (رجوع کنید به‌صفحه ۲۹۹ کتاب سوزوکی [ ] که:

اگر $3\leqslant n$ و $n\neq 6$، آنگاه $Aut(A_n)=S_n$.

اگر $2\leqslant n$ و $n\neq 6$، آنگاه $Aut(S_n)=S_n$.

جلوتر ثابت خواهیم کردکه اگر $k\in Z^+$، آنگاه

$$End(\underbrace{Z_n\times Z_n\times\cdots\times Z_n}_{k\text{ بار}})\cong Mat_k(Z_n)$$

وبعلاوه

$$Aut(\underbrace{Z_n\times Z_n\times\cdots\times Z_n}_{k\text{ بار}})\cong GL_k(Z_n)$$

که درآن $GL_k(Z_n)$ گروه ضربی ماتریس‌های معکوس‌پذیر با درایه‌های از $Z_n$ میباشد.

## ۱۱) نشاندن یك‌حلقه دریك حلقه دیگر

گوئیم حلقه $R_1$ را در حلقه $R_2$ می‌توان نشاند، اگر یك هومومورفیسم‌یك‌به‌یك‌از $R_1$ بتوی $R_2$ پیدا شود. این بدین معنی است‌که در $R_2$ یك زیر حلقه مثل H هست کـه بـا حلقه $R_1$ ایزومورف است(یعنی،تنها دراسم‌گذاری‌متفاوت‌است.)
(و حالا جان کلام.)

## ۱۲) قضیه

هرحلقه دلخواه را می‌توان در حلقه‌ای یکدار نشاند.

اثبات.

فرض‌کنیم $\langle R,+,\cdot\rangle$ حلقه‌ای مفروض باشد. قرارمی‌دهیم $R^*=R\times Z$ که Z مجموعـه اعـداد صحیح است. برای $(r_1,z_1)$ و $(r_2,z_2)$ از $R^*$ تعریف می‌کنیم

$$(r_1,z_1)+(r_2,z_2)=(r_1+r_2,z_1+z_2)$$
$$(r_1,z_1)\cdot(r_2,z_2)=(r_1r_2+z_1r_2+z_2r_1,z_1z_2)$$

توجه کنیدکه $z_1r_1$ یعنی‌جمع $r_1$ به‌تعداد $z_1$ بار با خودش. اکنون بامحاسبه می‌توان نشان دادکه $R^*$ بااعمال جمع وضرب بالا یك حلقه است، بعلاوه ملاحظه‌می‌کنیم‌که

$$(r,n)(0,1)=(r0+n0+1r,n1)=(r,n),$$

و نیز

$$(0,1)(r,n)=(0r+1r+n0,1n)=(r,n).$$

پس $(0,1)$ یـك حلقه $\langle R^*,+,\cdot\rangle$ است. اکنـون تعریف می‌کنیم

$$\phi: R\longrightarrow R^*$$

$$r\phi=(r,0)$$

اولاً $\phi$ یك هومومـورفیسم است، زیرا اگر $r,s\in R$ ، آنگاه

$$(rs)\phi=(rs,0)=(rs+0s+0r,00)$$
$$=(r,0)(s,0)=(r\phi)(s\phi).$$

و بعلاوه

$$(\gamma+s)\phi=(\gamma+s,\circ)=(\gamma,\circ)+(s,\circ)=\gamma\phi+s\phi.$$

ثانیاً $\phi$ یك بـه یـك است زیـرا اگـر $\gamma\phi=s\phi$، آنگـاه $(\gamma,\circ)=(s,\circ)$ ودرنتیجه $\gamma=s$. پس $\mathbf{R}$ را می‌شود در حلقه یکدار $\mathbf{R}^*$ نشاند.■

## ۱۳) قضیه

هرحلقه یکدار $\mathbf{R}$ را می‌توان در حلقه اندومورفیسم‌های گروه جمیعش $(\langle\mathbf{R},+\rangle)$ نشاند،

اثبات.

تعریف می‌کنیم $(\mathbf{R}^+=\langle\mathbf{R},+\rangle)$

$$\psi:\mathbf{R}\longrightarrow \mathrm{End}(\mathbf{R}^+)$$

$$\gamma\psi=\phi_\gamma$$

که

$$x\phi_\gamma=\gamma x \qquad (x\in\mathbf{R})$$

I. بـرای هر $\gamma\in\mathbf{R}$، $\phi_\gamma$ یك انـدومورفیسم $\mathbf{R}^+$ است: اگـر $x,y\in\mathbf{R}$، آنگاه

$$(x+y)\phi_\gamma=\gamma(x+y)=\gamma x+\gamma y.$$

II. $\psi$ یك‌به‌یك‌است: اگر $\gamma_۱,\gamma_۲\in\mathbf{R}$ و $\gamma_۱\psi=\gamma_۲\psi$، آنوقت $\phi_{\gamma_۱}=\phi_{\gamma_۲}$، بویژه $۱\phi_{\gamma_۱}=۱\phi_{\gamma_۲}$، یعنی $\gamma_۱=\gamma_۲$.

III. $\psi$ یك همومورفیسم است: اگر $x\in\mathbf{R}$، $\gamma_۱$، $\gamma_۲$، آنگاه

$$x[(\gamma_۱+\gamma_۲)\psi]=x\phi_{\gamma_۱+\gamma_۲}=(\gamma_۱+\gamma_۲)x$$
$$=\gamma_۱x+\gamma_۲x=x\phi_{\gamma_۱}+x\phi_{\gamma_۲}$$
$$=x(\gamma_۱\psi)+x(\gamma_۲\psi).$$

پس در جمع داریم $(\gamma_۱+\gamma_۲)\psi=\gamma_۱\psi+\gamma_۲\psi$. بعلاوه،

$$x[(\gamma_۱\gamma_۲)\psi]=x\phi_{\gamma_۱\gamma_۲}=x(\gamma_۱\gamma_۲)$$
$$=(x\gamma_۱)\gamma_۲=(x\phi_{\gamma_۱})\gamma_۲=(x\phi_{\gamma_۱})\phi_{\gamma_۲}$$
$$=x(\phi_{\gamma_۱}\phi_{\gamma_۲})=x[(\gamma_۱\psi)(\gamma_۲\psi)]$$

پس بنابراین $(\gamma_۱\gamma_۲)\psi=(\gamma_۱\psi)(\gamma_۲\psi)$.

از جمع‌بندی I، II، III حکم را داریم.■

## ۱۴) قضیه (قضیه کیشکینا[1])

فرض کنیم $G=\sum_{i=۱}^{n}H_i$ یك گروه آبلی دلخواه باشد، در این‌صورت حلقه اندومورفیسم‌های $G$ با حلقه‌ای ازماتریس‌های $n\times n$ که درآیه $(i,j)$ام آن یك همومورفیسم از $H_i$ به $H_j$ است، ایزومورف می‌باشد.

اثبات. فرض کنیم $\mathrm{Mat}(n;\mathrm{Hom}(H_i,H_j))$ مجموعه کلیه‌ماتریس‌های $n\times n$ مثل $\phi=[\varphi_{ij}]_{n\times n}$ باشدکه‌به‌ازای‌هر $j,i$ از مجموعهٔ $I_n=\{۱,۲,\dots n\}$

$$\varphi_{ij}\in\mathrm{Hom}(H_i,H_j)$$

فرض‌کنیم $\phi^{(۱)}=[\varphi_{ij}^{(۱)}]_{n\times n}$ و $\phi^{(۲)}=[\varphi_{ij}^{(۲)}]_{n\times n}$ دو عضو دلخـواه از $\mathrm{Mat}(n;\mathrm{Hom}(H_i,H_j))$ بـاشند، تعریف می‌کنیم

$$\phi^{(۱)}+\phi^{(۲)}=[\varphi_{ij}^{(۱)}+\varphi_{ij}^{(۲)}]_{n\times n}\text{،}$$

$$\phi^{(۱)}.\phi^{(۲)}=\left[\sum_{k=۱}^{n}\varphi_{ik}^{(۱)}\varphi_{kj}^{(۲)}\right]_{n\times n}$$

واضـح است که اگـر $i,j\in I_n$، آنگـاه بنابه لم ۵، چـون $\varphi_{ij}^{(۱)}$ و $\varphi_{ij}^{(۲)}\in\mathrm{Hom}(H_i,H_j)$، داریم

$$\varphi_{ij}^{(۱)}+\varphi_{ij}^{(۲)}\in\mathrm{Hom}(H_i,H_j) \text{ و لذا}$$

$$\phi^{(۱)}+\phi^{(۲)}\in\mathrm{Mat}(n;\mathrm{Hom}H_i,H_j)).$$

بعلاوه اگر $i,j,k\in I_n$، آنگاه بنابه تـذکر پس‌از لم ۷، چـون $\varphi_{ik}^{(۱)}\in\mathrm{Hom}(H_i,H_k)$ و $\varphi_{kj}^{(۲)}\in\mathrm{Hom}(H_k,H_j)$، داریم

$$\varphi_{ik}^{(۱)}\varphi_{kj}^{(۲)}\in\mathrm{Hom}(H_i,H_j).$$

اکنون بااستفاده از لم ۵ (و استقراء) داریم

$$\sum_{k=۱}^{n}\varphi_{ik}^{(۱)}\varphi_{kj}^{(۲)}\in\mathrm{Hom}(H_i,H_j)\text{،}$$

وبنابراین(مطابق تعریف مجموعه $(\mathrm{Mat}(n;\mathrm{Hom}\,H_i,H_j))$ داریم

$$\phi^{(۱)}\phi^{(۲)}\in\mathrm{Mat}(n;\mathrm{Hom}(H_i,H_j)).$$

پس عمل‌جمع وعمل‌ضرب بسته‌است. به‌سادگی مشاهده می‌شود کـه $O=[\circ_{ij}]_{n\times n}$ صفـر عمـل جمع است، که در آن $\circ_{ij}$ همومورفیسم صفر از $H_i$ به $H_j$ مـی‌باشد. همچنین اگر $۱_i$ یك حلقه اندومورفیسم‌های $H_i$ باشد، آنگاه

$$\begin{bmatrix} ۱_۱ & \circ_{۱۲} & \cdots & \circ_{۱n} \\ \circ_{۲۱} & ۱_۲ & \cdots & \circ_{۲n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \circ_{n۱} & \circ_{n۲} & \cdots & ۱_n \end{bmatrix}$$

---

1. kishkina

عضو خنثی نسبت به‌عمل ضرب است. سایر اصول موضوع حلقه‌بودن به‌سادگی تحقیق می‌شود که آن‌را به‌عهده خواننده می‌گذاریم.

فرض‌کنیم $\Phi\in End(G)$ و بعلاوه‌اینکه $y=\sum_{i=1}^{n}h_i\in G$

اکنون چون $\Phi$ یك نگاشت بتوی $G$ است، به‌ازای هر $i\in I_n$،

$$h_i\Phi=\sum_{j+1}^{n}h_{ij}$$

که درآن برای هر $j\in I_n$، $h_{ij}$ عضوی از $H_j$ است. تعریف

$$\varphi_{ij}:H_i\longrightarrow H_j$$

$$h_i\varphi_{ij}=h_{ij}$$

اکنون بوضوح $\varphi_{ij}\in Hom(H_i,H_j)$. زیرا اگر $h_i^{(1)},h_i^{(2)}\in H_i$ آنگاه

$$\begin{aligned}(h_i^{(1)}+h_i^{(2)})\varphi_{ij} &=(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{مکان یکم}}}{0}+0+\cdots+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{مکان iام}}}{(h_i^{(1)}+h_i^{(2)})}+\cdots+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{مکان nام}}}{0})\Phi\\ &=(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{مکان یکم}}}{0}+0+\cdots+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{مکان iام}}}{h_i^{(1)}}+\cdots+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{مکان nام}}}{0})\Phi\\ &+(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{مکان یکم}}}{0}+0+\cdots+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{مکان iام}}}{h_i^{(2)}}+\cdots+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{مکان nام}}}{0})\Phi\\ &=(h_i^{(1)})\varphi_{ij}+(h_i^{(2)})\varphi_{ij}\end{aligned}$$

حال باتوجه به‌این‌مطلب، می‌توانیم تعریف‌کنیم

$$\Psi:End(G)\longrightarrow Mat(n;Hom(H_i,H_j))$$

$$(\phi)\Psi=[\varphi_{ij}]_{n\times n}$$

تابع $\Psi$ پوشا است زیرا اگر $[\varphi_{ij}]_{n\times n}$ عضو دلخواهی از $Mat(n;Hom(H_i,H_j))$ باشد، درآن‌صورت $\Phi$ با تعریف زیر یك عضو از $Mat(n;Hom(H_i,H_j))$ است‌که به‌ازای آن $(\Phi)\Psi=(\varphi_{ij})_{n\times n}$:

اگر $g=\sum_{i=1}^{n}h_i\in G$، تعریف می‌کنیم

$$g\,\Phi=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}h_i\varphi_{ij}$$

اکنون واضح است که $(\phi)\Psi=[\varphi_{ij}]_{n\times n}$.

اینکه $\Psi$ یك هومومورفیسم حلقه‌است و بعلاوه یك‌به‌یك می‌باشد، تنها به‌محاسبه احتیاج دارد و ما آن‌را برعهده‌خواننده می‌گذاریم. پس $\Psi$ یك‌ایزومورفیسم حلقه از $End(G)$ به‌روی $Mat(n;Hom(H_i,H_j))$ می‌باشد.

## ۱۵ـ نتیجه

فرض کنیم $G=\sum_{i=1}^{n}H_i$ یك‌گروه آبلی دلخواه باشد، دراین‌صورت گروه $<Aut(G),.>$ باگروه ضربی ماتریس‌های معکوس‌پذیر از حلقه ماتریس‌های مطرح شده در قضیه ۱۴ ایزومورف است.

## ۱۶ـ نتیجه

فرض‌کنیم $G=\sum_{i=1}^{n}H_i$، دراین‌صورت

$$o[End(G)]=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}o[Hom(H_i,H_j)].$$

بخصوص اگر $H_i\cong \mathbf{Z}_{m_i}$ که $M_i\in\mathbf{Z}^+$، آنوقت

$$o[End(G)]=(o[G])^n.^{*}$$

برهان.

چون بنابه قضیه ۱۴،

$$End(G)\cong Mat(n;Hom(H_i,H_j))>$$

و برای درآیه $(i,j)$ام از اعضاء $Mat(n;Hom(H_i,H_j))$ دقیقاً $[Hom(H_i,H_j)]$ انتخاب وجود دارد واین انتخاب به‌انتخاب سایر درآیه‌ها بستگی ندارد، حکم از اصل ضرب حالات نتیجه می‌گردد. بعلاوه اگر $Z_{mi}\cong H_i$، آنگاه چون مطابق مثال ۶، $Hom(\mathbf{Z}_{m_i},{}_{m_j})\cong\mathbf{Z}_{m_j}$، داریم

$$o[End(G)]=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}o[\mathbf{Z}_{m_j}]=\prod_{i=1}^{n}o[G]=(o[G])^n$$

## ۱۷ـ قضیه (قضیه اساسی نشاندن حلقه‌ها)

هر حلقه‌ای را می‌توان در حلقه‌ای از ماتریس‌های به‌شکل مطرح‌شده درقضیه ۱۴ نشاند.

برهان.

کافی است به‌طور متوالی از قضیه ۱۲، قضیه ۱۳، و

---

* اگر A یك مجموعه باشد، $o[A]$ را عدد اصلی آن تعریف می‌کنیم. اگر تعداد اعضاء A متناهی باشد، آنوقت $o[A]$ یعنی همان شمار اعضاء A می‌شود

قضیه ۱۴ استفاده بکنیم.

## ۱۸ـ قضیه (هدف مقاله)

فرض‌کنیم $\langle R,+,.\rangle$ یك حلقه دلخواه باشد، به‌طوری که $\langle R,+\rangle$ یك‌گروه‌آبلی متناهیاً تولیدشده با $n$ مولد باشد، دراین‌صورت $R$ را می‌توان در حلقه ماتریس‌های $(n+1)\times(n+1)$ با درآیه‌های اعداد صحیح، یعنی $Mat_n(\mathbf{Z})$، نشاند.

برهان.

فرض‌کنیم $R^+=\sum_{i=1}^{n}H_i$ که $H_i$ها گروههای دوری (متناهی یا نامتناهی) هستند. بنابه قضیه ۱۲، $R$ را می‌توان درحلقه $R_1$ نشاند، که در آن

$$R_1^+=\sum_{i=1}^{n+1}H_i, \quad H_{i+1}=\mathbf{Z}.$$

سپس مطابق قضیه ۱۳، این حلقه $R_1$ را در حلقه $End(R_1^+)$ می‌توان نشاند. اکنون بنابه قضیه ۱۴، $End(R_1^+)\cong Mat(n+1;Hom(H_i,H_j))$. ولی همان‌طور که در مثال ۶ نشان داده شد هر عضو از $Hom(H_i,H_j)$ به شکل $\varphi_s^{(i,j)}$ است برای یك $s\in H_j$ بقسمی که

$$\varphi_s^{(i,j)}:H_i\longrightarrow H_j$$

$$h\varphi_s^{(i,j)}=sh$$

اکنون مشاهده می‌شود که اگر $\varphi_s^{(i,j)},\varphi_{s'}^{(i,j)}\in Hom(H_i,H_j)$، آنگاه

$$\begin{aligned}h(\varphi_s^{(i,j)}+\varphi_{s'}^{(i,j)})&=h\varphi_s^{(i,j)}+h\varphi_{s'}^{(i,j)}\\&=sh+s'h=(s+s')h\\&=h\varphi_{s+s'}^{(i,j)}\end{aligned}$$

یعنی $\varphi_s^{(i,j)}+\varphi_{s'}^{(i,j)}=\varphi_{s+s'}^{(i,j)}$.

بعلاوه اگر $\varphi_s^{(i,j)}\in Hom(H_i,H_j)$ و $\varphi_{s'}^{(j,k)}\in Hom(H_j,H_k)$، آنگاه،

$$\begin{aligned}h(\varphi_s^{(i,j)}\varphi_{s'}^{(j,k)})&=(h\varphi_s^{(i,j)})\varphi_{s'}^{(j,k)}\\&=(sh)\varphi_{s'}^{(j,k)}=s'sh\\&=ss'h=h\varphi_{ss'}^{(i,k)}\end{aligned}$$

یعنی، $\varphi_s^{(i,j)}\varphi_{s'}^{(j,k)}=\varphi_{ss'}^{(i,k)}$.

بنابراین اگر

$\Phi=[\varphi_{s_{ij}}^{(i,j)}]_{(n+1)\times(n+1)}$ و $\Phi'=[\varphi_{s'_{ij}}^{(i,j)}]_{(n+1)\times(n+1)}$

دوعضو دلخواه از $Mat(n+1;Mom(H_i,H_j))$ باشند، آنگاه

$$\begin{aligned}\Phi+\Phi'&=[\varphi_{s_{ij}}^{(i,j)}+\varphi_{s'_{ij}}^{(i,j)}]_{(n+1)\times(n+1)}\\&=[\varphi_{s_{ij}+s'_{ij}}^{(i,j)}]_{(n+1)\times(n+1)}\end{aligned}$$

وبعلاوه

$$\begin{aligned}\Phi\Phi'&=\left[\sum_{k=1}^{n+1}\varphi_{s_{ij}}^{(i,k)}\varphi_{s_{kj}}^{(k,j)}\right]_{(n+1)\times(n+1)}\\&=\left[\sum_{k=1}^{n+1}\varphi_{s_{ij}s_{ik}}^{(i,j)}\right]_{(n+1)\times(n+1)}\\&=\left[\varphi^{(i,j)}_{\sum_{k=1}^{n+1}s_{ik}s_{kj}}\right]_{(n+1)\times(n+1)}\end{aligned}$$

پس اگر تعریف‌کنیم

$$\Psi:Mat(n+1;Hom(H_i,H_j))\longrightarrow Mat_{n+1}(R_1),$$

$$\Psi:[\varphi_{s_{ij}}^{(i,j)}]_{(n+1)\times(n+1)}\longrightarrow[s_{ij}]_{(n+1)\times(n+1)}$$

آنگاه $\Psi$ یك هوموـــورفیسم حلقه است، بعلاوه یك به‌یك وبرو‌بودن $\Psi$ بدیهی است. پس ثابت شدکه

$$End(R_1^+)\cong Mat(n+1;Hom(H_i,H_j))\cong Mat_{n+1}(R_1)$$

ولی ملاحظه می‌کنیم که می‌توان‌گروه آبلی $R_1^+=\sum_{i=1}^{n+1}H_i$ رادر $G=\sum_{i=1}^{n+1}\mathbf{Z}$ نشاند (چرا؟)، پس بنابراین $End(R_1^+)$ را در حلقه $Mat_{n+1}(\mathbf{Z})$ می‌توان نشاند. ولــذا مطابق آنچه که در ابتدای این برهان گفتیم، $R$ را می‌توان در $Mat_{n+1}(\mathbf{Z})$ نشاند. ■

## ۱۹ـ نتیجه

فرض کنیم $G\cong H\oplus H\oplus\cdots\oplus H=\bigoplus_{i=1}^{n}H$ یك گروه آبلی باشد و $k\in\mathbf{Z}^+$. دراین‌صورت اگر $H$ گروه جمعی $\mathbf{Z}$ و یا یکی از $\mathbf{Z}_n$ها باشد، داریم

(i) $End(G)\cong Mat_n(H)$،

(ii) $Aut(G)\cong GL_n(H)$.

بقیه در صفحه ۲۵

# حل مسائل سی و یکمین المپیاد بین‌المللی ریاضی پکن ۱۹۹۰

ترجمه: محمود نصیری

۱ـ دو وتر AB و CD از یك دایره یکدیگر را در نقطه E درون دایره قطع می‌کنند. فرض کنیم M يك نقطه داخلی پاره خط EB (غیر از E و B) باشد.

مماس در نقطه E بر دایره‌ای که از سه نقطه D و E و M می‌گذرد خطوط BC و AC را به‌ترتیب در نقاط F و G قطع می‌کند. اگر $t=\frac{AM}{AB}$ مقدار $\frac{EG}{EF}$ را برحسب t پیدا کنید.

حل. D را به A، B و M وصل می‌کنیم. چون

$\angle EMD=\angle DEG=\angle CEF$ و $\angle MAD=\angle ECF$،

$\triangle CEF\sim\triangle AMD$، بنابراین

$$CE\cdot MD=AM\cdot EF$$

از طرف دیگر، چون $\angle MBD=\angle ECG$ و

$$\angle CGE=\angle CEF-\angle GCE$$

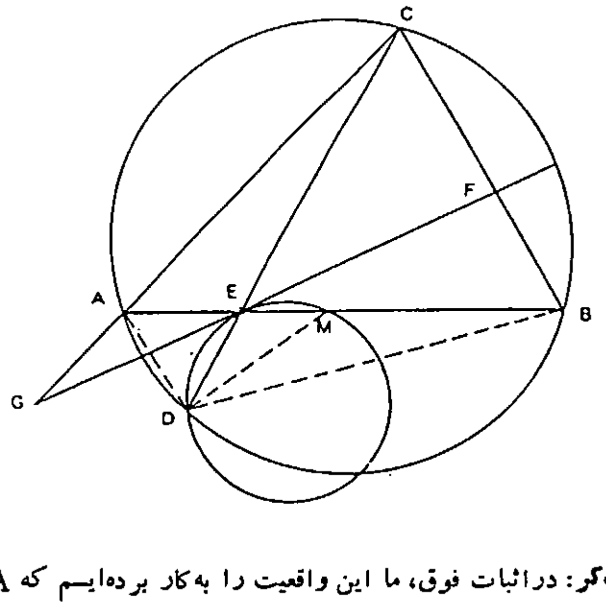
$$=\angle EMD-\angle MBD=\angle BDM\text{،}$$

$$\triangle CGE\sim\triangle BDM\text{،}$$

لذا $GE\cdot MB=CE\cdot MD$.

یعنی $GE\cdot MB=AM\cdot EF$

$$\frac{GE}{EF}=\frac{AM}{MB}=\frac{tAB}{(1-t)AB}=\frac{t}{1-t}$$




تذکر: در اثبات فوق، ما این واقعیت را به‌کار برده‌ایم که A بین G و C واقع است: که آن می‌تواند به‌صورت زیر ثابت شود. چنانکه در شکل نشان داده شده، چون M (غیر از B) روی

پاره خط BE واقع است، $\angle MDE < \angle BDE$.
توجه کنید که $\angle MDE = \angle BEF$ و $\angle BDE = \angle BAC$ داریم $\angle BAC < \angle BEF$ بنابراین نقطه A بین C و G قرار دارد.

۲ـ فرض می‌کنیم $n \geqslant 3$ و مجموعه E از $2n-1$ نقطه متمایز روی یك دایره تشکیل شده باشد، فرض می‌کنیم دقیقاً k نقطه از این نقطه‌ها بـه‌رنگ سیاه رنگ‌آمیزی شده است. یك چنین رنگ‌آمیزی را «خوب» می‌گوئیم اگر حداقل یك‌زوج از نقاط سیاه وجود داشته باشد به‌طوری‌که درون یکی ازدو کمان منتهی به‌این دونقطه شامل درست n نقطه از E باشد.

کمترین مقدار k را برای این‌کـه هـر رنگ آمیزی E خوب باشد پیدا کنید.

حل. دونقطه «وابسته» نامیده می‌شود اگر دقیقاً n نقطه از E روی یکی از دوکمان‌منتهی‌به‌این دونقطه وجود داشته باشند. مانیاز به‌این داریم که کمترین مقدار k را با این خاصیت که هر k نقطه از E شامل حداقل یك زوج ازنقاط «وابسته» باشند را تعیین کنیم باوصل هرزوج ازنقاط وابسته، یك‌گراف G بادرجه ۲ درهر رأس به‌دست می‌آید G از دورهای مجزا تشکیل شده است.

دوحالت درنظر می‌گیریم؛

(i). اگر $3 \nmid 2n-1$، آنگاه

$$(2n-1\ ,\ n+1)=(2n-1\ ,\ 3)=1 ،$$

G وخود G یك دور است.

(ii). اگر $3 | 2n-1$، آنگاه

$$(2n-1\ ,\ n+1)=3 ،$$

و ۳ دور در G وجود دارد، هرکدام شامل $\frac{2n-1}{3}$ رأس می‌باشد.

درحـالـت (i)، آشکارا کمترین مقدار k برابر است با

$$\left[\frac{2n-1}{2}\right]+1=n.$$

درحالت (ii)، کمترین مقدار k برابر است با

$$3\left[\frac{\frac{2n-1}{3}}{2}\right]+1=3\frac{\frac{2n-1}{3}}{2}+1=n-1.$$

به‌طور خلاصه، کمترین مقدار k برابر است با

$$\begin{cases} n & ، 3\nmid 2n-1 \\ n-1 & ، 3|2n-1 \end{cases}$$

۳ـ کلیه اعداد صحیح $n>1$ را پیداکنید که $\frac{2^n+1}{n^2}$ عدد صحیح باشد.

حل. $n=3$ یك‌جواب است.

ثابت می‌کنیم که آن تنها جواب است.

فرض می‌کنیم $n=3^k d$ $\quad ((d\ ,\ 3)=1 ، k\geqslant 0)$

یك‌جواب است، $(3^k d)^2 \mid 2^{3^k d}+1$.

$$2^{3^k d}+1=(2^d+1)\prod_{m=0}^{k-1}(2^{2\cdot 3^m d}-2^{3^m d}+1)$$

چون برای هرعدد فرد t، $2^{2t}-2^t+1\equiv 3 \pmod 9$.

پس

$$3^k \Big\| \prod_{m=0}^{k-1}(2^{2\cdot 3^m d}-2^{3^m d}+1) ،$$

$$3^{k+1}\nmid \prod_{m=0}^{k-1}(2^{2\cdot 3^m d}-2^{3^m d}+1).$$

بنابراین $3^k \mid 2^d+1$، از $(d\ ,\ 3)=1$

داریم $9\nmid 2^d+1$. بنابراین $k=0$ یا $k=1$

اکنون ثابت می‌کنیم $d=1$.

فرض می‌کنیم $d\neq 1$، فرض‌می‌کنیم p کوچکترین‌عامل اول d باشد. d فرد است و $(d\ ,\ 3)=1$،

لذا $p\geqslant 5$. و $p \mid 2^n+1$ بنابراین

$$2^n\equiv -1 \pmod p \ ، \ 2^{2n}\equiv 1 \pmod p.$$

قضیه فرما: $\quad 2^{p-1}\equiv 1 \pmod p$.

به‌وسیله تقسیم اقلیدسی، ثابت می‌شود که

اگر $2^j\equiv 1 \pmod p$، $j=(2n\ ,\ p-1)$ ، $2n=2\cdot 3\cdot d$

$(p-1\ ,\ d)=1$، آنگاه $j \mid 6$.

همه‌مقادیر ممکن j، ۶ و ۳ و ۲ و ۱ هستند.

$p \mid 2^j-1$، بنابراین p یکی از عـاملهای ۱، ۳، ۷، ۶۳ است.

چون $p\geqslant 5$، این می‌رساندکه $p=7$

اما برای هرعدد صحیح m $\quad 7\nmid 2^m+1$.

این متناقض با این است که $p|2^n+1$.

