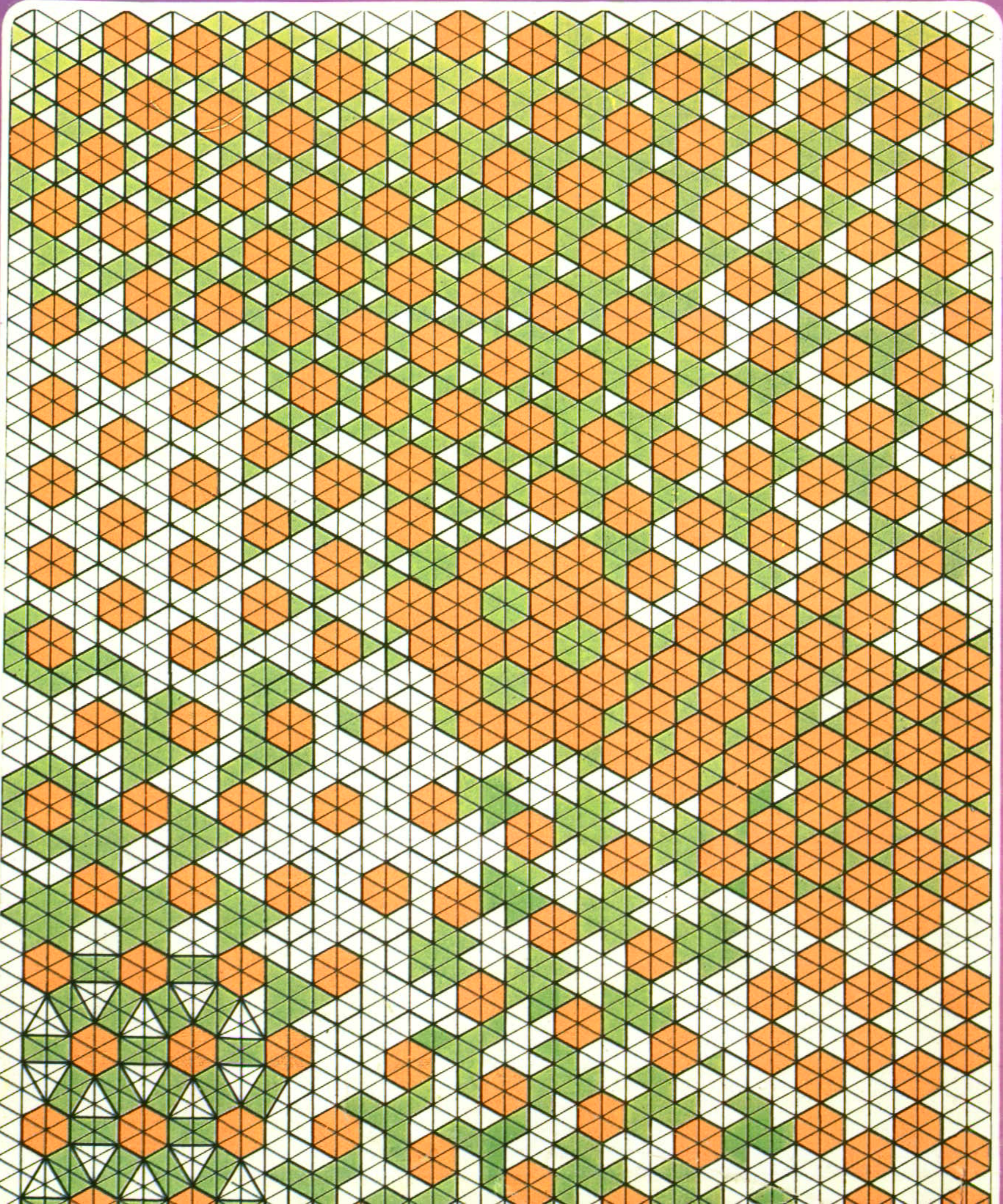
رشد آموزش ریاضی

سال هشتم ـ زمستان ۱۳۷۰ ـ شمارهٔ مسلسل ۳۲

بها: ۲۰۰ ریال



بسم‌الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یکبار از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی منتشر می‌شود هدف از انتشار این مجله اعتلای دانش ریاضی دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلّم است. علاوه بر این ایجاد ارتباط متقابل بین معلّمین ریاضی و دفتر برنامه‌ریزی، به‌منظور تبادل تجارب، ارائه روشهای جدید آموزش ریاضی، معرفی جنبه‌های تاریخی، فلسفی، کاربردی ریاضیات در سطح پیش دانشگاهی است.هیأت تحریریه از مشارکت و همکاری همهٔ علاقه‌مندان بویژه دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان در ارائه مقالاتی در زمینه‌های زیر استقبال می‌کند:

الف) آموزش ریاضی (طرح و بررسی آموزش ریاضی، بویژه آموزش ریاضی در دوره‌های پیش دانشگاهی).

ب) تاریخ ریاضی (مشتمل بر سیر تحول مفاهیم ریاضی، شرح و احوال ریاضیدانان و کارهای علمی آنها، بویژه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی).

ج) فلسفه ریاضی (تبیین مفاهیم ریاضی، ریاضیات چیست، بررسی مکاتب ریاضی، بررسی ارتباط تاریخ و فلسفه ریاضی).

ریاضی کاربردی (مشتمل بر مباحثی در زمینه‌های آنالیز عددی، کامپیوتر و برنامه‌ریزی، تحقیق در عملیات، آمار و احتمال).

د) سایر مباحث ریاضی (مشتمل بر مقالات مختلفی در زمینه‌های مختلف، ارائه راه‌حلهای مختلف برای مباحث ریاضی، ارائه مسائل نمونه).

رعایت نکات زیر در مورد مقالات ارسالی ضروری است:

۱) مقالات ارسالی باید در چهارچوب اهداف فوق و با سبکی مشابه با سبک مقالات چاپ شده در رشد ریاضی باشد و در سطحی عرضه شوند که ضمن داشتن محتوی مطلوب دارای کیفیت عرضه مطلوب هم باشند؛

۲) مقالات باید با خط خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) و به صورت یک سطر در میان و با در نظر گرفتن جای کافی در حاشیه تهیه شود و صفحات به طور دقیق شماره‌گذاری شود؛

۳) فهرست مراجع مقاله به طور کامل و در دو قسمت فارسی و خارجی و به ترتیب الفبایی و طبق استاندارد مقالات علمی درج شود؛

۴) مقالات ترجمه شده از زبانهای خارجی همراه با متن اصلی ارسال شود؛

۵) مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور به چاپ رسیده باشد؛

۶) رد یا قبول و حک و اصلاح و ویراستاری مقالات به عهدهٔ هیأت تحریریه است.

رشد آموزش ریاضی

سال هشتم ـ زمستان ۱۳۷۰ ـ شمارهٔ مسلسل ۳۲

نشریهٔ گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تلفن ۴ ـ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۴۹)

سردبیر: دکتر محمدحسن بیژن‌زاده

مدیر داخلی: میرزا جلیلی

مسوول هماهنگی و تولید: فتح‌ا... فروغی

صفحه‌آرا و رسام: محمد پریسای

دستیار ناظر چاپ: محمدکشمیری

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر دانش‌پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. جهت ارتقاء کیفی آن نظرات ارزنده خود را به صندوق پستی تهران ۳۶۳ ـ ۱۵۸۵۵ ارسال فرمائید.

فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

پیروزی اخیرتیم ریاضی جمهوری‌اسلامی درالمپیاد بین‌المللی موجب مسرت و خوشحالی همهٔ مسئولین آموزشی، بخصوص مسئولین محترم سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی شده است. لازم است بار دیگر این موفقیت شایان توجه را به دانش‌آموزان شرکت‌کننده، کمیته المپیاد ریاضی و دبیران ریاضی تبریك گفت. کسب مقام هشتم دراین المپیاد، بدون شك درسطح بین‌المللی نیز شایسته نخستین وتوجه بسیاری شده است.

با این وجود، پیرامون آماده‌سازی دانش‌آموزان و نحوهٔ انتخاب آنان نکاتی چند را یادآور می‌شویم؛ هرچند که مسئولین محترم کمیته ملی المپیاد ریاضی، خود به تجربه دریافته‌اند که مسائل آموزشی وپرورشی جامعه دانش‌آموزی را دراین روند نباید ازنظر دور داشت.

نخستین مسأله بزعم نگارنده، بعد آموزشی و روانی اینگونه مسابقات است. از آنجا که رسالت دستگاه آموزش و پرورش شکوفایی همه استعدادها وباروری همهٔ افراد درحد توان واستعداد بالقوهٔ آنان است نباید موفقیت چندین نفر ازنخبگان بر روند عام وفراگیر آموزش و پرورش تاثیرات منفی بگذارد. مسائل ریاضی مطروحه درالمپیادهای بین‌المللی مسائلی جالب بوده که درآن شیوه‌های حل مسأله و میزان تسلط برتکنیك‌ها و خلاقیت دانش‌آموزان به محک درمی‌آید. ازاین لحاظ، با توجه به محتوای

بقیه در صفحه ۲۷

روشهای استدلال

ریاضیات موضوعی است که در آن «برهان»وجود دارد. از نظر تاریخی، ابتدا برهان در کتابهای اقلیدس دیده شده است و میلیونها ساعت،درکلاس‌های مختلف، در کشورهای مختلف و نسلهای مختلف وقت صرف شده‌است (و هنوز می‌شود) تا قضایای اقلیدس را بارها و بارها اثبات کنند و به‌این ترتیب برهان در معرض دقت،قضاوت، انتقاد وارزشیابی مداوم عده‌ای‌جدید قرار گرفته است. تداوم این عمل موجب شده است، اشتباهات، ابهامات و سوء تفاهم‌ها روشنتر شوند و ازبین بروند. عده‌ای حتی پا را از این فراتر می‌گذارند و می‌گویند که ریاضیات منحصراً به‌وسیلهٔ برهان مشخص می‌شود. یادآوری این نکته لازم است که اولین برهان در تاریخ ریاضی به‌وسیلهٔ **تالس** (۶۰۰ پیش از میلاد) ارائه شده است؛ وی ثابت کرده است که هر قطر یك دایره آن را به دو قسمت برابر تقسیم می‌کند. حالا این حکم به‌قدری ساده است که بدیهی به‌نظر می‌رسد. **فرآیند برهان**، که به وسیله ریاضی‌دانان یونان باستان‌کشف گردیده و ترویج شده است، **در خدمت روشنگری، معتبرسازی و جلوگیری از لغزش در بحث است.** پس از واردشدن مفاهیم جدید ریاضی(که‌به‌نام ریاضیات جدید ذکر گردیده است) در برنامهٔ مدارس که در نیمه دوم قرن حاضر صورت گرفت، برهان که تا آن زمان ویژهٔ هندسه بود به‌سایر موضوعات کشیده شد.

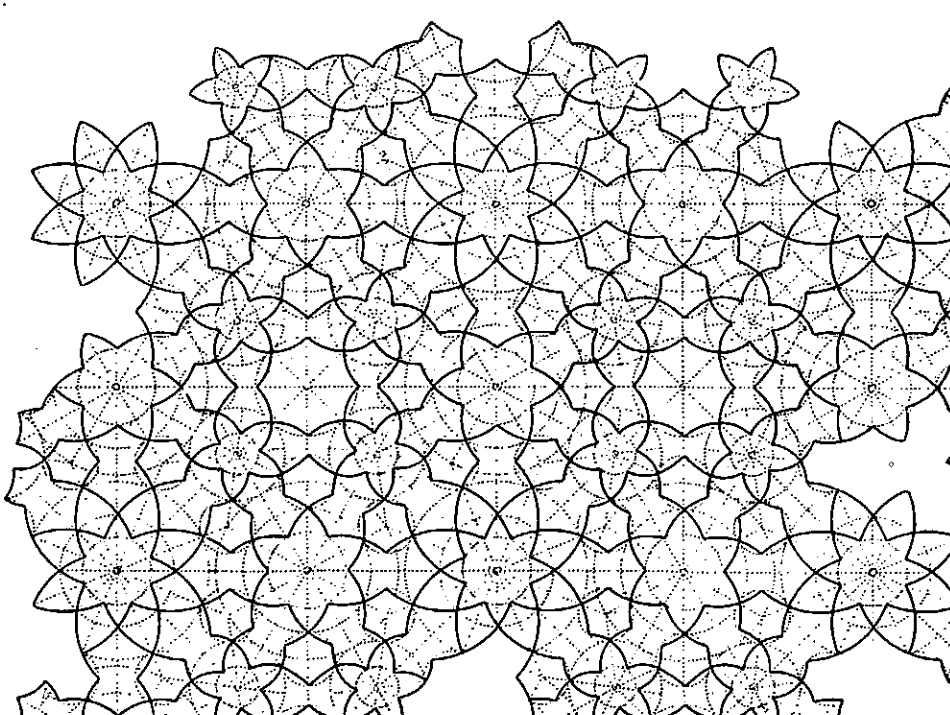
برهان‌ها هدفهای زیادی را همزمان انجام می‌دهد. برهان **مهر توانائی** است. برهان با آشکار کردن قلب موضوع **درك انسان را** بیشتر می‌کند. برهان ریاضیات **نوی** را پیشنهاد می‌نماید. برهان دانش‌آموز را به **آفرینش** مطالب جدید نزدیك می‌کند. برهان ولتاژ الکتریکی‌موضوع است که به قضایا و احکام **زندگی و توانائی** می‌بخشد. و بالاخره برهان **غذای لازم برای پرورش ذهن، مغز و تقویت منطق انسان است که وجه‌تمایز او با حیوانات می‌باشد.**

برهان متشکل است از مراحل مختلفی‌که ما را از داده‌ها و مفروضات به مجهول و حکم می‌رساند. **ابزار لازم** برای عبور از یك مرحله به مرحلهٔ دیگر **استدلال است.** دراین مقاله‌انواع استدلالها و نکات مثبت و منفی آنها را بررسی می‌کنیم و **بحث برهان و روشهای** آن را به‌آینده موکول می‌نماییم.

نقش ریاضیات در زندگی بشر و شناخت طبیعت

(قسمت چهارم)

دکتر دانش ناروئی



به‌طوری که می‌دانیم روشهای استدلال یا نتیجه‌گیری بسیاری در اختیار همهٔ مردم می‌باشد. ازبین این روش‌ها آنهائی که بیشتر به‌کار گرفته می‌شوند عبارتند از:

استدلال تمثیلی
استدلال استقرائی
استدلال قیاسی

استدلال تمثیلی عبارت است از **انتقال ذهن از شییء به شییء دیگر.** به عبارت ساده، اثبات حکم در مورد یك شییء به مناسبت شباهت آن به شییء دیگر. اساس این استدلال براین است که یك موقعیت مشابه که حکم در مورد آن صادق است پیدا نماییم و چنین استدلال کنیم‌که این حکم در مورد شییء مورد بحث نیزدرست است. مثلا، شخصی کاری تجارتی شروع می‌کند و در آن موفق می‌شود، دوست یا همسایه وی استدلال کند که اگر او نیز دست به چنین فعالیتی بزند حتماً موفق است! ملاحظه می‌نمایید که در این استدلال شخص باید قادر به پیدا کردن‌موقعیت مشابه برای اثبات حکمش باشد و خطرات ناشی از ندیده گرفتن اختلاف بین این دو مورد را نیز بپذیرد. با اینکه این روش استدلال از اطمینان کامل برخوردار نیست، بیشتر مردم عادی آن را به‌دلیل آنکه موارد مشابه به‌راحتی یافت می‌شوند به‌کار می‌گیرند..

استدلال استقرائی یکی دیگر از انواع استدلالهائی است‌که به‌کارگرفته می‌شود. پایهٔ این استدلال براین قرار دارد که انسان موارد تکراری از یك پدیده را ملاحظه می‌کند و از آن جا حکم می‌نماید که این پدیده همیشه رخ خواهد داد. مثلا، چون آزمایش‌مواد نشان می‌دهدکه‌آهن،مس، روغن، و... در اثر حرارت افزایش حجم پیدا می‌کنند، انسان از آنجا حکم کند که حجم هر ماده‌ای در مقابل حرارت زیاد می‌شود! همین‌طور، شخصی پس از بررسی تعداد زیادی پرنده حکم کندکه هر پرنده‌ای تخم‌گذار است! نتایج به دست آمده به‌وسیلهٔ این‌استدلال، بظاهر، از تضمین کامل برخوردار است، به ویژه وقتی که تعداد موارد آزمایش یا مشاهده زیاد باشد. اما حقیقت امر غیر از این است و **امکان خطا** وجود دارد. مثلا آب از حکم انبساط اجسام در اثر حرارت مستثنی است؛ زیرا به طوری که می‌دانیم آب هنگام حرارت از صفر به چهار درجه نه‌تنها منبسط نمی‌شود بلکه حجم آن نیز کاهش می‌یابد. همچنین حکم‌تخم‌گذاری پرندگان در مورد خفاش درست نیست.

متأسفانه بسیاری از **نتایج‌آماری در علوم تجربی و اجتماعی از این روش به‌دست می‌آیند.** به‌طوری که خواهیم دید **در استقراء ریاضی این روش به‌گونه‌ای اصلاح‌می‌شود که‌نتایج به‌دست آمده کاملا مطمئن است.**

در روش قیاسی استدلال را با **واقعیتهای مطمئن آغاز می‌کنیم و** به نتایجی می‌رسیم که **درستی آنها انکار ناپذیر است. این روش اساس‌استدلال ریاضی را تشکیل می‌دهد.** به کمك همین روش ریاضیات در تلاش برای **ساختن یك ساختار مطمئن و پایدار اندیشه از سایر رشته‌های دانش بشری موفق‌تر بوده است.**

هندسهٔ اقلیدس اولین نمونهٔ دستگاه قیاسی می‌باشد و الگوئی است برای تمام چنین سیستمهائی. برای روشن شدن استدلال قیاسی توجه شما را به ماجرای آشنا شدن توماس هابز (Thomas Habbes) (۱۶۷۹ـ۱۵۸۸) به هندسه جلب می‌کنیم. هابز در سن ۴۰ سالگی، به‌طور تصادفی، متوجه هندسه شد. جریان از این قرار بود که در کتابخانه‌ای چشم وی به صفحات یکی از کتابهای‌اقلیدس افتاد که‌در گوشه‌ای قرار داشت. وی صورت قضیه‌ای را که در یکی از صفحات آن نوشته شده بود خواند و با شگفتی **آن را غیرممکن دانست!** وی بیشتر کنجکاو شدوشروع به‌خواندن برهان آن قضیه کرد. در برهان اشاره به‌قضیهٔ دیگری شده بود. وی آن قضیه را نیز خواند که آن‌قضیه خود اشاره به‌قضیه‌ای‌دیگر داشت و این امر همچنان ادامه پیدا نمود. تا سرانجام به‌طور قاطع نسبت به‌درستی قضیهٔ اول قانع شد. این حادثه موجب گردید تا شیفتهٔ هندسه گردد. بازگشت **به‌قضایا و احکام** گذشته که برای **هابز** اتفاق **افتاد مشخصهٔ‌برهان‌به‌روش‌قیاسی** است و نمی‌تواند برای همیشه ادامه یابد. این بازگشتها با آنچه آنها را اصول موضوعه و حدود اولیه می‌نامیم متوقف می‌شود. در حالی که **تعاریف صرفا قراردادهای زبانی‌هستند، اصول موضوعه واقعیتها و حقایق آشکار و بدیهی** می‌باشند که برروی آنها کل سازهٔ برهان بنا می‌شود و به‌وسیلهٔ ابزار منطق به‌هم وصل می‌گردند. **در یك سیستم قیاسی،** وجود بعضی اشیاء را بدون تعریف می‌پذیریم (مانند نقطه، خط، صفحه و... در هندسه) و **آنها را حدود اولیه می‌نامیم** و راست بودن گزاره‌هائی که به‌نظر روشن بدیهی و بنیادی می‌آیند **بدون اثبات** می‌پذیریم. این گزاره‌ها **اصول موضوعه** یا احکام اولیه نامیده می‌شوند. پس از انتخاب حدود و احکام اولیه هرچیز دیگری را یا باید تعریف و یا به‌کمك آنها اثبات کنیم.

از عهد یونان باستان یعنی از زمانی که برای اولین‌بار به قدرت ریاضیات در کشف دانش جدید دربارهٔ جهان هستی پی برده شد، این سؤال که «**چرا ریاضیات وسیله‌ای است کارگر و مؤثر**»مطرح و درحداطلاعات روز به آن پاسخ داده شده است. برای روشن شدن مطلب برخی از این پاسخ‌ها را، که نه‌تنها از نظر تاریخی مورد توجه‌اند بلکه توضیحاتی است‌که هنوز به‌وسیلهٔ عده‌ای داده می‌شوند، در زیر می‌آوریم:

تا آنجا که مربوط به اصول موضوعهٔ ریاضی است نظر حاکم، تا سنوات اخیر، براین بود که این اصول

حقیقتهای بدیهی درباره جهان هستی می‌باشند. در اینکه عموماً حقیقتها وجود دارند شکی وجود نداشت و در این بین نظر براین بود که حقیقتهای ریاضی آن قدر روشن هستند که برای شناخت آنها نیازی به‌تجربه نیست.

از بین فلاسفه‌ای‌که حقیقتها را پذیرفتند **دکارت منتقدترین آنها بود.** با این حال وی در مورد حقیقتهای ریاضی شك روا نداشت و برای این یقین خود چنین استدلال می‌کرد که **خداوند در وجود انسان مفاهیم اعداد و اشکال را کاشته است** و از دانش این مفاهیم ویژگی‌های اصلی آنها روشن است.

گالیله نیز، با اینکه یقیناً می‌خواست خودش را از قید **مفاهیم از پیش پذیرفته** برهاند، مطمئن بود که حقیقتها وجود دارند و ما می‌توانیم آنها را از طریق توجه و دقت به‌آنچه طبیعت بما حکم می‌کند کشف‌کنیم. وی براین عقیده بود که از میان این حقیقتها اصول موضوعهٔ ریاضیات آنهائی هستند که به‌آسانی درك می‌شوند.

کانت، بزرگترین فیلسوف قرن ۱۸، نیز مانند سایر دانشمندان به حقیقتهای ریاضی و به‌ویژه اصول موضوعه اعتقاد داشت. اما وی دلیلش را براین نظر بنا نمود که **مغز انسان مفاهیم و اصول موضوعه** را عرضه می‌کند **تا با آن تجربه را سازمان‌دهد.** از این‌رو یك **تناظر لزوماً دقیق** بین **آنچه مغز می‌پذیرد و آنچه تجربه نشان می‌دهد** وجود دارد. کانت بین دانشی که مغز به‌کمك ادراکات حسی به‌دست می‌آورد و جهان هستی که می‌توان‌گفت خارج از این ادراکات قرار دارد و غیر قابل شناخت است فرق گذاشت. اما وی در اینکه سازمان به‌دست آمدهٔ دانش از طریق مغز، به‌انسان دانش قابل اعتماد و در واقع لغزش‌ناپذیری می‌دهد اعتقاد داشت.

اگرچه اصول موضوعهٔ ریاضیات به‌عنوان حقیقتهای بدیهی پذیرفته شدند، پرسش وسیع‌تری‌هنوز بی‌جواب مانده بود. و آن این بود که چرا **استدلال قیاسی به حقیقتهای جدیدی منجر می‌شود؟** به‌عبارت دیگر، چرا باید **بین قضایای ریاضی و تجربهٔ فیزیکی توافق باشد؟** آیا امکان اینکه استدلال انسان را از حقیقت‌ها به‌دورکند وجود ندارد؟ پیش از ماجرای هندسهٔ نااقلیدی تقریباً جواب عمومی به‌این پرسش‌ها این بود که خداوند جهان را از روی اصول استدلال و در واقع ریاضی‌وار طراحی نموده است.

لایبنیتز نیز معتقد بود که جهان هستی هنر خداوندی است و **هماهنگی از پیش برقرار شده بین اندیشه و واقعیت‌ها** را دلیل توافق بین **استدلال ریاضی و حقیقت می‌دانست.**

آفرینش هندسهٔ نااقلیدی‌این پرسش را که «**چگونه است که استدلال‌ریاضی به ما دانش دربارهٔ جهان هستی می‌دهد؟** از نو مطرح کرد. از آنجائی که استدلال برپایهٔ اصول موضوع قضایای اقلیدسی‌را، که در جهان هستی کاربرد دارد، نقض می‌کرد؛ ادامهٔ این‌نظرکه ریاضیات ما را به‌حقیقت می‌رساند امکان نداشت؛ زیرا حقیقت منحصر به‌فرد است. با این وصف چون کاربرد ریاضیات در مسائل جهان‌هستی، مانند گذشته مؤثر باقی ماند، عده‌ای از ریاضی‌دانان بزرگ به‌تأیید این نظر که خداوندطبیعت را ریاضی‌وارآفریده است ادامه دادند. تنها اختلاف بین‌این نظریه جدید و نظرات قرون ۱۷ و ۱۸ در این است که از این به‌بعد نمی‌توان تأیید کرد که، مثلا، دید ریاضی حرکات اجسام‌آسمانی یا امواج برقاطیسی صورت نهائی است بلکه نسبتاً یك تقریب عالی است که با اصلاحات مداوم ممکن است بطور صحیح فرموله شود.

آفرینش هندسهٔ نااقلیدس‌رسیدن ما را به‌پاسخی برای پرسش اولیه ساده‌تر می‌کند. **آنچه ما اینك باید توجه کنیم این نیست که چگونه با ریاضیات به‌حقیقت‌ها می‌رسیم بلکه تناظر بین واقعیتهای فیزیکی ونمایش ریاضی آنها است.**

ما کوشش می‌کنیم به‌این پرسش از دید درك قرن بیستم از طبیعت و نقش ریاضیات در آن پاسخ دهیم.

ریاضیات با انتخاب مفاهیم معینی که به‌نظر می‌رسند در مطالعهٔ جهان فیزیکی سودمند هستند، مثلا مفاهیم اعداد و هندسه، آغاز می‌شود. پس از انتخاب این مفاهیم، حرکت بعدی ریاضی‌دان این‌است‌که‌دنبال واقعیتهای بنیادی و درست بگردد تا بر پایهٔ آنها استدلال خود را بنا کند. جای تردید نیست که این واقعیتها (که همان اصول موضوعه‌اند) از مشاهدات و تجربه استنباط می‌شوند. مثلا، تجربهٔ عملی با دسته‌های اشیاء فیزیکی‌نشان می‌دهد که $1+2=2+1$ و $2+3=3+2$، $3+5=5+3$ و... در نتیجه ریاضی‌دان اصل‌کلی‌تعویض‌پذیری را بیان می‌کند «برای هر دو عدد a وb داریم $a+b=b+a$» می‌پذیرد.

در بسیاری از کاربردهای مفید ریاضی در فیزیك، **اصول موضوع غیر ریاضی نیز وارد می‌شود؛** مانند اصل جاذبهٔ عمومی نیوتون و اصول حرکت. دستگاه مکانیك ریاضی نیوتن به‌همان اندازه به‌قوانین حرکت و جاذبهٔ نیوتنی بستگی دارد که به‌اصول ریاضیات وابسته است. با اینکه مبنای تجربی اصول موضوعهٔ فیزیکی بیشتر واضح است، کسی واقعاً نمی‌تواند، بر پایه منطقی، اصول‌فیزیکی را از اصول ریاضی متمایز کند. هر دو نوع از **مشاهدات و تجربه الهام می‌گیرند و تجریدهای تجربی هستند.** تنها چیزی که می‌توان گفت این است که اصول ریاضی واضح‌ترند در صورتی که اصول فیزیکی نیاز به‌تجزیه و تحلیل عمیق‌تر و نافذتر جهان فیزیکی دارند که می‌بایست‌پرده از آنها‌برداشته‌شود.

لازم به‌یادآوری است که **هر دو نوع برای هرگونه پیشرفت واقعی درمطالعهٔ جهان فیزیکی لازم‌اند.**

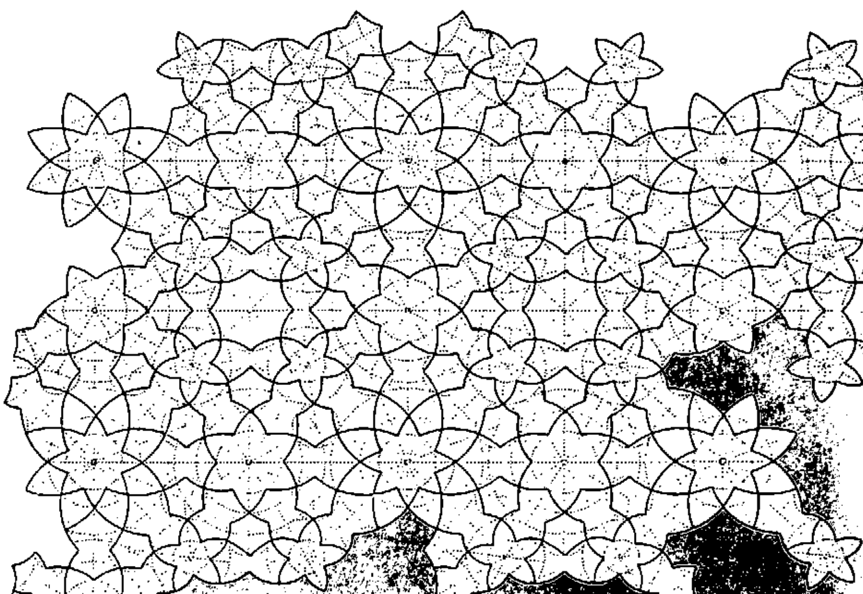
با در دست داشتن اصول‌موضوعه و مفاهیم، چه صرفاً ریاضی و چه ترکیبی از ریاضی‌وفیزیکی، ریاضی‌دان در گوشه‌ای می‌نشیند و احکام جدیدی را درباره جهان فیزیکی نتیجه‌گیری می‌کند. این نتایج معمولا بستگی‌دارند به‌ده‌ها یا صدها پلهٔ استدلال محض، با این حال دانش‌هائی از قبیل فاصلهٔ زمین‌تا خورشید به‌دست‌می‌دهد و گاهی پدیده‌هائی دور از انتظار مانند امواج رادیوئی را شناسائی می‌کند که تجربه توانایی آن را ندارد. در واقع ممکن است این مطلب‌درست باشدکه‌واقعیت‌های به‌دست آمده لزوماً نتیجهٔ اصول هستند و اصول نیز از جهان فیزیکی مشتق می‌شود، اما اینکه استدلال از نوع بسیار پیچیده و بغرنج بایددانش فیزیکی مفید عرضه کند رمزی است که تجزیه و تحلیل می‌طلبد.

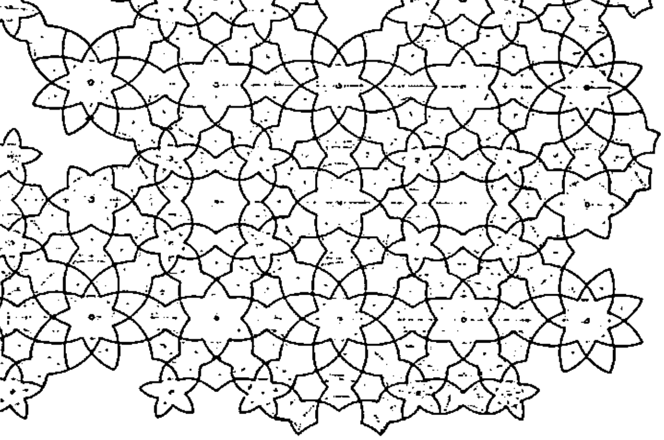
چرا بایستی جهان فیزیکی با الگوی استدلال انسان مطابقت کند؟ یك نظر پذیرفته شده در حد وسیع این است که انسان استدلال را از مطالعهٔ درطبیعت یاد می‌گیرد. حال‌به‌بینیم‌منظور از این چیست؟ یکی از **قوانین** اساسی استدلال (یا منطق) می‌گویدکه یك گزاره نمی‌تواند هم درست باشد و هم دروغ؛ نمی‌توان گفت که برف هم‌سیاه است و هم سفید، یا در ریاضی، مثلا، نمی‌توان گفت که دو خط مستقیم هم متوازی‌اند و هم متقاطع. در علم‌منطق این قانون را **اصل تناقض** می‌نامند. چه چیزی ما را وا می‌دارد که‌این‌اصل را بپذیریم؟ پاسخ این است که این چیزی است که ما در طبیعت مشاهده می‌کنیم. اشیاء دارای صفات متناقض در آن واحد نیستند. البته خواننده ممکن است اعتراض کند که غیر از این چه می‌تواند باشد؟ آیا بی‌معنی نیست که به‌پذیریم یك شئ، مثلا، هم سفید باشد و هم سفید نباشدو...؟ در پاسخ باید گفت که درست است که ما نمی‌توانیم تصور چنین شیی را به‌کنیم، این ناتوانی ممکن است در نتیجهٔ سطحی بودن تفکر و یا تربیت ما باشد. ریاضی‌دانان و دانشمندان علوم تجربی که فضا وهندسهٔ اقلیدسی را شناسائی کردندنمی‌توانستند تصور هندسهٔ دیگری را بکنند و اعتقاد آنها براین بود که تنها یك فضا و یك دسته قوانین دربارهٔ آن فضا وجود دارد و این دو کاملا سازگارند. موارد زیاد دیگری وجود دارد که روشنگر این واقعیت است که بشر استدلال را از مطالعهٔ آنچه در طبیعت اتفاق می‌افتد یاد گرفته است (که ما در اینجا برای جلوگیری از به درازا کشیدن کلام به‌همین اندازه اکتفا می‌کنیم) و بنابراین شگفتی ندارد که استدلال وی نتایجی به‌دست می‌دهدکه با طبیعت هماهنگ است. تاریخ این نظر را تأیید می‌کند. قوانین استدلال را ارسطو در قرن چهارم، قرنها بعد از آنکه انسان استدلال دقیق را تمرین کرد، به صورت مجرد فرموله کرد. معذلك، استدلال ریاضی قرون پیش از ارسطو با حقیقتهای هندسی که به‌سادگی‌قابل تجسم بودند سروکار داشت به‌طوری که مشاهده و اندازه‌گیری در اصلاح استدلالهای قیاسی ضعیف وبهبود آنها به‌کار گرفته می‌شدند.