لذا تنها جواب به‌شکل $3^k d$، $k=1$، $d=1$ است، یعنی $n=3$. این تنها جواب مسأله است.

۴- فرض کنیم $Q^+$ مجموعه اعداد گویای مثبت باشد. تابع $f: Q^+ \longrightarrow Q^+$ را طوری بسازید که به‌ازاء هر $x$ و $y$ در $Q^+$

$$f(x f(y))=\frac{f(x)}{y}$$

حل. اگر $f(y_1)=f(y_2)$، معادله تابعی نتیجه می‌دهد که $y_1=y_2$. با انتخاب $y=1$ به‌دست می‌آید $f(1)=1$ با انتخاب $x=1$، برای هر $y\in Q^+$، $f f(y)=\frac{1}{y}$ بـدست می‌آید.

با به‌کاربـردن f به‌ازاء هر $y\in Q^+$ بـه‌دست می‌آیـد $f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{f(y)}$. سرانجام با انتخاب $y=f\left(\frac{1}{t}\right)$ بـه‌ازاء هر $x, t\in Q^+$ نتیجه می‌گیریم $f(xt)=f(x) f(t)$،
برعکس به‌سادگی می‌بینیم که هر تابع f که درشرایط

$$(a)\ f(xt)=f(x)\ f(t)\ ,\ (b)\ f(f(x))=\frac{1}{x}$$

به‌ازاء هر $x\ ,\ t\in Q^+$ صدق کند جواب معادلـه تابعی است.

تابع $f:Q^+ \longrightarrow Q^+$ که درشرط (a) صدق مـی‌کند می‌تواند به‌وسیله تعریف دلخواه روی اعـداد اول و تعمیم آن به‌صورت

$$f(p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k})=(f(p_1))^{n_1}(f(p_2))^{n_2}\cdots(f(p_k))^{n_k}$$

ساخته شود کـه $p_j$ نشان دهنده j امین عدد اول است و $n_j\in Z$.

چنین تابعی در (b) صدق می‌کند، فقط وفقط اگر به‌ازاء هرعدد اول دز (b) صدق کند ساختمان ممکن f به‌صورت زیر است:

$$f(p_j)=\begin{cases} p_{j+1} & \text{اگر } j \text{ فرد باشد}\\ \dfrac{1}{p_{j-1}} & \text{اگر } j \text{ زوج باشد}\end{cases}$$

مانند فوق آن‌را تعمیم می‌دهیم، یك تابع $f:Q^+ \longrightarrow Q^+$ به‌دست می‌آید.
واضح است که به‌ازاء هرعدد اول p، $f(f(p))=\frac{1}{p}$ بنابراین f درمعادله تابعی صدق می‌کند

۵- یك عدد صحیح اولیه $n_0>1$ داده‌شده‌است. دوبازیکن A و B اعداد صحیح ... ، $n_1$، $n_2$ را متناوباً (یکی پس از دیگری) با توجه به‌قواعد زیر انتخاب می‌کنند؛ با داشتن $n_{2k}$ A عدد صحیح $n_{2k+1}$ را طوری انتخاب می‌کندکه

$$n_{2k}\leqslant n_{2k+1}\leqslant n_{2k}^2.$$

با دانستن $n_{2k+1}$، بازیکن B عـدد صحیح $n_{2k+2}$ را طوری انتخاب می‌کندکـه $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ به‌صورت توان مثبتی ازیك عدد اول باشد.

بازیکن A با انتخاب‌عدد ۱۹۹۰ وبازیکن B باانتخاب ۱ برنده محسوب می‌شوند.

به‌ازاء چه مقادیری‌از $n_0$، (a) A برنامه‌ای برای‌برنده شدن دارد،

(b) B برنامه‌ای برای برنده شدن دارد.

(c) هیچ‌یك برنامه‌ای برنده شدن ندارد.

حل. مجموعه تمام اعدادصحیح $n_0$ را به‌طوری‌که‌بازیکن A ابتدا از $n_0$ می‌تواند موفق به‌برنده شدن بـازی شود را به W نشان می‌دهیم.

لم زیر را داریم

لم. فرض‌می‌کنیم $\{m,m+1,\ldots,1990\}\subset W$، $s\leqslant 1990$ و $\frac{s}{p^r}\geqslant m$، که $p^r$ بـزرگترین عامل s است به‌طوری‌که p عددی اول است و $r\in N$.

آنگاه تمام اعداد طبیعی $n_0$ به‌طوری‌که

$$\sqrt{s}\leqslant n_0<m$$

در W هستند.

اثبات با چنین $n_0$ای شروع می‌کنیم، بازیکن A ممکن است $n_1=s$ بگیرد. سپس بازیکن B حق انتخـاب یك‌عـدد طبیعی $n_2$ را دارد به‌طوری‌که

$$m\leqslant\frac{s}{p^r}\leqslant n_2\leqslant 1990$$

زیرا $n_2\in W$، مطمئناً بازیکن A سرانجام می‌تواند برنده شود. لم ثابت شده است.

زیرا $1990<2025=45^2$، این آشکار است‌که تمام $n_0$هایی‌که $45\leqslant n_0\leqslant 1990$ در W هستند. چون $m=45$

و $S = 420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$ درمفروضات لم فوق صدق می‌کنند و $\sqrt{420} < 21 \leqslant 45$، نتیجه می‌گیریم که

$$\{21, 22, \ldots, 44\} \subset W$$

لم را با $m = 21$ و $S = 168 = 2^3 \times 3 \times 7$ به‌کارمی‌بریم. مشاهده می‌کنیم که

$$\{13, 14, \ldots, 20\} \subset W.$$

برای $m = 13$ و $S = 105 = 3 \times 5 \times 7$، ازلم‌فوق به‌دست می‌آید

$$\{11, 12\} \subset W،$$

بافرض‌کردن $m = 11$ و $S = 60 = 2^2 \times 3 \times 5$،
می‌توانیم نشان دهیم‌که

$$\{8, 9, 10\} \subset W.$$

بنابراین ثابت‌کرده‌ایم‌که

$$\{8, 9, \ldots, 1990\} \subset W$$

برای $n_0 > 1990$ بازیکن $A$ می‌تواند عدد طبیعی $r$ راچنان انتخاب‌کندکه

$$2^r \times 3^2 < n_0 \leqslant 2^{r+1} \times 3^2 < n_0^2$$

وسپس

$$n_1 = 2^{r+1} \times 3^2$$

اکنون، مهم نیست که انتخاب بازیکن $B$ چگونه است، مطمئناً به‌صورت زیر انجام می‌دهد

$$8 \leqslant n_2 < n_0$$

بعدازتعداد متناهی‌مرحله (قدمهای متناهی)، وضعیت چنین‌خواهد بود:

$$8 \leqslant n_{2k} \leqslant 1990$$

وبازیکن $A$ برنده بازی خواهد بود. نتیجه می‌گیریم که برای $n_0 \geqslant 8$ بازیکن $A$ می‌تواند موفق به برنده شدن بازی شود.

اکنون حالت $n_0 \leqslant 5$ را درنظر می‌گیریم. چون‌که کمترین‌حاصلضرب‌سه عدداول متمایز $2 \times 3 \times 5 = 30 > 5^2$ است، بازیکن $A$ ناچاراً $n_1 = p^r \times q^s$ می‌گیرد، که در آن $p$ عددی اول است و $q$ عددی اول یا ۱ است، $p^r > q^s$ و $r, s \geqslant 1$.

سپس بازیکن $B$ می‌تواند.

$n_2 = q^s = \frac{n_1}{p^r} < \sqrt{n_1} \leqslant n_0$ انتخاب‌کند.

بعداز تعداد متناهی بازی، بازیکن $B$، $n_{3k} = 1$ خواهد داشت وبرنده بازی‌است. برای $n_0 = 6$ یا $n_0 = 7$ بازیکن $A$ ناچار است $n_1 = 30 = 2 \times 3 \times 5$ یا $n_1 = 42 = 2 \times 3 \times 7$ را انتخاب‌کند و سپس بازیکن $B$ ناچاراً $n_2 = 6$ را انتخاب می‌کنند.

پس ازآن $A$ و $B$ ناچاراً اعداد

$$\ldots، 6، 30، 6، 30، 6، 30$$

را متناوباً اختیارکنند تا ازباختن بازی اجتناب ورزند ودراین صورت مساوی می‌کنند.

۶ـ ثابت‌کنیدیك ۱۹۹۰ ضلعی‌محدب باخواص زیروجود دارد.

الف ـ تمام زوایای آن باهم مساوی باشند.

ب ـ طول اضلاع آن بدون درنظرگرفتن ترتیب، اعداد

$1^2، 2^2، \ldots$ و $1990^2$ باشند.

حل. فرض کنیم ۱۹۹۰ ضلعی $A_0A_1A_2\cdots A_{1889}$ دارای‌خواص (الف) و (ب) باشد.

بردار $\overrightarrow{A_rA_{r+1}}$ را به‌عنوان عذد مختلط $n_re^{ir\alpha}$ درنظر می‌گیریم که

$\alpha = \frac{2\pi}{1990}$، $r \in \{0, 1, \ldots, 1989\}$ و $A_{1990}$ نمایشاً $A_0$ است.

دراین صورت، $n_0، n_1، \ldots، n_{1989}$ بایدیك‌جایگشت اعداد $1^2، 2^2، \ldots، 1990^2$ باشد.

مساله را می‌توان به‌صورت زیر فرموله کرد:

یك جایگشت $(n_0$ و $n_1$ و ... و $n_{1989})$ از اعداد $1^2، 2^2، \ldots، 1990^2$ پیدا کنید به‌طوری‌که

$$\sum_{r=0}^{1989} n_re^{ir\alpha} = 0$$

برای سادگی، ما $n_r$ ها را «وزن» می‌نامیم.

فرض‌کنیم یك دیسك واحد به‌وسیله یك سوزن در مبدأ به‌طور افقی نگه داشته شده باشد.

مساله این است‌که:

چگونه می‌توان وزنهای $1^2، 2^2، \ldots، 1990^2$ راروی مرزدیسك درنقاطی‌قرارداد به‌طوری‌که محیط آن‌را به‌قوسهای مساوی تقسیم‌کنند تا دستگاهی متعادل به‌دست آید؟

باتقسیم ۱۹۹۰ وزن به ۹۹۵ جفت شروع می‌کنیم،
و ($1990^2$ و $1989^2$) ... و ($4^2$ و $3^2$) و ($2^2$ و $1^2$)
وهرزوج را در دوسریك قطر معلوم قرار می‌دهیم.
حالا مساله به‌صورت ساده‌تر تبدیل یافته است که:

چگونه می‌توان ۹۹۵ وزنه

$$3=2^2-1^2 \text{ و } 7=3^2-4^2 \text{ و}$$
$$3979=1990^2-1989^2 \text{ و } \dots \text{ و } 11=6^2-5^2$$

را درنقاطی قرار داد که محیط دایره واحد را به ۹۹۵ کمان مساوی تقسیم کنند تا دستگاه درحال تعادل باشد.

توجه داریم $995=5\times 199$،

۹۹۵ وزنه را به ۱۹۹ گروه تقسیم می‌کنیم

$$*\begin{cases} \text{و(۳۹و۳۵و۳۱و۲۷ و۲۳)و (۱۹ و۱۵، ۱۱و۷و۳)} \\ \text{(۳۹۷۹ و۳۹۷۵ و۳۹۷۱ و۳۹۶۷ و۳۹۶۳) و ....} \end{cases}$$

فرض کنید $\beta=\frac{2\pi}{199}$ و $\gamma=\frac{2\pi}{5}$.

پنج‌ضلعی به رأسهای ۱، $e^{i\gamma}$، $e^{2i\gamma}$، $e^{3i\gamma}$، $e^{4i\gamma}$، را به $F_1$ و پنج‌ضلعی $e^{ik\beta}$ را به $F_{k+1}$ نشان می‌دهیم.
پنج‌وزن ازگروه $(k+1)$ ام در (*) را دررأسهای پنج ضلعی $F_{k+1}$ می‌گذاریم، $(k+1)$ امین‌گروه اعداد مختلط به‌دست می‌آیند:

$$(20k+3)e^{ik\beta} \text{ و } (20k+7)e^{i(k\beta+\gamma)} \text{ و}$$
$$(20k+11)e^{i(k\beta+2\gamma)} \text{ و } (20k+15)e^{i(k\beta+3\gamma)} \text{ و}$$
$$(20k+19)e^{i(k\beta+3\gamma)} \text{ و } (40k+19)e^{(k\beta+4\gamma)} \text{ و}$$

که درآن $k=0$ و ۱ و ۲ و ... و ۱۹۸.

باتوجه به‌اینکه

$$1+e^{i\gamma}+e^{2i\gamma}+e^{3i\gamma}+e^{4i\gamma}=0 \text{ و}$$

می‌توانیم مجموع اعداد مختلط $(k+1)$ امین گروه را به‌صورت، $\eta e^{ik\beta}$ بنویسیم که درآن

$$\eta=3+7e^{i\gamma}+11e^{2i\gamma}+15e^{3i\gamma}+19e^{4i\gamma}$$

حاصل جمع تمام ۱۹۹ گروه اعداد مختلط برابر است با

$$\eta(1+e^{i\beta}\times\dots+e^{198i\beta})=0$$

ما به‌این‌نتیجه رسیدیم که مطمئناً یك ۱۹۹۰ ضلعی باخواص‌لازم وجود دارد.

درخاتمه. خاطرنشان می‌کنیم که می‌توان به‌روش‌زیرحل را سرراست نمود.

$$0=\sum_{k=0}^{198}\sum_{l=0}^{4}(20k+4l+3)e^{i(k\beta+l\gamma)}$$
$$=\sum_{k=0}^{198}\sum_{l=0}^{4}[(10k+2l+2)^2-(10k+2l+1)^2]e^{i(k\beta+l\gamma)}$$
$$=\sum_{k=0}^{198}\sum_{l=0}^{4}\sum_{m=1}^{2}(10k+2l+m)^2e^{i(k\beta+l\gamma+m\pi)}$$

وقتی‌که k دربین اعداد ۰، ۱، ....، ۱۹۸، l دربین ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، و m دربین ۱، ۲، تغییرمی‌کنند، عبارت $10k+2l+m$ دربین اعداد ۱، ۲، ... ، ۱۹۹۰ تغییر می‌کند، هرمقداری را دقیقاً یك بار می‌گیرد، وعبارت

$$e^{i(k\beta+l\gamma+m\pi)}=e^{i\frac{10k+398l+995m}{1990}2\pi}$$

هریك از ۱، $e^{i\alpha}$، ...، $e^{1989i\alpha}$ را یك‌بار می‌گیرد.

**تذکر:**

درآخر نشان می‌دهیم ۱۹۹۰ ضلعی که درفوق‌ساخته شد محدب است.

آنچه می‌خواهیم انجام دهیم آن است که نشان دهیم به‌ازای هرضلع این چندضلعی تمام رئوس دیگر دریك‌طرف خط مستقیمی که از این ضلع می‌گذرد قرار دارند.

یك ضلع دلخواه ۱۹۹۰ضلعی را با $A_0A$ نشان‌می‌دهیم در ۱۹۹۰ ضلعی $A_0A_1\dots A_{1989}$.

چون

$$I_m(A_k)=\begin{cases} \sum_{m=0}^{k-1}n_mI_m(e^{im\alpha})\geqslant n_1\sin\frac{2\pi}{1990}>0 \\ 2\leqslant k\leqslant 995; \\ -\sum_{m=k}^{1989}n_mI_m(e^{im\alpha})\geqslant n_{1989}\sin\frac{2\pi}{1990} \\ >0 ،996\leqslant k\leqslant 1989. \end{cases}$$

همه $A_k$ها ($k\equiv 2,3,\dots,1989$) دریك‌طرف ضلع $A_0A_1$ قرار دارد.

بقیه از صفحه ۱۹

برهان.

عین برهان قضیه ۱۸ استدلال می‌کنیم، منتهی با این تفاوت که در اینجا $R_1^+ = G$ و همه‌ی اعمال در $H$ صورت می‌پذیرد.

**۲۰ـ نتیجه (دلیل برعنوان مقاله)**

هر حلقه متناهی را درحلقه‌ای ازماتریس‌های بادرآیه‌های صحیح می‌توان نشاند. به‌عبارت دیگر هرحلقه متناهی را به‌عنوان حلقه‌ای از ماتریس‌های با درآیه‌های صحیح می‌توان انگاشت.

تذکر. مطابق آنچه که در برهان قضیه ۱۸ آمد، ما ازماتریس‌هایی استفاده‌می‌کنیم که اگر $H_i \cong Z_{m_i}$، آنگاه درآیه $(i,j)$ام آن عددی‌صحیح بین صفر و $m_i - 1$ است و درغیراین‌صورت یك عدد صحیح (بدون قید). درهر مرحله از محاسبات لازم است که‌ماتریس حاصله رابه‌این‌شکل دربیاوریم. به‌این‌صورت مشاهده می‌کنیدکه برخلاف تصورما، حلقه‌های متناهی پیش‌روی ما هستند. می‌شود نشان داد که حلقه اندومورفیسم‌های هر گروه آبلی آزاد از رتبه $n$ دقیقاً با $Mat_n(Z)$ ایزومورف است، و این خود دلیلی دیگر برقطعیت حکم ۲۰ می‌باشد.

**مراجع:**


[1] Hungerford , Thomas W., Algebra ,Springer Verlay , New York , 1984

[2] Kurosh , A.G., The Theory of Groups Vo.1, Chelsea Pub.Co., New York , 2nd english ed., 1960

[3] Lange , Serg , Algebra , Addison — Wesley , Reading Massachusetts 2nd ed.,1984

[4] Singh, Surieet & Zameeruddin Qazi , Modern Algebra Vikas Pub.Hause PYTLTO,New Delhi, 2nd ed., 1990

[5] Suzuki. Michio, Group Theory Vo.1,Springer Verlag, New York , 1932

[۶] درفشه، محمدرضا، مقدمه‌ای برنظریه گروهها، نشر علوم پایه، تهران، ۱۳۶۹.

[۷] فرالی، جان ب. ، نخستین درس در جبر مجرد ـ جلد دوم، ترجمه مسعود فرزان، ویرایش‌سوم، تهران، ۱۳۶۹


بقیه از صفحهٔ ۳

اخیراً نیز بخشی تحت عنوان آشنایی باکتب و مجلات ریاضی بازشده است. انشاءا.... که بتوانیم بخش نقدکتب ریاضی را نیز به‌زودی شروع نمائیم.

علی‌ایحال، ذکر یك‌نکته در این مقام ضروری می‌نماید. مجله رشد را نباید به مثابهٔ یك‌کتاب درسی تلقی‌نمود. اصولا هیچ‌مجله‌ای جای کتاب درسی‌رانمی‌گیرد، همچنانکه هیچ‌کتابی نیز جای مجله را نمی‌گیرد. مجله رشد حاوی مطالب‌متنوعی در جهت دانش‌افزایی وتقویت قدرت خلاقیت ریاضی، آشنایی با شاخه‌ها ومطالب جدید درسی، ونظایـر آن است. اینکه انتظار داشته باشیم همه مطالب آن به‌یك نسبت موردعلاقه‌مندی فردی قرار بگیرد انتظار بیش‌ازحدی‌است. اگرحداقل یك‌مطلب باب سلیقه وعلاقه‌مندی دانش‌آموز، دبیری یادانشجویی واقع‌شود به‌گمان ما مجله ارزش تهیه‌شدن را دارد. بعضی ازمطالب هندسه بیشتر بهره‌مند می‌شوند وگروهی از تاریخ وفلسفه‌ریاضی وجمعی‌نیز از حل مسائل دانش‌آموزی وبرخی ازمسائل المپیادها. یقیناً ما نمی‌توانیم‌مجله‌را فقط به‌یك بخش، مثلا مسائل ریاضی‌یاتدریس هندسه ویا درسهایی از آنـالیز اختصاص دهیم. زیـراکه‌هدف ما زیرپوشش داشتن عدهٔ بیشتری از علاقه‌مندان و ارتقاء کیفی آموزش‌وفراگیری‌ریاضیات است به‌عنوان یك‌مجموعه. وبراین باوریم اگرموضوعی به‌علتی‌موردعلاقه‌مندی‌کمتری‌قرارمی‌گیرد، ماموظف هستیم حداقل به‌خاطر طرح موضوع وارائه کلیتی از ریاضیات مطالبی درباب آن، اگرچه‌کمتر،داشته‌باشیم. چه‌بسا کسانی دراین‌سرزمین پهناور بدان علاقه‌مند شده وخود درزمرهٔ مبلغین ومعلمین آن موضوع قرارگیرند.

سردبیر

# تعیین اعداد N رقمی مربع کامل بوسیلهٔ کامپیوتر

از: علی احسان محبی دانشجوی دانشگاه تربیت معلم

درصفحهٔ ۴۳ ازمجله رشد آموزش ریاضی شمارهٔ ۲۸ اعداد مربع کامل ۹ رقمی‌که ارقام‌آنها رقمهای ۱ تا ۹ بودند به چاپ‌رسید. دربین اعداد چاپ شده عدد ۱۹۳۷۷ اشتباهاً ۱۹۳۷۸ چاپ شده بود.
زمان اجرای برنامه‌ای که آن اعداد را تولید کرده بود بسیار زیاد بود. برنامه زیر تولید اعداد N رقمی با ارقام ۱ تا N را با زمان نسبتاً کمی ارائه می‌کند.

برنامه زیر دارای این ویژگیها است:

۱ــ برنامه بازه‌ای چون $[N1, N2]$ تولید می‌کند که برای جستجوی اعداد موردنظر به‌کارمی‌رود.

۲ــ برای ۹ و ۸ $= N$ از این خاصیت که هرعدد مربع کامل بر ۹ قابل‌قسمت است، ولذا جذرآن باید مضرب ۳ باشد، استفاده می‌کند.

۳ــ برنامه نشان می‌دهد که برای $۲ \leqslant N \leqslant ۷$ جواب ندارد.

۴ــ زمان اجرای برنامه برای $N = ۱, ۲, \ldots, ۹$ برابر یک دقیقه و ۴۵/۲۵ ثانیه است.

لازم به‌تذکر است که برنامه زیر با استفاده از یک کامپیوتر $IBM\,XT$ با سرعت $3MHZ$ اجرا شده است.

```
      DIMENSION I(9)
      DO 292 N=1,9
      WRITE(*,10)N
10    FORMAT(20X,'+',30('-'),'+'/20X,'¦',7X,'START NO. ---> ',I1
     *,7X,'¦'/20X,'¦',7X,'N',12X,'N ^ 2',5X,'¦')
      N1=10**(FLOAT(N-1)/2.)
      N2=10**(FLOAT(N)/2.)
      DO 100 L=N1,N2
          IF((L-L/10*10).EQ.0)GOTO 100
          IF(N.EQ.9.OR.N.EQ.8)THEN
             L1=L/10
             IF((L1-L1/100*100).EQ.0)GOTO 100
             L1=L1/10
             IF((L1-L1/100*100).EQ.0)GOTO 100
             IF((L-L/3*3).NE.0)GOTO 100
          ENDIF
          L2=L**2
          DO 200 J=1,N
             I(J)=L2-L2/10*10
             IF(I(J).EQ.0)GOTO 100
             DO 400 J1=N+1,9
400             IF(I(J).EQ.J1)GOTO 100
200       L2=L2/10
          DO 300 J1=1,N-1
             DO 300 J2=J1+1,N
```

```
        IF(I(J1).EQ.I(J2))GOTO 100
300     CONTINUE
        WRITE(*,20)L,L**2
 20     FORMAT(20X,'¦',5X,I5,8X,I9,3X,'¦')
100   CONTINUE
      WRITE(*,'(20X,32H+------------------------------+)')
292   CONTINUE
      END
```

زمان شروع 9:25:13.36

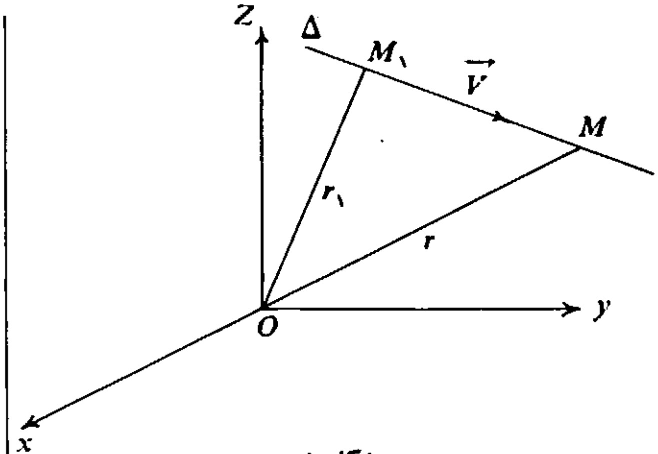
```
+------------------------------+
¦     START NO. ---> 1         ¦
¦     N              N ^ 2     ¦
¦       1                  1   ¦
+------------------------------+
+------------------------------+
¦     START NO. ---> 2         ¦
¦     N              N ^ 2     ¦
+------------------------------+
+------------------------------+
¦     START NO. ---> 3         ¦
¦     N              N ^ 2     ¦
+------------------------------+
+------------------------------+
¦     START NO. ---> 4         ¦
¦     N              N ^ 2     ¦
+------------------------------+
+------------------------------+
¦     START NO. ---> 5         ¦
¦     N              N ^ 2     ¦
+------------------------------+
+------------------------------+
¦     START NO. ---> 6         ¦
¦     N              N ^ 2     ¦
+------------------------------+
+------------------------------+
¦     START NO. ---> 7         ¦
¦     N              N ^ 2     ¦
+------------------------------+
+------------------------------+
¦     START NO. ---> 8         ¦
¦     N              N ^ 2     ¦
¦    3678          13527684    ¦
¦    5904          34857216    ¦
¦    8082          65318724    ¦
¦    8559          73256481    ¦
¦    9024          81432576    ¦
+------------------------------+

+------------------------------+
¦     START NO. ---> 9         ¦
¦     N              N ^ 2     ¦
¦   11826          139854276   ¦
¦   12363          152843769   ¦
¦   12543          157326849   ¦
¦   14676          215384976   ¦
¦   15681          245893761   ¦
¦   15963          254817369   ¦
¦   18072          326597184   ¦
¦   19023          361874529   ¦
¦   19377          375468129   ¦
¦   19569          382945761   ¦
¦   19629          385297641   ¦
¦   20316          412739856   ¦
¦   22887          523814769   ¦
¦   23019          529874361   ¦
¦   23178          537219684   ¦
¦   23439          549386721   ¦
¦   24237          587432169   ¦
¦   24276          589324176   ¦
¦   24441          597362481   ¦
¦   24807          615387249   ¦
¦   25059          627953481   ¦
¦   25572          653927184   ¦
¦   25941          672935481   ¦
¦   26409          697435281   ¦
¦   26733          714653289   ¦
¦   27129          735982641   ¦
¦   27273          743816529   ¦
¦   29034          842973156   ¦
¦   29106          847159236   ¦
¦   30384          923187456   ¦
+------------------------------+
```

زمان خاتمه 9:26:58.81

# معادله برداری خط درفضا

ترجمه و تنظیم از: علی محمدی مقدم
دبیر دبیرستانهای آمل

همان‌طور که در هندسه تحلیلی ملاحظه کرده‌ایم وضعیت یك خط درفضا، با معلوم بون دونقطه آن و یا یك نقطه وامتدادآن مشخص می‌شود. بنابراین برای‌پیدا کردن معادله یک خط، فرض می‌کنیم $M_1$ یک نقطه از خط و $\vec{V}$ امتداد خط داده شده باشد. نقطه دلخواهی مانند $M$ را مطابق شکل روی $\Delta$ درنظرمی‌گیریم




شکل ۱

داریم

$$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\vec{V}$$

همچنین

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M}$$

یا

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\lambda\vec{V}$$

اگر قرار دهیم $\overrightarrow{OM_1}=\vec{r_1}$ و $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$ خواهیم داشت

$$\boxed{\vec{r}=\vec{r_1}+\lambda\vec{V}} \quad (1)$$

(۱) را معادله برداری خط $\Delta$ می‌نامند. دراین فرمول $\vec{r_1}$ و $\vec{v}$ ثابت اما $\lambda$ متغیر است، و به ازای هر $\lambda$ یک نقطــه از خط $\Delta$ مشخص می‌شود.

مثال. معادلهٔ برداری خطی را بنویسیدکه ازنقطه $M_1(1, 2, 3)$ بگذرد. و با $\vec{V}(2, -1, -3)$ موازی باشد.

حل. بردارهای $\vec{r_1}$ و $\vec{V}$ را با مؤلفه‌هایش نشان می‌دهیم

$$\vec{r}=\vec{r_1}+\lambda\vec{V}$$

$$\vec{r}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}+\lambda(2\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k})$$

مثال ۲. معادله دکارتی خطی به صورت

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{3}$$

نوشته شده است. معادله برداری خط را بنویسید.

حل– داریم $M_1(0, 1, -1)$ و $\vec{V}=(1, 2, 3)$

پس

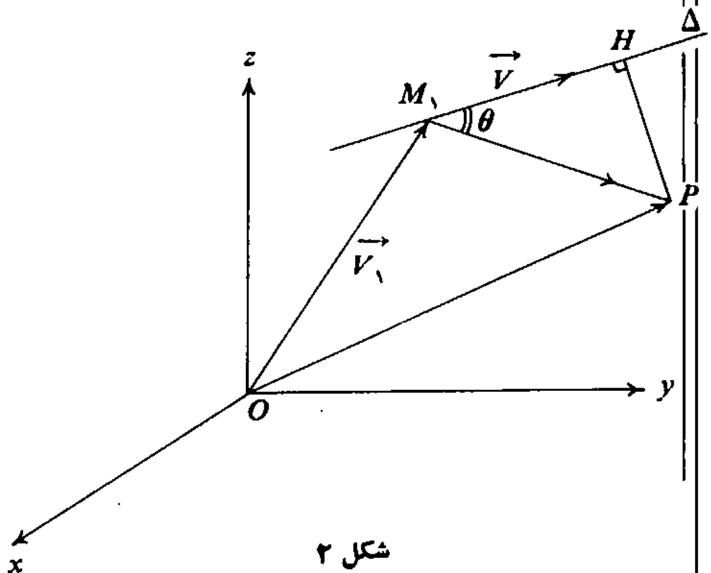
$$\vec{r_1}=\vec{j}-\vec{k} \quad \text{و} \quad \vec{V}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$$

بنا براین

$$\vec{r}=\vec{j}-\vec{k}+\lambda\,(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k})$$

## فاصله یك نقطه از یك خط

می‌خواهیم فاصلهٔ نقطه معلوم $P$ را از خط $\vec{r}=\vec{r}_1+\lambda\vec{V}$ پیدا کنیم.




شکل ۲

داریم

$$r=\vec{r}_1+\lambda\vec{V}$$

$$\vec{OP}=\vec{OM}_1+\vec{M_1P}$$

$$\vec{M_1P}=\vec{OP}-\vec{OM}_1$$

$$PH=d=|\vec{M_1P}|\sin\theta$$

با توجه به‌اندازه حاصلضرب‌برداری دوبردار داریم:

$$|\vec{M_1P}\wedge\vec{V}|=|\vec{M_1P}|\cdot|\vec{V}|\sin\theta=|\vec{V}|d$$

از آنجا

$$d=\frac{|\vec{M_1P}\wedge\vec{V}|}{|\vec{V}|}$$

مثال. فاصله نقطه $P(1,3,2)$ را ازخط $\Delta$ بمعادلهٔ

$$\vec{r}=(1-\lambda)\vec{i}+(2-3\lambda)\vec{j}+2\vec{k}$$

پیدا کنید.

حل. این معادله را به‌صورت زیرمی‌نویسیم:

$$\vec{r}=(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})+\lambda(-\vec{i}-3\vec{j})\,\lambda$$

$$M_1(1,2,2)\ \text{،}\ \vec{M_1P}(0,1,0)\ ,\ d=\frac{|\vec{M_1P}\wedge\vec{V}|}{|\vec{V}|}$$

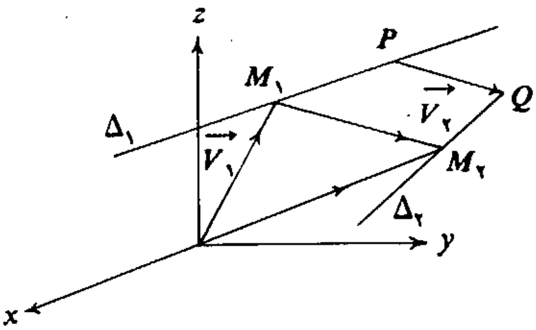
$$\vec{V}(-1,-3,0)\ ,\ |\vec{V}|=\sqrt{10}\ ,$$

$$\vec{M_1P}\wedge\vec{V}=(0,0,1)$$

$$d=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

## کوتاهترین فاصله دوخط متنافر

اگر دوخط $\Delta_1:\vec{r}=\vec{r}_1+\lambda_1\vec{V}_1$ و $\Delta_2:\vec{r}=\vec{r}_2+\lambda_2\vec{V}_2$ متنافر باشند، دونقطهٔ $P$ و $Q$ را به‌ترتیب برروی $\Delta_1$ و $\Delta_2$ طوری انتخاب می‌کنیم که $PQ$ کوتاهترین پاره‌خط متکی براین دوخط باشد پس $PQ\perp\Delta_1$ و $PQ\top\Delta_2$.




شکل ۳

اما می‌دانیم $\vec{PQ}\parallel\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2$ (چرا؟)

بنابراین برداریکه $\vec{PQ}$ را به‌صورت

$$\vec{n}=\frac{\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2}{|\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2|}$$

درنظرمی‌گیریم. اگر زاویهٔ بین $\vec{M_1M_2}$ و $\vec{PQ}$ را بنا $\theta$ نشان دهیم می‌توان $\vec{PQ}$ را تصویر $\vec{M_1M_2}$ درنظر گرفت

$$(M_2Q\perp PQ\ ,\ M_1P\perp PQ)$$

پس

$$|PQ|=|M_1M_2|\cos\theta=|\vec{M_1M_2}\cdot\vec{n}|=\left|\frac{(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2}{|\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2|}\right|$$

مثال. فاصله دوخط

$$\vec{r}=\vec{i}+\vec{j}+\lambda(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$$

و

$$\vec r = 2\vec i+\vec j-\vec k+\lambda(3\vec i-5\vec j+2\vec k)$$

را پیدا کنید.

حل. با مفروضات

$\vec r_1=(1,\ 1,\ 0)$ و $\vec V_1(2,\ -1,\ 1)$

$\vec r_2\ (2,\ 1,\ -1)$ و $\vec V_2(3,\ -5,\ 2)$

داریم

$\vec r_2-\vec r_1=(1,\ 0,\ -1)$ و $\vec V_1\wedge \vec V_2=(3,\ -1,\ -7)$

$|V_1\wedge \vec V_2|=\sqrt{59}$

$(\vec r_2-\vec r_1)\cdot(\vec V_1\wedge \vec V_2)=10$

$$PQ=\frac{|(\vec r_2-\vec r_1)\cdot(\vec V_1\wedge \vec V_2)|}{|\vec V_1\wedge \vec V_2|}=\frac{10}{\sqrt{59}}$$

مثال ۲. طول عمود مشترک دوخط $D_1$ و $D_2$ با معادلات

$$D_1:\ \frac{x-2}{-3}=\frac{y}{2}=z-1$$

$$D_2:\ \frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{-1}$$

را پیدا کنید.

حل. داریم

$M_1\ (2,\ 0,\ 1)$ و $M_2\ (2,\ 3,\ 1)$ ،

$\vec r_1\ (2,\ 0,\ 1)$ و $\vec r_2(2,\ 3,\ 1)$

$\vec V_1\ (-3,\ 2,\ 1)$ و $\vec V_2\ (2,\ 1,\ -1)$

$\vec r_2-\vec r_1=(0,\ 3,\ 0)$ و $\vec V_1\wedge \vec V_2=(-3,\ -1,\ -7)$

$$PQ=\frac{|(\vec r_2-\vec r_1)\cdot(\vec V_1\wedge \vec V_2)|}{|\vec V_1\wedge \vec V_2|}=\frac{3}{\sqrt{59}}$$

نتیجه. اگر دوخط متقاطع باشد، طول کوتاهترین فاصله بین آنها برابر با صفر خواهد بود.

مثال. آیا دوخط

$$D_1:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}$$

$$D_2:\ \frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-3}{2}$$

متقاطعند.

حل. با مفروضات

$M_1\ (1,\ 1,\ 1)$ و $\vec r_1\ (1,\ 1,\ 1)$ ، $\vec V_1\ (2,\ 3,\ 4)$

$M_2\ (4,\ 3,\ 3)$ و $\vec r_2\ (4,\ 3,\ 3)$ ، $\vec V_2\ (3,\ 2,\ 2)$

داریم

$\vec r_2-\vec r_1=(3,\ 2,\ 2)$ و $\vec V_1\wedge \vec V_2=(-2,\ 8,\ -5)$

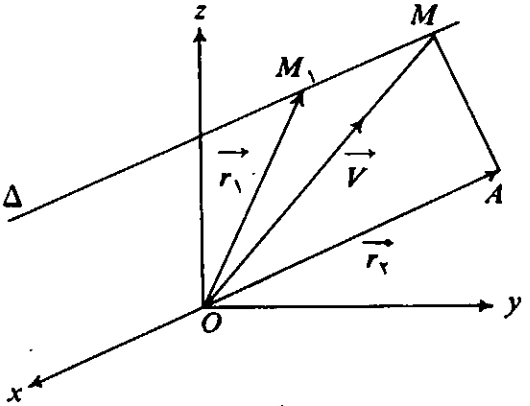
$(\vec r_2-\vec r_1)\cdot(\vec V_1\wedge \vec V_2)=$

$3(-2)+2\times 8+2(-5)=0$

پس $PQ=0$ یعنی دوخط متقاطع هستند.

**معادله برداری خطی که از نقطه مفروض $A$ می‌گذرد و خط $\Delta:\ \vec r=\vec r_1+\lambda\vec V$ را به زاویه قائمه قطع می‌کند.**

فرض کنیم $AM$ بر $\Delta$ عمود شده باشد (شکل را نگاه کنید)




شکل ۴

داریم

$\vec{AM}\perp \vec V$ ، $\vec r=\vec r_2+\vec{AM}$ ، $\vec r=\vec r_1+\lambda\vec V$

$\vec r_1+\lambda\vec V=\vec r_2+AM$

طرفین تساوی بالا را در $\vec V$ به‌طور اسکالر ضرب می‌کنیم

$\vec V\cdot(\vec r_1+\lambda\vec V)=\vec V\cdot(\vec r_2+\vec{AM})$

$\vec V\cdot\vec r_1+\lambda|\vec V|^2=\vec V\cdot\vec r_2+(\vec V\cdot\vec{AM})$

داخل پارانتز صفراست پس

$\lambda\,|\vec V|^2=\vec V\cdot(\vec r_2-\vec r_1)=\vec V\cdot\vec{M_1A}$

$$\lambda=\frac{\vec V\cdot\vec{M_1A}}{|\vec V|^2}$$

ازآنجا،

$$\vec{OM}=\vec r_1+\frac{\vec{M_1A}\cdot\vec V}{|\vec V|^2}\cdot\vec V$$

$$\vec{AM}=\frac{\vec{M_1A}\cdot\vec{V}}{|\vec{V}|^2}\cdot\vec{V}-\vec{M_1A}$$

پس معادله برداری خطی که از $A$ می‌گذرد وخط $\Delta$ را بهزاویه قائمه قطع می‌کند، به‌صورت زیر نوشته خواهد شد.

$$\vec{r}=\vec{r}_1+\lambda\left(\frac{\vec{M_1A}\cdot\vec{V}}{|\vec{V}|}\cdot\vec{V}-\vec{M_1A}\right)$$

مثال. معادلهٔ برداری خطی را بنویسید کـه ازنقطه $A(1,0,2)$ می‌گذرد وخط $\Delta$ به معادله

$$\vec{r}=3\vec{j}+\vec{k}+\lambda(2\vec{i}+5\vec{J}+4\vec{k})$$

را بهزاویه قائمه قطع می‌کند.

حل. داریم

$$A(1,0,2) \text{ و } M_1(0,3,1) \text{ و } \vec{M_1A}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$$

$$\vec{r}_2=\vec{i}+2\vec{k} \text{ و } \vec{V}=\vec{i}+5\vec{j}+4\vec{k}$$

$$\vec{M_1A}(1,-3,1)$$

$$\frac{\vec{M_1A}\cdot\vec{V}}{|\vec{V}|^2}\cdot\vec{V}=-\frac{9}{45}\vec{V}=-\frac{1}{5}\vec{V}=$$

$$-\frac{2}{5}\vec{i}-\vec{j}-\frac{4}{5}\vec{k}$$

$$\frac{\vec{M_1A}\cdot\vec{V}}{|\vec{V}|^2}\cdot\vec{V}-\vec{M_1A}=-\frac{7}{5}\vec{i}+2\vec{j}-\frac{9}{5}\vec{k}$$

ازآنجا

$$\vec{r}=\vec{i}+2\vec{k}+\lambda\left(-\frac{7}{5}\vec{i}+2\vec{j}-\frac{9}{5}\vec{k}\right)$$

## قرینه یك نقطه نسبت به خط

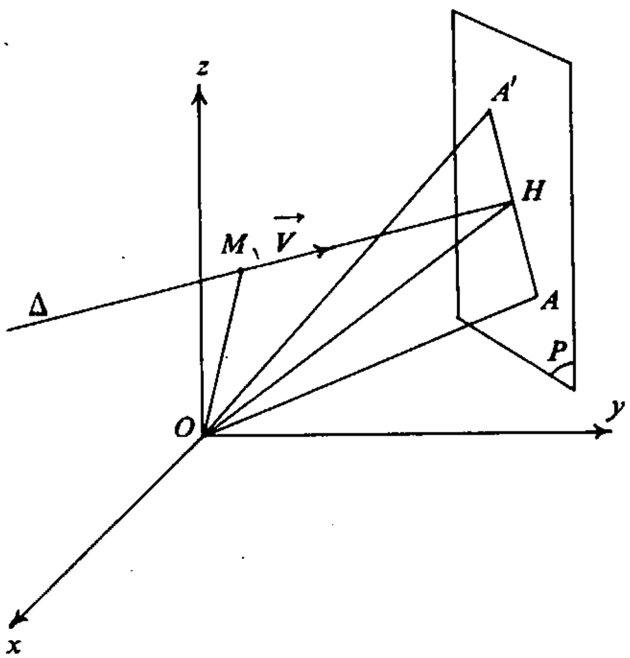
فرض کنیم خط $\Delta$ به معادله $\vec{r}=\vec{r}_1+\lambda\vec{V}$ داده شده باشد. می‌خواهیم قرینه نقطه $A$ را نسبت به‌خط $\Delta$ پیدا کنیم.

ازنقطه $A$ صفحه $P$ را برخط $\Delta$ عمود می‌کنیم ومحل برخورد آن را با خط $\Delta$ نقطه $H$ می‌نامیم از نقطه $A$ در داخل صفحه $P$ به $H$ وصل کرده وبه انـدازه خود امتداد می‌دهیـم تا نقطه $A'$ قرینه $A$ نسبت به نقطه $H$ در داخل صفحـه $P$ پیدا شود. از $O$ به $A$ و $A'$ و $M_1$ وصل می‌کنیم. درصفحه $OAA'$ می‌توان‌نوشت.

$$\vec{OH}=\vec{OM_1}+\vec{M_1H}=\vec{OM_1}+\lambda\vec{V}=\vec{r}_1+\lambda\vec{V}$$

$$\vec{OA'}+\vec{OA}=2\vec{OH}$$

$$\vec{OA'}=2\vec{OH}-\vec{OA}$$




شکل ۵

$$(1)\quad \vec{OA'}=2(\vec{r}_1+\lambda\vec{V})-\vec{OA}$$

مقدار $\lambda$ را برای نقطه $H$ می‌تـوان به‌دست‌آورد و از آنجا مختصات $A'$ را مشخص کرد. مقدار $\lambda$ درمسئله قبل محاسبه شده است:

$$\lambda=\frac{\vec{V}\cdot\vec{M_1A}}{|\vec{V}|^2}$$

مثال. قرینه $A(4,0,4)$ را نسبت به خط $\Delta$ با معادله

$$\Delta:\ r=2i+3\vec{j}-\vec{k}+\lambda(\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k})$$

به‌دست آورید.

حل. داریم

$$\vec{V}(1,-2,2) \text{ ، } M_1(2,3,-1) \text{ و } |\vec{V}|^2=9$$

$$\vec{M_1A}(2,-3,5) \text{ و } A(4,0,4)$$

$$\lambda=\frac{\vec{V_1}\cdot\vec{M_1A}}{|\vec{V}|^2}=\frac{2+6+10}{9}=2$$

$$\vec{OA'}=2\,(2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}+2\,(\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k})]-4\vec{i}-4\vec{k}$$

$$=4\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$$

پس $A'(4,-2,2)$ است.

## به یاد شادروان محمد رضا اردکانی

# شمعی که آنقدر نور داد تا خاموش شد

از اوائل انتشار مجله رشد آموزش ریاضی،دفترمجله، به‌ویژه استادحسین‌غیور مسائلی ازهندسه از یکی ازدبیران اردکان یزد به نام محمد داوری اردکانی دریافت می‌کرد. این مسائل بسیار زیبا، جاذب و برای مجله و استفاده دانش‌آموزان‌کشور مناسب بود وازآنها درقسمت مسائل مجله استفاده می‌شد.

راه‌حل‌های‌ارائه شده نیزحکایت‌ازعمق اطلاعات وعلاقه فرستنده به هندسه داشت گاهی‌اوقات نیز برای مسائل‌حل‌شده‌هندسه درمجله ویامسائل المپیادهندسه راه‌حل‌های بهتروکوتاهتر ارائه می‌کردکه آقای غیور را به‌تعجب وا می‌داشت در زمستان سال گذشته مسائلی برای‌آقای غیور فرستاده بودندکه‌دریکی دومورد ابهام‌وجودداشت وبرای توضیح‌بیشتر این‌مسائل به‌اردکان پس فرستاده شد، متأسفانه دوهفته بعد، به‌جای دریافت تصحیح مسائل‌ارسال شده،آقای غیورنامه‌پسرایشان رادریافت‌کردندکه در این نامه‌خبردرگذشت آقای محمد داوری اردکانی‌اعلام شده‌بود.

هیأت تحریریه مجله‌رشد ریاضی ضمن تسلیت به بازماندگان‌آن‌مرحوم فقدان‌وی را ضایعه‌ای‌بزرگ برای‌آموزش‌وپرورش اردکان می‌داند. خداوند انشاءالله روح‌آن مرحوم را شاد نماید واو را غریق رحمت خود قراردهد

ذیلا«زندگی‌نامه» پربار این معلم‌دلسوز به‌وسیلهٔ فرزندش درزیردرج می‌گردد.

شادروان محمدداوری‌اردکانی در بیستم اسفندماه ۱۳۰۹ دریك خانواده متوسط و مذهبی درشهرستان‌اردکان پا به‌عرصه وجود گذاشت. اواولین فرزند خانواده بود و محمد نامیده شد. در سن شش سالگی تحصیلات ابتدایی را آغازکردو تا پایان سیکل‌اول‌متوسطه را در دبستان ودبیرستان فردوسی اردکان‌گذراند و طی‌این ۹ سال همواره ازدانش‌آموزان ممتازوشاخص در علم واخلاق بوده پس ازاخذ سیکل اول متوسطه درسال ۱۳۲۶ در امتحان ورودی دانشسرای مقدماتی اصفهان پذیرفته‌شد و تحصیلات خودرا به‌مدت دوسال در آنجا ادامه داد؛ در مهرماه ۱۳۲۸ به‌خدمت فرهنگ درآمد وازبدو استخدام به‌دبیری دبیرستان‌منصوب‌شد؛ضمن‌خدمت‌آموزشی به‌خدمت نظام اعزام گردید وپس ازطی دوره شش ماهه آموزش دانشکده افسری تهران بادرجه ستوانسومی دررشته سواره نظام، بقیه‌خدمت وظیفه‌رادرمشهدگذراند؛ وبا اتمام دوره خدمت وظیفه، مجدداً در مهرماه ۱۳۳۱ به‌تدریس مشغول گردید، و با اخذ دیپلم کامل متوسطه درسال ۱۳۳۹ ازطرف وزارتخانه متبوع برای مدت سه سال دردانشسرای عالی تهران مأمور به تحصیل گردید وپس ازطی این دوره با دریافت دانشنامه لیسانس دررسته‌آموزش ابتدائی‌درمهرماه ۱۳۴۲ همچون‌گذشته در دبیرستانهای اردکان به‌تدریس ریاضیات پرداخت،وباتوجه‌به‌تخصص‌وی‌درآموزش ابتدایی‌پیوسته‌مدرس‌ریاضیات‌دوره‌ابتدائی بود،وبامهارت‌وتسلطی‌که‌دراین‌رشته‌داشت

وروش مخصوصی که در تدریس به کار می برد، باعث می شد که درس نسبتاً سخت ریاضی را که بـرای عده زیادی از دانش آمـوزان خوشایند نیست، شیرین ودلپذیر بسازد.

باوجـود کسالت قلبی ناشی از حملات مکرر انفارکتوس، آنی ازمطالعه وتحقیق وتدریس غافل نبود و ایـن نشان عشق و علاقه او به علم، بخصوص ریاضیات بود، اوعلاوه برریاضیات بههنر وادبیات علاقه وافرداشت وبیشتراوقات را درکتابخانـه شخصی خود بهمطالعه مشغول بود.

درمدت ۳۱سال اشتغال رسمی خـود، علاوه بر تدریس، ریاست دبیرستان، راهنمای تعلیماتی، ریاست مرکز تربیت معلم، مسئولیت آموزش اداره وکفالت آموزش وپرورش رانیزعهده دار بود، وپس از باز نشستگی در مهرماه ۱۳۵۹ بهمدت ده سال همکاری خودرا باآموزش وپرورش ادامه داد.

ازثمرهازدواجش سه فرزند بهجا مانده است. پسر بزرگش علیرضا دارای لیسانس زبان وادبیات عرب است ودبیرمی باشد؛ نادره تنها دختراوست کـه ازدواج نموده و خانهدار می باشد و محمدرضا آخـرین فرزند این خانواده است، و دررشته زبان و ادبیات فارسی دانشگاه پیام نوراردکان بهتحصیل اشتغال دارد.

آن معلم فرزانه وانسانوارسته سرانجام در شانزدهم دیماه ۱۳۶۹ دعوت حق را لبیک گفت وبه سرای باقی شتافت. روانش شادودوستان وهمکارانش بهسلامت وپاینده وموفق و خدایش رحمت کناد.

# یادداشتی بر یک نامه

یکی از خوانندگان خوب و فعالما آقای هاشم سازگار است که گهگاهی مقاله ویامطالب آموزشی برایمان ارسال میدارد. اخیراً، ایشان از کتاب، آشنایی با نظریه اعـداد، ترجمـه آقـای دکتر آدینه محمد نارنجانـی، مسئلهای از مسائـل ستارهدار (مسئله۱۶، صفحه۸۲) را اختیارکرده وحل آنرا برایمان فرستادهاند. چون دربرهان مسئله از قضایای استفاده شده است کـه تا اندازهای پیچیده بهنظرمیرسید مارا برآن داشت که نظر افراد متخصص، درموردراین مقاله، را جویا شویم. بنابرایـن از همکار خوب و صاحب نظرمـان، در زمینه نظریه اعداد، آقای دکتر نارنجانی، عضو هیأت علمیدانشگاه فردوسی مشهد، تقاضا نمودیم که این مقالهرا ویرایش علمی کنند. ایشان پس ازبررسی دقیق مقاله، نامهای برایمان ارسال داشتهاند. چون در این نامه، بامثال نقضی، حکممسئلهرا ابطال نمودهاند، خلاصه آنرا دراینجا می آوریم:

**صورت مسئله.** نشان دهیدکه بهازای (عدد اول P)، $P\equiv 1 \pmod{4}$، داریم

$$\left(\frac{P-1}{2}\right)!^{2} \equiv -1 \pmod{P^2}.$$

جواب آقای دکترنارنجانی:

سردبیرمحترم مجله رشدآموزش ریاضی پس ازسلام، عطف بهنامهشماره $\frac{۱۴۷}{۷۰/۴/۱۲}$ شما، بهاطلاع میرسانم که یادداشت مربوط به مقاله آقای هاشم سازگار... را دریافت داشتم. لازم میدانـم، قبل از اظهار نظر در مورد مقاله، مقدمهای را بهاطلاع شما برسانم.

ازآنجائی که مسئلهفوق ظاهراً مشکل بهنظر میرسید، اینجانب در حین ترمهای تحصیلی گذشته، بهدانشجویان اعلام کردم کـه اگرکسی موفق بهحل این مسئله شود میتواندآنرا تحتمقالهای بنامخود منتشر سازد. متأسفانه تاکنون اثبات درستیدرمورد آن دریافت نکردهام.

اما درزمان برگزاری بیستودومین کنفرانسریاضی درمشهد، بادانشجویی از دانشگاه صنعتی شریف، بنام آقای شاهین شریفی آشنا شدم که مثال نقضی برای این مسألهارائه نمودند عدد$P=53$ مثالنقضی بـرای مسئله است. یعنی؛ $P=53$ کـه $P\equiv 1 \pmod{4}$ و

$$\left[\left(\frac{53-1}{2}\right)!\right]^{2} \equiv -1 \pmod{53^2}$$

بهسادگی میتوان تساوی فوق را باماشین حسابهای معمولی؛ یا حتی، بامحاسبهٔ دست اثبات نمود. بناًبراین ملاحظه میشود کـه حکم مسئله **نادرست** است. هرچندکه اینك میتوان مسئله را بهصوت زیر اصلاحکرد: «بهازای چه اعداد اولیحکم مسئله درست است»

ظاهراً مسئله، بهصورت فوق، مسئله مشکلی است.

# قاعده هوپیتال از


صدیقه جاهدی

دانشکده صنعت الکترونیك دانشگاه شیراز


درموضوع حساب مقدماتی، اثبات قاعده هوپیتال، معمولا برای حالت $\frac{0}{0}$ وقتی‌که $x \longrightarrow x_0$ ($x_0$ متناهی)، بااستفاده از قضیه مقدار میانگین کوشی، صورت می‌گیرد. توسیع آن به‌حالت $x \longrightarrow \infty$، با جایگزینی $x$ با $\frac{1}{x}$، انجام می‌شود. اثبات این قاعده برای صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ مشکل شمرده می‌شود وممکن‌است به عنوان تمرینی یاضمیمه‌ای آورده شود ویا اصلا از آن بحثی نشود. دراینجا اثباتی برای حالت $\frac{\infty}{\infty}$ می‌آوریم، که در آن،از قضیه مقدار میانگین کوشی استفاده نمی‌شود. در عوض شرط می‌کنیم که توابع دارای مشتقات پیوسته‌اند ودرنتیجه‌ازخواص نامساوی‌انتگرالهای‌معین‌استفاده‌می‌کنیم. این‌بحث به‌طرزجالبی باحالت $\frac{0}{0}$ نیز برمی‌گردد.

**قاعده هوپیتال $\frac{\infty}{\infty}$.** فرض‌کنیم $f$ , $g$ توابعی بامشتقات پیوسته باشند و $g'(x) \neq 0$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$

اگر $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ ، $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$

آنگاه $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

اثبات . فرض‌کنیدکه $L$ متناهی‌باشد، حالت دیگررا می‌توان باتغییرات لازم، به‌روش مشابه ثابت‌کرد. باتوجه به‌حد $g$ در فرض، می‌توانیم‌فرض‌کنیم که $g$ تابع‌مثبتی است. بعلاوه، چون $g'$ پیوسته ونا صفراست پس‌باید مثبت باشد. فرض‌کنید $\varepsilon$ عدد مثبتی باشد. $M$ را چنان اختیار می‌کنیم‌که به‌ازای $x>M$،

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-L\right|<\varepsilon.$$

چون $g'(x)$ مثبت است، داریم:

$$|f'(x)-Lg'(x)|<\varepsilon g'(x)$$

ودرنتیجه، با اختیارنمودن $b>a>M$،داریم

$$\left|\int_a^b[f'(x)-L\,g'(x)]\,dx\right|\leqslant\int_a^b|f'(x)-Lg'(x)|dx$$

$$<\int_a^b\varepsilon\, g'(x)\,dx.$$

بنابراین، برای یك‌چنین $a$ و $b$ ای،

$$|f(b)-f(a)-L[g(b)-g(a)]|<\varepsilon[g(b)-g(a)]. \quad *$$

باتقسیم طرفین برمقدار مثبت $g(b)$ خواهیم داشت:

$$\left|\frac{f(b)}{g(b)}-\frac{f(a)}{g(a)}-L\left[1-\frac{g(a)}{g(b)}\right]\right|<\varepsilon\left[1-\frac{g(a)}{g(b)}\right]<\varepsilon.$$

به‌سادگی ازآن نتیجه می‌شودکه

$$\left|\frac{f(b)}{g(b)}-L\right|<\varepsilon+\frac{|f(a)|}{g(b)}+|L|\frac{g(a)}{g(b)}$$

وقتی‌که مقدار $b$ افزایش‌یابد،$g(b)$ بدون‌کران زیاد و زیادتر می‌گردد، ودرنتیجه، هردومقدار $\frac{|f(a)|}{g(b)}$ و $\frac{|L|g(a)}{g(b)}$ سرانجام کوچکتراز $\varepsilon$ می‌شوند.

بنابراین، برای هر $b$ به‌اندازه کافی بزرگ،

$$\left|\frac{f(b)}{g(b)}-L\right|<3\varepsilon.$$

# طریق انتگرالگیری

این نشان می‌دهد که

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L. \qquad \square$$

چون در این اثبات از فرض $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ استفاده‌ای نکردیم، پس می‌توان این شرط را از فرض قضیه حذف کنیم. تغییرات درست در برهان فوق، برای حالت $x \to x_0$، نیز کار ساز است؛ و یعنی، این حالت را می‌توان از حالت $x \to \infty$ با درنظر گرفتن $F(x)=f(x_0+\frac{1}{x})$ و $G(x)=g(x_0+\frac{1}{x})$ به‌دست آورد.