علی‌رغم فایده‌ای که ممکن است از روشهای دیگر حصول دانش عاید شود، ریاضیدان از زمان یونان باستان به‌این طرف خود را محدود به‌نتایجی کرده‌اند که بتوان آنها را، براساس **اصول موضوعهٔ ثابتی و کاملا قابل** اعتماد، با استدلال قیاسی به‌دست‌آورد. البته نتایجی که از این طریق به‌دست می‌آیند خود از اعتماد و اعتبار کامل برخوردارند و می‌توانند به‌نوبت خود احکام اولیه برای استدلال قیاسی در آینده قرار گیرند. به‌عبارت دیگر قضایای اثبات شده را می‌توان دراثبات قضایای جدید مورد استفاده قرار داد و صرفنظر از تعداد دفعات به کارگیری این قضایا در استدلال باز هم نتایج به‌دست آمده معتبرند. به‌این ترتیب ملاحظه می‌شود که:

«چرا ریاضیات با بهره‌گیری از استدلال قیاسی دراطمینان به‌نتایج‌خود مشهور است»

استدلال قیاسی به‌استدلال‌مثبت (موجه) و استدلالهای تمثیلی و استقرائی به‌استدلالهای **موجه‌نما** یاد می‌شوند. به‌طوری که اشاره شد، استدلال تمثیلی تنها مفید احتمال‌است و فقط تشابه زیاد این احتمال را تقویت می‌کند، تا آن اندازه که مرحلهٔ شك و تردید به‌یقین نزدیك‌تر شود. در غیر این صورت به‌صرف تشابه دو شیی در یك امر واحد این استدلال را نمی‌توان به‌کار برد. به‌هر جهت‌این استدلال فاقد سندیت و اعتبار لازم است. استدلال استقرائی عبارت است از اینکه ذهن جزئیات متعدد را بررسی می‌کند و با کشف روابط‌نهفتهٔ موجود





یك حکم کلی استنباط می‌نماید. بر خلاف استدلال قیاسی که حرکت ذهن از عام به‌خاص است (یا از کل به‌جزء است) در اینجا حرکت‌ذهن از خاص به عام (یا از جزء به‌کل) است. در این روش نیز احکام کلی استنباط شده صورت قطعی ندارند (جز در استقرار ریاضی) و در آنها احتمال نادرست بودن وجود دارد.

از مقدمهٔ نسبتاً طولانی بالا این پرسش مطرح می‌شود که با بودن روش‌های استدلال که نتایج غیر قابل انکار به‌دست می‌دهند چرا انسان با روشهای نامطمئن تمثیلی و استقرائی خودش را به‌زحمت می‌اندازد، درحالی که نتایج حاصله از طریق استدلال قیاسی نه‌تنها مطمئن هستند بلکه استدلال قیاسی به‌وسیلهٔ مغز انسان انجام می‌شود و می‌تواند از آزمایش‌های پرخرج و تلاش‌های پر دردسر لازم برای بررسی اینکه پدیده‌ای به‌کرات اتفاق می‌افتد بکاهد؟ یك دلیل مهم‌که چرا انسان استدلال قیاسی را منحصراً در بررسی‌های‌غیر ریاضی به‌کار نمی‌برد این است که لازمهٔ چنین‌استدلالی داشتن حقیقت‌های بنیادی مناسب‌هستند که البته همیشه عملی نیست، حال‌آنکه برای استدلالهای موجه‌نما چنین واقعیتهائی ضروری نیستند.

با اینکه استدلال قیاسی اساس برهانهای ریاضی را تشکیل می‌دهند، **استدلالهای‌موجه‌نما نیز نقش‌سازنده‌ای** در ریاضیات دارند. اگر خوب دقیق شویم می‌بینیم که تمام دانش خارج از ریاضیات و منطق مثبت تشکیل‌می‌شود از حدس‌هائی که بعضی از آنها خیلی مطمئن و قابل قبول‌اند، مانند حدس‌هائی که در تعدادی از قوانین کلی علوم فیزیکی بیان می‌شوند، و بعضی دیگر نه قابل اعتبارند و نه قابل احترام. ما دانش ریاضی‌مان را به‌کمك استدلال مثبت از خطر حفظ می‌کنیم، اما حدس‌هایمان را به‌کمك استدلالهایی موجه‌نماحمایت‌می‌نماییم.

یك برهان ریاضی یك استدلال مثبت است، ولی مدرك استقراء فیزیك‌دان، مدرك مبنی بر قرائن حقوقدان، مدرك مستند یك مورخ، مدرك تجویز یك پزشك و بالاخره مدرك آماری‌اقتصاددان جملگی براستدلال‌موجه‌نماپی‌ریزی می‌شوند.

ازچندین‌لحاظ این‌دو نوع‌استدلال باهم فرق دارند. استدلال مثبت امن، پایا، دور از بحث و جدل و دارای معیارهای محکمی است که با منطق تدوین و روشن می‌شود؛ در صورتی که استدلال موجه‌نما پر خطر، موقتی، پرحادثه و دارای معیارهای ابکی (یا سست) و عاری از هر نوع نظریه‌ای است که بتوان آن را به‌روشنی با منطق مثبت مقایسه کرد.

استدلال موجه‌نما تنها استدلالی است که ما در مسائل روزانه به‌آن‌توجه می‌کنیم. هرچیز جدیدی که دربارهٔ جهان یاد می‌گیریم شامل این‌استدلال می‌شود. ضمن اینکه هر محصل‌ریاضی باید **اثبات کردن یاد بگیرد از حدس زدن نیز نباید غافل شود.** زیرا در ریاضیات مانند هر دانش دیگربشری ناچاریم وجود یك قضیه را پیش از اثبات آن حدس بزنیم، ناچاریم روش برهان را پیش از انجام جزئیات آن حدس بزنیم، ناچاریم مشاهدات را با تشبیه ترکیب کنیم. برهان ما حصل **کار خلاقهٔ یك ریاضی‌دان است که خود از طریق استدلال موجه‌نما کشف می‌**گردد.

استدلالهای **مثبت وسوسه‌نما نه تنها با هم مغایرت ندارند بلکه مکمل یکدیگرند.** در استدلالهای مثبت نکتهٔ اصلی این است که برهان را از یك تلاش پوچ و نامعتبر تمیز دهیم، اما در استدلالهای موجه‌نما نکته **اصلی این است‌که‌حدسی را از حدس دیگرتمیز دهیم؛** به‌عبارت دیگر بین حدس‌های معقول و نامعقول فرق بگذاریم.

یك محصل جدی ریاضی باید با هر نوع استدلال آشنا شود. شاگردی که نهایتاً ریاضی را به‌عنوان شغل آیندهٔ خود برخواهد گزید برای موفقیت واقعی خود باید با استدلال موجه‌نما نیز آشنا شود، زیرا کارهای خلاقهٔ وی به‌آن بستگی دارد. شاگردی که ریاضی را حرفهٔ خود نکند نیز باید استدلال مثبت را یاد بگیرد،زیرا ممکن است که وی این استدلال را مستقیماً به‌کار نگیرد ولی باید به حدی برسد که بتواند مدارك وشواهد مورد ادعائی را که در زندگی عادی با آن روبرو خواهد شد با هم مقایسه کند.

حتی در علوم ریاضی، ابزار **اصلی ما در کشف حقیقت عبارتست از استقراء و تمثیل** از آنجائی که استقراء و تمثیل در کشف واقعیتها و برهان‌ها نقش مهم بازی می‌کنند. در زیر هر یك از آنهارا مورد بررسی بیشتری قرار می‌دهیم.

استقراء را غالباً با مشاهده آغاز می‌کنیم و سپس مشاهدات گرد آوری شده را مورد آزمایش قرار می‌دهیم و آنها را با هم مقایسه و ترکیب می‌کنیم. پس از انجام این

مراحل است که به‌سمت‌یك روش‌برهان رهنمون شویم. در استقراء ابتدامتوجه تشابه می‌شویم و سپس مرحلهٔ تعمیم می‌رسد که در آن یك‌حکم کلی راحدس می‌زنیم. این حکم صرفاً یك **نوع حدس** است و جنبه آزمایشی دارد، بدین‌معنی که حکم ثابت نشده است و تنها در مورد اشیاء خاصی صادق است. پس‌از شکل گرفتن یك حدس، تلاش در جهت درستی یا نادرستی آن آغاز می‌گردد. از بین حالتهای‌خاصی‌که مورد بررسی قرار می‌گیرند، دو دستهٔ ویژه را می‌توان متمایز کرد:

دسته‌ای که **پیش از فرموله** کردن حدس آمده‌اند و آنهائی که **بعد از حدس** می‌آیند.

دسته اول **حدس را پیشنهاد** می‌کنند و دستهٔ دوم آن را **حمایت یا رد** می‌نمایند. به‌عبارت دیگر، اگر دستهٔ دوم در آن صادق باشند بر اعتبار حدس می‌افزایند ولی اگر حتی یکی از آنها صدق نکند حدس بی‌اعتبار می‌گردد.

استقراء عام نتایجش را شایدی ارائه می‌دهد و هیچوقت آنها را ثابت نمی‌کند. مشاهدات دقیق حالات ویژه که ما را به‌یك حکم کلی ریاضی می‌رساند. روش برهان آن حکم را نیز ممکن است نشان دهند. در تحقیقات استقرائی قدم قاطع این است که‌انسان یك نظم قابل توجه در مشاهدات خود ملاحظه می‌کند که نمی‌توان آن راصرفاً امری شانسی دانست. وی حدس می‌زندکه‌این نقطه بایدماوراءمحدودیت‌های مشاهدات فعلی او ادامه داشته باشد. در فیزیك غالباً یك کشف در دو مرحله صورت می‌گیرد؛ ابتدا یك نوع نظم در داده‌ها ومشاهدات‌ملاحظه می‌شود و سپس این نظم به‌عنوان نتیجه‌ای از یك قانون کلی تعبیر می‌گردد. نکته جالب توجه این است‌که این دو مرحله ممکن است به‌وسیلهٔ دو فرد مختلف صورت گیرد که درفاصلهٔ زمانی‌طولانی از یکدیگرزندگی‌نمایند. مثال قابل توجه در این مورد کپلر و نیوتن هستند که نظم مشاهده شده در حرکت سیارات به‌وسیله کپلر با تعبیر نیوتن منجر به کشف قانون جاذبهٔ عمومی گردید. مشابه این حالت ممکن است در مطالعات ریاضی نیز صورت گیرد.

برای دانشمندان علوم طبیعی مشاهده بالاترین مرجع است، در صورتی که برای ریاضی‌دان چنین نیست. در ریاضیات مانند علوم‌طبیعی بررسی‌های‌مان را با حالت‌های خاص شروع می‌کنیم. با تعمیم‌های آزمایشی مطالعات خودمانی را به‌جلو می‌بریم و با توجه و دقت در حالات خاصی که در دسترس هستند و با ملاحظهٔ تشابه‌های آموزنده کوشش می‌کنیم الگوهائی حدس بزنیم. اگر چه ممکن است بارها شکست بخوریم حدس‌های‌مان را کم‌کم اصلاح وبهترمی‌کنیم تا سرانجام به‌یك قانون کلی برسیم که موردتأیید تمام مدارك آزمایشی‌که‌به‌آنها دسترسی داریم باشد. سپس این قانون کلی را در حالت‌های خاص آزمایش می‌کنیم تا اعتبار آن افزایش یابد. قابل‌ذکر است که بررسی و آزمایش موارد زیاد درست انتخاب شده **تنها راه تأیید یك حدس در علوم طبیعی** است.درصورتی که این امر ممکن است یك ریاضی‌دان را **تشویق نماید تا در جستجوی‌دلایل** موجه کوشش کند ولی **هرگز جای اثبات** را نمی‌گیرد.

در استقراء به‌سه نکتهٔ زیر نیاز داریم:

۱) باید **آمادگی‌تجدیدنظر** در تك‌تك حدس‌هایمان را داشته باشیم؟

۲) در صورت وجود یك دلیل‌خوب، تغییر لازم را در **حدس موردنظر پذیرا** باشیم؟

۳) **بدون یك دلیل خوب، حدس مورد مطالعه را بی‌جهت تغییر ندهیم.**

این نکات بظاهر ابتدائی می‌رسند ولی انسان به‌صفات خاصی‌نیاز دارد تا بتواند سازگار با آنها حرکت کند. نکتهٔ اول نیاز به **شهامت فکری** دارد؛ زیرا تغییر باورها مستلزم شهامت است (گالیله نمونهٔ داشتن چنین شهامتی است).

نکته دوم نیاز به **صداقت فکری** دارد. سخت چسبیدن به یك حدس که به‌روشنی به‌تناقض برخوردکرده است، به‌صرف اینکه این **حدس** من‌می‌باشد!، بی‌صداقتی است. نکتهٔ سوم نیاز به **امساك نفس مدبرانه** دارد. تغییر یك باور بدون بررسی جدی فقط، مثلا، به‌خاطر مد خطا است، البته به چراها و شکهای جدی که روزانه در مورد اعتقادمان پیش می‌آید باید تعمق کرد و در حد معقول در اصلاح آن‌کوشید.

توجه: **این سه نکته صفات بارز یك دانشمند واقعی است.**

حدس و برهان ستونهای همزاد ریاضیات هستند. حدس درمرزناحیه‌ای که معلوم را از مجهول جدا می‌کند قرار دارد، ولی برهان در قلب ریاضیات جا دارد وبرج محکمی‌است که در اطراف آن یك داربست ماهرانه از قضایای ریاضی ساخته می‌شود. وظیفه ریاضی‌دان گسترش حدس یا مفروضات دربارهٔ رفتار ریاضی گونه‌ای است که در مرحلهٔ بعدی می‌تواند کوشش لازم را برای اثبات‌آنها آغاز کند. براین اساس، ریاضیات به حوزه‌های جدیدی‌کشیده می‌شود و رشد می‌کند، از این طریق ارتباطهای مخفی موجود بین حوزه‌های‌کاملا برقرار شده آشکار می‌شود.

وقتی تاریخ را ورق می‌زنیم می‌بینیم که استدلال تمثیلی با تمام ضعفهایش سهمی بسزا در کشفیات دارد. برای روشن شدن مطلب به‌مثال زیر توجه کنید:

ژاك برنولی ریاضیدان سویسی (۱۷۰۵ ـ ۱۶۵۴) معاصر نیوتن ولاینبشیر، چندین سری نامتناهی را محاسبه کرد ولی در محاسبهٔ

$$۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۶}+\cdots$$

موفق نشد. بعدها این مسئله مورد توجه اویلر (۱۷۸۳ ـ ۱۷۰۷) ریاضیدان دیگر سویسی که شاگرد برادر ژاك بود قرار گرفت. وی صورتهای گوناگون برای سری‌های دلخواه به‌دست آورد که هیچ‌یك وی را قانع نکرد (انتگرال معین یکی از آنها است). نامبرده به کمك روشهائی که به‌کار گرفت ابتدا توانست این سری را به‌صورت عددی تا ۷ رقم تقریب برابر ۱/۶۴۴۹۳۶ محاسبه کند.

با این وصف، به‌این نتیجه قانع نشد زیرا این مقدار یك پاسخ تقریبی است و برنولی می‌خواست پاسخ دقیق آن را پیدا کند. سرانجام، وی در نتیجه، تلاش و کوشش زیاد اثبات لازم را کشف کرد. **استدلال تمثیلی** وی را به یك **حدس بسیار شجاعانه** هدایت کرد که، در اینجا وارد جزئیات آن نمی‌شویم.

با اینکه قدمهای قاطع اویلر در پیدا کردن پاسخ این سری و اثبات آن بسیار شجاعانه بودند، از دید منطق محض، کار او یك نوع خطای آشکار بود. شجاعت وی از آنجا ناشی می‌شود که وی دستوری را برای محاسبهٔ این سری به‌کار گرفت که این دستور برای این حالت ساخته نشده بود و مربوط به‌شرایط بظاهر کاملا متفاوتی بود. این دستور مربوط به‌معادلات جبری می‌شد، ولی وی از آن در مطالعات غیر جبری استفاده کرد. از دید منطق **این کار موجه نبود** ولی از دید **تمثیلی** پسندیده و خالی از اشکال به‌نظر می‌رسید. به‌این ترتیب به‌کمك استدلال تمثیلی وی شاخه‌ای از ریاضیات را پی‌ریزی کرد که خودش آن را **آنالیز بی‌نهایت** نامید.

ریاضیدانان دیگر (پیش از اویلر) از سری‌های متناهی به‌سری‌های نامتناهی و از حاصلضرب‌های متناهی به حاصلضربهای نامتناهی دست یافته بودند، ولی اویلر بسیار هوشیارانه با استفاده از روش تمثیلی توانست از معادلات جبری با درجهٔ متناهی بگذرد و به‌معادلات جبری با درجهٔ نامتناهی راه پیدا نماید. شکی نیست که این عبور با خطر لغزش و خطا همراه است. **چگونه اویلر از آنهاپرهیز کرد؟** سؤالی است که بعضی خواهند گفت‌وی نابغه بود. البته این پاسخ قانع‌کننده نیست؛ **دلایل** اویلر برای اعتماد به کشف‌خود **مثبت** نیستند بلکه استقرائی می‌باشند. وی زمینه‌های حدسی خود **را از عبور متناهی به نامتناهی تحت بررسی مجدد قرار نمی‌دهد و تنها نتایج آن را بررسی می‌کند. این یك نوع روش استقرائی خاص است که نتایج حدس را بررسی کنند و آن را برمبنای چنین بررسی‌هائی زیرقضاوت قرار دهند.**

در تحقیقات علمی مانند زندگی عادی حدس **را کم و بیش** برحسب سازگاری نتایج آن با واقعیتهای قابل مشاهده می‌پذیریم و یاناچاریم بپذیریم.