این روش اثبات برای حالت مبهم $\frac{0}{0}$ هم به‌کارمی‌رود برای مثال اگر فرض کنیم که $L$ متناهی و $g'$ تابع‌مثبتی است (همانگونه که در روش بالادیده شد) درآن‌صورت $b$ می‌تواند در نامساوی (*)، بدون کران افزایش یابد، $f(b)$ و $g(b)$ به سمت صفر میل کنند ودر نتیجهٔ

$$|-f(a)-L[-g(a)]|<\varepsilon[-g(a)].$$

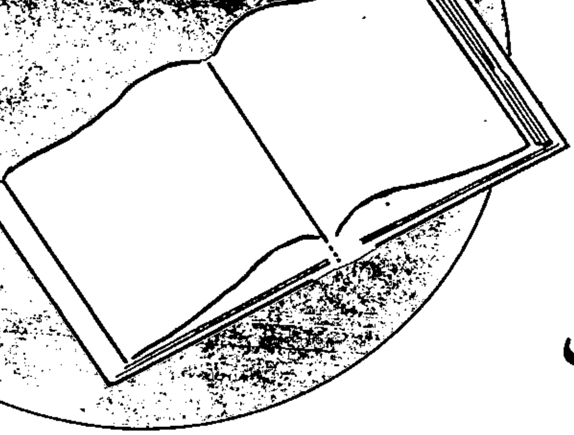
با تقسیم برعددمثبت $-g(a)$، نتیجه‌می‌شود که به‌ازای $a \geqslant M$،

$$\left|\frac{f(a)}{g(a)}-L\right|<\varepsilon.$$

چنانچه مشاهده می‌شود اثبات حالت $\frac{0}{0}$ برای استفاده عموم نیز مناسب‌تر و ساده‌تر می‌گردد.

**مراجع:**

The American Mathematical Monthly, volume 98, Number 2, February 1991.



# معرفی
# کتاب و مجلات ریاضی

**۱- جبروآنالیز**، تالیف محمود نصیری، انتشارات مبتکران، چهارم ۱۳۷۰.

●

**۲- آشنایی باآنالیزریاضی**، تألیف ویلیام ر. پـار زینسکی، فیلیپ و. زیپس ترجمهٔ سید محمود طـالبیان، مؤسسه چـاپ و انتشارات آستان قدس‌رضوی این‌کتاب درهفت فصل‌ازترجمهٔ کتاب فوق است‌کـه مشتمل است بر اعداد حقیقی و توابع؛ دنباله‌ها ومجموعهٔ اعداد حقیقی؛ توابع وحدود؛ توابع پیوسته، توابع مشتقپذیر، انتگرال ریمان؛ دنبامه‌ها و سریهای تـوابع. علاوه براین فصلها درپایان‌کتاب راهنمای حل تمرینات‌منتخب آمده است. این کتاب مرجع مفیدی برای استفاده دانشجویان دوره‌های ریاضی، مراکزتربیت معلم ودبیران‌ریاضی است.

●

**شماره‌هـای جـدید مجلاتی‌که به دفتر رشد آموزش ریـاضی رسیده است:**

---

شماره ۱۵ بهار ۷۰ کاروادنش فصلنامه آموزشی ـ خبری‌وزارت آموزش وپرورش منتشر شد

●

شماره ۲ مهر ۷۰، شماره ۳ آبانماه ۷۰ مجله نمایه منتشر شد

●

شماره ۲۱ فصلنامه برای هماهنگی آموزشهای فنی و حـرفه‌ای هماهنگ منتشر شد.

---

# گزارش شرکت تیم المپیاد ریاضی جمهوری اسلامی ایران در سی و دومین المپیاد جهانی ریاضی

دکتر اسدالله رضوی

دانش‌آموزان شرکت‌کننده دراین مسابقه عبارت بودند از آقایان بهرنگ نوحی، مهدی عسکری حسین‌طلوع شریفی، آیت‌الله کریمزاده، پیمان کسائی و شهرام محسنی پورکه طی دو مرحله امتحان از دانش‌آموزان کلاسهای سوم و چهارم دبیرستان‌های کشور انتخاب شده بودند. این گروه بادوسرپرست به‌عنوان سرپرست اول و دوم و یک ناظر درسی و دومین المپیاد جهانی ریاضی به‌شرح ذیل شرکت کردند:

**سه‌شنبه ۷۰/۴/۱۸** با بدرقه‌گرم معاونت محترم پژوهشی وازت آموزش وپرورش و بستگان دانش‌آموزان و برخی از مسئولین دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی در ساعت ۸:۳۰ تهران را به‌مقصد لندن ترک کردیم. در هواپیما خبر موفقیت دانش‌آموزان نیم المپیاد فیزیک را از خلبان شنیدیم که موجب مسرت همگی شد، ساعت ۱۵/۱۵ به‌وقت محلی‌وارد فرودگاه لندن شدیم، قرار بود که حدود ۵ ساعت توقف داشته باشیم که به علت تأخیر ۷ ساعت یعنی تا ساعت ۲۲:۰۰ در قسمت ترانزیت فرودگاه لندن ماندیم. در این فاصله عده زیادی از هموطنان را که عازم ایران بودند دیدیم که عموماً ازشرکت‌تیم المپیاد ریاضی‌جمهوری اسلامی ایران در المپیاد جهانی ریاضیات اظهار خشنودی می‌نمودند به‌طوری‌که خوشحالی در چهره آنان نمایان بود و برای تیم از صمیم‌قلب آرزوی موفقیت می‌کردند. دراین‌اثنا تیم المپیاد فیزیک هم در مسیر بازگشت وارد فرودگاه شدند و از نتایج و موفقیت‌های به‌دست آمده مشروحاً تیم المپیاد ریاضی را مطلع ساختند. بالاخره ساعت ۲۲:۳۰ به‌وقت‌محلی‌عازم استکهلم شدیم ودرساعت ۲۲:۰۰ به‌وقت محلی به فرودگاه رسیدیم. در فرودگاه ارلاندای استکهلم رسیدیم. درفرودگاه مورد استقبال نماینده سفارت‌جمهوری اسلامی ایران دراستکهلم وهمچنین‌نماینده‌کمیته برگزارکننده المپیاد قرارگرفتیم. با توجه به‌اینکه‌کمیته برگزار کننده از قبل محل اقامت هریک از افراد هیأت را مشخص کرده بود به‌دو گروه تقسیم شدیم، یک‌گروه شامل دانش‌آموزان و یکی‌از سرپرستان به‌سیکتونا رفتند ودو نفر دیگر از سرپرستان به اوپسالا رفتیم. این تقسیم‌بندی با توجه به اینکه آخرین اتوبوس‌اوپسالا آماده حرکت بود به‌سرعت انجام‌گرفت وقرار شد روز بعد با یکدیگر تماس بگیریم. در اوپسالا پروفسور ساموئلسون دبیرکمیته برگزارکننده در ایستگاه منتظر ورود ما بود وپس‌ازرسیدن ما را به‌هتل اپلاندا محل‌اقامت سرپرستان تیم‌ها هدایت‌کرد وازآنجائی‌که دیروقت بود صحبت درباره برنامه‌های المپیاد به‌روز بعد موکول شد.

براساس برنامه‌ریزی‌کمیته برگزار کننده محل اقامت سرپرست‌ها و ناظرین از تاریخ ورود تا ۷۰/۴/۲۶ دراوپسالا و در هتل اپلانو یا تعیین شده بود و محل اقامت دانش‌آموزان و یکی‌از سرپرستان در سیگتونا و در خوابگاههای یکی‌از مدارس‌شبانه‌روزی درنظرگرفته شده بود.

اوپسالا چهارمین شهر سوئد ازنظر بزرگی است‌که با جمعیتی حدود ۱۶۰/۰۰۰ در ۷۰ کیلومتری شمال استکهلم قرار داشت. اوپسالا یک شهر تاریخی سوئد به‌حساب می‌آید واوپسالای قدیم مدتها مرکز سلطنت پادشاهان سوئد بوده است. در اوپسالا دو دانشگاه قرار دارد، یکی دانشگاه اوپسالا و دیگری دانشگاه علوم کشاورزی سوئدکه ساختمانهای دانشگاه اوپسالا درمرکزشهر بود ولی‌دانشگاه علوم‌کشاورزی سوئد در خارج از شهرقرار دارد. دانشگاه اوپسالا در سال ۱۴۷۷ بنا شده است و از جمله دانشمندانی که در این دانشگاه اشتغال داشته‌اند می‌توان از سلزیوس (یک نوع دما بنام اوست) نام برد وتاکنون ۶جایزه نوبل به‌محققین این دانشگاه تعلق گرفته

است. در ۱۵۰ بخش از ۷ دانشکده این دانشگاه ۱۷/۰۰۰ دانشجو در رشته های کارشناسی و ۳۰۰۰ دانشجو در رشته‌های کارشناسی ارشد به‌بالا به‌تحصیل اشتغال دارند.

**چهارشنبه ۸۰/۴/۱۹** ازسفارت جمهوری اسلامی ایران در استکهلم تلفن زدند و آدرس و تلفن محل اقامت دانش‌آموزان را اطلاع دادند و با توجه به اینکه طول روز در اوپسالا و سیکتونا نسبتاً زیاد بود وتشخیص ساعات شرعی مشکل بود جدول ساعات شرعی را برای هر دوگروه فاکس کردند ضمناً قرار شدکه بعداز برگزاری امتحانات یك روز به‌سفارت برویم. از آنجائی‌که ازوضعیت‌دانش‌آموزان اطلاع دقیقی نداشتیم و روزهای بعد که مسائل توزیع می‌شد تماس با دانش‌آموزان مجاز نبود با اتوبوس عازم سیگتونا شدیم و پس از مدتی جستجو محل اقامت آنها را پیداکردیم که مناسب به‌نظر می‌رسید.

سیگتونا در ۵۰ کیلومتری شمال استکهلم قرار دارد و یکی‌از قدیمی‌ترین شهرهای سوئد است‌که هزار سال پیش‌بنا شده است و اولین پایتخت سوئد بوده است مدرسه شبانه‌روزی ملی سیگفونا در این شهر قرار دارد وافراد مشهوری چون اولاف‌پالمه نخست‌وزیرسابق سوئد ازاین مدرسه فارغ‌التحصیل‌شده‌اند. خوابگاه‌های این مدرسه برای استقرار دانش‌آموزان شرکت‌کننده درالمپیاد ویکی‌ازسرپرستان هر تیم مورد استفاده قرارگرفته بود. این مدرسه وخوابگاه‌های آن روی تپه‌ای‌جنگلی مشرف به‌دریاچه‌ای زیبا ساخته شده ومنطقه کاملا آرام و سرسبزی است و تا مرکز قدیمی شهر فاصله چندانی ندارد ومرکز شهر ازیك خیابان اصلی کوتاه وچندمغازه و مرکز خرید تشکیل شده است وکلاشهر سیکتونا فوق‌العاده آرام است.

**پنجشنبه ۷۰/۴/۲۰** تقریباً همه سرپرستانی که تا آن روز وارد اوپسالا نشده بودند به‌تدریج وارد شدند وکلا این روز با مذاکره با سرپرست های تیم‌ها گذشت و درباره وضعیت تیم‌ها و نحوه برگزاری مسابقات و برنامه های آنان صحبت شد. برخلاف سالهای‌گذشته از آلمان یك تیم شرکت کرده بود از کویت تیمی شرکت نکرده بود.

**جمعه ۷۰/۴/۲۱** روز شروع سی و دومین المپیاد جهانی ریاضی‌درسوئد بود. مسائل‌امتحانی‌بین سرپرست‌ها توزیع‌شد. تعداد ۱۱۰مسأله برای‌کمیته برگزارکننده ارسال شده بودکه‌کمیته سئوالات از میان آنها تعداد ۳۰ مسأله را مناسب تشخیص داده و برحسب موضوع تنظیم شده بودند. دراین دوره ازمسابقات ۵۶کشور به‌شرح زیر شرکت بودند.

آرژانتین، آلمان، اتحاد جماهیر شوروی‌سابق، اسپانیا، استرالیا، اسرائیل، اطریش، الجزایر، اندونزی، انگلستان، ایالات متحده آمریکا، ایتالیا، جمهوری اسلامی ایران، ایرلند، ایسلند، بحرین، برزیل، بلژیك، بلغارستان، پرتغال، تایلند، ترکیه، جمهوری ترینیداد، تونس، چك‌واسلواکی، چین، دانمارك، رومانی، ژاپن، سنگاپور، سوئد، سویس، فرانسه، فنلاند، فیلیپین، قبرس، کانادا،کره جنوبی، کره شمالی، کلمبیا ،کوبا، لهستان، لوکزامبرگ، ماکائو، مجارستان، مغرب، مغولستان، مکزیك، نروژ، زلاندنو، ویتنام، هلند، هندوستان، هنگ‌کنگ، یوگسلاوی، یونان.

کشورهای تایوان وآفریقای‌جنوبی و همچنین ایالات خلیج فارس به‌عنوان ناظر شرکت‌کردند. در این روز عمدتاً به‌بررسی مسائل توزیع شده پرداخته شد.

**شنبه ۷۰/۴/۲۲** ابتدا به‌بررسی مسائل پیشنهادی پرداختیم سپس در بازدیدی که توسط کمیته برگزارکننده‌ازکلیسای اوپسالا وگرستاونیوم ترتیب داده شده بود شرکت کردیم.

این کلیساکه پایه‌های آن در قرن سیزدهم میلادی بنا شده است بزرگترین کلیسا در اسکاندیناوی است وساخت آن چند قرن طول‌کشیده است‌که بشکل صلیب می‌باشد و دارای دوبرج است‌که هرکدام به‌ارتفاع ۱۸۰ متر برابر با طول کلیسا است. در قسمت اول آن تاریخچه ساخت آن روی دیوار نقاشی شده است. در این کلیسا اریك مقدس و همچنین تعدادی از پادشاهان و ملکه‌های سوئد دفن شده‌اند.

ساختمان‌گوستاونیوم‌که درنزدیکی کلیسا قرار دارد در سالهای ۲۵-۱۶۲۲ توسط‌گوستاوس آدلفوس پادشاه سوئد ساخته شده است. این بنا دارای یك‌گنبد است‌که زیر آن یك سالن تشریح توسط پروفسور زالف‌رودبك ساخته شده است. این ساختمان تا سال ۱۸۸۷ به عنوان ساختمان اصلی دانشگاه مورد استفاده بوده است. امروزه بخش‌های فرهنگ قدیم، معماری اسکاندیناوی دانشگاه و موزه‌هائی دراین رابطه در این ساختمان قراردارند. بقیه این روزنیز به‌بررسی مسائل‌گذشت و در ساعت ۱۸:۴۵ اولین جلسه هیات داوران تشکیل‌شد. این هیأت ازسرپرست‌های تیم‌ها تشکیل شده است و ریاست‌این جلسه را نایب رئیس هیأت داوران که رئیس‌انجمن ریاضی سوئد نیز بود به‌عهده داشت. دراین جلسه درمورد نحوه‌انتخاب مسائل‌و کلیات مربوط به آن صحبت و مذاکره‌شد. طبق‌معمول زبان اصلی‌انگلیسی بود و در موارد لزوم به‌زبانهای فرانسه، آلمانی، روسی واسپانیولی ترجمه می‌شد.

**یکشنبه ۷۰/۴/۲۳** در این روز هیأت داوران سه جلسه داشت و در هر سه جلسه راجع به‌مسائل و انتخاب مسائل امتحانی صحبت و مذاکره شد و مسائلی‌که قبلا در مسابقات مطرح شده بودند حذف شدند و

۶ مسأله به‌عنوان پیشنهاد مطرح شد تا در جلسه بعد درباره آنها تصمیم نهائی گرفته شود.

**دوشنبه ۷۰/۴/۲۴** در این روز دو جلسه هیات‌داوران (جلسه‌چهارم وپنجم) تشکیل شد. در جلسه چهارم ابتدا طبق معمول عده‌ای سعی کردند یکی‌از مسائل هندسه را حذف‌کنند ولی در رأی‌گیری موفق نشدند و بالاخره از مجموع ۶ مساله شامل دو مساله هندسه به تصویب نهائی رسید و قرار شد که بدواً این مسائل به‌زبانهای انگلیسی، فرانسه، آلمانی، روسی و اسپانیولی‌تدوین شوند و سپس هریك از سرپرستان مسائل را براساس متون فوق به‌زبان ملی دانش‌آموزان ترجمه‌کنند. در جلسه پنجم اشکالاتی که در ترجمه مسائل بود برطرف شد و با پیشنهاد برخی از سرپرستان مبنی براینکه مسائل به دو زبان در اختیار دانش‌آموزان مربوط به خود قرارگیرد موافقت شد و در نهایت ترجمه مسائل جهت تکثیر دراختیار کمیته برگزار کننده قرار گرفت. ضمناً دراین جلسه در رابطه با برگزاری سی‌وچهارمین المپیاد جهانی ریاضی درترکیه صحبت شد وقرار شدکه‌کمیته جانبی با توجه به‌مشکلاتی‌که کشور ترکیه از نظر شناسائی قبرس دارد از تیم قبرس دعوت‌کند.

**سه‌شنبه ۷۰/۴/۲۵** از ساعت ۸ تا ۱۲ بازدیدی ازکارگاه‌های صنایع آهن درقرن ۱۷ در استربی ترتیب داده شده بود. این کارخانه با آب کار می‌کرده است و کارگران و گردانندگان آن از بلژیك به‌سوئدآمده بودند وبا مالیات دادن به‌پادشاه وقت سوئدآهن‌آلات ساخته شده راصادر می‌کردند. با توجه به‌اینکه در زمستان در سوئد زمین ازبرف پوشیده شده است در زمستان‌کالاهای ساخته شده را به‌بنادرحمل می‌کردند.

ازساعت ۱۲ تا ساعت ۱۶ بازدیدی از مرکز انرژی اتمی در فرسمارك داشتم و از دریاچه های جدا شده از دریا برای خنك‌کردن دستگاهها و همچنین از نحوه نگهداری و انتقال زباله‌های اتمی بازدید داشتیم. در این دریاچه‌ها دمای آب ده درجه بیشتر شده بود و باعث شده بود که پرندگانی به‌سوی این دریاچه‌ها جذب شوند. زباله‌های اتمی با ماشین‌های برقی مخصوص بدون راننده به زیر دریا برده و نگهداری می‌کردند وکلیه عملیات با تلویزیون مدار بسته‌کنترل می‌شد.

مراسم افتتاحیه در ساعت ۱۹:۳۰ درسالن دانشگاه برگزارشد. دراین مراسم چند آهنگ فولکلوریك وکلاسیك سبك اجرا شد و دربین‌آهنگ‌ها سخنرانی‌هائی توسط رئیس انجمن ریاضی سوئد ومعاون دانشگاه انجام شد. پروفسور بیترجوگرن ضمن خوش‌آمد به‌همه شرکت کنندگان اظهار داشت‌که از میان همه‌کسانی‌که در اینجا حضور دارند بی‌شك دانش‌آموزان جوان مهم‌ترین آنان هستند که به عنوان نماینده‌کشورمان در این مسابقات ریاضی شرکت می‌کنند و آنچه در این رابطه جذابیت دارد اصل‌مبارزه‌علمی است‌نه‌تنها حل مسائل. ایشان در مورد فلسفه وجودی این المپیاد به‌عنوان یك ریاضیدان حرفه‌ای اظهار داشتندکه می‌توان‌گفت‌که منظورآن است‌که اطمینان پیداکنیم که دانشگاهها می‌توانند دانشجویان با هوش‌واستعداد را که ریاضیدانان دهه‌های آینده را تشکیل می‌دهند تغذیه‌کنند. سپس به نقش ریاضی اعم از محض وکاربردی در جامعه و سایر علوم پرداخت واظهارداشت‌که خوشبختانه عدم موفقیت در حل مساله چهار رنگ بیشتر به توسعه ریاضی و سایر علوم خصوصا نظریه‌گراف خدمت‌کرده است‌تا حل آن در سال ۱۹۷۶. در پایان مراسم دانش‌آموزان تیم المپیاد جمهوری اسلامی ایران‌را ازدوردیدیم که خوشبختانه روحیه بالائی داشتند.

درساعت ۲۰:۳۰ ضیافتی ازطرف معاون دانشگاه ترتیب داده شده بود که درباره تاریخچه‌دانشگاه اوپسالا وامکانات آن و رشته های تحصیلی موجود در آن صحبت شد.

**چهارشنبه ۷۰/۱۰/۲۶.** اولین روز امتحان بود که از ساعت ۹ تا ۱۳:۳۰ برگزار شد و دانش‌آموزان به سه سئوال جواب دادند ساعت ۸ از اوپسالا به‌طرف سیگتونا محل برگزاری امتحان عزیمت کردیم. جلسه ششم هیات داوران به‌منظور پاسخگویی به‌سئوالات دانش‌آموزان در مورد صورت مسائل در ساعت ۹ تشکیل شد. این جلسه‌که نیم ساعت طول می‌کشد به‌منظور رفع ابهامات احتمالی موجود در صورت مسائل است و دانش‌آموزان سئوالهای خود را در رابطه با هر مساله روی کاغذ به‌زبان‌ملی خود می‌نویسند واین سئوالات توسط ناظرین امتحانات‌که از طرف‌کمیته برگزار کننده تعیین شده‌اند به‌جلسه هیات‌داوران‌آورده می‌شوند و در اختیار سرپرست مربوطه قرار می‌گیرد و سرپرست این سئوال را برای بقیه اعضاء قرائت می‌کند و معمولا جوابی پیشنهاد می‌کند و در صورت تایید همان جواب پیشنهادی ویا جواب دیگری برای دانش‌آموزان سئوال‌کننده توسط سرپرست وی نوشته و بازگردانده می‌شود. یکی از جوابهای معمول «جواب نمی‌توان داد» است و این بدان خاطر است که ممکن است جواب مثبت یا منفی جنبهٔ راهنمائی داشته‌باشد. این‌سئوالات معمولا نشان‌دهنده سطح معلومات دانش‌آموزان و خوشبختانه سئوال‌هائی‌که از طرف دانش‌آموزان تیم المپیاد جمهوری اسلامی ایران به هیات داوران‌می‌رسید نشان می‌دادکه این دانش‌آموزان اطلاعات زیادی در زمینه‌های مختلف ریاضیات دارند و موجب تحسین

سایر سرپرستان قرار می‌گرفت. ساعت ۹:۳۰ برای بازدید عازم کیستا شدیم و در آنجا در چند سخنرانی با فیلم در مورد کارهائی که با کامپیوتر انجام داده‌اند شرکت کردیم و ساعت ۱۵:۳۰ عازم اوپسالا شدیم و ساعت ۱۸:۳۰ اوراق امتحانی را گرفتیم و مشغول تصحیح آنهـا شدیم . خوشبختانه مساله اول را چهار نفر ومساله دوم راپنج نفر از دانش‌آموزان کامل حل کرده بودند. مساله سوم را هیچ یك از دانش‌آمـوزان ما کامل حل نکرده بودند.

**پنجشنبه ۷۵/۴/۲۷** . روز دوم امتحـان بود . در این روز بایستی اوپسالا را ترك می‌کردیم و به سیگتونا مـی‌رفتیم و بقیه اعضاء هیات‌می‌پیوستیم چون تا بعدازظهر امتحان هم تمام شده بود ودیگرنیازی نبود که دانش‌آموزان از سرپرستان تیم جـدا باشند هرچند که عملا تا یکشنبه برنامه‌های جداگانه‌ای داشتند . دانش‌آموزان برنامه بازدید داشتند وسرپرستان اوراق امتحانی را تصحیح و هم آهنگ می‌کردند . ساعت ۸ پس‌از تسویه حساب با هتل با اتوبوس عازم سیگتونا شدیم ساعت ۹ هفتمین‌جلسه هیات داوران تشکیل شد. طبق معمول بـه سئوالات دانش‌آموزان در مـورد صورت مسائل‌جواب داده شد وساعت ۱۰ درمحل اقامت جدید که همان خوابگاه‌های مدرسه شبانه‌روزی سیگتونا بود مستقر شدیـم و به‌تصحیح اوران ادامه دادیـم. در ساعت ۱۳:۰۰ اوراق امتحـانـی روز دوم را تحویل‌گرفتیم مساله چهارم را چهار نفر ، مساله پنجم را پنج نفر ومساله ششم را سه نفر کامل حل کرده بودند، نکته قابل ذکر در اینجاآن است‌که این راه‌حل‌های کامل عموماً راه‌حل های متفاوت است، از این جهت بررسی‌کامل جواب‌ها زمـان نسبتاً زیادی می‌گرفت .

**جمعه ۷۰/۴/۲۸**. اولین روزی بود کـه نمرات مسائل براساس‌یك برنامه زمان‌بندی شده موردبررسی وتایید مصححین المپیاد قرار گرفت . در این روز دانش آموران بازدید داشتنـد و ما هم به‌تصحیح اوراق پرداختیم اولین مساله‌ای که مورد بررسی قرارگرفت و نمرات ما به تایید مصححین رسید مساله دوم بودکه‌درساعت ۹ بررسی شد و پنج نمره ۷ و یك نمره ۴ جمعاً ۳۹ به‌دست آمد. دومین مساله مساله اول بود کـه در ساعت ۱۶:۰۰ مورد بررسی قرار گرفت وچهارنمره ۷ ودونمره ۴ ومجموعا ۳۶ نمره موردتایید قرارگرفت. درساعت ۱۸:۳۰ مساله پنجم مورد بررسی قـرار گرفت. وپنج نمره ۷ و یك نمره ۴ وجمعاً ۳۹ نمره حاصل شد وبالاخره آخرین‌مساله آن‌روزمساله‌ششم بودکه درساعت ۲۰:۰۰ بررسی شد وسه نفره ۷ ویك نمره ۲ ویك نمره ۱ وجمعاً ۲۴ نمره به دست‌آمد لازم به‌یادآوری است‌که این مساله بسادگی از مساله‌ای که در سال‌های قبل، در اتحـاد جماهیر شوروی مطرح شده بود نیتجـه می‌شد ولی درزمان انتخاب مسائل هیچ‌یك از سرپرستان به‌این امر توجه نـداشت . لازم به‌یادآوری است که راه‌حل‌هائی که دانش‌آموزان‌ارائه داده بودندخصوصاً در مسائل ۱ و ۲ و۵ بسیارساده‌تر و جالب‌تر از راه‌حل‌های طـراحین این مسائل بـود . شگفت‌آنکه به‌یکی‌از‌این‌راه‌حل‌هامصححین نمـره کـامل ندادنـد و پس‌از اعتراض سرپرست‌گروه، مصححین با افزایش نمره موافقت کردند ولی به‌علت ندادن توضیح کافی و دادن توضیح نابجا با نمره کامـل موافقت نشد.

**شنبه ۷۰/۴/۲۹**. این روز اختصاص به بررسی‌مسائل باقیمانده داشت. حل مسئله۳ درساعت ۸:۰۰ مورد بررسی قرارگرفت و یك نمره ۵ ویك‌نمره ۴ وچهارنمره۳۰ جمعاً ۲۱ نمره به‌دست‌آمد وآخرین سؤال یعنی مسئله۴درساعت ۱۰:۰۰ بررسی‌شدوچهار نمره ۷ویك نمره ۴ وجمعاً ۳۲ نمره‌حاصل شد. بدین ترتیب جمع نمرات بـه دست آمده ۱۹۱ نمره شد . این ساعات بسیـار پرهیجان بود ، چون یکـی پس‌از دیگری نتیجه نهائی نمرات مشخص می‌شد و از همین‌مراحل‌حدس‌زد می‌شد که‌رتبه‌نسبتاً خوبی در انتظارتیم‌جمهوری اسلامی‌ایران است.

برای اولین بار در این روز برای مسلمانان غذا مخصوصی تهیه شده بود و فقط مسلمانـان مـی‌توانستند از آن غـذا انتخاب نمایند. لازم به‌تذکر است‌که قبلا با مسئولین‌المپیادمکاتبه شده بود و اطلاع داده شده بـود کـه اعضاء تیم جمهوری اسلامی ایران و سایرکشورهای مسلمان از گوشتی‌که ذبح شرعی‌نشده باشدنمی‌توانند استفاده کنند.