استقراء ریاضی

در استقراء عام دیدیم که تلاش بر آن است که از بررسی و مشاهده‌حالات خاص یك نوع نظم و الگوئی در داده‌ها و یافته‌ها بیابیم و در نتیجه رابطه‌ای یا حکم کلی **حدس** بزنیم. سپس این حدس را در چند مورد دیگر بررسی کنیم و درستی آن را تحقیق نماییم. هرچه این عمل ادامه یابد براعتبار حدس (یا حکم‌احتمالی) افزوده‌می‌شود. این پرسش مطرح می‌شود که این بررسی‌ها تا کی باید ادامه یابد؟ اگر چه از نظر محققین علوم طبیعی و فیزیکی این **بررسی‌ها قانع کننده‌است** ولی یك ریاضیدان را قانع نمی‌کند و وی در جستجوی راهی است‌که به‌طور مؤثر بتواند یك **حدس** را بررسی نماید. اگر **اساساً حدس درست باشد،** باید مستقل از تغییر حالت‌ها بوده و در عبور از یك حالت به‌حالت دیگر همچنان معتبر بماند. درنتیجه بافرض درست بودن و معتبر بودن حدس‌برای یك حالت کلی، مثلا n، باید بتوانیم نشان دهیم که در حالت $n + 1$ نیز حدس معتبر است. به‌عبارت دیگر ریاضیدان می‌خواهد ببیند که حکم بیان شده به‌وسیلهٔ **حدس پایا** است و مستقل از حالت‌های مختلف است. گرچه بررسی هر حالت دلخواه بعدی‌اعتماد ما را نسبت به‌درستی حدس بیشتر می‌کند، تحقیق در حالت بلافصل مورد بررسی شده خیلی بیشتر مفید است. این حالت در حقیقت می‌تواند **حدس** را ثابت کند؛ زیرا این حالت چنین می‌رساند که اگرحدس‌برای عدد دلخواه n درست باشد برای حالت $n + 1$ نیز معتبر است و در نتیجه برای هر عددی درست است و لزومی به‌آزمایش تك‌تك حالات نداریم. به‌این ترتیب یك‌روش سیستماتیك بررسی حالات حاصل می‌شود که شروع آن یعنی حالت $n = 1$ برای ما مهم است. در نتیجه حالتهای $1 + 1 = 2$، $2 + 1 = 3$، $3 + 1 = 4$ و به‌طور سیستماتیك بررسی می‌شوند و نحوهٔ اثبات همان است که در حالت n به $n + 1$ آمده است.

با توجه به‌توضیحات بالا استقراء ریاضی شامل دو مرحله می‌شود:

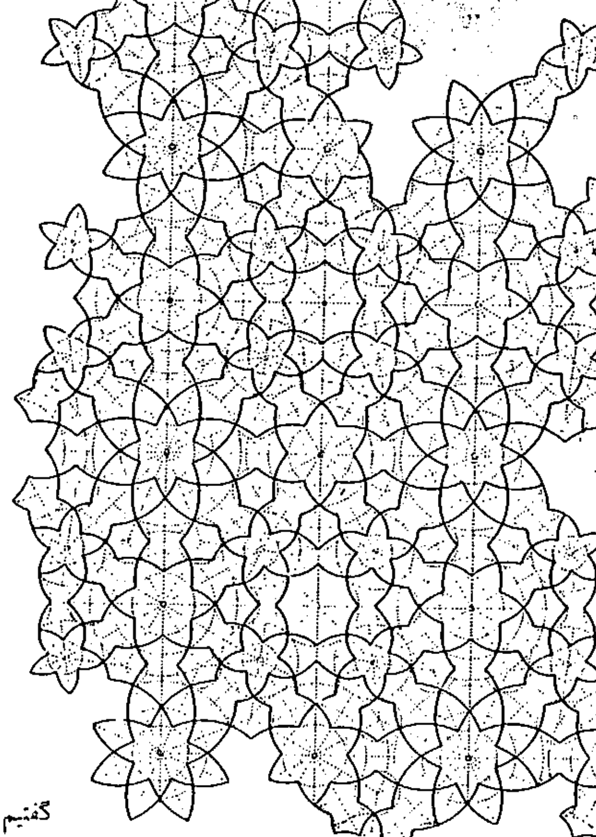
۱) بررسی حدس‌برای حالت $n = 1$

۲) به فرض‌درست بودن‌برای‌حالت، مثلا، $n = k$ (این فرض به فرض استقراء مشهور است)، باید نشان‌دهیم که‌حدس (یاحکم) برای‌حالت $n = k + 1$. صادق است.

ملاحظه می‌شود که استقراء ریاضی یك روش برهان مثبت مهم و بنیادی است.

استقراء ریاضی غالباً به‌عنوان قدم پایان دهنده یا مرحلهٔ آخر یك تحقیق استقرائی صورت می‌گیرد و این‌آخرین مرحله غالباً از پیشنهادات به‌دست‌آمده در مراحل قبلی استفاده می‌کند.

در استقراء ریاضی توجه ما به طور طبیعی معطوف می‌شود به انتقال پیوسته و هموار از حالتی به حالت دیگر. مثال بارز در این مورد **گفته**



نیوتن است که می‌گوید: «این مطلب را که به‌وسیلهٔ نیروهای مرکزی می‌توان سیارات را در مدارهای معینی نگه داشت می‌توان راحت‌تر درک کرد در صورتی‌که حرکت پرتابی را بررسی کنیم». وی یک سنگ را در نظرمی‌گیرد که با سرعت اولیه روبه‌افزایش پرتاب می‌شود و در نتیجه از زمین دور می‌گردد تا زمانی که مدار آن مانند مدار ماه دور زمین قرار گیرد (پرتاب اقمار مصنوعی برهمین اصل استوار است) و به‌این ترتیب نیوتن یک انتقال پیوسته‌ای را از حرکت پرتابی به‌حرکت سیارات، انتقالی که جاذبهٔ عمومی بین دو حالت باید یکنواخت عمل‌کند متصور می‌شود.

بحث در استقراء ریاضی وبالاخره روشهای استدلال را با ذکر مثال زیر به‌پایان می‌رسانیم.

مثال مقدار S_n را در

$$S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\dots+\frac{1}{4n^2-1}$$

حساب کنید.

گفتیم که در روش استقراء حالات خاص را بررسی می‌کنیم تا به‌کمک آنها رابطه‌ای حدس بزنیم.

مقادیر S_n را برای $n=1, 2, 3, 4, \dots$ دریک جدول زیرهم قرارمی‌دهیم.

$$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots$$

$$S_n=\frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{9},\ \dots$$

جدول مقادیر S_n نشان می‌دهدکه بین اعداد صورت ومخرج هر کسر رابطهٔ «صورت $2\times$ = ۱ — مخرج» برقراراست. از اینجا حدس می‌زنیم که برای هر n باید داشته باشیم

$$S_n=\frac{n}{2n+1}$$

برای اطمینان بیشتر این حدس را برای $n=5$ و $n=6$ نیز آزمایش می‌کنیم

$$n=5,\ S_n(=S_5)=\frac{4}{9}+\frac{1}{99}=\frac{5}{11}=\frac{5}{2\times 5+1}$$

$$n=6,\ S_n(=S_6)=\frac{5}{11}+\frac{1}{143}=\frac{6}{13}=\frac{6}{2\times 6+1}$$

دیده می‌شودکه این حدس برای حالت‌های $n=5$ و $n=6$ نیزصادق است.

حال حکم را با استفاده از استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم.

۱ــ برای حالت $n=1$ داریم

$$S_1=\frac{1}{3}=\frac{1}{2\times 1+1}$$

که نشان می‌دهد حکم صادق است.

۲ــ فرض استقراء فرض کنیم

$$S_k=\frac{k}{2k+1}$$

حکم استقراء باید نشان دهیم

$$S_{k+1}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

برهان.

$$S_{k+1}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\dots+\frac{1}{4k^2-1}+\frac{1}{4(k+1)^2-1}$$

بنا به فرض استقراء

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{4(k+1)^2-1}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2(k+1)+1)}$$

$$=\frac{(k(2k+1)+1)+1}{(2k+1)(2(k+1)+1)}$$

$$=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2(k+1)+1)}$$

$$=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2(k+1)+1)}$$

$$=\frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

بنابراین حکم استقراء ثابت است و این حکم برای هر عددی درست می‌باشد.

گزارش سومین المپیاد بین‌المللی انفورماتیک آتن ۱۹۹۱

یحیی تابش
عضو هیأت علمی دانشگاه صنعتی شریف

«المپیك منسوب به الومپا کوه معروف یونان است و به بازیها و ورزشها و مسابقاتی که در یونان باستان با تشریفات خاص برگزار می‌شد، اطلاق می‌گردید.

المپیك دربرگیرندهٔ مسابقات در زمینه‌های مختلفی بود اعم از رشته‌های مختلف تربیت بدنی و تربیت فکری که فلسفه و غیره را نیز شامل بود.

روح المپیك اشاعهٔ صلح و دوستی بین اقوام مختلف بود»

(فرهنگ معین)

۱ـ المپیاد

سومین المپیاد بین‌المللی انفورماتیك (IOI) از ۱۹ تا ۲۵ می ۱۹۹۱ در آتن (یونان) برگزار شد. اولین المپیاد بین‌المللی انفورماتیك دو سال پیش به ابتکار بلغارها در بلغارستان و دومین المپیاد سال‌قبل در شوروی برگزار شده بود. برای دوسال آینده نیز به ترتیب آلمان (۹۲) و آرژانتین (۹۳) برگزار کنندهٔ المپیاد خواهند بود.

کشورهای زیر در سومین المپیاد شرکت داشتند:

آرژانتین
آلمان
اتحاد جماهیر شوروی (۲ تیم)
انگلستان
ایتالیا
بلغارستان
تایلند
چك‌واسلواکی
چین
رومانی
سوئد
قبرس
کوبا
لهستان
مجارستان
مغولستان
نروژ
نیجریه
ویتنام
هلند
یوگسلاوی
یونان (۲تیم)

علاوه بر بیست و دو کشور فوق نمایندگان‌کشور ما، فنلاند، و کرهٔ جنوبی نیز به‌عنوان ناظر در المپیاد حضور داشتند. نمایندگانی از یونسکو نیز ناظر بر برگزاری المپیاد بودند.

دانش‌آموزان شرکت‌کننده در المپیاد باید در دوجلسهٔ ۴ ساعته به حل مسئله بپردازند. در هرجلسه یك‌مسئله مطرح می‌شود که باید با طرح الگوریتم‌مناسب برای آن برنامه‌نویسی شود. محور اصلی مسائل مطرح شده در المپیاد «تفکر الگوریتمی» است یعنی طرح یك الگوریتم مناسب برای یك مسئله و برنامه‌نویسی برای آن. (خوشبختانه این دقیقاً همان هدفی است که درس کامپیوتر و انفورماتیك در کشور ما بر اساس آن تدوین شده است).

در هنگام امتحان به هر دانش‌آموز یك‌ریز کامپیوتر اختصاص‌داده‌می‌شود، ریز کامپیوترها از نوع سازگار با IBM در محیط DOS و با صفحه کلید استاندارد است. هر کامپیوتر به دیسك سخت مجهز است که نرم‌افزارهای مورد نیاز دانش‌آموزان روی آن قرار داده شده‌است (مشخصات‌اصلی سخت‌افزارها نیز دقیقاً همان مشخصات کامپیوترهای دانش‌آموزی در کشور ماست).

نرم‌افزارهائی که دانش‌آموزان مجاز به استفادهٔ از آن هستند عبارتند از: Turbo Pascal, Quick Basic, Gwbasic, Turbo C, Micro soft C, LCN Logo, Fortran 77

از این نرم‌افزارها فقط در حالت text می‌توان استفاده کرد.

هرگونه تغییری در نرم‌افزارهای مجاز از دو سال قبل به اطلاع کلیهٔ کشورها رسانده می‌شود (اکثر دانش‌آموزان شرکت‌کننده در سومین المپیاد از توربوپاسکال به‌عنوان زبان برنامه نویسی استفاده می‌کردند).

پاره‌ای ازمقررات فعلی IOI به‌قرار زیر است:

۱ـ دانش‌آموزان دبیرستانی زیر بیست سال می‌توانند در المپیاد شرکت کنند.

۲ـ هرکشورمی‌تواند یك‌تیم‌حداکثر چهارنفره معرفی کند. هر تیم با یك

سرپرست و یك نفر دستیار همراهی می‌شود. (در سال ۹۱ کلیهٔ تیمها ۳ نفره بود).

۳ــ هرکشور شرکت‌کننده لازم است **حداقل ۲ مسئله** برای برگزارکنندگان المپیاد ارسال کند.

۴ــ المپیاد توسط یك کمیته بین‌المللی اداره می‌شود و تشکیلات المپیاد هرساله عبارتست از:

ــ ژوری بین‌المللی متشکل از: رئیس،کمیتهٔ‌علمی،سرپرستان‌هر تیم.

ــ کمیتهٔ تصحیح‌کنندگان اوراق متشکل از کمیتهٔ علمی دستیاران و سرپرستان هر تیم.

۵ــ پس از انتخاب نهائی مسائل توسط ژوری سرپرست هر تیم مسئله مربوطه را به زبان کشور خود ترجمه کرده و ترجمه در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌گیرد.

۶ــ پس از پایان هر امتحان دانش‌آموزان فرصت اضافی برای تهیهٔ دو لیست چاپی و دو کپی روی دیسکت از برنامهٔ خود خواهند داشت. یك‌سری از این مدارك به کمیتهٔ تصحیح‌کننده و سری دیگر به سرپرست تیم تسلیم می‌شود.

سرپرست تیم نمرهٔ پیشنهادی خود را تعیین‌کرده و به‌تائید تصحیح‌کنندگان تعیین شده از طرف کمیته می‌رساند. سپس نمرهٔ نهائی به تصویب نهائی ژوری خواهد رسید.

۷ــ تعیین حدود نمرات برای جوایز اول، دوم، و سوم توسط ژوری انجام می‌شود. جوایز در یك مراسم پایانی ویژه اهدا خواهد شد ولی هیچگونه رده‌بندی تیمی انجام نمی‌شود بلکه رده‌بندی فقط فردی است.

چند نکته را نیز در حاشیه متذکر می‌شویم:

۱ــ بسیاری از کشورهای شرکت‌کننده در المپیاد هنوز به‌طور فراگیر درس کامپیوتر و انفورماتیك را در کلیهٔ مدارس خود پیاده نکرده بودند بلکه در مدارس خاصی این درس ارائه شده بود و برای دانش‌آموزان برگزیده اردوهای ویژه‌ای تشکیل داده بودند.

۲ــ با بسیاری از سرپرستان تیمها تبادل اطلاعات به‌عمل آمد از جمله با نمایندگان‌هلند، آلمان، چین، وشوروی و کشورهای ویتنام ومغولستان. مغولها حتی مایل به تبادلات دانشگاهی هستند.

هلندیها در وزارت‌آموزش‌وپرورش یك مرکز تحقیقات انفورماتیك دارند که روی آموزش انفورماتیك با استفاده از کامپیوتر در آموزش کار می‌کنند. هلندیها مایل به تبادل اطلاعات هستند ولی ظاهراً پیشرفتهای چندانی هنوز نداشته‌اند.

آلمانها دستاوردهای ارزنده‌ای در آموزش انفورماتیك دارند، مقداری از نشریات خود را در اختیار قرار دادند و آمادگی برای تبادل اطلاعات دارند مقداری از نشریات آنها هم از طریق سفارشات کتابخانه‌ای قابل تهیه است.

شورویها نیز برای همکاریهای متقابل اعلام آمادگی‌کردند حتی‌اظهار تمایل می‌کردند که تیم انفورماتیك کشور ما هم در المپیاد ملی آنها که در آوریل ۹۲ در ازبکستان‌برگزار می‌شود شرکت کنند. گذشته از آن شورویها با مشارکت یونسکو یك مرکز آموزش و پژوهش انفورماتیك در سطح پیش‌دانشگاهی تشکیل داده‌اند. این مرکز نشریات جالب‌توجهی تهیه کرده است و برای آموزش انفورماتیك کمپهای ویژه‌ای تشکیل می‌دهد. شورویها برای عقد موافقتنامه برای تبادل اطلاعات و تبادل دانش‌آموزان و پژوهشگی اعلام آمادگی کردند. به‌نظر می‌رسد اقدام مقتضی در این‌مورد بسیار نافع است حداقل می‌توانیم نشریات آنها را که به صورت مطبوعی و الکترونیکی به زبان انگلیسی تهیه می‌شود، دریافت نمائیم.

نروژیها وانگلیسی‌هانیز سیستمهای ویژه‌ای طرح کرده‌اند ولی‌در خط کلی آموزش انفورماتیك که توسط بقیه کشورها پذیرفته شده است و آموزش وسیع و کلان را دربر می‌گیرد، قرار ندارد.

با نمایندهٔ یونسکو نیز مذاکرات مشروحی راجع به آموزش انفورماتیك در ایران به‌عمل آمد.

۳ــ نتایج‌توزیع مدالها درسومین المپیاد انفورماتیك به‌قرار زیر است:

	طلا	نقره	برنز
آرژانتین	ـ	ـ	۱
آلمان	ـ	۱	۲
اتحاد جماهیر شوروی	ـ	۳	ـ
انگلستان	ـ	ـ	۲
بلغارستان	۱	ـ	۲
تایلند	ـ	۱	۲
چك‌واسلواکی	۱	۲	ـ
چین	۲	۱	ـ
رومانی	ـ	ـ	۳
سوئد	ـ	۳	ـ
کوبا	ـ	ـ	۱
لهستان	۱	۱	۲
مجارستان	۱	ـ	۲
ویتنام	ـ	ـ	۲
هلند	ـ	ـ	۱
یوگسلاوی	۱	۲	ـ
یونان	ـ	ـ	۳

بقیه در صفحه ۵۲

افراز یک مستطیل به مربعها

دکتر علیرضا جمالی

چکیده. در این مقاله در بارهٔ امکان افراز یك مستطیل به مربعها بحث می‌کنیم. گرچه به‌ظاهر افراز مستطیلها به مربعهای ناهمنهشت خالی ازکاربرد به نظر می‌رسد، ولی ارتباط بسیار نزدیکی با مسائلی در مهندسی برق دارد.

۱. مقدمه

آیا ممکن است مستطیل مفروضی را به مربعهای همنهشت افرازکرد؟ به همین قیاس آیا می‌توان این عمل را با مربعهای دوبه‌دو ناهمنهشت انجام داد؟ آیا ممکن است یك مثلث متساوی‌الاضلاع را به مثلثهای متساوی‌الاضلاع دوبه‌دو ناهمنهشت افرازکرد؟ واضح است که بعضی‌از مستطیلها را می‌توان به مربعهای همنهشت افرازکرد و به همین‌ترتیب برخی ازمثلثهای متساوی‌الاضلاع قابل‌افراز به‌مثلثهای متساوی‌الاضلاع همنهشت هستند ولی تیوتی در ۱۹۴۸ ثابت کرد که یك مثلث متساوی‌الاضلاع را نمی‌توان به مثلثهای متساوی‌الاضلاع دوبه‌دو ناهمنهشت افرازکرد [۲]. ذیلاً نشان می‌دهیم که بعضی‌از مستطیلها را می‌توان به مربعهای دوبه‌دو ناهمنهشت افرازکرد و ثابت میکنیم که افراز یك مکعب مستطیل به تعدادی متناهی مکعب دوبه‌دو ناهمنهشت امکان‌پذیر نیست. هرجا می‌گوئیم و مربعهای ناهمنهشت، مقصودمان مربعهای دوبه‌دو ناهمنهشت، است.

۲. قضایا و نتایج

فرض‌کنیم a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند. در این صورت مراد از«مستطیل $a \times b$» یعنی مستطیلی که طول‌وعرض آن بترتیب اعداد a و b باشند.

قضیهٔ ۱. شرط لازم و کافی برای‌آنکه مستطیل $a \times b$ به مربعهای همنهشت افراز شودآنست که $\frac{a}{b}$ گویا باشد.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم مستطیل $a \times b$ به مربعهای همنهشت‌که طول ضلع هر یك ازآنها λ است افراز شود. در این صورت $a=m\lambda$ و $b=n\lambda$ که درآن m و n دو عدد صحیح مثبت‌اند. بنابراین،

$$\frac{a}{b}=\frac{m\lambda}{n\lambda}=\frac{m}{n}$$

که یك عددگویاست. بعکس، فرض می‌کنیم $\frac{a}{b}$ گویا باشد. در این صورت اعداد صحیح مثبتی مانند m و n موجودند بطوری‌که $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$. بنابراین، $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\lambda$. از اینجا،

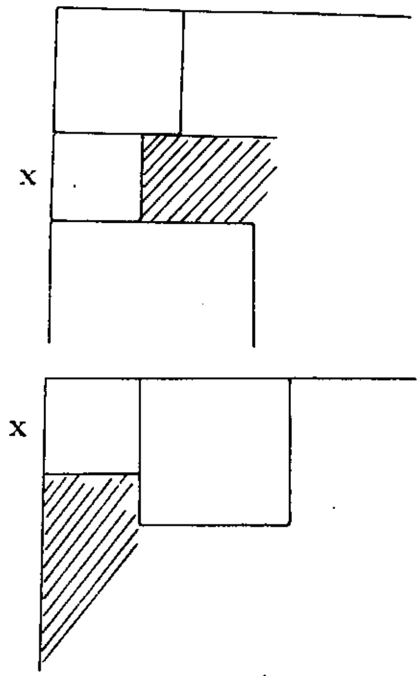
$$a=m\lambda \quad \text{و} \quad b=n\lambda$$

پس مستطیل $a \times b$ را می‌توان به mn مربع همنهشت به طول ضلع λ افرازکرد. □

ذیلاً وجود افرازی از یك مستطیل به مربعهای ناهمنهشت نشان داده خواهد شد. ابتدا چند قضیهٔ مفید را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۲. بنا بر آنکه مستطیلی به مربعهای ناهمنهشت افراز شود، کوچکترین مربع نمی‌تواند در مرز این مستطیل واقع شود.

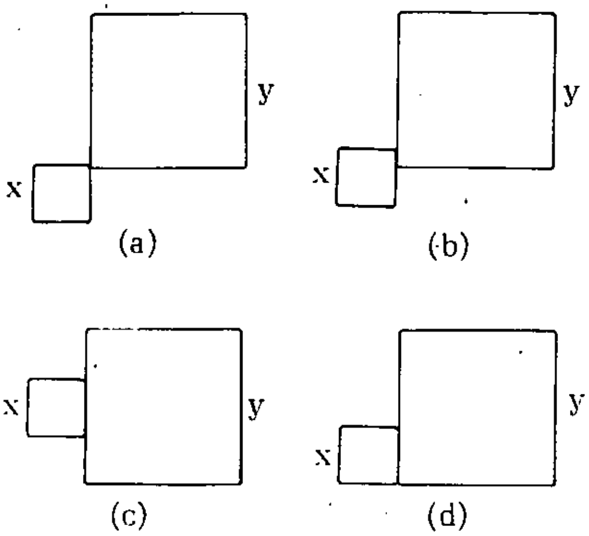
برهان. فرض می‌کنیم که بتوان مستطیلی را به مربعهای ناهمنهشت افراز کرد به‌طوری که کوچکترین مربع (i) در یکی از چهار گوشهٔ مستطیل واقع شود، یا (ii) در امتداد یکی از اضلاع مستطیل واقع شود. طول ضلع این مربع را x می‌گیریم (ش. ۱). در این صورت، چون این مربع باید با مربعهای بزرگتر محصور گردد، در هر حالت ناحیه‌ای پرداز، مطابق شکل، حاصل می‌شود که تنها می‌توان آن را به مربعهایی با طول اضلاع کوچکتر از x افراز کرد و این یك تناقض است. □



ش. ۱

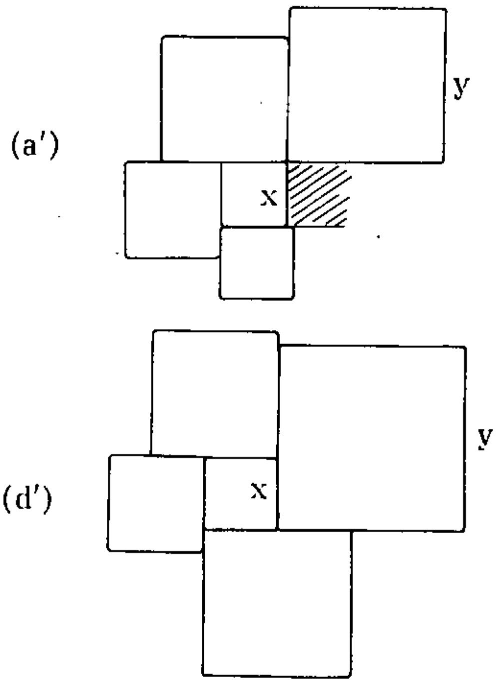
قضیهٔ ۳. بنا بر آنکه مستطیلی به مربعهای ناهمنهشت افراز شود، کوچکترین مربع درست باید با چهار مربع بزرگتر احاطه شود.

برهان. هر گاه مستطیلی به مربعهای ناهمنهشت افراز شود. برطبق قضیهٔ ۱، کوچکترین این مربعها باید در داخل مستطیل مفروض قرار گیرد. کوچکترین مربع با طول ضلع x با مربعی بزرگتر با طول ضلع y مجاور است. بنابراین، چهار حالتی که در شکل ۲ نشان داده شده است پیش می‌آید:



ش. ۲

حالت (a) به وضعیتی که در شکل ۳ ('a) نشان داده شده است منجر می‌شود که در آن ناحیهٔ پرداز را تنها می‌توان با مربعهائی با طول اضلاع کوچکتر از x پر کرد؛ و این یك تناقض است. به طریق مشابه (b) و (c) به تناقض منجر می‌شوند. بنابراین تنها حالت (d) باقی می‌ماند. این حالت مطابق ('d) شکل ۳ امکان‌پذیر است. □

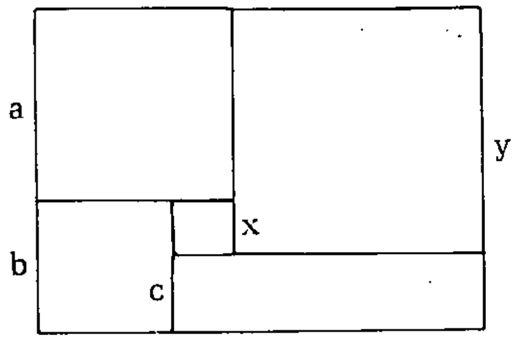


ش. ۳

قضیهٔ ۴. به ازاء هر n که $n \leqslant 5$، افراز یك مستطیل به n مربع ناهمنهشت ممکن نیست.

برهان. بنا بر قضیهٔ ۳، n حداقل باید ۵ باشد: زیرا

کوچکترین مربع باید به چهار مربع دیگر محصور شود. اینك فرض می‌کنیم $n=5$. دراین صورت افراز باید مطابق شکل ۴ باشد.



ش . ۴

فرض می‌کنیم کوچکترین مربع این افراز دارای طول ضلع x و مربع مجاور دارای طول ضلع y، و باقی مربعها دارای طول اضلاع a، b، c باشند (همان شکل). دراین صورت،

$$a+b=y+c \quad \text{و} \quad b+c=a+y$$

ازاینجا، با حذف y، $a=c$ و بالنتیجه $x=0$ که یك تناقض است. بنابراین، هیچ افرازی ازمستطیل به‌پنج مربع ناهمنهشت وجود ندارد (توضیح اینکه شکل ۴ صرفاً برای استخراج تناقض رسم شده است و همانگونه‌که ملاحظه می‌شود امکان تشکیل مربع به طول ضلع c در قسمت پایین، سمت راست، میسر نیست.) □

تبصره. به عهدهٔ خواننده است‌که به طریق مشابه ثابت‌کند که یك مستطیل را نمی‌توان را به ۶، ۷، و ۸ مربع ناهمنهشت افرازکرد.

قضیهٔ ۵. مستطیلی هست‌که می‌توان آن را به ۹ مربع ناهمنهشت افرازکرد.

برهان. با توجه به شکل ۵، معلوم می‌شودکه $a=x+y$، $b=y-x$، $c=y-2x$، $d=2y-3x$، $e=4x$، $f=5x+y$، و $g=9x+y$. از طرفی داریم

$$y+a+f=d+g \quad \text{و} \quad y+b+d=f+g.$$

از اولی رابطهٔ $6x=6x$ واز دومی رابطهٔ $y=9x$ به‌دست می‌آید. بنابراین مستطیل $33x \times 32x$ جواب مطلوب بست (x هرعدد حقیقی می‌تواند باشد). □

تبصره. باید توجه داشت‌که مربعهای پیدا شده در افراز مستطیل $33x \times 32x$ دوبه‌دو ناهمنهشت‌اند.

از قضیهٔ فوق معلوم می‌شودکه

نتیجه. مستطیلهایی موجودندکه می‌توان آنها را به مربعهای ناهمنهشت افرازکرد.

ج. ویلسون در ۱۹۶۴ نشان دادکه یك مربع را می‌توان به ۲۵ مربع ناهمنهشت افرازکرد [۳].

بالاخره، ثابت می‌کنیم که

قضیهٔ ۶. افراز یك مکعب مستطیل به تعدادی متناهی از مکعبهای دوبه‌دو ناهمنهشت ممکن نیست.

برهان. فرض‌کنیم چنین افرازی ممکن باشد. در این صورت قاعدهٔ این مکعب مستطیل به‌وسیلهٔ مکعبهای تحتانی این افراز به مربعهای ناهمنهشت افراز خواهد شد. واضح است که‌کوچکترین مربع باید در داخل این مستطیل قرارگیرد. این مربع را C_1 می‌نامیم. معلوم است‌که مکعبی‌که قاعدهٔ آن C_1 است به وسیلهٔ مکعبهای بزرگتر احاطه می‌شود. اینك مکعبهایی راکه بلافاصله روی C_1 قرار می‌گیرند در نظر می‌گیریم. به طریق مشابه، این مکعبها C_1 را به مربعهای ناهمنهشت افرازمی‌کنند و کوچکترین مربع که آن‌را C_2 می‌نامیم در داخل C_1 قرار می‌گیرد. با ادامهٔ این روش رشته‌ای نامتناهی از مکعبهای ناهمنهشت که قاعده‌های آنها مربعهای ناهمنهشت C_1، C_2، ... هستند پدید می‌آیدکه متناقض است با اینکه تعدادی متناهی از مکعبها، مکعب مستطیل مفروض را افراز می‌کند. □

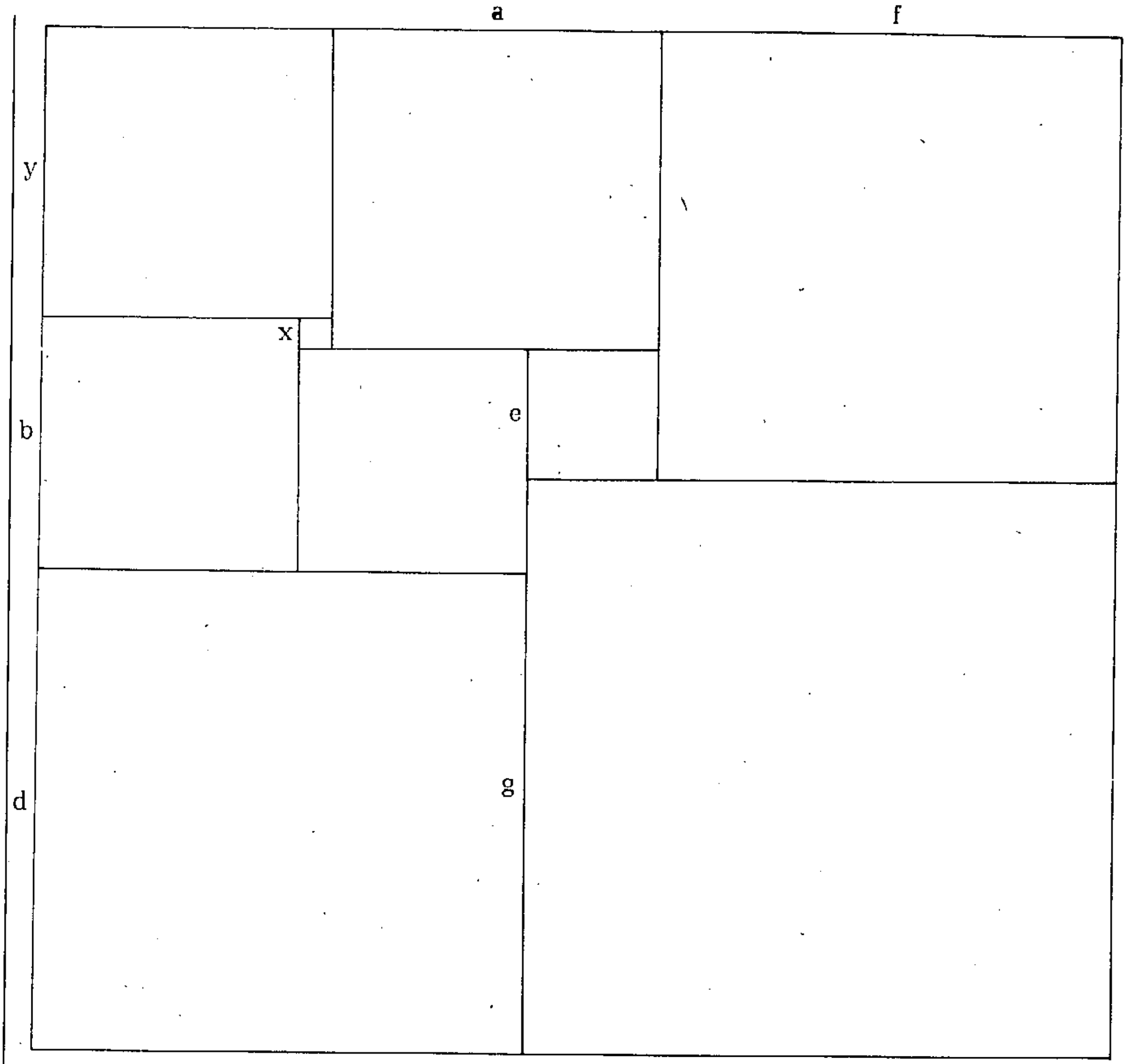
۳. چند سؤال

(آ) درصورت وجود، مستطیلی بیابیدکه بتوان آن را با ۹ مربع ناهمنهشت، متفاوت با آنچه‌که در متن مقاله‌آمد، افرازکرد.

(ب) آیا می‌توان افرازی از یك مستطیل را به مربعهای ناهمنهشت یافت‌که درآن چهار مربع افراز دارای رأس مشترکی باشند؟

(پ) شرایطی را برای اعداد a، b، و c طوری بیابید که مکعب مستطیل $a \times b \times c$ به مکعبهای همنهشت قابل افراز باشد.

خواننده برای ملاحظهٔ تمرینات مقدماتی در این موضوع می‌تواند به [۱] مراجعه‌کند.