ساعت ۲۰ آخرین و هشتمین جلسه هیات داوران تشکیل شد. مسئله مهمی که

بدواً مطرح شد این بودکه مسئله شماره ۳ که در هیچ تیمی همگی نمره کامل نگرفته بودند درمورد تیم یکی از کشورهای شرکت‌کننده هر شش دانش‌آموز بطورکامل مشابه حل کرده بودند . ابتدا راجع به‌این مسئله بحث شد و سرپرست تیم از این موضوع اظهار بی‌اطلاعی کرد و این اتهام که تقلبی درکار بوده مردود دانست و اعلام کرد که چند ماه قبل به‌سمت سرپرستی تیم منصوب شده است واین تیم قبلا دریکی ازکشورها مورد تعلیم قرارگرفته است. به هرحال با توجه اینکه راه‌حل‌ها بیشتر ازحد به‌یکدیگر شباهت داشته و مشابه راه حل طراح بوده است وتوضیح سرپرست تیم مجارستان که سابقه طولانی‌دراین مسابقات دارد مبنی‌بر اینکه همواره جو سالمی براین مسابقات حاکم بوده است و همه سرپرستان مورد اعتماده بوده‌اند رأی‌گیری به‌عمل آمد و تصویب شدکه این‌تیم‌ازاین دوره‌مسابقات محروم شود و مورد سال آینده تصمیم به‌عهده‌کمیته برگزارکننده‌سال آینده است. سپس با حذف این تیم در مورد نمرات مربوط به‌امتیازات طلا و نقره و برنز تصمیم‌گیری شد و تصویب شدکه دانش‌آموزانی که نمرات ۴۲–۳۹ به دست آورده‌اند حائز مدال طلا، آنان‌که نمرات ۳۸–۳۱ به‌دست‌آورده‌اند حائز مدال‌نقره وبالاخره دانش‌آموزانی‌که مجموع‌نمرات آنان ۳۰–۱۹ باشد حائز برنز شوند . ضمناً به‌دانش‌آموزانی‌که یك مسئله راکامل حل‌کرده و هیچ مدالی نگرفته باشند دیپلم افتخار تعلق بگیرد . به این ترتیب تیم جمهوری اسلامی ایران با به‌دست آوردن ۲مدال طلا (بهرنگ نوحی، پیمان‌کسائی) و یك‌مدال نقره (آیت‌ا...کریمزاده) و دو مدال برنز (مهدی عسکری، شهرام محسنی‌پور) رتبه هشتم را بین ۵۵ کشور به‌دست آوردند. نتیجه‌کلی کشورها به‌ترتیب الفبا به‌شرح زیر است:

| نام کشور | جمع نمرات | رتبه | تعداد مدالهای طلا | تعداد مدالهای نقره | تعداد مدالهای برنز | تعداد دیپلم افتخار |
|---|---|---|---|---|---|---|
| آرژانتین | ۹۴ | ۲۷ | ۰ | ۰ | ۳ | ۰ |
| آلمان | ۲۲۲ | ۴ | ۱ | ۵ | ۰ | ۰ |
| اتحادجماهیرشوروی | ۳۴۱ | ۱ | ۴ | ۴ | ۰ | ۰ |
| اسپانیا | ۴۰ | ۶۶ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| استرالیا | ۱۲۹ | ۲۰ | ۰ | ۰ | ۳ | ۲ |
| اسرائیل | ۱۱۵ | ۲۳ | ۰ | ۱ | ۲ | ۱ |
| اطریش | ۱۴۲ | ۱۸ | ۰ | ۲ | ۳ | ۰ |
| الجزایر | ۲۰ | ۵۳ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ |
| اندونزی | ۳۰ | ۴۸ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ |
| انگلستان | ۱۵۲ | ۱۸ | ۱ | ۰ | ۲ | ۲ |
| ایالات متحده آمریکا | ۲۱۲ | ۵ | ۱ | ۴ | ۱ | ۰ |
| ایتالیا | ۷۴ | ۳۶ | ۰ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ایران | ۱۹۱ | ۸ | ۲ | ۱ | ۲ | ۰ |
| ایرلند | ۴۷ | ۴۴ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ایسلند | ۲۹ | ۵۰ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| بحرین | ۴ | ۵۵ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| برزیل | ۷۳ | ۳۷ | ۰ | ۰ | ۱ | ۱ |
| بلژیك | ۱۲۱ | ۲۲ | ۰ | ۰ | ۳ | ۳ |
| بلغارستان | ۱۹۲ | ۷ | ۰ | ۳ | ۳ | ۰ |
| پرتقال | ۴۲ | ۴۷ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| تایلند | ۱۰۳ | ۲۵ | ۰ | ۱ | ۱ | ۳ |
| ترکیه | ۱۱۱ | ۲۴ | ۰ | ۰ | ۴ | ۱ |
| ترینیداد | ۴۶ | ۴۵ | ۰ | ۰ | ۰ | ۳ |
| تونس | ۶۹ | ۳۹ | ۹ | ۰ | ۲ | ۱ |
| چکواسلواکی | ۱۸۶ | ۱۱ | ۰ | ۴ | ۱ | ۱ |
| چین | ۲۳۱ | ۲ | ۴ | ۲ | ۰ | ۰ |
| دانمارك | ۴۹ | ۴۳ | ۰ | ۰ | ۰ | ۲ |
| رومانی | ۲۲۵ | ۳ | ۳ | ۲ | ۱ | ۰ |
| ژاپن | ۱۸۰ | ۱۲ | ۰ | ۳ | ۳ | ۰ |
| سنگاپور | ۹۴ | ۲۷ | ۰ | ۱ | ۱ | ۱ |
| سوئد | ۱۲۵ | ۲۱ | ۰ | ۲ | ۱ | ۰ |
| سویس | ۲۹ | ۵۰ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| فرانسه | ۱۷۵ | ۱۳ | ۱ | ۱ | ۴ | ۰ |
| فنلاند | ۶۶ | ۴۰ | ۰ | ۰ | ۱ | ۱ |
| فیلیپین | ۶۴ | ۴۲ | ۰ | ۰ | ۲ | ۱ |
| قبرس | ۲۵ | ۵۲ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |

| نام کشور | جمع نمرات | رتبه | تعداد مدالهای طلا | تعداد مدالهای نقره | تعداد مدالهای برنز | تعداد دیپلم افتخار |
|---|---|---|---|---|---|---|
| کانادا | ۱۶۴ | ۱۴ | ۱ | ۲ | ۲ | ۱ |
| کره‌جنوبی | ۱۵۱ | ۱۷ | ۰ | ۱ | ۴ | ۱ |
| کلمبیا | ۹۶ | ۲۶ | ۰ | ۰ | ۲ | ۲ |
| کوبا | ۸۰ | ۳۴ | ۰ | ۰ | ۲ | ۲ |
| لهستان | ۱۶۱ | ۱۵ | ۰ | ۲ | ۴ | ۰ |
| لوکزامبورگ | ۳۰ | ۴۸ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ماکائو | ۱۸ | ۵۴ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| مجارستان | ۲۰۹ | ۶ | ۲ | ۳ | ۱ | ۰ |
| مغرب | ۸۵ | ۳۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۴ |
| مغولستان | ۳۳ | ۴۷ | ۰ | ۰ | ۰ | ۳ |
| مکزیك | ۷۶ | ۳۵ | ۰ | ۰ | ۱ | ۳ |
| نروژ | ۸۵ | ۳۱ | ۰ | ۰ | ۳ | ۰ |
| نیوزیلند | ۹۱ | ۲۹ | ۰ | ۰ | ۲ | ۱ |
| ویتنام | ۱۹۱ | ۸ | ۰ | ۴ | ۲ | ۰ |
| هلند | ۷۳ | ۳۷ | ۰ | ۰ | ۱ | ۳ |
| هندوستان | ۱۸۷ | ۱۰ | ۰ | ۳ | ۳ | ۰ |
| هنگ‌کنگ | ۹۱ | ۲۹ | ۰ | ۰ | ۲ | ۱ |
| یوگسلاوی | ۱۶۰ | ۱۶ | ۰ | ۲ | ۳ | ۱ |
| یونان | ۸۱ | ۳۳ | ۰ | ۰ | ۲ | ۱ |

به‌این ترتیب سه کشور اتحاد جماهیر شوروی‌سابق با(۲۴۱ نمره، ۴مدال‌طلا، ۲ مدال نقره) چین (با ۲۳۱ نمره، ۴ مدال طلا،۲ مدال‌نقره) ورومانی (با ۲۲۵ نمره، ۳ مدال طلا، ۲ مدال نقره و۱ مدال برنز) به‌ترتیب مقام های اول تا سوم را بدست آوردند.

**یکشنبه ۷۰/۴/۳۰.** برای همگی یك گردش دراستکهلم تدارك دیده شده بودکه صبح این روز ازموزه و ازا وخصوصاً از یك‌کشتی جنگی‌که ازقعردریا بیرون‌آورده شده و بازسازی شده است دیدن کردیم. بعدازظهر آن روز گردشی در اطراف استکهلم با کشتی داشتیم، بعداز آن قرار بود در مراکز استکهلم تا ساعت ۲۱ گردشی‌داشته باشیم‌که چون مصادف باشب عاشور بود و مجلس عزاداری حضرت ابیعبدالله‌الحسین علیه‌السلام ازطرف‌برخی ایرانیان مقیم استکهلم برگزار می‌شدقبل‌از مغرب به آنجا رفتیم در این مراسم از دانش‌آموزان تیم جمهوری اسلامی ایران تقدیر به عمل آمد. پس‌از اتمام مراسم عزاداری با اتومبیل‌های سفارت جمهوری اسلامی ایران به محل اقامت خود در سیگتونا بازگشتیم.

**دوشنبه ۷۰/۴/۳۱.** در این روز فقط مراسم‌پایانی‌را داشتیم. بحمدالله نتیجه‌ای که تیم جمهوری اسلامی ایران به دست آورده بود موجب خوشحالی و مسرت کشورهای مسلمان شده بود و از این‌بابت علنا اظهار خوشوقتی و افتخار می‌کردند. حتی این امر موجب شگفتی سرپرست‌های سایرکشورها شده بود و عموم سرپرستان تیم جمهوری اسلامی ایران را تحسین می‌کردند. یکی‌از سرپرست‌های‌کشورهای اروپایی اظهار می‌کرد که این موقعیت بهترین جواب منطقی و مورد قبول برای مطالب کتاب‌هایی چون « بدون دخترم هرگز» می‌باشد.

در مراسم پایانی مدالها بین دانش‌آموزان توزیع‌شد وهمان‌طورکه قراربود تیم جمهوری اسلامی ایران حائز دومدال طلا، یك نقره ودومدال برنزشد. همان‌طور که اشاره‌شد دو نفر از دانش‌آموزان که مدال نقره و برنز گرفته‌بودند(یعنی‌آیت‌ا.. کریمزاده و شهرام محسنی‌پور) از مدال طلا و نقره فقط یك نمره کسر داشتند. همان‌طورکه درجدول‌ملاحظه‌می‌شود ازنظر تعداد مدال طلا تنها چهار کشور اتحاد

جماهیرشوروی، چین، رومانی ومجارستان از تیم جمهوری‌اسلامی‌ایران وضع بهتری داشتند (مجارستان از نظر مدال طلا با ما دریك سطح بود وفقط تعداد مدالهای نقره آن از ما بیشتر بود)

درپایان مراسم سرپرست تیم المپیاد ریاضی اتحادجماهیرشوروی سابق ازهمه کشورها برای سال ۱۹۹۱ دعوت به‌عمل آورد..

روزهای‌سه‌شنبه ۷۰/۵/۱ وچهارشنبه ۷۰/۵/۲ به‌علت اینکه برنامه خاصی از طرف برگزارکنندگان المپیاد تدارك دیده نشده بود و از طرفی به‌علت نبودن پرواز مجبور بودیم تا پنجشنبه ۷۰/۵/۳ درسوئد بمانیم. این دو روز را به‌دعوت برادرانی که مراسم شب عاشورا برپا کرده بودند به استکهلم رفتیم و بیش از حد اعضاء تیم مورد لطف و محبت مخلصانه آنان قرار گرفتند که سعیهم مشکور و اجرهم مبرور.

روز آخر اقامت درسوئد سفیرمحترم جمهوری‌اسلامی‌ایران دراستکهلم به‌مناسبت موفقیت دانش‌آموزان مجلس میهمانی ترتیب داده‌بودند وضمن تبریك و تقدیر، هدایایی اعطاکردند که موجب سپاسگزاری همه اعضاء هیئت گردید.

بالاخره تیم المپیاد ریاضی جمهوری اسلامی ایران در ساعت ۲ بامداد جمعه ۷۰/۵/۴ وارد تهران شد و مورد استقبال محبت‌آمیز معاونت‌محترم پژوهشی وزارت آموزش وپرورش ومعاونت‌محترم ریاست جمهور و ریاست دانشگاه صنعتی شریف و سایر هموطنان عزیز قرارگرفتند. استقبال مردم به‌قدری‌شدید بود که اعضاء تیم مشکل می‌توانستند دور یکدیگر جمع شوند.

عکس مربوط به‌اعضای تیم جمهوری‌اسلامی ایران درصفحه‌ماقبل آخرجلد می‌باشد.

# مسائل شماره ۳۳

تهیه و تنظیم از جواد لآلی

۱ــ فرض‌کنید x و y دوعدد حقیقی، وn، m، kاعداد طبیعی باشند و

$$N(x)=\{n \mid nx>1\}$$

الف) ثابت‌کنید‌که اگر $x<y$ آنگاه $N(x)\subseteq N(y)$

ب) دومجموعه ذیل را بایکدیگر مقایسه کنید (یعنی؛ کدام‌یك زیرمجموعه دیگری است، آیا تساوی برقراراست؟)

$$\bigcup_{n=1}^{m}\Big(\bigcap_{k=n}^{m}N\big(\tfrac{1}{k}\big)\Big) \text{ و } \bigcap_{n=1}^{m}\Big(\bigcup_{k=n}^{m}N\big(\tfrac{1}{k}\big)\Big).$$

۲ــ فرض‌کنید x عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد. تابع f چنین تعریف می‌شود:

$$f(x)=\sum_{nx>1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

(توجه‌کنید‌که اگر متغیر سیگما درمجموعه تهی‌تغییر کند، مقدار آن‌صفر تعریف می‌شود.) ثابت‌کنید:

الف) f تابعی صعودی است وازسمت چپ در هر نقطه پیوسته است.

ب) مجموع نقاطی را که تابع f درآنها پیوسته‌اند مشخص‌کنید.

ج) نمودار تابع f را رسم‌کنید.

۳ـ ثابت کنید

$$\sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{Arc\,cotg}(2r^2)=\frac{\pi}{4}\cdot$$

۴ـ فرض کنید $S$ مجموعه‌ای دلخواه باشد و عمل دوتایی $*$، در $S$، به‌گونه‌ای تعریف شده باشد که در دو خاصیت ذیل صدق کند:

به‌ازای هر $x$، $y$ و $z$ از $S$،

(۱) $x*x=x$،

(۲) $(x*y)*z=(y*z)*x$

ثابت کنید که عمل «$*$» شرکت‌پذیر و جابجایی است.

۵ـ فرض کنید $G=\{x\in R \mid x^2<1\}$. عمل $*$ را بر $G$، چنین تعریف می‌کنیم:

$$x*y=\frac{x+y}{1+xy}$$

ثابت کنید:

(الف) $G$ یک گروه آبلی (جابجایی) است.

(ب) تابع $f: G\longrightarrow R$، باضابطه

$$f(x)=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

تابعی یک‌به‌یک و بروی (پوشا) است و

$$f(x*y)=f(x)+f(y)$$

تبصره. اگر تابعی، مانند $f$، موجود باشد که درخاصیتهای فوق صدق کند آنگاه گوئیم $f$ یک ایزومورفیسم است و $G$ با $R$ ایزومورف(باهمریخت) است. درچنین حالتی خاصیتهای گروه $R$ (باعمل جمع معمولی) و $G$ یکسان است.

۶ـ ثابت کنید که به‌ازای هر $x$، اگر $0\leqslant x\leqslant 1$، آنگاه

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(nx-k)^2 x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{1}{4}n$$

۷ـ ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی $n$، اعداد حقیقی مانند $x_1$، $x_2$، ...، $x_n$ موجود است که

$$0<x_1<x_2<\cdots<x_n<1$$

$$\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{x_2}\right)^{n-1}+\cdots+\left(\frac{1}{x_n}\right)^{n-1}=n^2$$

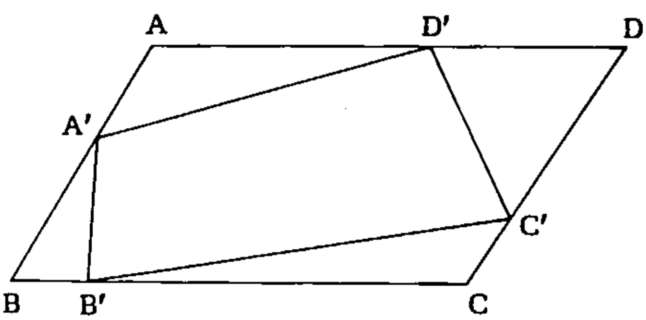
آیا می‌توان $x_1$ ها را به‌گونه‌ای به‌دست آورد، که به‌جای تساوی فوق، تساوی زیر برقرار باشد؟

و $x_1^m+x_2^m+\cdots+x_n^m=1$

که در آن، $m=1-\frac{1}{n}$.

۸ـ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ نقاط $A'$، $B'$، $C'$، $D'$ را به‌ترتیب برروی اضلاع آن به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که

$AA'\leqslant A'B$ و $BB'\leqslant B'C$ و $CC'\leqslant C'D$ و $DD'\leqslant D'A$




(الف) ثابت کنید که

$$2S_{A'B'C'D'}\geqslant S_{ABCD}$$

(ب) تحت چه شرایطی نامساوی فوق به‌تساوی تبدیل می‌شود.

۹ـ ثابت کنید که تعداد نامتناهی عدد طبیعی، مانند $n$، وجود دارد که دارای خاصیت زیر است:

اگر $p$ مقسوم‌علیه اول عدد $n^2+3$ باشد آنگاه عدد صحیحی، مانند $k$، موجود است که $k^2<n$ و $p$ مقسوم‌علیه $k^2+3$ است.

۱۰ـ فرض کنید $(x, y)$؛ به‌معنی، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $x$ و $y$ باشد. ثابت کنید اگر $a$ و $b$ $(a>b)$، دو عدد صحیح نسبت به‌هم‌اول باشند، آنگاه‌به‌ازای هر دوعددصحیح مثبت $m$ و $n$

$$(a^m-b^m \text{ و } a^n-b^n)=a^{(m,n)}-b^{(m,n)}$$

# مسائل

# ویژه‌دانش‌آموزان

محمود نصیری

۱ـ اگر $\alpha$ و $\beta$ و $\gamma$ اندازه‌های زاویه‌های مثلث برحسب رادیان باشند، ثابت کنید. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geqslant\frac{\pi^2}{3}$ (راهنمائی: از نامساوی $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geqslant\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$ استفاده کنید).

۲ـ فرض می‌کنیم به‌ازای $x>0$ و $n>1$، $f(x)=\frac{(1+x)^n}{x}$. ثابت کنید $f(x)\geqslant\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$. درچه‌صورت تساوی برقرار است؟

۳ـ اگر a,b,c حقیقی و مثبت باشند ثابت کنید،

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant\frac{81}{4}$$

(راهنمائی: فرض کنید $P=(1+a)(1+b)(1+c)$ سپس نامساوی واسطه حسابی و هندسی را برای $\frac{p}{a}$ ، $\frac{p}{b}$ ، $\frac{p}{c}$ به‌کار برده واز مساله (۲) استفاده کنید)

۴ـ هرگاه

$$S=\{(x,y)|[x]\leqslant y\leqslant|x| \text{ و } -3\leqslant x\leqslant 3\}$$

مساحت ناحیه S را محاسبه کنید.

۵ـ در مثلث متساوی‌الساقین $ABC$ $(AB=AC)$ نیمسازهای AD و BE و CF را رسم می‌کنیم. اگر چهارضلعی AEDF محاطی باشد، و $AC=1$. آنگاه طول BC را پیدا کنید.

(راهنمائی: دو مثلث قایم‌الزاویه AED و ACD متشابه‌اند، زاویه $\widehat{ACD}$ را برابر $\alpha$ فرض کنید و ثابت کنید $\cos\alpha=2\sin^2\alpha$، آنگاه $BC=2\cos\alpha=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$.)

۶ـ تابع f در R تعریف شده و متناوب با دورهٔ تناوب $T=2$ می‌باشد، هرگاه ضابطه تابع در فاصله $[-1,1)$ به صورت $g(x)=|x|$ باشد ثابت کنید،

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{Arc}\cos(\cos\pi x)$$

۷ـ n ضلعی محدبی دریك دایره به‌شعاع R محاط شده است. اگر مساحت آن از $2R^2$ بزرگتر و طول هرضلعش از R بزرگتر باشد ثابت کنید $n=5$.

(راهنمائی: از قسمت دوم فرض نتیجه بگیریدکه $n<6$.

همچنین ثابت‌کنید مثلث متساوی‌الاضلاع و مربع نیز با شرایط مساله سازگار نیستند.)

۸ـ تابع $f:R\longrightarrow R$ با ضابطه $f(x)=2[x]-\cos\pi(x-[x])$ مفروض است، ثابت‌کنید این‌تابع پیوسته و مشتق‌پذیر است. همچنین ثابت‌کنید تابع یك‌به‌یك است.

۹ـ اگر a و b و c دوبه دو متمایز باشند معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & b & c \\ a^2 & x^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & x^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=0$$

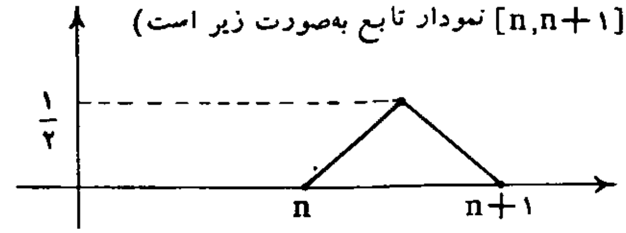
(راهنمائی: باتوجه به خواص دترمینان آن را به دترمینانهای مرتبه سوم و سپس دوم تبدیل کنید. به‌صورت زیر تجزیه می‌شود.

$$(x-a)(x-b)(x-c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

۱۰ـ تابع f چنین تعریف شده‌است‌که به‌ازای هر x حقیقی $f(x)$ برابر است با فاصله x تا نزدیکترین عدد طبیعی به‌آن. نمایش f را رسم کنید.

(راهنمائی. هرگاه $x\leqslant 1$، نزدیکترین عدد طبیعی به‌آن عدد یك است. ولذا $f(x)=1-x$ و به‌ازاء $x>1$ در فاصله

$[n,n+1]$ نمودار تابع به‌صورت زیر است)




۱۱- هرگاه هرسه‌زاویه مثلث ABC حاده باشند ثابت‌کنید

$$tg^nA+tg^nB+tg^nC\geqslant 3\sqrt{3^n}\qquad (n\in N)$$

(راهنمائی. بنابه‌نامساوی واسطه حسابی و هندسی داریم

$$tg^nA+tg^nB+tg^nC\geqslant 3\sqrt[3]{tg^nA\,tg^nB\,tg^nC}$$

همچنین $tgA+tgB+tgC\geqslant 3\sqrt[3]{tgA\,tgB\,tgC}$ ولذادر هرمثلث

$tgA\,tgB\,tgC\geqslant 3\sqrt{3}$ یا $tg^nA\,tg^nB\,tg^nC\geqslant(3\sqrt{3})^n$

۱۲- دایره‌ای رسم‌کنیدکه بر دو ضلع یك زاویه مماس و از نقطه معلوم M درون آن زاویه بگذرد.

(راهنمائی: از تجانس استفاده‌کنید.)

۱۳- در مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ABC $(A=90)$ میانه BM را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را در E قطع‌کند و از E عمود EH را بر ضلع AC رسم می‌کنیم، ثابت کنید $AH=3HE$.

(راهنمائی: نقطه تقاطع میانه‌وارد بر وتر را با BM نقطه N می‌نامیم. دراین‌صورت مثلثی متشابه بامثلث AHE پیداکنید.)

۱۴- فرض کنیم $a_1, a_2, \dots, a_k$ اعداد حقیقی متمایز باشند، $k\geqslant 1$. نشان دهید k تابع

$$f_1(x)=|x-a_1|,\ f_2(x)=|x-a_2|,\dots,f_k(x)=|x-a_k|$$

مستقل خطی‌اند.

(راهنمائی: فرض‌کنید

$$b_1|x-a_1|+b_2|x-a_2|+\dots+b_k|x-a_k|=0.$$

اگر، مثلاً، $b_1\neq 0$، آنگاه

$$b_1|x-a_1|=-b_2|x-a_2|-\dots-b_k|x-a_k|.$$

طرف چپ رابطه فوق‌در $a_1$ مشتق‌پذیر نیست درحالی‌که‌سمت راست در $a_1$ مشتق‌پذیر است که یك تناقض است.

۱۵- ثابت‌کنید فقط به‌ازای $m=0$ تمام ریشه‌های معادله $f(x)=x^3-m(x^2-x+1)=0$ حقیقی‌اند.

(راهنمائی: فرض‌کنید $m\neq 0$ دراین‌صورت‌معادله حداقل یك ریشه غیرحقیقی دارد. چون اگر معادلهٔ $f\left(\frac{1}{x}\right)=0$ را تشکیل دهیم و $x_1$ و $x_2$ و $x_3$ ریشه‌های‌معادله $f(x)=0$ باشند آنگاه $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}=-1$ که‌یك تناقض است.)

۱۶- ثابت‌کنید

$$\frac{\int_0^a x^n(2a-x)^n\,dx}{\int_0^a x^n(a-x)^n\,dx}=2^{2n}$$

(راهنمائی: اگر هریك از انتگرالهای صورت و مخرج را به‌ترتیب $I_1, I_2$ بنامیم، باانتخاب $x=2t$ داریم:

$$I_1=2^{2n+1}\int_0^{a/2} t^n(a-t)^n\,dt$$

وبنابه‌تقارن تابع $f(t)=t^n(a-t)^n$ نسبت به‌خط $t=\frac{a}{2}$،

$I_2=2\int_0^{a/2} t^n(a-t)^n\,dt$، لذا $\left(\frac{I_1}{I_2}=2^{2n}\right.$

۱۷- اگر a وb وc طولهای اضلاع مثلث ABC و 2P محیط آن باشد. ثابت‌کنید

$$\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}\geqslant P$$

راهنمائی:

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=\frac{a^2b^2+b^2c^2}{2}+\frac{a^2b^2+b^2c^2}{2}+\frac{a^2c^2+b^2c^2}{2}$$

سپس نامساوی‌واسطه حسابی وهندسی رابرای هریك ازکسرها به‌کار ببرید.)

۱۸- اگر ۸ سکه را با هم بیاندازیم. احتمال‌اینکه ۴ شیر و۴ خط ظاهر شوند چقدراست؟

جواب: $\frac{25}{128}$

# حل مسایل شمارهٔ ۲۹

ترجمه و تنظیم از: ابراهیم دارابی

۱ـ روی تخته چند عدد مثبت نوشته شده‌است. مجموع حاصلضرب دوبه دوی آنها برابراست با ۱، ثابت‌کنید از بین آنها می‌توان عددی را طوری تعین‌کرد که مجموع بقیه اعداد کمتراز $\sqrt{2}$ باشد.

حل– فرض‌کنیم $x_1$ ماکزیموم اعداد $x_1, x_2, \dots x_n$ باشد. پس

$$(1) \quad (x_1+\dots+x_n)^2 = \sum_{i=2}^{n} x_i^2 + \sum_{2<i<j<m} 2x_ix_j$$

تا مساوی‌های $x^2 i < 2x_1 xi$ را جمع و نتیجه را به جای $\sum_{i=2}^{n} x_i^2$ در (۱) قرارمی‌دهیم. خواهیم داشت

$$(x_2+\dots+x_n)^2 < \sum_{i=2}^{n} 2x_1x_i + \sum_{2<i<j<n} 2x_ix_j = \sum_{1<i<j<n} 2x_ix_j$$

از آنجا

$$(x_2+\dots+x_n)^2<2 \quad , \quad x_2+\dots+x_n<\sqrt{2}$$

یعنی $x_1$ عددی است که ما را به‌نتیجه می‌رساند.

۲ـ آیا چهار عدد طبیعی می‌توان پیدا کرد به‌قسمی که حاصلضرب هردوتای دلخواه از آنهارا با ۱۹۹۰ جمع‌کنیم مربع‌یك‌عدد طبیعی بشود؟

حل. چون

$$(2n)^2=4n^2$$
$$(2n+1)^2=4n^2+4n+1$$

پس، باقیمانده تقسیم هرمجذورکامل بر ۴ برابراست با ۰ و یا ۱. دیده می‌شود باقیمانده ۱۹۹۰ بر۴ برابراست با۲. بنابراین اگراعداد مطلوب وجودداشته‌باشند، باقیمانده تقسیم‌حاصلضرب هردوتای دلخواه ازآنها بر۴، برابر با۲ ویا۳ خواهدبود. پس لااقل سه‌تا ازآنها فرد می‌شوند.

باقیمانده هریك‌ازسه عدد فردبر۴، برابراست با ۱ ویا ۳ دوتاازآنها باقیمانده‌های‌مساوی‌دارند. باقیمانده‌حاصلضرب این دوعدد بر۴ برابر ۱ است‌که این ممکن نیست. بنابراین چنین اعدادی موجود نیستند.