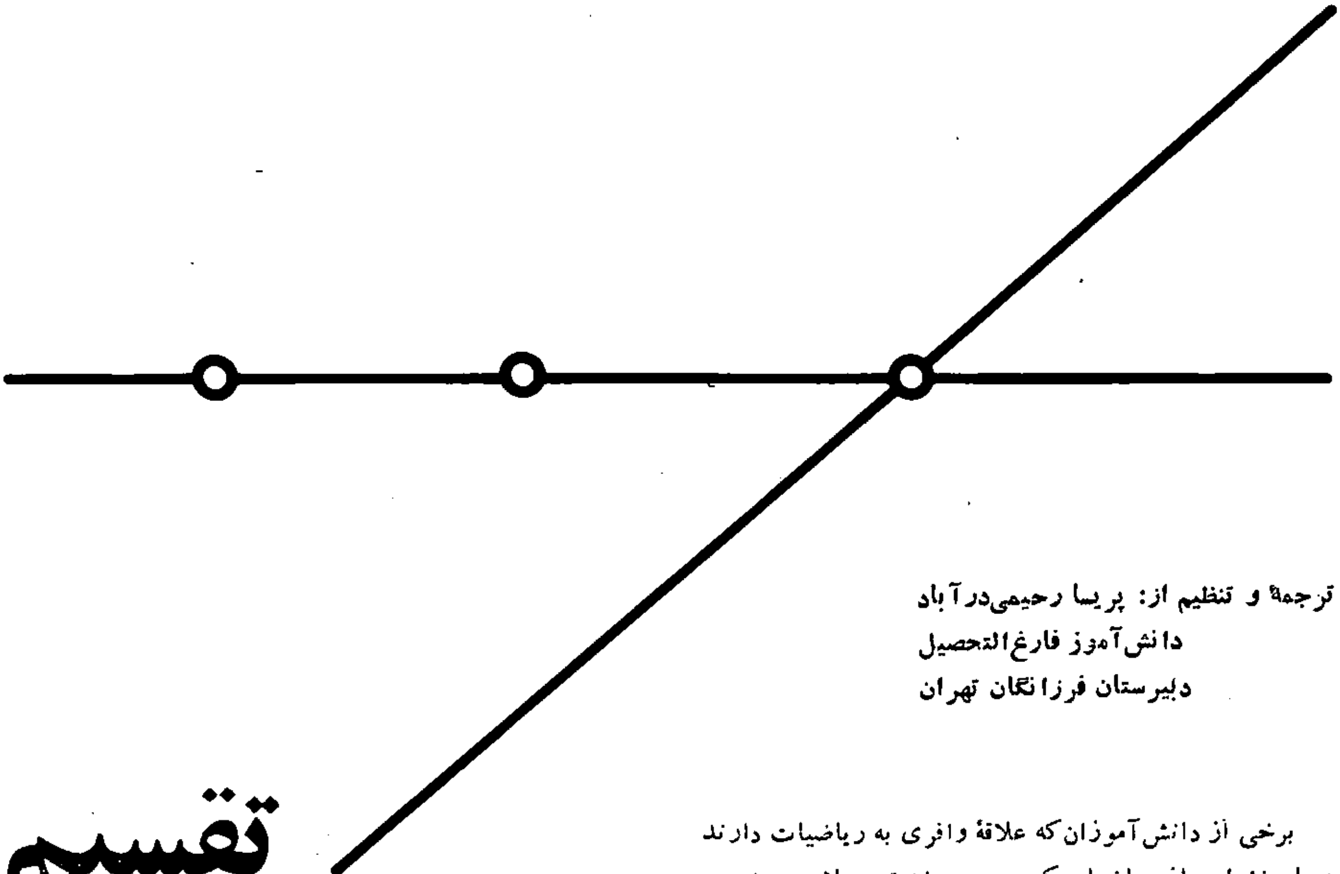
ش. ۵

مراجع

[1] Gerald Berman, K. D. Fryer, *Introduction to Combinatorics*, Academic Press, INC (1972).

[2] W. T. Tutte, *The dissection of equilateral triangles into equilateral triangles*, Proceedings Cambridge Philosophical Society, 44 (1948), 463_482.

[3] J. Wilson, *A. Method for Finding Simple Perfect Squarings*, Ph. D. thesis, University of Waterloo, 1964.



ترجمهٔ و تنظیم از: پریسا رحیمی‌درآباد
دانش‌آموز فارغ‌التحصیل
دبیرستان فرزانگان تهران

تقسیم یك پاره‌خط به نسبت مفروض

برخی از دانش‌آموزان که علاقهٔ وافری به ریاضیات دارند و با بخشهایی از ریاضیات که در دوران تحصیلات مدرسه آموخته‌اند ارضاء نمی‌شوند، برای کسب مطالب بیشتر به چه منابعی باید رجوع کنند؟

معلومات ریاضی آنهـا ممکن است عرضی یا عمقی گسترش یافته باشد. عرضی از راه مطالعهٔ شاخه‌هـای جدید ریاضیات. عمقی ـ با تحلیل دقیقتر مسائل مطرح شده در برنامه مدارس. شاخه‌ای از ریاضیات وجود ندارد که کسی بتواند ادعا کند: «من دانش کاملی از این را دارم.» ابتدائی‌ترین مسأله، روابط غیر قابل پیش‌بینی با مسائل دیگر را در خود پنهان دارد و این فرآیند تعمیق درمسائل، پایانی ندارد. ما چندین‌بار می‌توانیم به شاخه‌ای آشنا رجوع کنیم و (اگـر دقیق بیندیشیم.) هر بار چیزی تازه بیاموزیم.

این کتابچه خـوانده را به عمق مطالب هدایت می‌کند. با تجزیه وتحلیل مسأله بسیار مقدماتی، اینکه چگونه یك پاره‌خط را به‌نسبت داده شده تقسیم کنیم، مطالب جدید بسیاری خواهیم آموخت؟

چنین مسأله‌ای در فصل ۱ ارائه می‌شود. مقدمه کتاب شامل اطلاعات فنی است که برای توضیح موضوع اصلی ضروری است.

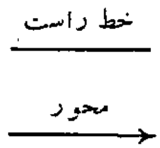
مقدمه:

۰۱ جهت‌دار کردن خط و یك پاره‌خط ـ هرخط راستی دو جهت متمایز دارد. **نسبت دادن یك جهت** برای یك خط راست

یعنی انتخاب یکی از این دو. خطی را که یکی از جهات برایش انتخاب شده باشد، **یك خط جهتدار یا یك محور** می‌گویند.

درآنچه می‌آید ما عبارت «خط راست» را به معنی خط مستقیم غیر جهت‌دار به کار می‌بریم. در روی این خط هر دو جهت معمولاً* هم‌ارز می‌باشد.

در یك شكل، جهت انتخاب شده به وسیلهٔ پیکان نشان داده می‌شود (شكل ۱). می‌توان گفت محور عبارت است از زوجی که از دو عضو تشکیل شده است: (۱) یك خط راست، (۲) یکی از دو جهت ممکن برروی آن.



شکل ۱

یك پاره خط بخشی از خط راست است که با دو نقطه محدود شده است. این نقاط **دو سرپاره خط** هستند (و به آن هم تعلق دارند). دو سر پاره خط می‌توانند **مرتب** باشند، یعنی می‌توان یکی را نقطهٔ اول و یکری را نقطهٔ دوم گرفت. معمولاً* نقطهٔ اول را **نقطهٔ ابتدائی** پاره‌خط و دومی را **نقطهٔ انتها** یا به‌طور ساده **انتهای** پاره خط می‌نامند. پاره خطی با دو سر مرتب پاره خط جهت داده شده[1] نامیده می‌شود.

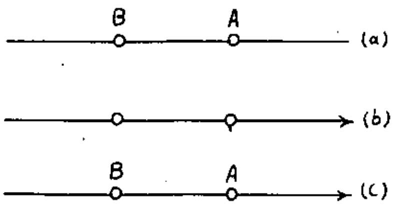
در یك شكل برای نشان دادن اینکه پاره خطی جهت‌دار است دو سر آن باید به طور متفاوت علامت‌گذاری شود، مثلاً* با دو حرف متمایز، یا با یك پیکان در یکی از دوسر آن وغیره. می‌توان گفت یك پاره خط جهت‌دار زوجی است تشکیل شده از: (۱) یك پاره خط؛ (۲) یکی از دو سر آن (که به عنوان نقطهٔ ابتدای اول یا ابتدائی منظور می‌شود).

اگر یك پاره خط به وسیلهٔ دو نقطه علامت گذاری شود و جهت‌دار نباشد، دنباله حروف دلخواه است: AB یا BA یك پاره خط است. اگر پاره خط جهت‌دار باشد نقطه ابتدا در اول و نقطهٔ انتها بعداً قرار می‌گیرد. دراین حالت AB و BA دو پاره خط متفاوتند (آنها دارای جهت‌های متفاوت هستند).

۲. پاره خطهای جهت‌دار – پاره خط جهت‌دار داده شده واقع بریك محور، **پاره جهت‌دار**[2] نامیده می‌شود.

در شكل ۲a، پاره خط AB (A نقطهٔ ابتدایی و B نقطهٔ انتهایی است) جهت‌دار نیست: خود آن جهت دارد ولی خط راستی که پاره خط برروی آن واقع است، جهت‌دار نیست.

پاره خط نشان داده شده درشكل (۲b) نیز جهت‌دار نیست (زیرا خودش فاقد جهت می‌باشد). پاره خط AB در شکل (۲c) پاره خطی جهت‌دار است.



شکل ۲

در اینجا نتیجه می‌شود که برای مشخص کردن یك پاره خط جهت‌دار، باید دوجهت ارائه بدهیم: (۱) برای خودپاره‌خط، (۲) برای خط راستی که پاره خط برروی آن واقع است. دوجهت دهی به طور مستقل ارائه می‌شوند یعنی هر یك از آنها می‌توانند به دو طریق ممکن ارائه شود.

هر پاره خط طولی دارد. این طول یك عدد غیر منفی است. فقط در حالت انطباق دو سر پاره خط، طول آن مساوی صفر می‌شود؛ یعنی هنگامی که پاره خط تبدیل به نقطه شود. طول هر پاره خط تبدیل نشده اکیداً مثبت است. طول پاره خط AB با نماد AB نمایش داده می‌شود. درتعیین طول یك پاره خط، جهت آن تأثیری ندارد.

علاوه بر طول پاره خط علامتی نیز مطابق الگوی زیر برای هر پاره خط جهت‌دار نسبت داده می‌شود.

پاره خط جهت‌دار مثبت (منفی) است اگر جهش[3] با جهت محور یکی باشد (نباشد).

اگر پاره خطی، ولو جهت‌دار، برروی خط راست بدون جهتی واقع باشد، هیچ علامتی به آن نسبت داده نمی‌شود.

بنابراین پاره خط جهت‌دار توسط اعداد حقیقی، مثبت و منفی، نشان داده می‌شود. به عنوان مثال نماد:

$$AB = -۳$$

به این معنی است که: (۱) طول پاره خط AB مساوی ۳ است، (۲) جهت پاره خط AB عکس جهت محوری است که پاره خط بر آن واقع است (با جهت اخیر مطابقت ندارد).

دراینجا نماد AB هم زمان، يك شکل هندسی (پاره خطی جهت‌دار) و عددی را که با آن متناظر است مشخص می‌کند.

تجربه نشان می‌دهد که استفاده از این نماد مشکلی ایجاد نمی‌کند. حتی به کاربردن عبارت «پاره خط جهت‌دار فوق

مساوی ۳ــ است.» نیز مجاز است.

اگر A و B و C سه نقطه برروی یك محور باشند، آنگاه:

$$(۲.۱)\quad AB+BC=AC$$

تساوی فوق **قاعدهٔ زنجیری یا رابطهٔ شال** نامیده می‌شود که مفهوم عمیقی دارد و تفکر دربارهٔ آن ارزشمند است. اگر AB، BC و AC طول پاره‌خطهایی را نشان دهند، رابطهٔ (۲.۱) تنها وقتی که B بین دو نقطهٔ A و C باشد، درست خواهد بود. ولی اگر سروکارمان با پاره‌خطهای جهت‌دار باشد، رابطهٔ (۲.۱) با وضعیتهای نسبی A، B و C برقرار است. ازاین‌رو بدون تعیین شرایط خاص و یا توجه به ترسیم دارای کاربرد است. تنها دراین رابطه باید ترتیب حروف درنمادها را به خاطر سپرد.

اثبات فرمول (۲.۱) بسادگی بادرنظر گرفتن همه‌وضعیتهای B نسبت به پاره‌خط AC ممکن است.

با توجه به (۲.۱) پاره‌خط PQ واقع بریك محور بوسیلهٔ هر نقطهٔ X واقع بر همان محور بقسمی تقسیم می‌شود که:

$$PQ=PX+XQ$$

فرمول (۲.۱) به صورت زیر می‌تواند تعمیم داده شود:

$$(۲.۲)\quad AB+BC+CD+\cdots+KL+LM=AM$$

فرمول (۲.۲) **قاعدهٔ کلی زنجیری** نامیده می‌شود. اثبات آن بسهولت با نوشتن دنباله‌ای از روابط حاصل می‌شود: AC جانشین AB+BC می‌شود، سپس AD جانشین AC+CD و به همین ترتیب.

روشن است که با جابه‌جا شدن حروف درنمایش پاره‌خط جهت‌دار، جهت پاره‌خط تغییر می‌کند و بنابراین علامت آن نیز عوض می‌شود. (طول مطلق ثابت می‌ماند):

$$(۲.۳)\quad AB=-BA$$

فرمول (۲.۳) به طریق ساده معمولی از قرار دادن A به‌جای C در رابطه (۲.۱) به‌دست می‌آید. با استفاده ازپاره‌خطهای جهت‌دار می‌توان مختصات را برروی محور معرفی کرد. بدین منظور **باید نقطه‌ای مانند O را در روی محور به عنوان مبدأ مختصات درنظر بگیریم و واحد سنجشی نیز انتخاب کنیم.**

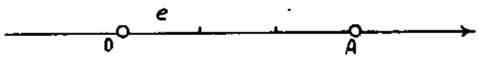
اگر A نقطه‌ای روی محور باشد، نسبت پاره‌خط جهت‌دار OA به واحد اندازه‌گیری e، یك مختص (یا طول) نقطهٔ A می‌باشد:

$$(۲.۴)\quad x=\frac{OA}{e}$$

بر دو نکته مهم باید تأکید شود:

(۱) واحد اندازه‌گیری e فاقد علامت است (یعنی، ما همواره آن را مثبت می‌گیریم). پس علامت طول x همان علامت پاره‌خط جهتدار OA است.

(۲) مختص بعد ندارد یعنی‌عددی مجرد است. درشکل (۳) طول نقطهٔ A، ۳ است (علامت آن مثبت است).



شکل ۳

فرض کنیددو نقطه با مختصاتشان برروی محور داده شده‌اند: $A(x_1)$ و $B(x_2)$.

عبارت نشان دهندهٔ پاره‌خط جهت‌دار AB چیست؟

برای یافتن جواب این سؤال ترسیم روش مناسبی نیست، دراین صورت باید وضعیتهای بسیار مختلفی را بررسی کنیم (کدام یك از مختصات بزرگتر است، علامتشان چیست، وضع مبدأ O نسبت به پاره‌خطهای AB چیست؟). محاسبهٔ ساده مسأله فوق را حل می‌کند:

$$AB=AO+OB=-OA+OB=x_2-x_1$$ [4]

بنابراین همواره:

$$(۲.۵)\quad AB=x_2-x_1$$

توجه: پاره‌خط جهت‌دار مساوی مختص نقطهٔ انتهایش منها مختص نقطهٔ ابتدای آن است.

در پایان، ویژگی دیگری ازپاره‌خطهای جهت‌دار را مطرح می‌کنیم. اگر AB=AC باشد، آنگاه نقطهٔ C برنقطهٔ B منطبق است و نمایش عبارت فوق با نمادها به صورت زیر است:

$$(۲.۶)\quad (AB=AC)\implies(C\equiv B)$$

(علامت $\implies$ به معنای «نتیجه می‌دهد» و علامت $\equiv$ به معنی «متحد است» می‌باشد).

فصل ۱

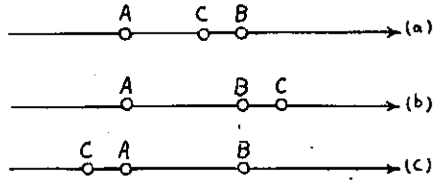
نسبت ساده[2]

۳. صورت مسأله. برای اینکه یك مسأله را به طور موفقیت‌آمیز حل کرد، قبل از هرچیز، فرمولبندی دقیق آن ضروری است.

فرمولبندی «تقسیم یك پاره‌خط به نسبت داده شده» از بسیاری جهات مبهم است؛ کدام پاره‌خط؟ جهت‌دار یا نه؟ آیا برروی محوری واقع است یا برروی یك خط راست؟ منظور از «نسبت» چیست؟

به تمام این سؤالات بعداً پاسخ داده خواهد شد فعلاً پاره‌خط جهت‌دار AB و نقطهٔ C را بر روی آن درنظر می‌گیریم (شکل ۴a). فرض می‌کنیم (همچنین فعلاً) که هرسه نقطه A و B و C متمایز باشند. نسبتی را که درآن نقطهٔ C پاره‌خط AB را تقسیم کرده است به صورت $\frac{AC}{CB}$ درنظر می‌گیریم، آن را با حرف یونانی λ نشان می‌دهیم:

$$(۳.۱) \quad \lambda = \frac{AC}{CB}$$



شکل ۴

ترتیب حروف در رابطهٔ (۳.۱) باید مورد توجه واقع شود زیرا هریك از حروف نقش متفاوتی دارند؛ به عبارت دیگر:

A ـ نقطهٔ شروع پاره‌خط است،

B ـ نقطهٔ پایان پاره‌خط است،

C ـ نقطهٔ تقسیم است،

نسبتی که با آن این نقطه، پاره‌خط را تقسیم می‌کند به شرح زیر ساخته می‌شود:

صورت کسر ـ از نقطهٔ شروع تا نقطهٔ تقسیم،

مخرج کسر ـ از نقطهٔ تقسیم تا نقطهٔ پایان.

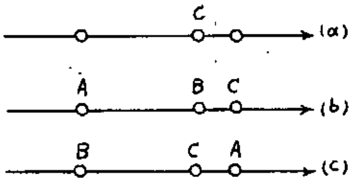
به عنوان مثال در شکل ۴a، نقطهٔ C پاره‌خط AB را به نسبت $\lambda = ۲$ تقسیم می‌کند.

توجه داشته باشید که تعریف فوق به هیچ‌وجه ایجاب نمی‌کند که نقطهٔ تقسیم داخل پاره‌خط واقع شود. درشکل ۴b نقطهٔ C در خارج AB ونزدیك به نقطهٔ انتهائی است. با این حال چیزی ما را از محاسبهٔ λ با فرمول (۳.۱) باز نمی‌دارد. در این شکل $AC > ۰$ ، $CB < ۰$ و $\lambda = -۳$ است. به هرحال عبارت «نقطهٔ C پاره‌خط AB را به نسبت $\lambda = -۳$ تقسیم می‌کند» نامأنوس است. ما عادت کرده‌ایم که تا از جملهٔ «نقطه پاره‌خط را تقسیم می‌کند» برداشت کنیم که نقطه، آن را به دو قسمت تقسیم می‌کند ولی در شکل ۴b نقطهٔ C خارج پارهٔ خط است؛ با این حال اگر خواننده ریاضیدان آینده است نباید از این مشکلات بترسد. در ریاضیات بسیار اتفاق می‌افتد که فرضیات و تئوریها تعمیم می‌یابند و اصطلاحات علمی بدون تغییر باقی می‌مانند، بقسمی که عبارات وفرمولهای سابق در حوزهٔ وسیعتری درك می‌شوند.

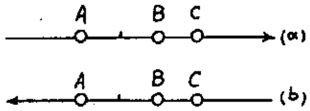
برحسب قرار داد می‌گوئیم هر نقطه‌ای که برروی پاره‌خط واقع است آن را به‌نسبت **داخلی** و هرنقطه واقع برخارج آن، پاره‌خط را به نسبت **خارجی** تقسیم می‌کند.

نسبت λ درهرحال با فرمول (۳.۱) محاسبه می‌شود. مثلاً در شکل ۴c نقطهٔ C پاره‌خط AB را به نسبت خارجی $\lambda = -\frac{۱}{۳}$ تقسیم می‌کند.

ازاین‌رو، کاملاً روشن کردیم که منظور از نسبت λ برای پاره خط جهت‌دار چیست حال دو سؤال زیر را مطرح می‌کنیم:



شکل ۵



شکل ۶

(۱) آیا ازویژگی پاره‌خط است که به‌هرترتیب جهت‌دار باشد؟

(۲) آیا خطی که پاره‌خط برروی آن واقع است این ویژگی را داردکه به هرترتیب جهت‌دار باشد؟

شکل ۵a که پاره‌خط بدون جهت را مشخص می‌کند، به چه نسبتی با نقطه C تقسیم شده است؟ این سؤال نمی‌تواند جواب داشته باشد. در شکلهای ۵b ، ۵b این پاره‌خط جهتهای متفاوتی دارد. و نتیجه؟ درشکل ۵b نقطهٔ C پاره‌خط AB را به نسبت $\lambda = ۲$ ودرشکل ۵c به نسبت $\lambda = \frac{۱}{۲}$ تقسیم می‌کند.

پس اولین سؤال ما باید به طور مثبت پاسخ داده شود. مسأله تقسیم یك پاره‌خط به‌نسبت مشخص‌در مورد پاره‌خطهای بدون جهت، بی‌معنی است.

به منظور پاسخ دادن به سؤال دوم، شکلهای ۶a ، ۶b را

بررسی می‌کنیم. تفاوت آنها فقط درجهت محور است. بدیهی است که اگر جهت محوری که نقاط A و B و C برآن واقعند تغییر کند، تنها علامت تمام پاره خطهای واقــع بر محور تغییر می‌کند و در نتیجه نسبت λ ثابت می‌ماند.

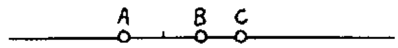
در شکل ۶a:

$$AC=+۳ \text{ و } CB=-۱ \text{ و } \lambda=-۳$$

در شکل ۶b:

$$AC=-۳ \text{ و } CB=۱ \text{ و } \lambda=-۳$$

از آنجا نتیجه می‌شود که به‌سؤال دوم باید منفی پاسخ‌داده شود. در مشخص‌کردن λ جهت خط راستی‌که پاره خط بر آن واقع است تأثیر ندارد. شکل (۷) با شکل (۶) تنها این تفاوت‌را دارد که پاره خط AB برخطی بدون جهت واقع است.



شکل ۷

ما نمی‌توانیم بــه پاره خطی کــه بر یك خط بدون جهت واقع است، علامتی نسبت دهیم ولی می‌توانیم علامتی را برای نسبت پاره خطها درنظر بگیریم.[۶]

برای به دست آوردن علامت نسبت نیازی به‌دانستن علامت تك‌تك پاره خطها نیست. تنها نکتهٔ مهم این است‌که آیا دو پاره خط هم‌جهتند یا خیر.

مسأله تقسیم یك پاره خط به نسبت داده شده تنها مربوط به پاره خطهای جهت‌داری است که بر یك خط راست بدون جهت واقعند.

به هــرحال اگــر خط راست بدون جهت باشد، چگــونه مــی‌توانیم λ را محاسبه‌کنیم؟ فرمول (۳.۱) در این حــالت کارآئی ندارد چــون علامت‌دار بــودن پارهٔ خطهــا را اقتضا می‌نماید.

۱۰ اگر A و B و C سه نقطه بر یك خط راست باشند و نسبتی کــه نقطهٔ C پارهٔ خط AB را به آن تقسیم مــی‌کند، عدد λ باشد، قدرمطلق آن مساوی نسبت طول پاره خط AC به CB می‌باشد:

$$|\lambda| = \frac{AC}{CB}$$

این نسبت مثبت (منفی) است اگــر نقطهٔ C داخل (خارج) پاره خط AB باشد.

این حائز اهمیت است. زیرا نشان مــی‌دهد کــه محاسبهٔ λ روی یك خط راست بدون جهت ممکن است.

با این وجــود در حــل مسائل بــه کاربردن روشی متفاوت مناسبتر است، به عبارت دیگر، بهتر است به خط راست جهتی داده شود زیرا می‌دانیم که مقدار λ مستقل‌از جهت خط راست است. وانگهی λ برای یك خط راست جهت‌دار، به‌طورکامل توسط فرمول(۳.۱) تعیین می‌شود. (هم قدرمطلق‌وهم علامتش). این روش مناسب است زیــرا اجازه مــی‌دهدکــه ویژگیهای پاره‌خطهای جهت‌دار را بــه طور مستقل از حــالتهای خاص شکل به کار بگیریم.

حالتی‌کــه C بر A یا B منطبق باشد باقی مــی‌ماند. در حالت اول طبق فرمول (۳.۱)، $\lambda=۰$ مــی‌شود. در حالت دوم، فرمول (۳.۱) معنایــی ندارد (مخرج طرف راست صفر می‌شود). در این حالت طبق قرار داد $\lambda=\infty$ می‌شود ولی این فقط یك علامت اختصاری برای حقیقت زیر است: «نقطهٔ تقسیم برانتهای پاره‌خط منطبق‌است». نماد ∞ نباید یك عدد تلقی شود. هیچ علامتی به‌آن نسبت داده نمی‌شود (نه همیشه در ریاضیات، بلکه در مسأله مورد نظر) ــ نه $+\infty$ است و نه $-\infty$ است ــ به طور ساده ∞ است. بــرای این قرار داد دلایلی وجود داردکه در فصل ۲ مورد بحث قرار خواهند گرفت.

چون نماد $\frac{AC}{CB}$ تا حدی ناموزون است نماد دیگری‌که ساده‌تر است به کار می‌رود، یعنی (ABC):

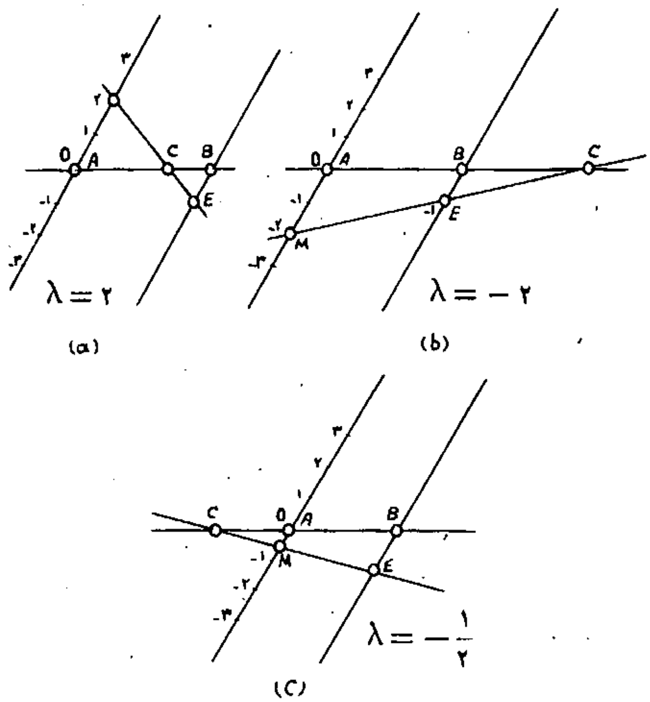
$$\lambda=(ABC) \qquad (۳.۲)$$

وهمچنین عبارتی ساده‌تر: نسبت سادهٔ سه نقطه (هم‌راستا، یعنی واقع بریك خط راست). در نماد نسبت ساده، نقطهٔ آغازین پاره‌خط در ابتدا می‌آید وسپس پایانی و درآخر نقطهٔ تقسیم. کاملاً است کــه نسبت سادهٔ λ چیست. حــال باید مسألهٔ تقسیم یك پاره‌خط به‌نسبت مشخص را شکل بدهیم. شکل دادن چنین است:

پاره خط AB و عــدد λ داده شده‌اند. منظور پیدا کــردن نقطه C است بقسمی کــه پاره‌خط AB را به نسبت λ تقسیم کند.

توجه. در همهٔ مسائل فرض می‌کنیم‌که پاره خط تبدیل یافته نیست، یعنی نقاط A و B متمایزند و λ نیز هر مقدار حقیقی‌را می‌تواند بپذیرد یعنی، $-\infty < \lambda < \infty$.

۴. حل این مسأله. فرمول‌بندی صورت مسأله لزوماً بــه این معنا نیست‌که مسأله می‌تواند حل شود اگر هم قابل حل باشد نمی‌توانیم بگوئیم‌که جواب منحصر به‌فرد است.



شکل ۸

پیش‌از همه ثابت خواهد شدکه به ازای هر λ مسأله نمی‌تواند بیش‌از یك جواب داشته باشد. فرض‌کنیم دو نقطه C و C' وجود داشته باشندکه پاره‌خط AB را به یك نسبت تقسیم‌کنند:

$$\frac{AC}{CB}=\frac{AC'}{C'B}$$

و یا با تفکیك‌کردن پاره‌خط درصورت‌کسر به دو قسمت توسط نقطهٔ B خواهیم داشت:

$$\frac{AB+BC}{CB}=\frac{AB+BC'}{C'B}$$

$$\frac{AB}{CB}-۱=\frac{AB}{C'B}-۱\,,$$

$$\frac{AB}{CB}=\frac{AB}{C'B}\,,$$

$$BC=BC'\,.$$

بنابراین با توجه به(۲.۶) نقطهٔ C' بر C منطبق است. نتیجه می‌شودکه اگر برای λ مشخصی این مسأله دارای جواب باشد، این جواب منحصر به‌فرد است. اینکه‌آیا مسأله در تمام حالات جواب دارد در پروسه حل معلوم می‌شود.

دو خط راست موازی از نقاط A و B رسم می‌کنیم (شکل ۸). خط اول را به قسمتهای مساوی تقسیم می‌کنیم بطوری‌که A نقطه ابتدائی باشد. برروی خط دوم در جهت مخالف یك واحد جدا می‌کنیم (یعنی $BE=۱$). حال همه چیز برای حل مسأله آماده است. نقطهٔ M را متناظر با مقدار مشخص λ برروی محور عددی درنظر می‌گیریم و آن‌را به E وصل می‌کنیم. محل تقاطع دو خط ME و AB نقطهٔ موردنظر یعنی C است.

در واقع مثلثهای AMC و BEC متشابهند. بنابراین،

$$\frac{AC}{CB}=\frac{AM}{BE}$$

توجه. فقط طول قطعات در تناسب منظور می‌شود زیرا هندسهٔ مقدماتی و بویژه نظریه مثلثهای متشابه قطعات را بدون علامت درنظر می‌گیرد. چون $BE=۱$، تناسب بالا را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{AC}{CB}=|\lambda|$$

همین استدلال برای هر سه حالت نشان داده شده در شکل(۸) صدق می‌کند.

باقی می‌ماندکه ثابت‌کنیم‌که علامت $\frac{AC}{CB}$ و λ یکی است. واضح است‌که اگر $\lambda > ۰$، نقطهٔ C داخل پاره‌خط و اگر $\lambda < ۰$، خارج پاره‌خط است. پس:

$$\frac{AC}{CB}=\lambda$$

تنها در حالتیکه خطوط راست AB و ME موازی هستند و $\lambda=-۱$، این ترسیم نقطهٔ C را بدست نمی‌دهد. درنتیجه با $\lambda=-۱$ یا ترسیم فوق جوابی به دست نمی‌دهد یا اصلاً جوابی وجود ندارد. می‌توان به‌آسانی مطمئن شدکه جوابی وجود ندارد. در واقع تقسیم پاره‌خط AB به نسبت $\lambda=-۱$ چه معنایی دارد؟ یعنی باید نقطهٔ C را چنان بیابیم که: (۱) ازنقاط A و B به یك فاصله باشد (چون $|\lambda|=۱$) و (۲) خارج از پاره‌خط AB باشد (چون $\lambda < ۰$). چنین نقطه‌ای وجود ندارد، زیرا هر نقطه‌ای‌که خارج پاره‌خط باشد به یکی از دو سر آن از سر دیگر نزدیکتر است.

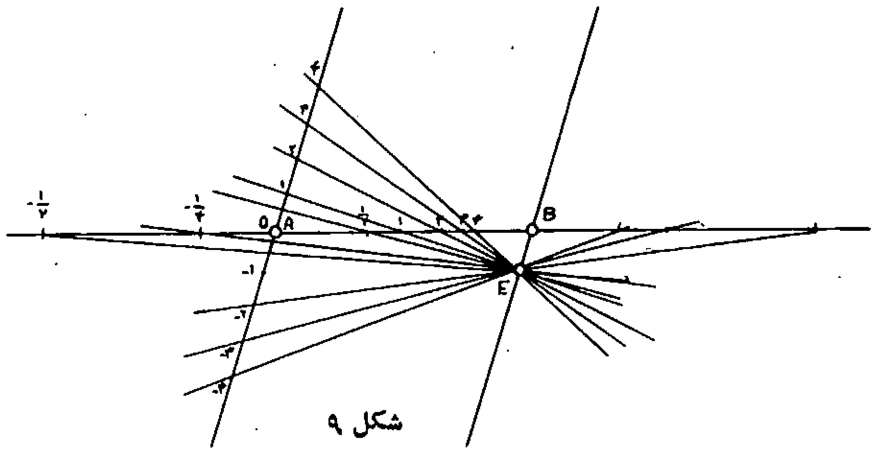
توجه‌کنیدکه اگر $\lambda=۰$ باشد، نقطهٔ C بر A منطبق است و اگر $\lambda=\infty$، نقطهٔ C منطبق بر B می‌باشد.

مسألهٔ تقسیم یك پاره‌خط به نسبت داده شده برای هر λ فقط و فقط دارای یك جواب است به غیراز حالت $\lambda=-۱$. به ازای $\lambda=-۱$ مسأله جوابی ندارد.

هر مقداری از λ (بغیراز $\lambda=-۱$) متناظر با نقطهٔ

مشخصی از خط راست AB است و بعکس، هر نقطه‌ای از خط راست AB متناظر با مقدار مشخصی λ است. مطالعهٔ این تناظر تا حدی جالب است، یعنی جالب توجه است که به روشنی نشان داده شود مقادیر مختلف λ چگونه برروی خط راست AB توزیع می‌شوند. این کار می‌تواند از راه هندسی یا تحلیلی صورت گیرد.

نمایش هندسی آن برپایهٔ ترسیمی است که در شکل (۸) نشان داده شده است. از نقطهٔ E خطوط راست بسیاری رسم می‌کنیم و نشانه‌های متناظر هر خط را از خط راست A1 به خط راست AB انتقال می‌دهیم (شکل ۹). مقادیر منفی که قدرمطلقشان کمتر از واحد است خارج پاره‌خط و نزدیک نقطهٔ



شکل ۹

شروع می‌افتند و آنهائی که قدرمطلقی بزرگتر از واحد دارند نزدیک نقطهٔ انتهایی پاره‌خط قرار می‌گیرند.

اجازه بدهید که حال روش تحلیلی را شرح دهیم. مختصات را برروی خط راست AB معرفی می‌کنیم. نقطهٔ A را مبدأ و جهت محور را از A به B درنظر می‌گیریم (گرچه این شرط لازم نیست). نقطهٔ B دارای مختصه a است ($a > 0$) و a طول پاره‌خط AB است. حال روی محور نقطهٔ دلخواه $C(x)$ را درنظر می‌گیریم. پس:

$$\frac{AC}{CB} = \lambda$$

و یا طبق فرمول (۲.۵)

$$\frac{x-0}{a-x} = \lambda$$

بنابراین

$$x = \frac{\lambda a}{1+\lambda}$$

به این ترتیب دو فرمول داریم که λ را برحسب x و x را برحسب λ به دست می‌دهد:

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{x}{a-x} \\ x = \dfrac{\lambda a}{1+\lambda} \end{cases} \qquad (۴.۱)$$

با انتخاب نقاط مختلف روی محور می‌توانیم λ را با فرمول اولی در (۴.۱) تعیین کنیم. برعکس با فرض کردن مقداری برای λ، فرمول دوم؛ پیدا کردن نقطهٔ x و قرار دادن آن در شکل را ممکن می‌سازد. جهت محور در نتیجه اثری ندارد.

۵. تعبیر مکانیکی مسأله ـ جرمهای m_1 و m_2 را بترتیب درنقاط A و B قرار می‌دهیم و مرکز ثقل این دو نقطهٔ مادی را پیدا می‌کنیم. مرکز ثقل برروی پاره‌خط AB واقع است و آن را متناسب نسبت عکس جرمهای مجاور تقسیم می‌کند، یعنی:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{m_2}{m_1}$$

(C نشان دهندهٔ مرکز ثقل مورد نظر است). بنابراین مسأله تقسیم پاره‌خط AB به نسبت $\lambda = \frac{3}{2}$ می‌تواند به‌صورت زیر تعبیر شود: جرم ۲ را در نقطهٔ A و جرم ۳ را در نقطهٔ B قرار می‌دهیم، مرکز ثقل، نقطهٔ خواسته شده است.