۳ـ ۷ بردار داده شده‌اند. می‌دانیم طول مجموع هرسه بردار دلخواه برابراست بامجموع‌طولهای چهاربردار باقیمانده ثابت‌کنید مجموع همه بردارها برابراست با بردار صفر

حل. بردارها را با $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots\vec{a}_7$ نشان می‌دهیم. مجموع‌آنها راهم $\vec{A}$ می‌نامیم. اگر

$$\vec{B}_i=\vec{a}_i+\vec{a}_{i+1}+\vec{a}_{i+2}$$
$$(i=1,2,\dots,7)$$

دراین‌صورت فرض می‌کنیم،

$$\vec{a}_8=\vec{a}_1 \quad , \quad \vec{a}_9=\vec{a}_2$$

بنا به‌فرض داریم

$$|\vec{B}_i|=|\vec{A}-\vec{B}_i|$$
$$(i=1,2,\dots,7)$$

طرفین این نامساویها را مجذور و سپس جمع می‌کنیم. خواهیم داشت.

$$7\vec{A}^2-2A\sum_{i=1}^{7} B_i=0$$

از آنجا ،

$$7\vec{A}^2-2A\cdot 3\vec{A}=0\ ,\quad \vec{A}^2=0\ ,\quad \vec{A}=0$$

۴ـ دنباله اعداد طبیعی $\{x_n\}$ به‌این ترتیب ساخته می‌شود

$$x_1=a\ ,\quad x_2=b$$

و به‌ازای $n\geqslant 1$ داریم

$$x_{n+2}=x_n+x_{n+1}$$

می‌دانیم یکی از جملات دنباله برابر است با ۱۰۰۰. مـی‌نیمم $a+b$ چقدر است؟

حل. به‌آسانی معلوم می‌شود که

$$x_n=t_n a+t_{n+1} b$$

که در آن $t_1=1$ و $t_2=0$ و $t_{n+2}=t_n+t_{n+1}$

ملاحظه می‌شود بـا شروع $n=2$ دنباله $\{t_n\}$ اکیداً صعودی است و بنابراین از نامساوی

$$1000=t_na+t_{n+1}b=t_ka'+t_{k+1}b'$$

و بنا برفرض $k>n$ نتیجه می‌شود که

$$(a+b)t_{n+1}>t_na+t_{n+1}b=$$
$$=t_ka'+t_{k+1}b'>t_k(a'+b')\geqslant$$
$$\geqslant(a'+b')t_{n+1}$$

و یا

$$a+b>a'+b'$$

یعنی برای تعیین زوج مطلوب $a$ و $b$ باید تعین کنیم به‌ازای چه‌مقدار ماکزیمم $n$ معادله زیر دراعداد طبیعی ریشه دارد.

$$t_na+t_{n+1}b=1000$$

پس به‌ازاء $n$ در بین همه جوابهای معادله درصورتی‌که بیش ازیکی باشد، آنرا اختیار می‌کنیم که $a+b$ را می‌نیمم کند.

دنباله $\{t_n\}$ را می‌نویسیم:

۱,۰,۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,۳۴,۵۵,۸۹,۱۴۴,۲۳۳,

۳۷۷,۶۱۰,۹۸۷,...

بدیهی است که معادلـه $610a+987b=1000$ و معادلات بعدی، دراعداد طبیعی ریشه ندارند. زیرا سمت چپ معادلات بیشتر از ۱۰۰۰ می‌شود.

با بررسی مختصر معلوم می‌شود که معادلات

$$377a+610b=1000\ ،\quad 233a+377b=1000$$
$$144a+233b=1000$$

هم دراعداد طبیعی ریشه ندارند. اما معادله

$$89a+144b=1000$$

جواب منحصر به‌فرد $a=8$ و $b=2$ را دارد که جواب مسئله است. یعنی می‌نیمم $a+b$ برابر است با ۱۰ که در ازای $a=8$ و $b=2$ حاصل می‌شود.

۵ـ تابع $f$ به‌ازای جمیع مقادیر مثبت $x$ تعریف شده و مقادیر مثبت می‌گیرد. می‌دانیم $a$ و $b$ و $c$ طولهای اضلاع یك مثلث و $f(a)$ و $f(b)$ و $f(c)$ طولهای اضلاع مثلث دیگری هستند. ثابت کنید اعداد مثبتی مانند $A$ و $B$ یافت می‌شوند بقسمی‌که به‌ازاء هر $x$

$$f(x)\leqslant Ax+B$$

حل. اگر $0<x<2$ آنگاه مثلثی موجود است که طول اضلاع آن $x$ و ۱ و ۱ باشد.

بنا به‌فرض مثلثی هم با اضلاع $f(x)$ و $f(1)$ و $f(1)$ وجود خواهد داشت. پس بنا بر نامساویهای موجود درمثلث داریم

$$f(x)<2f(1)$$

اکنون به‌طریق استقراء ثابت می‌کنیم به‌ازای هر $n\geqslant 2$ داریم

$$f(n)\leqslant(n-1)f(2)$$

به‌ازای $x=2$ حکم بدیهی است. فرض کنیم به‌ازای $n=k$ حکم برقرار باشد. نشان می‌دهیم به‌ازای $n=k+1$ هم حکم برقرار است. به‌ازای $k\geqslant 2$ مثلثی به‌اضلاع $k+1$ و $k$ و ۲ موجوداست. بنا به‌فرض مثلث دیگـری به‌اضلاع $f(k+1)$ و $f(k)$ و $f(2)$ هم وجوددارد. بنا بر نامساوی موجود درمثلث‌ها داریم

$$f(k+1)<f(2)+f(k)\leqslant(k-1)f(2)+f(2)=$$
$$=kf(2)$$

و بالاخره اگر $x\geqslant 2$ و $n=[x]$ آنگاه $2\leqslant n\leqslant x<n+1$ ومثلثی به‌اضلاع $n+1$ و $x$ و $n$ وجود خواهدداشت در نتیجه مثلثی‌هم به‌اضلاع $f(n+1)$ و $f(x)$ و $f(n)$ وجود خواهدداشت پس داریم

$$f(x)<f(n)+f(n+1)\leqslant((n-1)+n)f(2)<$$
$$2xf(2)$$

یعنی به‌ازای جمیع مقادیر x داریم

$$f(x)\leqslant 2xf(2)+2f(1)$$

پس $A=2f(2)$ و $B=2f(1)$ که در شرایط مسئله صدق می‌کنند.

۶ـ هشت مکعب یکسان به‌یال ۱ مفروضند. ۲۴ وجه دلخواه از ۴۸ وجهٔ موجود این مکعب‌ها سفیـد و ۲۴ تای بقیه سیاه هستند. ثابت کنید از ۸ مکعب می‌توان مکعبی را بقسمی ساخت که درسطح جانبی آن تعداد مربع‌های سفید وسیاه به‌ضلع ۱ باهم برابر باشند.

حل. مکعب را به‌دلخواه با ۸ مکعب می‌سازیم. اگر تعداد وجوه جانبی سفید را با a وتعداد وجوه جانبی سیاه رنگ را با b نشان دهیم. خواهیم داشت $a+b=24$ (درمکعب موجود که ازهشت مکعب ساخته شده ، دارای شش وجه چهار مربعی می‌باشد. $24=6\times 4$ . م)

اگر $d=a-b$ و $d=0$، آنگاه مسئله حل‌شده است. درغیراین‌صورت بادوران مکعب‌های کوچك تفاضل d راتغییر می‌دهیم. به‌آسانی دیده می‌شود.

۱) پس ازهردوران یکی ازمکعب‌های دلخوا، به‌اندازه $90°$ حول خط مجاورمرکز (برای تغییروجه آن) اندازه‌تغییرات d یاصفراست ویا ۲. (دراین دوران فقط یکی‌ازوجوه‌که دیده نمی‌شد، با وجهی که دیده می‌شد تعویض می‌شود. اگر همرنگ باشند، $d=0$ واگرمختلف‌الرنگ باشند $d=2$ پرانتزازمترجم است)

۲) سه دوران‌متوالی بـرای هریك ازمکعب‌های کوچك می‌توان طوری اختیارکرد که همه وجوه‌آنها که دیده می‌شوند، ناپدید شوند و همه وجوه‌آنهایی که‌دیده‌نمی‌شدند،ظاهر گردند

پس ازانجام سه دوران متوالی درمورد هر ۸ مکعب‌که خاصیت (۲) در آنها صدق می‌کند ۲۴ دوران انجام خواهـد گرفت و درنتیجه خواهیم‌داشت $d=b-a$

چون $a-b$ و $b-a$ دوعدد زوج‌متقارن هستند واندازه d برای هرمرحله تغییر ۰ ویا ۲ بوده است پس درلحظه گذار (ازمثبت به‌منفی. م) این‌عدد صفر بوده‌است ودرهمان لحظه باید دوران‌مکعب‌هارا متوقف‌ساخت که دراین‌حالت موقعیت‌مطلوب ایجاد شده است.

۷ـ روی صفحه چهار دایـره $C_1$ و $C_2$ و $C_3$ و $C_4$ داده شده‌اند به‌قسمی که:

$C_1$ بر $C_2$ و $C_4$ مماس خارج‌است. $G_2$ بر $C_3$ مماس‌خارج است. $C_3$ بر $C_4$ مماس خارج است.

مماسهای مشترك ازواج دوایر $C_1$ و $C_2$ ، $C_2$ و $C_3$ ، $C_3$ و $C_4$ ، $C_1$ و $G_4$ را رسم می‌کنیم. ایـن خطوط چهارضلعی محیطی ایجاد می‌کنندکه دوایر $C_1$ و $C_2$ و $C_3$ و $C_4$ را شامـل می‌باشد. ثابت‌کنید دوتا ازاین‌دوایر باهم برابرند.

حل. چون چهار ضلعی ABCD محیطی است پس

$$AB+CB=BC+DA$$

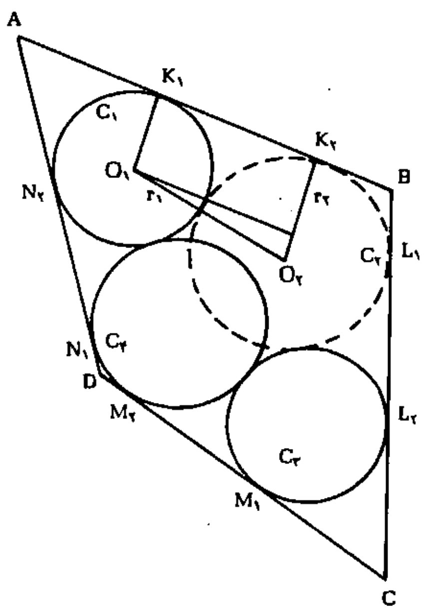
فواصل هررأس تا نقاط تماس برابر است

$(AK_1=AN_1,\cdots\quad)$

پس داریم،

$$K_1K_2+M_1M_2=L_1L_2+N_1N_2$$

اگر $r_1$ و $r_2$ و $r_3$ و $r_4$ شعاعهای متناظر بااین دوایر باشند داریم




$$K_1K_2=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}=2\sqrt{r_1r_2}$$

به‌طریق مشابه داریم،

$$M_1M_2=2\sqrt{r_3r_4}\quad ، \quad L_1L_2=2\sqrt{r_2r_3}$$

$$N_1N_2=2\sqrt{r_4r_1}$$

پس ،

$$2(\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_3r_4}-\sqrt{r_2r_3}-\sqrt{r_4r_1})=0$$

یا

$$(\sqrt{r_1}-\sqrt{r_3})(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_4})=0$$

از آنجا،

$r_2 = r_4$ یا $r_1 = r_3$

۸ـ دایره $S_1$ و وتر $OC$ از آن داده شده‌است. دایره $S_2$ به‌مرکز $O$، وتر $OC$ را درنقطه $D$ متمایز از نقطه $C$ ودایره $S_1$ را درنقاط $A$ و $B$ قطع می‌کند. ثابت کنید نقطهٔ $P$ محل برخورد نیمسازهای مثلث $ABC$ است.

حل. ثابت می‌کنیم $AD$ نیمساززاویه $A$ است. داریم،

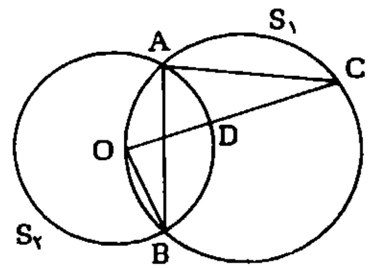
$\widehat{BAC}=\widehat{BOC}$ (زوایای محاطی) همچنین

$$\widehat{BAD}=\frac{1}{2}=\widehat{BOD}$$

چون $\widehat{BAD}$ محاط دردایره $S_2$ وروبه‌رو به‌کمان $\overset{\frown}{BD}$ و زاویهٔ $BoD$ مرکزی متقابل به‌همان‌کمان است. پس،

$$\widehat{BAD}=\frac{1}{2}\widehat{BOD}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}$$

به‌طریق مشابه ثابت می‌شود $BD$ نیمساز زاویه $B$ می‌باشد.




۹ـ معادله

$$x^5-x^3-x^2+1=y^2$$

را دراعداد صحیح حل‌کنید.

حل. باامتحان معلوم می‌شودکه $y=\pm1$ و $x=0$ و $y=0$ و $x=\pm1$ در معادله صدق می‌کند. به‌روش برهان خلف ثابت می‌کنیم معادله ریشه دیگری‌ندارد.

اگر $(x, y)$ ریشه‌های صحیح معادله باشند به قسمی‌که $x\neq -1$ و $0$ و $1$، سمت چپ معادله را به‌صورت حاصلضرب می‌نویسیم.

$$(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)=y^2$$

به‌فرض $x-1\neq 0$ پس $y^2$ بر $(x+1)^2$ ودرنتیجه $y$ بر $x-1$ بخشپذیر است.

از آنجا،

$$(x+1)(x^2+x+1)=\left(\frac{y}{x-1}\right)^2$$

مربع‌عدد صحیح خواهد بود.

عوامل $x+1$ و $x^2+x+1$ مقسوم علیه مشترکی به‌صورت $x+1$ و $(x+1)x+1$ ندارند. پس هریك از آنها مربع‌عدد صحیح خواهندبود. درحالت‌خاص $x+1\geqslant 0$ درحالتی‌که مسئله‌را بررسی می‌کنیم یعنی $x\neq -1$ و $0$، پس $x\geqslant 2$ و

$$x^2<x^2+x+1<(x+1)^2$$

وازاینجا این تناقض حاصل می‌شودکه $x^2+x+1$ مربع عدد صحیح می‌باشد.

۱۰ـ ۵۵عددطبیعی نابزرگتراز ۱۰۰را انتخاب‌می‌کنیم. آیالازم است دربین‌آنها دوعدد موجود باشد به‌قسمی‌که تفاضل آنها:

الف) ۹ ب) ۱۱ باشد؟

حل (الف) بلی. زیرا $9\times 6+1=55$ از آنجا بین اعداد انتخاب شده هفت عدد پیدا می‌شودکه باقیمانده آنها بر ۹ باهم برابرند. چون از ۱ تا ۱۰۰ بیش از ۱۲ عدد موجود نیست‌که باقیمانده آنها بر ۹ برابرباشند، پس دربین این‌هفت عدد دوعدد وجود داردکه تفاضل آنها، ۹ باشد.

حل (ب)، نه‌لزوماً. برای مثال

$1, 2, 3, \ldots, 11$

$23, 24, \ldots, 33$

$45, 46, \ldots, 55$

$67, 68, \ldots, 77$

$89, 90, \ldots, 99$

در هرسطر تفاضل اعداد از ۱۰ تجاوز نمی‌کند. واعداد سطرهای مختلف لااقل ۱۲ تا باهم اختلاف دارند.

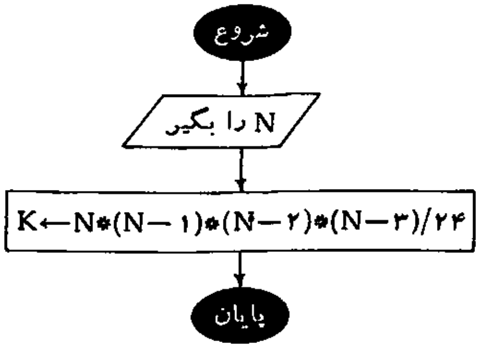
# حل مسائل المپیاد کامپیوتر

اولین دورهٔ المپیاد انفورماتیک با شرکت بیش از ۲۰۰۰ نفر از دانش‌آموزان کلاسهای سوم و چهارم ریاضی-فیزیک سراسر کشور برگزار شد. المپیاد انفورماتیک به‌منظور انتخاب اعضای تیم چهارنفرهٔ جمهوری اسلامی ایران جهت شرکت درچهارمین دورهٔ المپیاد بین‌المللی انفورماتیک، که درسال ۱۳۷۱ در کشور آلمان برگزار می‌شود، انجام‌گرفته است.

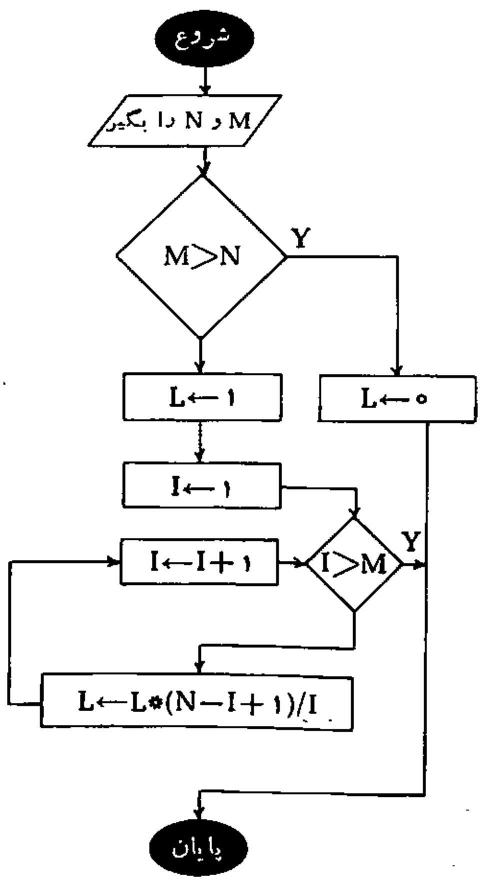
این انتخاب درسه مرحله انجام می‌شود. مرحلهٔ اول مسابقات درتاریخ پانزدهم آذرماه برگزار شد. دراین مرحله حدود صدنفر دانش‌آموز برای شرکت درمرحلهٔ دوم، که در دههٔ فجر انجام‌می‌شود، انتخاب می‌شوند. درمرحلهٔ دوم‌شش‌نفر انتخاب می‌شوند تادردورهٔ آموزشی‌المپیاد انفورماتیک‌شرکت کنند. پس ازپایان دوره چهار نفر به‌عضویت تیم درمی‌آیند. لازم به‌ذکراست‌که تمام ۶ نفردانش‌آموز منتخب در مرحلهٔ دوم ازشرکت درکنکور سراسری معاف خواهند بود.

به‌منظور آشنایی شما عزیزان با این المپیاد، سئوالات مرحلهٔ اول همراه باحل آنها آورده می‌شود. سعی‌کنید قبل‌از مراجعه به‌پاسخ سئوالات راه‌حل آنها را بیابید. برای بدست آوردن اطلاعات بیشتر راجع به‌المپیاد انفورماتیک می‌توانید ویژه‌نامهٔ خوارزمی‌که توسط دفتر برنامه ریزی و تألیف‌کتب درسی به‌دبیرستانها ارسال شده‌است مراجعه نمایید.