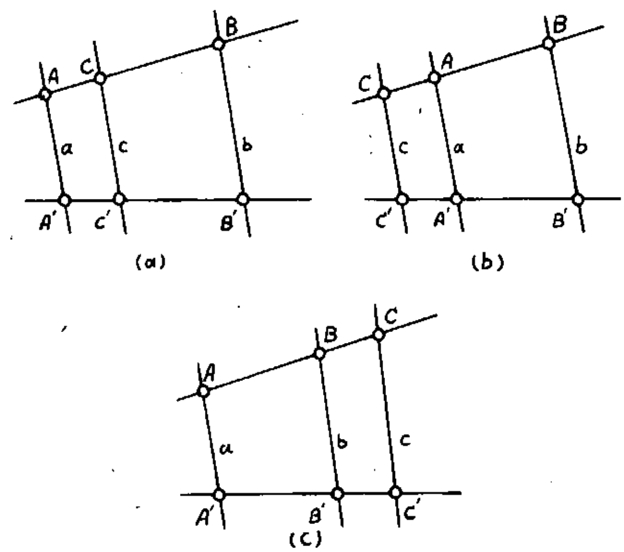
این تعبیر نکته‌ای دارد: فقط می‌تواند در مورد $\lambda > 0$ به کار رود. برای به کار بردن آن در مورد $\lambda < 0$ باید جرمهای منفی را نیز تعریف کنیم.

۶. خاصیت پایائی نسبت ساده در تصویر موازی ـ عبارت «خاصیت پایا» به این معنی است که نسبت تغییر نمی‌کند. عنوان این بخش ویژگی زیر را توضیح می‌دهد:

اگر سه نقطه واقع بر یك خط راست (هم راستا) توسط

خطوط موازی (مصور) برخط راست دیگری تصویر شوند، نسبت آنها ثابت باقی می‌ماند.

مفهوم عبارت «توسط خطوط موازی برروی خط راست دیگری تصویر شوند»، به روشنی درشکل (۱۰) مشخص است. تصویرکننده‌های a و b و c از نقاط A و B و C رسم شده‌اند. نقاط تقاطع این خطوط باخط راستی که نقاط را بر آن تصویر می‌کنیم؛ یعنی A′ و B′ و C′ تصاویر موازی نقاط A و B و C نامیده می‌شوند.



شکل ۱۰

اثبات. با توجه به قضیه مربوط به تناسب پاره خطهایی که توسط خطوط موازی برروی اضلاع یك زاویه بریده می‌شوند خواهیم داشت:

$$\frac{A'C'}{C'B'}=\frac{AC}{CB}$$

و یا

$$\left|\frac{A'C'}{C'B'}\right|=\left|\frac{AC}{CB}\right|.$$

باقی می‌ماند اینکه نشان داده شود که دونسبت ساده $\frac{A'C'}{C'B'}$ و $\frac{AC}{CB}$ هم علامت‌اند.

این وضع روشن است: اگر نقطهٔ C بین A و B باشد، نقطهٔ C′ نیز بین A′ و B′ قرار می‌گیرد (شکل ۱۰a) و دو نسبت مثبتند. اگر نقطهٔ C خارج پاره خط AB واقع شود، نقطهٔ C′ نیز خارج پاره خط A′B′ می‌افتد (شکل ۱۰b و ۱۰c) و هر دو نسبت منفی می‌باشند. بنابراین ثابت می‌شود که:

$$\frac{A'C'}{C'B'}=\frac{AC}{CB} \qquad (۶.۱)$$

و یا

$$(ABC)=(A'B'C')$$

این ویژگی از دیدگاه دیگری نیز می‌تواند مورد توجه واقع شود:

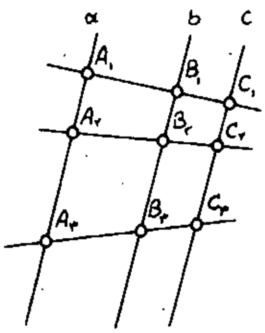
سه خط موازی a و b و c هر خط راست را (اگر با آنها موازی نباشد) به نسبت ثابتی تقسیم می‌کند.

بنابراین در شکل (۱۱)

$$(A_1B_1C_1)=(A_2B_2C_2)=(A_3B_3C_3)=\cdots$$

چون نسبت ساده به خط قاطع بستگی ندارد متعلق به سه خط a و b و c است.

حال می‌توانیم گامی فراتر برداریم. تاکنون فقط نسبت سادهٔ سه نقطه برروی یك خط راست را مطرح کرده بودیم. اکنون مفهوم نسبت سادهٔ سه خط راست موازی را معرفی می‌کنیم.

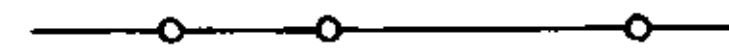


شکل ۱۱

نسبت سادهٔ مرتب سه‌تائی خطوط موازی، نسبت سادهٔ سه نقطه‌ای است که توسط این سه خط بر هر خط راست قاطع پدید می‌آید.

۷. جابجائی اعضاء در یك نسبت ساده ـ شکل (۱۲) سه نقطه واقع بریك خط راست را نشان می‌دهد. نسبت سادهٔ آنها چیست؟ به این سؤال نمی‌توان پاسخ داد زیرا نقاط مرتب نیستند. و به طرق مختلفی می‌توانند مرتب شوند. لذا به این سه نقطهٔ مرتب نشده مقادیر متفاوت متعددی از λ متناظر است. چند تا؟

برای مرتب کردن سه نقطه شش حالت ممکن وجود دارد: (ABC)، (BAC)، (ACB)، (CAB)، (BCA)، (CBA). خط راستی که نقطه‌هایمان بر آن واقعندرا به‌طریقی مرتب می‌کنیم ونسبت سادهٔ (ABC) را با λ نمایش می‌دهیم:



شکل ۱۲

$$(۷.۱)\quad \lambda=(ABC)=\frac{AC}{CB}.$$

در محاسبات بعدی ازویژگیهای (۲.۱) و (۲.۳) پاره‌خطهای جهت‌دار استفاده می‌کنیم. هربارکه به پارخط AB یا BA برسیم، آن را با نقطهٔ C تقسیم خواهیم‌کرد.

پنج نسبت بقیه را محاسبه می‌کنیم:

$$(BAC)=\frac{BC}{CA}=\frac{-CB}{-AC}=\frac{۱}{\lambda}$$

توجه. اگر نقاط ابتدا و انتهای پاره خط را جابه‌جا کنیم، نسبت ساده به عکس آن تبدیل می‌شود.

بعلاوه

$$(ACB)=\frac{AB}{BC}=\frac{AC+CB}{-CB}$$

$$=\frac{-AC}{CB}-۱=-(۱+\lambda)$$

لزومی ندارد که نسبت دیگر (CAB) را از روش بالا محاسبه کنیم. می‌توانیم الگوی جابجایی نقاط ابتدا وانتهاکه هم‌اکنون بیان کردیم، استفاده کنیم:

$$(CAB)=-\frac{۱}{۱+\lambda}$$

بعلاوه

$$(BCA)=\frac{BA}{AC}=\frac{AC+CA}{AC}$$

$$=\frac{-CB-AC}{AC}=\frac{-۱-\dfrac{AC}{CB}}{\dfrac{AC}{CB}}$$

$$=-\frac{۱+\lambda}{\lambda}.$$

بار دیگر با جابه‌جایی نقاط ابتدا و انتها حاصل می‌شود:

$$(CBA)=-\frac{\lambda}{۱+\lambda}.$$

نتایج بدست آمده را جدولبندی می‌کنیم. نسبت دادن حروف مشخص به این نقاط نامطلوب است زیرا در حالات دیگر ممکن است حروف دیگری برای نامگذاری نقاط به‌کار روند. فقط محل اشغال شده وسیله اعضا(احتمالاً نه‌نقاط بلکه خطوط راست) یك نسبت ساده مهم است. بنابراین اعداد ۱، ۲ و ۳ را جانشین حروف A و B و C می‌کنیم:

$$(۷.۲)\quad \begin{cases} (۱۲۳)\lambda & (۳۱۲)=-\dfrac{۱}{۱+\lambda} \\ (۲۱۳)=\dfrac{۱}{\lambda} & (۲۳۱)=-\dfrac{۱+\lambda}{\lambda} \\ (۱۳۲)=-(۱+\lambda) & (۳۲۱)=-\dfrac{\lambda}{۱+\lambda} \end{cases}$$

از این‌رو، می‌بینیم که هرسه‌تایی نامرتب، با توجه به طریقهٔ مرتب کرد نشان چندین نسبت ساده ایجاد می‌کند. به عنوان مثال، نسبتهای سادهٔ زیر متناظر با سه‌تایی نشان داده شده در شکل (۱۲) است:

$$۲\ ,\ \frac{۱}{۲}\ ,\ -۳-\frac{۱}{۳}\ ,\ -\frac{۳}{۲}\ ,\ -\frac{۲}{۳}$$

چند نسبت سادهٔ متمایز، متناظر با یك سه‌تایی نامرتب می‌باشد؟ عموماً شش نسبت، همان گونه که جدول (۷.۲) نشان می‌دهد. چرا کلمهٔ «عموماً» را به‌کار می بریم؟ زیرا مقادیر جدول (۷.۲) همواره متفاوت نیستند. با ترتیبهای خاصی از نقاط ممکن است که بعضی‌از مقادیر باهم منطبق شوند. حال این وضعیتها را پیدا می کنیم.

این مسأله بسیار جالب است. درنظر اول، این گمان پدید می‌آید که سه‌تایی‌های خیلی زیاد با این خصوصیت وجود دارند، اما معلوم می‌شودکه چنین سه‌تایی فقط یکی است.

برای حل این مسأله، یك زوج از جدول (۷.۲) را درنظر می‌گیریم وآنها را مساوی قرار می‌دهیم و λ را پیدا می‌کنیم. لازم به توضیح است که نه فقط یك نسبت ساده معین را با λ نشان داده‌ایم بلکه یکی از شش‌تارا. کافی است λ را با سایر عبارات مساوی قرار دهیم. این کار متغیرهای ممکن را به پنج کاهش می‌دهد. فرض می‌کنیم هرسه نقطه متمایز هستند. سه‌تایی‌های تبدیل شده (که عناصرشان برهم منطبقند) جلب توجه نمی‌کنند: واضح است اگر دونقطه برهم منطبق باشند، جابه‌جایی آنها باعث تغییرنسبتشان نمی‌شود. یعنی باید مقادیر $\lambda=۰$ و $\lambda=\infty$ را غیر قابل قبول درنظر بگیریم.

حال پنج متغیر را درنظر می گیریم:

چون $\lambda=-۱$ غیر ممکن است فقط جواب $\lambda_۱=۱$ قابل قبول است.

$$(۱)\qquad \lambda=\frac{۱}{\lambda}\ ,\ \lambda^۲=۱\ ,\ \lambda=\pm۱$$

۲) $\lambda=-(1+\lambda)\quad :\lambda_2=-\frac{1}{2}$

در نتیجه ریشه‌ها موهومی هستند.

۳) $\lambda=-\frac{1}{1+\lambda}$

مانند فوق

۴) $\lambda=-\frac{1+\lambda}{\lambda}$

پس‌از حذف جواب $\lambda=0$ داریم $\lambda=-2$.

۵) $\lambda=\frac{-\lambda}{1+\lambda}$

سه مقدار

$$\lambda_3=-2\ ,\ \lambda_2=-\frac{1}{2}\ ,\ \lambda_1=1$$

به دست می‌آوریم.

حالا به خاطر آوریم که در جستجوی سه‌تائی نامرتبی هستیم که شش مقدار از λ متناظر با آن است، نه یکی. با استفاده از سه مقدار به دست‌آمده برای λ، شش نسبت ساده را تشکیل می‌دهیم. سه ردیف این جدول منطبق می‌شوند و فقط ترتیب مقادیر عوض می‌شود. بنابراین سه مقدار λ را باید به عنوان یك جواب درنظر بگیریم. مقادیر فوق متناظر با سه نقطه‌ای هستند که یکی از آنها وسط پاره‌خطی است که توسط دونقطهٔ دیگر محدود می‌شود.

عموماً متناظر با هر سه‌تائی نامرتب از نقاط متمایز، شش مقدار متفاوت برای نسبت ساده موجود است؛ فقط یك استثناء هست. سه‌تایی که نقطهٔ سوم آن وسط پاره خط محدود به دو نقطهٔ دیگر است. تنها سه مقدار متفاوت برای نسبت سادهٔ متناظر با چنین سه‌تائی وجود دارد.

λ	$\frac{1}{\lambda}$	$-(1+\lambda)$	$-\frac{1}{1+\lambda}$	$-\frac{1+\lambda}{\lambda}$	$-\frac{\lambda}{1+\lambda}$
۱	۱	−۲	−۱/۲	−۲	−۱/۲
−۱/۲	−۲	−۱/۲	−۲	۱	۱
−۲	−۱/۲	۱	۱	−۱/۱	−۲

روشن است که تعویض نقاط انتهائی پاره خط در این نوع سه‌تائی چیزی بیان نمی‌کند و نمی‌تواند مقدار نسبت ساده را تغییر دهد.

۸. خاصیت گروهی یك نسبت ساده ـ مفهوم گروه یکی از مفاهیم اساسی در ریاضیات است که نمی‌تواند به طور تصادفی ذکر شود و یا بسادگی گفته شود. قصد داریم دربارهٔ خاصیت گروهی یك نسبت ساده بدون ارتباط با مفهوم عمومی یك گروه، صحبت کنیم. خواننده این کتابچه باید فعلاً محتوای این بخش را به عنوان یك مفهوم مجزا و خاصیت جالب توجه نسبت ساده درنظر بگیرد.

بعدها، با مأنوس شدن با نظریه گروهها[۷]، خواننده متوجه خواهد شد که این خاصیت، به تصورات عمیقی مربوط است. همچنین این مثالی از یك مطالعه عمیق است.

خاصیت گروهی نسبت ساده می‌تواند بدشرح زیر بیان شود:

اگر هر یك از شش عبارت (برای λ)

$$\left.\begin{cases} a_1=\lambda\ ,\ a_2=\frac{1}{\lambda}\ ,\ a_3=-(1+\lambda) \\ a_4=\frac{-1}{1+\lambda}\ ,\ a_5=-\frac{1+\lambda}{\lambda}\ ,\ a_6=\frac{-\lambda}{1+\lambda} \end{cases}\right\} \quad (8.1)$$

در یك عبارت دیگر قرار داده شود بازهم یکی دیگر از شش عبارت به دست می‌آید.

این حقیقت از دیدگاه دیگری نیز قابل بررسی است. هر a_i تابعی از λ است:

$$a_i=f_i(\lambda) \qquad (i=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \cdots\ ,\ 6).$$

با جایگزینی یکی از این توابع به جای متغیر، عبارت زیر حاصل می‌شود.

$$(a) \qquad f_i[f_j(\lambda)].$$

$$(i=1\ ,\ 2\ ,\ \cdots\ ,\ 6\ ;\ j=1\ ,\ 2\ ,\ \cdots\ ,\ 6)$$

(حالتی‌که $i=j$ است مانعی ندارد). ثابت می‌شود تابع (a) تابع جدیدی نیست بلکه یکی از همان شش تابع اول است:

$$(8.2) \qquad f_i[f_j(\lambda)]=f_k(\lambda)$$

بنابراین این عملیات (با توجه به ملاحظات جایگزینی یکی‌از مقادیر توابع $f_i(\lambda)$ به جای λ) به چیزجدیدی منجر نمی‌شود: یعنی چیزی جز شش تابع اصلی حاصل نمی‌شود.

چگونه این می‌تواند ثابت شود؟ می‌توانیم تمام ۳۶ حالت ترکیب i و j را درفرمول (۸.۲) آزمایش کنیم. به عنوان مثال $i=3$ و $j=6$ را درنظر می‌گیریم، یعنی داریم:

$$a_3=-(1+\lambda)$$

و

$$a_6=-\frac{\lambda}{1+\lambda}$$

را به جای λ قرار می‌دهیم:

$$-(1+a_6)=-\left(1+\left(-\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)\right)$$
$$=-\frac{1}{1+\lambda}=a_4$$

که نتیجه می‌دهد:

$$f_3[f_6(\lambda)]=f_4(\lambda)$$

هرچند این روش برهان، خوانندهٔ کنجکاو را ارضاء نمی‌کند. اگر ۳۶ بررسی فرض‌ها را تأیید کنند. تباید بیندیشیم که ۳۶ تطابق اتفاقی صورت گرفته است. برای این واقعیت باید دلیل ساده‌ای وجود داشته باشد. به این دلیل اشاره می‌کنیم و اثباتمان متقاعدکننده‌تر خواهد بود.

هریك از ۶ نسبت ساده (ABC) ، (BAC) و ... را با λ نشان می‌دهیم. در جدول (۷.۴) به عنوان مثال می‌یابیم،

$$(۱۲۳)=\lambda \quad و \quad (۲۱۳)=\frac{1}{\lambda}$$

بدون توجه به‌نمادها، این بدان معنی است که اگر مقدارعکس به جای مقدار یك نسبت ساده قرار داده شود این متناظر است با جابه‌جایی اولین ۲ عضو سه‌تایی مرتب. این حکم برای هریك از ۶ نسبت (چون فرق نمی‌کند که کدام یك از سه نقطه باشمارهٔ ۱ نشان داده شود) به‌کار می‌رود. وهمان نتیجه‌را می‌دهد که با جایگزینی مقدار عکس $\frac{1+\lambda}{\lambda}-$ (یعنی در $\frac{1}{\lambda}$ به‌جای λ مقدار $\frac{1+\