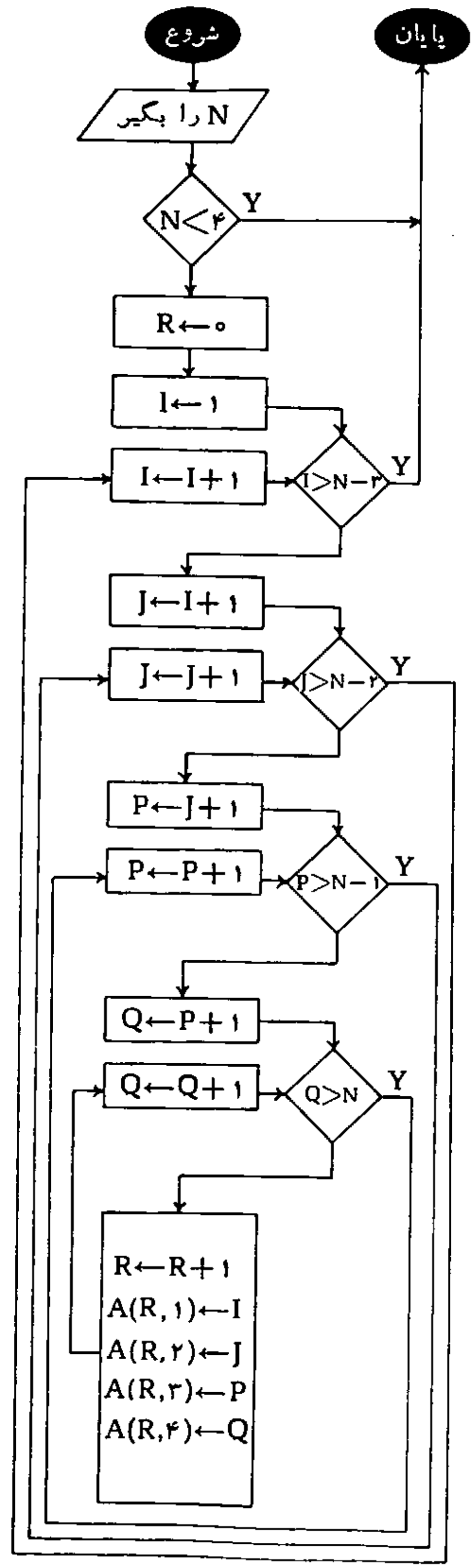
**پاسخ ۱ـ الف**



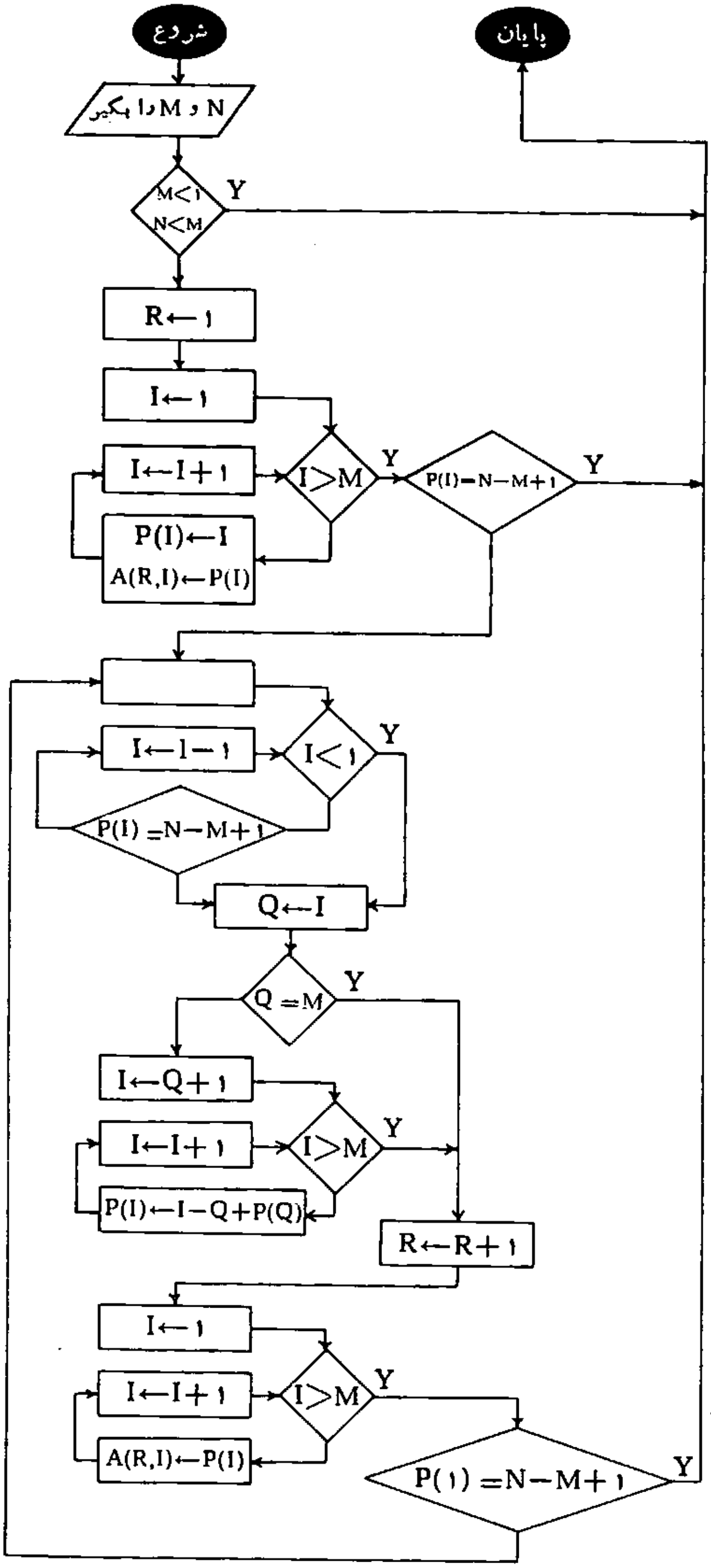

**پاسخ ۱- ب**



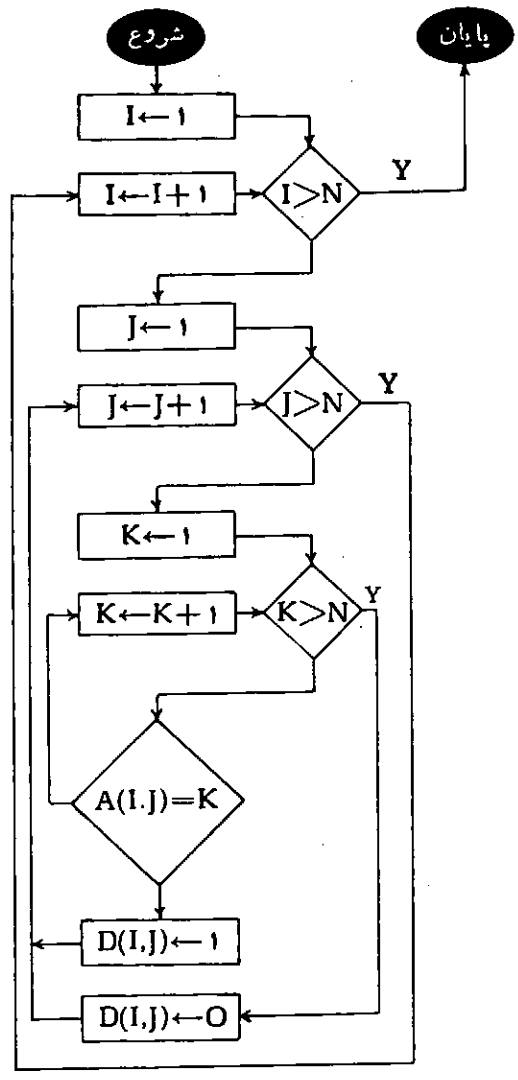
## پاسخ ۱. ج



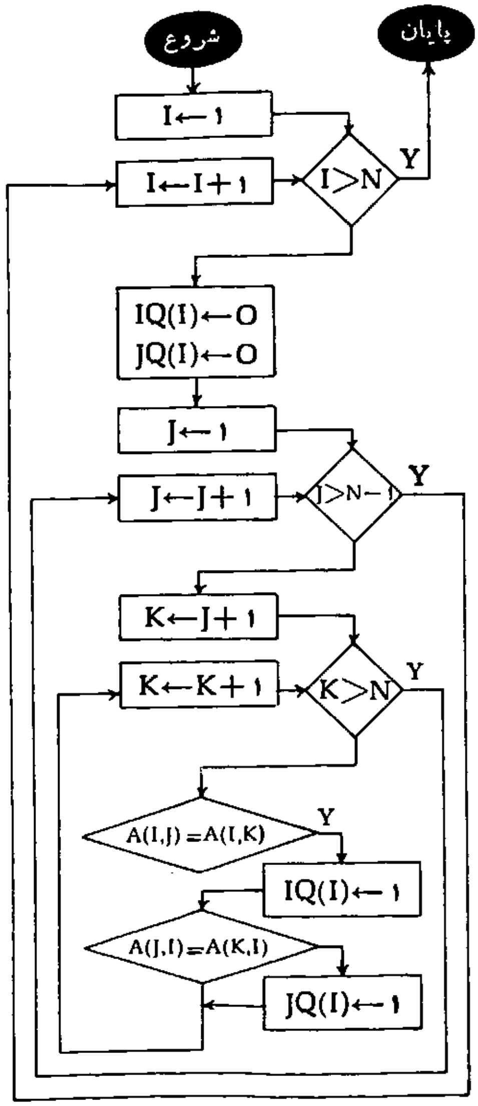

## پاسخ ۱. د



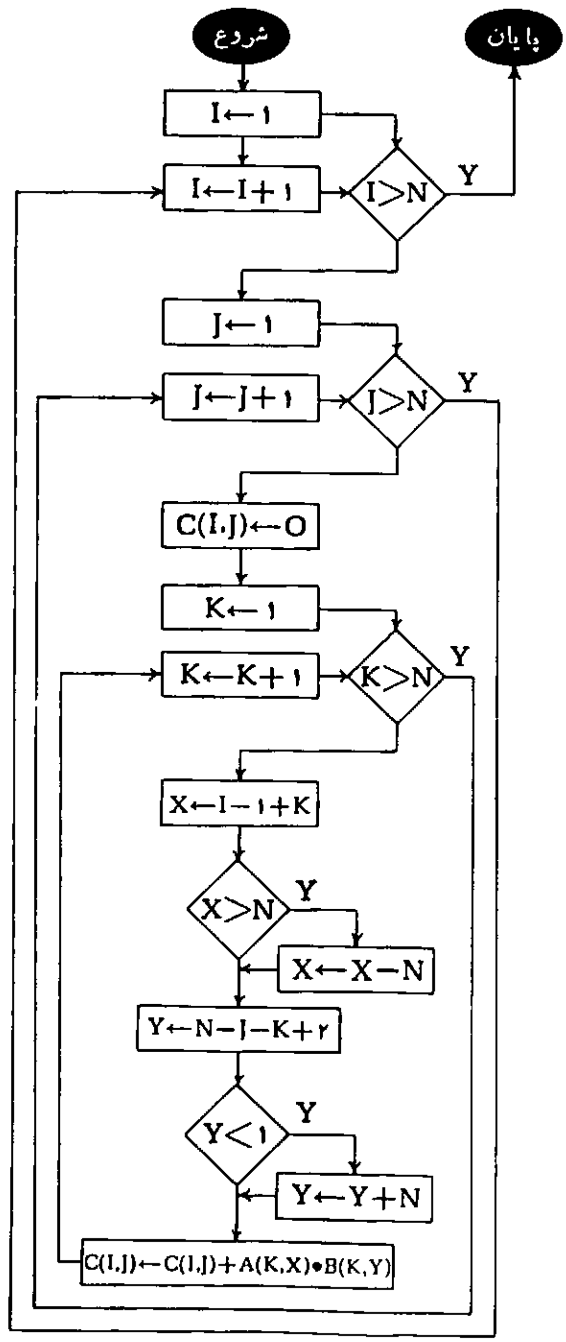
**پاسخ ۲. الف**



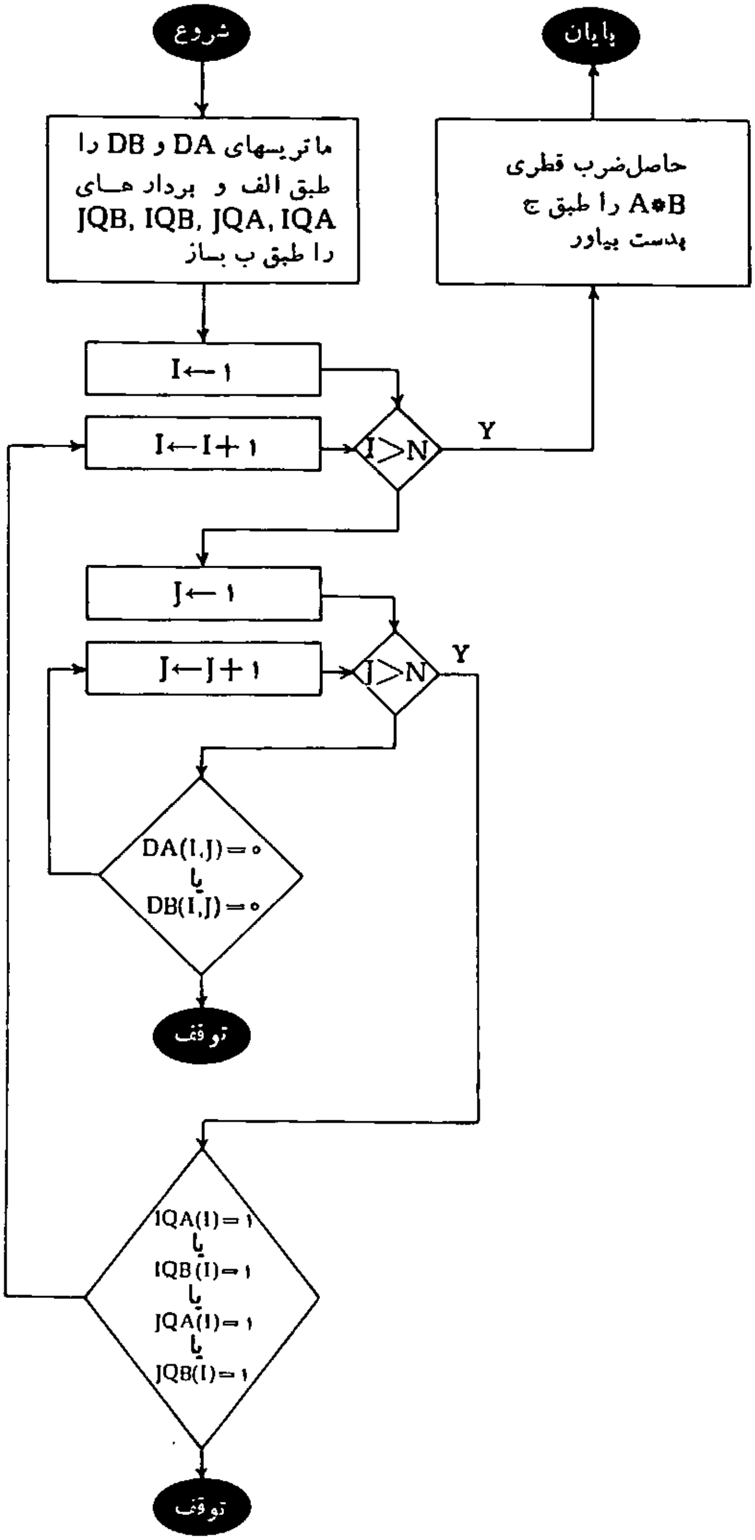

**پاسخ. ۲. ب**



پاسخ ۲.ج




پاسخ ۲.د



```
100 INPUT N
110 REM IF (N < 0) OR (INT(N) <> N) THEN PRINT "ERROR..." : GOTO 140
120 K = N * (N - 1) * (N - 2) * (N - 3) / 24
130 REM PRINT K
140 END
```

```
100 INPUT N, M
110 REM IF (M < 0) OR (INT(M) <> M) THEN PRINT "ERROR..." : GOTO 190
120 REM IF (N < 0) OR (INT(N) <> N) THEN PRINT "ERROR..." : GOTO 190
130 IF (M > N) THEN L = 0 : GOTO 180
140 L = 1
150 FOR I=0 TO M-1
160   L = L * (N - I) / (I + 1)
170 NEXT I
180 REM PRINT L
190 END
```

```
100 INPUT N
110 IF (N < 4) OR (INT(N) <> N) THEN PRINT "ERROR..." : GOTO 270
120 DIM A(K,4)
130 R = 0
140 FOR I=1 TO N-3
150   FOR J=I+1 TO N-2
160     FOR P=J+1 TO N-1
170       FOR Q=P+1 TO N
180         R = R + 1
190         A(R,1) = I
200         A(R,2) = J
210         A(R,3) = P
220         A(R,4) = Q
230       NEXT Q
240     NEXT P
250   NEXT J
260 NEXT I
270 END
```

```
100 INPUT N, M
110 IF (M < 1) OR (INT(M) <> M) THEN PRINT "ERROR..." : GOTO 350
120 IF (N < M) OR (INT(N) <> N) THEN PRINT "ERROR..." : GOTO 350
130 DIM P(M), A(L,M)
140 I = 1
150 FOR J=1 TO M
160   P(J) = J
170   A(I,J) = P(J)
180 NEXT J
190 IF (P(1) = N-M+1) THEN GOTO 350
200 FOR J=M TO 1 STEP -1
210   IF (P(J) = N-M+J) THEN GOTO 240
220   Q = J
230   GOTO 250
240 NEXT J
250 P(Q) = P(Q) + 1
260 IF (Q = M) THEN GOTO 300
270 FOR J=Q+1 TO M
280   P(J) = J - Q + P(Q)
290 NEXT J
300 I = I + 1
310 FOR J=1 TO M
320   A(I,J) = P(J)
330 NEXT J
340 IF (P(1) <> N-M+1) THEN GOTO 200
350 END
```

```
\******************************** 2A ********************************\

100 DIM A(N,N), D(N,N)
110 FOR I=1 TO N
120   FOR J=1 TO N
130     FOR K=1 TO N
140       IF A(I,J)=K THEN D(I,J)=1 : GOTO 170
150     NEXT K
160     D(I,J)=0
170   NEXT J
180 NEXT I
190 END

\******************************** 2B ********************************\

100 DIM A(N,N), IQ(N), JQ(N)
110 FOR I=1 TO N
120   IQ(I)=0 : JQ(I)=0
130   FOR J=1 TO N-1
140     FOR K=J+1 TO N
150       IF A(I,J)=A(I,K) THEN IQ(I)=1
160       IF A(J,I)=A(K,I) THEN JQ(I)=1
170     NEXT K
180   NEXT J
190 NEXT I
200 END

\******************************** 2C ********************************\

100 DIM A(N,N), B(N,N), C(N,N)
110 FOR I=1 TO N
120   FOR J=1 TO N
130     C(I,J)=0
140     FOR K=1 TO N
150       X = I - 1 + K     : IF (X > N) THEN X = X - N
160       Y = N - J + 2 - K : IF (Y < 1) THEN Y = Y + N
170       C(I,J) = C(I,J) + A(K,X) * B(K,Y)
180     NEXT K
190   NEXT J
200 NEXT I
210 END

\******************************** 2D ********************************\

10 REM
20 REM      Here we have computed the matrix D and
30 REM      vectors IQ and JQ for matrices A and B
40 REM
100 DIM DA(N,N), DB(N,N), IQA(N), IQB(N), JQA(N), JQB(N)
110 FOR I=1 TO N
120   FOR J=1 TO N
130     IF DA(I,J)=0 OR DB(I,J)=0 THEN GOTO 200
140   NEXT J
150   IF IQA(I)=1 OR JQA(I)=1 OR IQB(I)=1 OR JQB(I)=1 THEN GOTO 200
160 NEXT I
170 REM
180 REM      Here we must compute the diagonal product of A*B
190 REM
200 END
```

# تعداد جملات گویا در بسط $(\sqrt[p]{x}+\sqrt[m]{y})^n$

امیرحسین نجفی دانش آموز سال سوم دبیرستان علامه حلی تهران

یکی‌ازمسائل جبر چندجمله‌ایها، پیداکردن تعدادجملات گویای بسط یك دو جمله‌ایست. دراین مقاله سعی آن است که راه نسبتاً سریعی را برای یافتن تعداد این‌جملات پیداکنیم:

نمایش بسط دوجمله‌ای مزبور عبارتست‌از:

$$\binom{n}{0}x^{n/m}+\binom{n}{1}x^{(n-1)/m}y^{1/p}+\dots+\binom{n}{n}y^{n/p}$$

جملهٔ عمومی این بسط را درنظرمی‌گیریم:

$$a_{k+1}=\binom{n}{k}x^{(n-k)/m}\,y^{k/p}\quad 0\leqslant k\leqslant n$$

اگر به $k$ مقادیرصحیح از صفر تا $n$ را بدهیم جملات بسط $(\sqrt[m]{x}+\sqrt[p]{y})^n$ به‌دست می‌آید

برای‌اینکه جملهٔ عمومی نسبت به‌$y$ گویا باشد $\frac{k}{p}$ بایــد عددی صحیح باشد یعنی $p|k$.

تعداد اعدادی ازصفر تا $n$ که بر$p$ بخشپذیرند برابربا $\left[\frac{n}{p}\right]+1$ است ( $\left[\frac{n}{p}\right]$ تعداد اعداد از ۱ تا $n$ است‌که بر $p$ بخشپذیرند و چون صفر برهر عددی ازجمله $p$ بخشپذیــر است لذا تعداد این‌اعداد $\left[\frac{n}{p}\right]+1$ است ) و چــون $k$ می‌تواند مقادیر ازصفر تا $n$ را اختیارکند لــذا تعداد جملاتی که نسبت به $y$ گویا می‌باشند برابــر $[\frac{n}{p}]+1$ است کــه به‌ازای $k$ هایی به‌شرح زیرند:

$$0,p,2p,\dots,n-p-R,n-R$$

که $R$ عبارتست از باقیماندهٔ تقسیم $n$ بر $p$.

$$R=n-P\left[\frac{n}{p}\right]$$

برای‌اینکه جملهٔ عمومی نسبت به‌$x$ هم‌گویا باشد می‌باید $n-k$ بر$m$ بخشپذیرباشد. به‌ازای $k$ های فوق، $n-k$ به شرح زیر خواهد بود:

$$n-0,n-p,n-2p,\dots,n-(n-p-R),$$
$$n-(n-R)$$

ویا به‌عبارت دیگر، دنباله

$$(I)\qquad R,R+p,\dots,n-p,n$$

یك تصاعد حسابی باجملهٔ اول $R$ وقدرنسبت $p$ است

تعداد جملات این تصاعد همان $[\frac{n}{p}]+1$ است. دراین‌مرحله قصد ما پیداکردن تعدادجملاتی ازاین تصاعد است‌که بـر $m$ بخشپذیرند.

فــرض می‌کنیم $(m,p)=d$ یعنــی $p=dq'$ و $m=dq$ وهمچنین فرض می‌کنیم‌که جملهٔ $a$ام از تصاعد (I) یعنی $R+(a-1)p$، اولین جمله‌ایست که بر$m$ بخشپذیر است.

$$(R+(a-1)p=mq'')$$

اگراولین جمله بعدازجملهٔ $a$ام‌که بر $m$ بخشپذیراست جملهٔ $a+b$ام باشد خواهیم‌داشت:

$$\text{جملهٔ } a+b\text{ام} =R+(a+b-1)p=$$
$$=R+(a-1)p+bp=mq''+bP$$
$$=mq''+bdq'$$

چون جملهٔ $(a+b)$ام بر$m$ بخشپذیراست پس $bdq'$ بر$m$ بخشپذیر است. اما $(m,q')=1$ در نتیجه $m|bd$ و لذاکوچکترین مقداری‌که $b$ پیدامی‌کند، $m/a$است. به‌عبارت دیگر اولین جمله بعداز جملهٔ $a$ام‌که بر $m$ بخشبذیــر است، جملهٔ $a+\frac{m}{d}$ است. جملهٔ بعدی‌جملهٔ $a+\frac{2m}{d}$ است و ...

یعنی فاصلهٔ جملاتی‌که بر$m$ بخشپذیرنــد $m/d$ است، پس اگر در $m/a$ جمله اول از دنباله (I) هیچ یك بـر $m$ بخشپذیر نبودند، هیچ‌جملهٔ دیگری بر $m$ بخشپذیر نخواهد بود

(چرا که اگر فرضاً جملهٔ t ام $(t>m/d)$ بر m بخشپذیر باشد جملهٔ $t-\frac{m}{d}$ ام نیز بر m بخشپذیر خواهد بود) ودر نتیجه هیچ یك از جملات بسط $(\sqrt[m]{x}+\sqrt[p]{y})^n$ نسبت به x و y گونا نیستند.

ازاین جهت که ما می‌باید بررسی خود درمورد بخشپذیری اعضای تصاعد (I) بر m را تا جملهٔ $\frac{m}{d}$ ام، ادامه دهیم لذا راحتر خواهد بودکه از بین فرجه‌های x و y آن‌را که کوچکتر است، m وآنکه بزرگتراست را p درنظر بگیریم.

حال اگر جملهٔ a ام $(a\leqslant\frac{m}{d})$ از تصاعد (I) بر m بخشپذیر باشد، تعداد جملات باقیمانده ازاین تصاعد (جملات بعداز جملهٔ a ام) برابر با $[\frac{n}{p}]+1-a$ است ولذا تعداد جملاتی از این جمله‌ها که بر m بخشپذیرند برابر است با $\left[\frac{[n/p]+1-a}{\frac{m}{d}}\right]$ که با محاسبه جملهٔ a ام، تعداد کل جملاتی که بر m بخشپذیرند برابر با $\left[\frac{[n/p]+1-a}{\frac{m}{d}}\right]+1$ است و بنابراین به‌طور خلاصه،

«دربسط دوجمله‌ای $(\sqrt[m]{x}+\sqrt[p]{y})^n$ $(m\leqslant p)$ تعداد جملات گویا برابر با $\left[\frac{[n/p]+1-a}{m/d}\right]+1$ است درصورتی‌که $(m,p)=d$ و a اولین جمله از تصاعد(I)است که بر m بخشپذیر می‌باشد.

جملهٔ اول این تصاعد، R یعنی باقیماندهٔ تقسیم n بر p و قدر نسبت آن p است».

لازم به توضیح است که دردوجمله‌ای $(\sqrt[m]{x}+\sqrt[p]{y})^n$ اگر x، توان m ام یا y توان p ام عددی بوده، آن‌را ساده‌کنیم، مثلا اگر داشته باشیم $(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{5})^8$ آن را به صورت $(2+\sqrt[3]{5})^8$ درنظر می‌گیریم و بنابراین $m=1$، $p=3$ و $n=8$.

مثال ۱. تعداد جملات گویا را دربسط $(\sqrt[m]{x}+\sqrt[p]{y})^n$ با شرط اینکه n مضرب صحیحی از mp باشد به‌دست آورید.

برای حل این‌مسأله گوئیم: چون n بر mp بخشپذیر است، n بر p نیز بخشپذیر خواهد بود وبنابراین $R=0$ وچون R اولین جملهٔ تصاعد (I) بر m بخشپذیر است درنتیجه $a=1$ و لذا تعداد جملات گویا

$\left[\frac{[n/p]+1-1}{m/d}\right]+1$ یا $\frac{n}{(p,m)}+1$ است.

مثال۲. تعداد جملات گویا را دربسط $(\sqrt[6]{x}+\sqrt[9]{y})^{103}$ به‌دست آورید.

حل

$$m=6,\ p=9,\ d=3,\ n=103$$

پس $R=3$ وتصاعد (I) عبارت است از

$$4\ ,\ 13\ ,\ \dots$$

چون تا $\frac{m}{d}=2$ جمله هیچ‌یك بر m بخشپذیر نبودند پس دربسط فوق جملهٔ گویا وجود ندارد.

مثال۳. تعداد جملات گویا را دربسط $(\sqrt[3]{5}+\sqrt[9]{3})^{63}$ پیدا کنید.

حل

$$m=3,\ p=9,\ d=3,\ n=63,\ R=0$$

پس

$$\left[\frac{[n/p]+1-a}{m/d}\right]+1=\left[\frac{7+2-1}{1}\right]+1=8$$

و $a=1$

# مسائل نهمین مسابقه ریاضی

## آزمون مرحله اول

# نهمین دورهٔ مسابقه ریاضی

## آزمون مرحلهٔ اول

**مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جستجو و کشف واقعیتها و حقیقتهاست.**

«امام خمینی قدس‌سرّه‌الشریف»

۱ــ ثابت کنید بی‌نهایت مثلث با مختصات صحیح وجود دارد که مساحت آنها کمترین مقدار ممکن (مثبت) باشد.

۲ــ همه اعداد طبیعی $a$، $b$، و $c$ بزرگتر از یک را بیابید که حاصلضرب هر دو عدد از آنها بعلاوه یک، مضرب سومی گردد.

۳ــ اگر برای تابع حقیقی غیرثابت $f$ داشته باشیم:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-2f(xy)$$

آنگاه $f(1370)$ را بدست آورید.

۴ــ خط $(L)$ دوخط $(m)$ و $(n)$ را به ترتیب درنقاط $A$ و $B$ قطع می‌کند. از نقطهٔ $P$ واقع بر $(L)$ خطی رسم کنید که $(m)$ و $(n)$ را به‌ترتیب درنقاط $A'$ و $B'$ قطع کند، بطوریکه: $\frac{AA'}{BB'}=K$ (بحث)

۵ــ اگر $x\geqslant y\geqslant z>0$ $(x, y, z\in R)$ ثابت کنید

$$\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\geqslant x^2+y^2+z^2$$

۶ــ ۵۵ عدد دلخواه از مجموعهٔ $A=\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ انتخاب می‌کنیم نشان دهید که همواره دو عدد بین اعداد انتخاب شده می‌توان یافت که تفاضل آنها ۱۰ باشد.

حل ۱. اگر $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ و $C(x_3,y_3)$ مختصات سه رأس مثلث باشند می‌دانیم مساحت مثلث $ABC$ برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

درنتیجه کمترین مقدارممکن مثبت $S$ عدد $\frac{1}{2}$ است.

حال نشان میدهیم بی‌نهایت مثلث بامختصات صحیح وجوددارد که مساحت آن $\frac{1}{2}$ است اگر قرار دهیم $A(m,n)$ و $(m,n)=1$ و $s,r$ اعداد طبیعی باشند که $m\cdot s-n\cdot r=1$ آنگاه با قرار دادن $B(r,s)$ مثلث $AOB$ دارای مساحت $\frac{1}{2}$ خواهد بود زیرا:

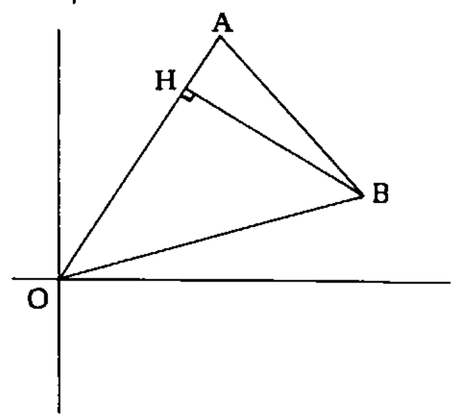
$$BH=\frac{|ms-nr|}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}\ ,$$

$$OA=\sqrt{m^2+n^2}$$

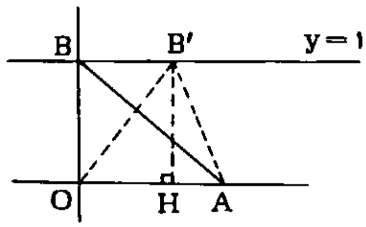
پس:

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot BH=\frac{1}{2}$$

درنتیجه برای هرزوج $(m,n)$ که $(m,n)=1$ باشد مثلثی با مختصات صحیح وجود داردکه مساحت آن $\frac{1}{2}$ است.




راه حل دوم ـ مثلث قائم‌الزاویه $AOB$ را که در آن $OA=OB=1$ و $A\hat{O}B=\pi/2$ را درنظر می‌گیریم. حال اگرروی خط $y=1$ نقاط باطـول صحیح را اختیارکنیم این نقاط با $O$ و $A$ مثلثهایی میسازندکه مساحت همه آنها $\frac{1}{2}$ است.




**حل ۲.**

$$(1)\begin{cases} a\cdot b+1=K\cdot c \\ a\cdot c+1=K'\cdot b \\ b\cdot c+1=K''\cdot a \end{cases}$$

$$(ab+1)(ac+1)(bc+1)=K\cdot K'\cdot K''\cdot a\cdot b\cdot c$$

$$m\cdot a\cdot b\cdot c+a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c+1=K\cdot K'\cdot K''\cdot a\cdot b\cdot c$$

$$ab+bc+ca+1=nabc$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{abc}=n$$

اگر $a>3$ و $b>3$ و $c>3$. آنگاه

$$\text{طرف اول}\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{64}<1$$

پس اقلا یکی ازعددها بایدکوچکتر یا مساوی ۳ باشد

مثلاً اگر $a=2$ ، آنگاه ،

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2bc}=n>0$$

اگر $b>4$ و $c>4$ باشد طرف‌اول‌کوچکتر از ۱می‌شود پس یکی از آنها کوچکتریا مساوی ۴ است مثلا $b\leqslant 4$ ضمناً ازروابط (۱) نتیجه می‌گیریم که، $a$ و $b$ و $c$ دوبدو نسبت به‌هم اولندپس $b=3$. و:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{c}+\frac{1}{6c}=n \implies \frac{7}{6c}=n-\frac{5}{6}$$

$c$ عدد ۷ را بشمارد پس $c=7$ ومجموعه $\{2,3,7\}$ به‌دست می‌آید

اگر $a=3$ را درنظر بگیریم

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{b}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3bc}=n>0$$

دراینجا اگر $b>4$ و $c>4$ باشد طرف اول، کوچکتر از ۱ می‌شود پس یکی‌ازآنهاکوچکتر یا مساوی ۴ است مثلا $b\leqslant 4$ است.

وچون a و b نسبت به‌هم اولند پس $b=2$ یا $b=4$ از $b=2$ مجدداً جواب قبلی به‌دست می‌آید واز $b=4$ داریم

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{c}+\frac{1}{12c}=n$$

پس

$$\frac{13}{12c}+\frac{7}{12}=n$$

چون $a=3$ و $b=4$ پس c باید نسبت به ۳و۲ اول باشد پس c حداقل مساوی ۵ است و با این فرض طرف اول تساوی کوچکتر از ۱ می‌شود که غیرممکن است پس تنها جواب مسأله $\{2,3,7\}$ است.

**حل ۳.** $f(a+b)=f(a)+f(b)-2f(a\cdot b)$

$$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)-2f(0)=0$$

پس $f(0)=0$.

$$f(n+1)=f(n)+f(1)-2f(n)=f(1)-f(n)$$

پس

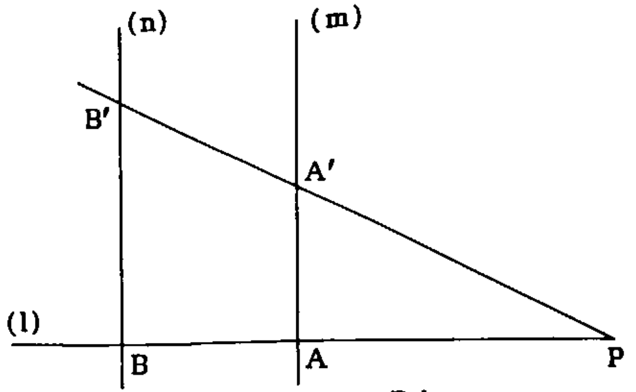
$$f(1)=f(1)$$
$$f(2)=f(1)-f(1)=0$$
$$f(3)=f(1)-f(2)=f(1)$$
$$f(4)=f(1)-f(3)=0$$
$$f(2n)=0\ ,\ f(2n+1)=f(1)$$

با استقراء،

$$f(1)=f(1)\ ,\ f(2)=0$$
$$f(2n)=0\ ,\ f(2n+1)=f(1)$$
$$f(2n+2)=f(1)-f(2n+1)=f(1)-f(1)=0$$
$$f(2n+3)=f(1)-f(2n+2)=f(1)-0=f(1)$$

پس $f(2n)=0$ درنتیجه: $f(1370)=0$

**حل ۴.** واضح است اگر $(m)\|(n)$ باشد آنگاه مسأله وقتی دارای جواب است که $K=\frac{PA}{PB}$ در این‌حالت هر خطی‌که از P بگذرد و (m) و (n) را قطع‌کند جواب مسأله است.




درحالتی‌که $K\neq\frac{PA}{PB}$ مسأله جواب ندارد.

حال فرض می‌کنیم که (m) و (n) متقاطع باشند

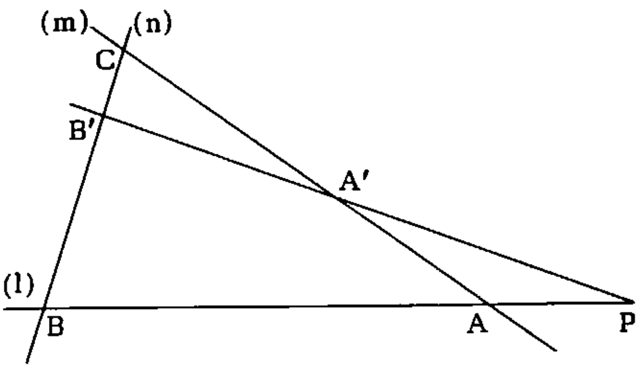
$$(m)\cap(n)=\{c\}$$

درمثلث ABC بنا به‌قضیه منلائوس داریم:

$$\frac{A'A}{A'C}\times\frac{B'C}{B'B}\times\frac{PB}{PA}=1$$

ویا:

$$\frac{B'C}{A'C}=\frac{PA}{PB}\times\frac{1}{K}=K'$$




پس کافی است نقاط B″ و A″ را بترتیب روی CB و CA به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که $\frac{B''C}{A''C}=K'$ باشد و آنگاه از P خطی به‌موازات A″B″ رسم کنیم و در این حالت مسأله یك جواب دارد.

**حل ۵.** باید ثابت کنیم:

$$x^2\left(\frac{y}{z}-1\right)+y^2\left(\frac{z}{x}-1\right)+z^2\left(\frac{x}{y}-1\right)>0$$

اگر $a=\frac{y}{z}-1$ ، $b=\frac{z}{x}-1$ ، $c=\frac{x}{y}-1$ داریم

$$a+b+c\geqslant 0$$

حال ثابت می‌کنیم

$$ax^2+by^2+cz^2\geqslant 0$$

چون $c \geqslant -a-b$ بنابراین

$$ax^2+by^2+cz^2 \geqslant ax^2+by^2-az^2-bz^2$$

حال نشان می‌دهیم

$$ax^2+by^2=az^2-bz^2 \geqslant 0$$

$$a(x^2-z^2)+b(y^2-z^2) \geqslant 0$$

$$\frac{y-z}{z}\cdot(x^2-z^2)+\frac{z-x}{x}(y^2-z^2) \geqslant 0$$

$$\frac{x+z}{z}-\frac{y+z}{x} \geqslant 0$$

چون $x+z \geqslant y+z$ و $\frac{1}{z} \geqslant \frac{1}{x}$ بنابراین:

$$\frac{x+z}{z} \geqslant \frac{y+z}{x}$$

یعنی $\frac{x+z}{z}-\frac{y+z}{x} \geqslant 0$ پس

$$ax^2+by^2+cz^2 \geqslant 0$$

حل ۶. اگر در مجموعه

$$\{a, a+1, \dots, a+2n-1\}$$

$n+1$ عدد انتخاب کنیم تفاضل دوتای آنها $n$ است. زوج‌های زیر را در نظر می‌گیریم

$$(a, a+n), (a+1, a+n+1), \dots, (a+n-1, a+2n-1)$$

و اصل لانه کبوتری را به‌کار می‌بریم

حال اعداد از ۱ تا ۱۰۰ را به ۵ دسته زیر تقسیم می‌کنیم:

{۱,۲,...,۲۰} و {۲۱,۲۲,...,۴۰} و {۴۱,۴۲,...,۶۰}

{۶۱,۶۲,...,۸۰} و {۸۱,۸۲,...,۱۰۰}

واضح است که ازمیان ۵۵ عدد باید یازده‌تای آنها از یکی از این دسته‌ها انتخاب شوند و با آنچه که در بالا گفتم اثبات تمام است.

## خوانندگانی که حل مسائل شماره ۲۹ را برای مجله فرستاده‌اند

آقای آرش طبیبی آذر، دانش‌آموز، تبریز ۷-۸-۹-۱۰

آقای حسین رحامی، دانش‌آموز، اراك ۸

آقای جعفرقلی وندان، دانش‌آموز، میاندوآب ۹

آقای محمدحسن نخل‌کار، دیپلمه، رشت ۸

آقای بهنام قلیچ‌خانی، دانش‌آموز، تهران ۳-۷-۸

آقایان داریوش سعیدکیا واحمدرضا شیرزاد، دانشجو، تهران ۱-۳-۶-۸-۹-۱۰

آقای حسین‌رحامی، دانش‌آموز، اراك ۷

آقای رضا آقایان، دانش‌آموز، فریدون‌کنار ۱-۶-۸-۹-۱۰

آقای سیروس زمانی، دانش‌آموز، شیراز ۳-۵-۷-۸-۹

آقای بهرام رسولیان، دانش‌آموز، بروجرد ۸

آقای رضا نوری، دانش‌آموز، تهران ۳-۴-۵-۶-۷-۹-۱۰

آقای محسن سالاری، دانش‌آموز، تهران ۶-۷-۸-۹

آقای بهروز امینی، دانش‌آموز، کاشان ۸

آقای شهرام حسین‌زاده، معالی‌آباد ۴-۹-۱۰

خانم منیره صدقی، تبریز ۷-۸

آقای فرشید دلگشا، تهران ۷-۸-۹

آقای جعفرقزوینی، دانش‌آموز، مرند ۸

خانم رؤیا بهشتی، دانش‌آموز، تهران ۳

آقای وحیدرشدی، دانش‌آموز، تبریز ۸

آقایان حمیدرضا غفاریان جم و عباس گلمکانی دانش‌آموزان مشهد ۱-۲-۳-۴-۶-۷-۸-۹

آقای وحید عبدالکریمی، دیپلمه، شهرری ۱-۸-۹

آقای پویا ولی‌زاده، دانش‌آموز، کرج ۹

آقای آیدین پیرزه، دانش‌آموز، تبریز ۳-۹-۱۰

آقای علی‌اکبر جاوید مهر، دبیردبیرستانهای ساوه ۴-۵-۸-۹

خانم مریم میرزاخانی، دانش‌آموز مدرسه فرزانگان ۳-۴-۷-۸-۹-۱۰

آقای امیرصادقی، تهران ۱-۲-۴-۶-۷-۸-۹-۱۰

آقای بابك نیکنام، دیپلمه، اردبیل ۱-۲-۹

# پاسخ به نامه‌ها

**آقای شهرام جاوید نیا، دانش‌آموز کلاس دوم ریاضی، اصفهان**

اگر تابعی مشتقپذیر باشد، پیوسته است. واین معادل این است که اگر تابعی پیوسته نباشد مشتقپذیر نیست. بنابراین، چون متغیرهای $x^n+y^n=z^n$ در مجموعه اعداد طبیعی ناپیوسته است، مشتقات جزئی آن بی‌معنی است، واصولا، ارتباطی بین ریشه‌های آن، و مشتقات جزئی که $n-1>2$ وجود ندارد.

**آقای مهدی حسینی، دانشجو، بیرجند**

رابطه $U_n^2+U_{n+1}^2=U_{2n+1}$ ، در مورد دنباله فیبوناتچی، را می‌توان به‌استقراء ثابت‌کرد و شما می‌توانیداز روابط دیگری‌که در صفحه ۲۸۱ ، آنالیز ریاضی، جلداول تألیف دکترغلامحسین مصاحب، آمده است استفاده نمائید.

**آقای یحیی ملائی، دانشجو، تبریز**

مطالب ارسالی شما، درمورد جزء صحیح، دارای بعضی نکات آموزشی مثبت است، ولی، به‌علت اینکه قبلا، در بعضی از شماره‌های رشد ریاضی مقاله‌هایی در این زمینه چاپ شده است ازچاپ مقاله شما معذوریم.

**آقای پیمان رسولزاده، تبریز**

درمورد شگفتیهای‌اعداد، مطالب زیادی‌دریافت‌نموده‌ایم که همگی بدون برهان‌است. بهتربود برای این نوع آن‌برهانی ارائه می‌شد. تا جمله عمومی چنین اعدادی به‌دست آمد. ما در اینجا به‌درج یکی از شگفتیهای عددی ارسالی شما اکتفا می‌کنیم.

$$1^3=1$$

$$2^3=3+5$$

$$3^3=7+9+11$$

$$4^3=13+15+17+19$$

$$5^3=21+23+25+47+29$$

**آقای بهرام پرویزی، دانش‌آموز، تبریز**

با تشکر ازشما، از مسایل ارسالی‌تان درصورت نیاز استفاده خواهیم کرد.

**آقای محمدصادق مددی، دانش‌آموز، خلخال**

مطلب شمارا درباره محیط بیضی جدی نگرفتیم، چون بارها نوشته‌ایم‌که ثابت شده است (متوجه هستید ثابت شده است) فرمولی برای محاسبه دقیق بیضی وجود ندارد. درمورد اعداد فیثاغورثی، نیمی از مطالب صحیح بود و نیمی دیگر سئوال برانگیز!

**آقای آیدین بیرزه، دانش‌آموز، تبریز**

کافیست معادله را به‌صورت $2^{1+tg^2x}+2^{2tg^2x}=80$ بنویسید و با قراردادن $t=2^{tg^2x}$ معادله درجه دوم را حل کنید.

**آقای روزبه فلاح رمضانی، دانش‌آموز، قزوین**

ضمن تشکر ازابراز قدردانی شما ازاعضای هیئت‌تحریریه مجله، راه حل‌شما برای مسئله‌ای‌که طرح‌کرده‌اید درست‌است. جواب دوم ریشه خارجی مسئله است‌که به‌خاطر مجذورکردن طرفین معادله اصلی به‌دست می‌آید.

**آقای محمد موحدیان، دانشجو، اصفهان**

۱) مسئله ۱ رابطه معروف تابع بتا وگاما است‌که مثلا در قضیه ۸. صفحه ۲۰ کتاب اصول آنالیز ریاضی، تألیف والتررودین‌ترجمه علی‌اکبر عالمزاده آمده‌است.

۲) مسئله ۲ را می‌توان باتغیر متغیر $y=\pi-x$ حل کرد.

۳) مسئله ۳ دریکی ازشماره‌های رشد حل شده است.

**آقای شهرام مولایی، دانش‌آموز، تهران**

مطالب شماراجع به‌مثلثات درست است، اما چندان کار ساز نیست. تعریف هرچه ساده‌تر باشد، بهتراست وتعریف‌کتاب جامع‌تر وکارسازتراست. درمورد مسئله دوم، توصیه می‌کنیم دسته‌های هم‌ارزی را مطالعه‌کنید، خواهید دیدکه هر مضرب۳ یك عنصرخنثی برای اعداد مورد نظر شما است. مطالب دیگر را به‌رشد معارف اسلامی بفرستید.

**آقایان آرش یاوری ومجید نزهتی، بندرعباس وسمنان**

از دقت شما نسبت به‌مطالب مجله صمیمانه سپاسگزاریم امیدواریم زیرنگاههای تیزبین خوانندگان عزیزهمچون شما، مجله ازاشتباهات چاپی بری گردد

**آقایان : نــادر جبارزاده، دانشجو، از سلماس. میرابوطالب گلباغی، رشت. کافیه کیومرثی، دانش‌آموز، شهرکرد.**

ضمن تشکــر از ابراز علاقه شما نسبت به‌مطالب مجله ، یادآوری می‌کنیم که حل مسائل ویژه دانش آموزان را برای مجله نفرستید.

**آقای قربانعلی علیشاهی، دانش‌آموز، مازندران**

برای اثبات رابطهٔ

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱} \leqslant \sin^{۲n}x + \cos^{۲n} \leqslant ۱$$

یادآوری می‌کنیم‌که همواره داریم

$$\left(\frac{x+y}{۲}\right)^n \leqslant \frac{x^n+y^n}{۲}$$

$$\sin^{۲n}x+\cos^{۲n}x \geqslant \left(\frac{\sin^۲x+\cos^۲x}{۲}\right)^n$$

$$= ۲ \times \frac{۱}{۲^n} = \frac{۱}{۲^{n-۱}}$$

همچنین

$$\left.\begin{array}{l}\sin^{۲n}x \leqslant \sin^۲x \\ \cos^{۲n}x \leqslant \cos^۲x\end{array}\right. \Longrightarrow \sin^{۲n}x\cos^{۲n}x \leqslant ۱$$

با استفاده ازهمین فرمول ماکزیمم ومی‌نیمم

$$\sin^۸x+\cos^۸x=(\sin^۲x)^۴+(\cos^۲x)^۲$$

را به‌راحتی می‌توان محاسبه‌کرد.

**آقای شاپــور خاکسار سال سوم ریاضی، چهارمحال بختیاری، شهرستان بروجن**

پیشنهاد شما در مورد درج مطالب ونکات بنیادی‌که در حل مسائل مفید است مــورد توجه ما است بسیاری از مقالات براین‌اساس تنظیم می‌شود. درمورد درج تست درمجله، متذکر می‌شویم کــه اکثرمسائل ویژه دانش آمــوز قالب تستی‌دارد و چون سازمان سنجش وزارت فرهنگ وآموزش عالی‌خود در مجله راه دانشگاه به‌انتشارتست کنکور اقدام می‌کند، درج آن درمجله رشد تکرار مطالب است.

**آقای علیرضا تیموری ، دانشجوی تربیت معلم شهید باهنر، اصفهان**

فــرم اشتراك مجله درصفحات آخرآن درج شده‌است و شما می‌توانید بامطالعه‌آن، وتکمیل فرم مربــوطه، وارسال‌آن مرکز توزیع انتشارات کمك‌آمــوزشی مجلات درخواستی را دریافت‌دارید. درضمن، فهرستی‌ازکتابفروشیها، وفروشگاههای معتبرمطبوعاتی،که مجلات رشد را عرضه مــی‌کنند درصفحات پایانی مجله آگهی شده است.

**آقای بابك وکیل امینی، دانشجوی رشته الکترونیك، تهران**

قضیه مقدارمیانگین‌کوشی یکی ازقضایای بنیادی مبحث مشتق است و کاربــرد آن درآنالیز بسیار وسیع‌است. اگــر اطلاعات بیشتری در مورد این قضیه ونتایج و کاربــرد آن می‌خواهید مــی‌توانید به‌مقالهٔ شیوهٔ هندسی درقاعده هوپیتال، شماره مسلسل۳۰، تابستان ۱۳۷۰، مجله رشدآموزش ریاضی، مراجعه نمائید. درضمن، مسائل ارسالی شما نادرست بــود و برای هریك مثال نقض ارائه‌گردید وچــون دومین نامه شما به نادرستی مسائل اشاره شده بود ازذکرآن می‌گذریم.

**آقای رضا رفیعی راد ، دانش آموز چهارم ریاضی فیزیك ، تنکابن**

نگرانی شماازاینکه‌بسیاری مواقع جهت‌ارزشیابی سطح آگاهی‌علمی دانش‌آموزان، ازروش تست چهارجوابی استفاده می‌شود، بجا است، زیرا در روش تست تنها حق انتخاب یکی ازچهارگزینه را داوطلب دارد، بدون‌آنکه برای انتخاب‌خود مجبوربه‌ارائه دلیل درستی باشد. اما، دربسیاری مواقع‌بخاطر تعداد زیاد داوطلبان، وکمی وقت، راهی جزاین روش وجود ندارد.

**آقای علی‌کوشکی، دانش‌آموز سال سوم، سبزوار**

برهان نامساوی شما درست است. این نامساویهای مهم ریاضی است‌که موسوم به نامساوی کوشی شوارتز است. این نامساوی نتیجه ساده اتحادلاگرانژ است‌که صورت این اتحاد چنین است:

به‌ازای همه اعداد حقیقی $a_i$ و $b_i$ ،

$$\left(\sum_{k=۱}^{n}a_Kb_K\right)^۲=\left(\sum_{K=۱}^{n}a_K{}^۲\right)\left(\sum_{k=۱}^{n}b_k^۲\right)-\sum_{۱\leqslant k<y\leqslant n}(a_kb_y-a_yb_k)^۲$$

# پاسخ به نامه‌ها

**آقای علیرضا عین‌الهی، دبیر، بندرلنگه**

ضمن تشکر از نامه محبت‌آمیز شما، به‌اطلاع می‌رساند که درج جدول درمجله رشد ولو به‌صورتی‌که شما بازحمت زیاد تنظیم کرده‌اید، روال‌کارما نیست. امیدوارم مطالب بهتری را برای مابفرستید.

**آقای محمد سلیمان نژاد، دانش‌آموز، اصفهان**

باتشکر ازشما مسایل ارسالی شمارا دریافت‌کردیم، در انتظاردریافت مسایل بهترازشما هستیم.

**آقای علی سبحان، دانش‌آموز، تهران**

ضمن تشکرازشما، ازمسایل ارسالی‌تان به‌موقع استفاده خواهیم کرد.

**خانم منیره صدقی، تبریز**

از اینکه اسم شمارا درمسائل شماره ۲۵ مجلهٔ اشتباهاً صدیقی درج‌کرده‌ایم پوزش می‌خواهیم.

**آقای عباس نجاتی، دانش‌آموز، مرند**

ازمسایل ارسالی‌تان صمیمانه تشکرمی‌کنیم. به‌موقع از آنها استفاده خواهیم‌کرد. حل مسایل برای مجله مقدور است، اما جواب سئوال سوم شما منفی می‌باشد. (برای اعداد اول فرمول‌کلی پیدا نشده‌است.)

**آقای یزدان باوقا طوسی، مشهد**

حل مسایل ویژهٔ دانش آموزان را برای مجله نفرستید. باتشکر ازمسایل ارسالی‌تان، درصورت نیاز ازآنها استفاده خواهیم‌کرد.

**آقای عباس نجاتی، دانش‌آموز، مرند**

ازمسائل ارسالی شما به‌موقع استفاده خواهیم‌کرد.

**آقایان عباس‌گلمکانی، حمیدرضا غفاریان جم، مشهد**

باتشکر ازشما، مسایل ارسالی‌تان را دریافت‌کردیم. به‌موقع ازآنها استفاده خواهیم‌کرد.

**آقای حسین محمدی، دانشجوی رشته ریاضی دانشگاه شهید باهنر، کرمان**

ازارسال مسائل المپیاد امریکا متشکریم. البته، کتابی که شما مسائل‌را ازآن استخراج نموده‌اید، دراختیار داریم و اکثرمسایل از این‌نوع را به‌صورتی درمجله درج نموده‌ایم. درصورت امکان، اگرمسائل جدیدی در اختیار دارید، ارسال آن موجب خوشنودی ما خواهدشد. درضمن، اگر توان ترجمه یك متن انگلیسی را دارید، بهتراست مقالاتی درسطح‌کتابهای دبیرستان ازمجلات خارجی اختیارکرده، پس از ترجمه، آن را برایمان ارسال دارید، که درصورت مناسب بودن، در مجله درج خواهد شد.

**آقای عیسی عباس، دانش‌آموز، تبریز**

علاقه شمانسبت به‌محتوای مقالات رشد موجب دلگرمی ماست. امید آن داریم‌که با ارائه مقالات مناسب درسطح دبیرستان، خوانندگان‌خود را راضی‌نگهداریم. درضمن چندین مسئله برای ما ارسال داشته و تقاضای کتابی نموده‌ایدکه چنین مسائلی را حل‌کرده باشد. متأسفانه ما چنین کتابی‌را سراغ نداریم وتنها توصیه‌ما به‌شما این است‌که توان خودرا در حل مسائل تقویت‌کنید به‌گونه‌ای که نیازی به‌کتابهای حل‌المسائل نداشته باشید. همچنین، تساوی $\frac{p!}{q!} = !\left(\frac{p}{q}\right)$ درست نیست، درسطح‌مقدماتی، قلمروی تابع فاکتوریل مجموعه اعدادصحیح نامنفی است و این‌تابع به‌استقراء چنین تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n(n-1)! \qquad (n \geqslant 1) \end{cases}$$

**آقای مجید جلالی، دانشجوی رشته فیزیك، اصفهان**

مسائل ارسالی شمارا دربخش مسائل مورد استفاده‌قرار خواهیم داد. برای اینکه خوانندگان دانش‌آموز ما از مسائل ارسالی شما بهره‌ای برده باشند یکی از آنها را در اینجا می‌آوریم.

مسئله ـ عبارت $x^{10}+x^5+1$ و $x^8+x^4+1$ را تجزیه کنید.

**آقای شهرام تنگستانی زاده، دانش‌آموز، تهران**

پاسخ به‌سئوالات متنوع شما موقعی امکان پذیر است‌که

جواب آن بعدآموزشی داشته و برای اکثرخوانندگان جالب باشد. البته، بعضی ازسئوالات شما ساده‌است، و باکمی دقت، توان‌پاسخ به‌آنهاراپیدا خواهیدکرد. مثلا $\sin 3^\circ$ را برحسب عبارتهای رادیکالی نوشته‌ایدکه صحت آن برای ماموردتردید است. اگرمی‌خواهید سینوس یك درجه را برحسب عبارت رادیکالی بنویسیدکافی است که از بسط $\sin 3x$ استفاده کنید.

دراینجا به‌دوسؤال دیگر شما می‌پردازیم؛ که یکی را جواب داده و دیگری را به‌عهده خوانندگان می‌گذاریم

سؤال: درهندسه مسطحه ثابت می‌شودکه هرچند ضلعی نامشخص را می‌توان باتعداد محدودی برش به‌چند ضلعی‌دیگر (مثلا، مربع)تبدیل کرد. آیا درهندسه فضایی هم می‌توان‌حجمی را با تعدادی صفحه چنان قطع کرد که حاصل حجم منتظمی باشد.

جواب مثبت است. آنهائی که آشنایی با مقدمات توپولوژی‌دارند می‌دانندکه هرحجم‌درفضا رامی‌توان باتعدادی از احجام منظم پرکرد. بنابراین، هر حجم در فضا را می‌توان بابرشهائی به‌یك حجم منتظم تبدیل نمود.

سؤال : درجبرداریم:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{2}\right]=\left[\frac{n^2}{4}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{3}\right]=\left[\frac{n(n-1)}{6}\right]$$

آیا فرمول‌کلی برای محاسبه

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{m}\right]$$

که $m\in N$ ، وجود دارد.

جواب. به‌استقراء احکام فوق‌را می‌توان ثابت‌کرد. اما ما رابطه‌ای بین این‌دو حاصلجمع نیافتیم تا حالت‌کلی‌راحدس بزنیم. اگر خواننده‌ای قادر به پاسخگویی این سؤال باشد، جواب‌آن را برایمان ارسال‌کندتا بنام خودش در مجله درج شود.

**آقای مهرداد شعاری، دیپلم، تبریز**

چون مطلب‌ارسالی شما دارای بعدآموزش ریاضی‌است، عیناً به‌درج آن اقدام می‌کنیم.

یك‌پارادوکس : معادله درجه $n$ ، با ضرایب حقیقی ، موجود است‌که $n+1$ ریشه حقیقی دارد،

این معادله را مرحله به مرحله به‌صورت ذیل تعریف می‌کنیم:

فرض‌کنیدکه $a\neq b$ . معادله درجه‌اول،

$$\frac{x-a}{b-a}+\frac{x-b}{a-b}-1=0$$

دارای دو ریشه حقیقی a و b است. معادله درجه دوم،

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}-1=0$$

دارای سه‌ریشه حقیقی c ، b ، a (که دوبدو متمایزاند) است. به‌همین ترتیب می‌توان معادله درجه سوم، چهارم، ... ، $n$ام را ساخت.

توضیح هریك از عبارتهای فوق، پس از خلاصه کردن، یك اتحاد ومستقل از $x$ است واین موجب تناقض در قضیه اساسی جبر، که «هرمعادله از درجه $n$ حداکثر $n$ ریشه‌حقیقی دارد» ، می‌شود.

**آقای مرتضی بسطامی، دانش‌آموز سال سوم، بیجارکردستان**

باتوجه به‌پایه تحصیلی شما، مطالبی که ارسال داشته‌اید قابل توجه است ولی نگارش‌آن مناسب نیست. بهتر است به‌جای بررسی چندین موضوع تنها به‌بیان یك‌موضوع اکتفا می‌کردید وآن‌را به‌صورت مرتب، وخوانا و یك خط درمیان، می‌نوشتید تا بررسی دقیق‌آن ممکن‌گردد.

**آقای رضا صداقت ، دانشجوی رشتهٔ ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد**

پیداکردن اعداد اول، به‌صورتی‌که پیشنهادکرده‌اید،کار پرزحمتی‌است واصولا اثبات یك‌حکم با ارائه مثال امکان‌پذیر نیست. ما حکمی‌راکه بامثال عددی بیان‌کردید. به‌صورت ذیل تعمیم داده‌ایم:

مسئله. فرض‌کنید $P_1=2$ ، $P_2=3$ ، ... ، و $P_n$ ، $n$مین عدد اول باشد که به‌دو مجموعه A و B افراز شده باشند و

$$a=|\Pi P\pm\Pi P|$$

اگر $a\leqslant P_n^2$ آنگاه a عدد اول است. آیا با تغییرافراز A و B می‌توان‌کلیه اعداد اول نابیشتراز $P_n^2$ را به‌دست آورد.

# اطلاعیه

## دربارهٔ نشریات رشد آموزش تخصصی

مجلات رشد آموزش مواد درسی مدارس کشور که به منظور ارتقاء سطح دانش معلمان و ایجاد ارتباط متقابل میان صاحبنظران، معلمان و دانشجویان با برنامه‌ریزان امور درسی از سوی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کُتب درسی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش هر سه ماه یکبار ــ چهار شماره در سال ــ منتشر می‌شود و در حال حاضر عبارتند از:

۱ ــ آموزش ریاضی ۳۲
۲ ــ آموزش شیمی ۲۹
۳ ــ آموزش جغرافیا ۲۷
۴ ــ آموزش ادب فارسی ۲۷
۵ ــ آموزش زیست‌شناسی ۲۶
۶ ــ آموزش زبان ۲۹
۷ ــ آموزش زمین‌شناسی ۲۴
۸ ــ آموزش فیزیک ۲۷
۹ ــ آموزش معارف اسلامی ۱۵
۱۰ ــ آموزش علوم اجتماعی ۱۰

دبیران، دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر علاقمندان به اشتراک این مجلاّت می‌توانند جهت دریافت چهار مجلّه درسال مبلغ ۸۰۰ ریال به‌حساب ۹۰۰۵۷ نزدبانک ملّی شعبه‌خردمند جنوبی ـ قابل‌پرداختدرکلیهٔ شعب‌بانک ملّی ـ واریز و فیش آن را همراه با فرم تکمیل شده زیر به نشانی تهران، جادّه آبعلی، خیابان سازمان آب بیست‌متری خورشید مرکز توزیع انتشارات کمک آموزشی کدپستی ۱۶۵۹۸ ــ تلفن ۷۷۵۱۱۰ ــ ارسال دارند. ضمناً: معلمان، کارشناسان، مدیران، پژوهشگران و سایر علاقمندان به امور تعلیم و تربیت جهت آگاهی بیشتر از یافته‌های صاحبنظران می‌توانند با پرداخت مبلغ ۸۰۰ ریال در هر سال ۴ جلد **فصلنامه تعلیم و تربیت** دریافت نمایند.

مجلات‌رشدتخصصی‌در مراکز استان در کتابفروشیهای زیر و سایر شهرستانها در فروشگاههای معتبرمطبوعات‌بصورت فروش‌آزادعرضه‌می‌شود

| | |
|---|---|
| تهران: | انتشارات مدرسه ــ اوّل خیابان ایرانشهر شمالی |
| اهواز: | کتابفروشی ایرانبور زیتون کارمندی خیابان کمیل بین زاویه و زهره پلاک ۲۰ |
| اصفهان: | کتابفروشی مهرگان چهار باغ ابتدای سید علی خان |
| ارومیه: | کتابفروشی زینالپور نمایندگی و خبرنگاری روزنامه |
| اراک: | کتابفروشی گنج دانش بازارچه امیرکبیر |
| بندرعباس: | کتابفروشی مالوک خیابان سید جمال الدین اسدآبادی |
| باختران: | کتابفروشی دانشمند خیابان مدرس مقابل پارکینگ شهرداری |
| خرم‌آباد: | کتابفروشی آسیا خیابان شهدا شرقی |
| رشت: | کتابفروشی فرهنگستان خیابان نامجو جنب دانشگاه |
| زنجان: | کتابفروشی شهید بهشتی خیابان آیتا... طالقانی |
| سنندج: | کتابفروشی شهریار خیابان فردوسی |
| ساری: | شرکت ملزومات و معارف خیابان انقلاب روبروی اداره برق داخل کوچه . |
| شیراز: | پیام قرآن میدان شهدا جنب اداره آموزش و پرورش مرکز فرهنگی |
| کرمان: | فرهنگ‌سرای زمین پارک مطهری |
| مشهد: | انتشارات آستان قدس رضوی خیابان امام خمینی روبروی باغ ملی |
| یاسوج: | کتابفروشی فرهنگ جنب سینما دنا خیابان شهید هرمزپور. |

* دانشجویان مرکز تربیت معلم می‌توانند با ارسال فتوکپی کارت تحصیلی خود از ۵۰٪ تخفیف برخوردار شوند.

---

### فرم اشتراک مجلات رشد تخصصی

اینجانب ............ با ارسال فیش واریز مبلغ ۸۰۰ ریال، متقاضی اشتراک یکسالهٔ مجلهٔ رشد آموزش ............ هستم.

نشانی دقیق متقاضی: استان ............ شهرستان ............ خیابان ............

کوچهٔ ............ پلاک ............ کُدپستی ............ تلفن ............

بسم‌الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یکبار از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی منتشر می‌شود هدف از انتشار این مجله اعتلای دانش ریاضی دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلّم است. علاوه بر این ایجاد ارتباط متقابل بین معلّمین ریاضی و دفتر برنامه‌ریزی، به‌منظور تبادل تجارب، ارائه روشهای جدید آموزش ریاضی، معرفی جنبه‌های تاریخی، فلسفی، کاربردی ریاضیات در سطح پیش دانشگاهی است. هیأت تحریریه از مشارکت و همکاری همهٔ علاقه‌مندان بویژه دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان در ارائه مقالاتی در زمینه‌های زیر استقبال می‌کند:

الف) آموزش ریاضی (طرح و بررسی آموزش ریاضی، بویژه آموزش ریاضی در دوره‌های پیش دانشگاهی).

ب) تاریخ ریاضی (مشتمل بر سیر تحول مفاهیم ریاضی، شرح و احوال ریاضیدانان و کارهای علمی آنها، بویژه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی).

ج) فلسفه ریاضی (تبیین مفاهیم ریاضی، ریاضیات چیست، بررسی مکاتب ریاضی، بررسی ارتباط تاریخ و فلسفه ریاضی).

ریاضی کاربردی (مشتمل بر مباحثی در زمینه‌های آنالیز عددی، کامپیوتر و برنامه‌ریزی، تحقیق در عملیات، آمار و احتمال).

د) سایر مباحث ریاضی (مشتمل بر مقالات مختلفی در زمینه‌های مختلف، ارائه راه‌حلهای مختلف برای مباحث ریاضی، ارائه مسائل نمونه).

رعایت نکات زیر در مورد مقالات ارسالی ضروری است:

۱) مقالات ارسالی باید در چهارچوب اهداف فوق و با سبکی مشابه با سبک مقالات چاپ شده در رشد ریاضی باشد و در سطحی عرضه شوند که ضمن داشتن محتوی مطلوب دارای کیفیت عرضه مطلوب هم باشند؛

۲) مقالات باید با خط خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) و به صورت یک سطر در میان و با در نظر گرفتن جای کافی در حاشیه تهیه شود و صفحات به طور دقیق شماره‌گذاری شود؛

۳) فهرست مراجع مقاله به طور کامل و در دو قسمت فارسی و خارجی و به ترتیب الفبایی و طبق استاندارد مقالات علمی درج شود؛

۴) مقالات ترجمه شده از زبانهای خارجی همراه با متن اصلی ارسال شود؛

۵) مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور به چاپ رسیده باشد؛

۶) رد یا قبول و حک و اصلاح و ویراستاری مقالات به عهدهٔ هیأت تحریریه است.

# نخستین کنفرانس آمار ایران

**۵ تا ۷ خرداد ۱۳۷۱**

دانشگاه صنعتی اصفهان

بهمکاری انجمن آمار ایران


ISFAHAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY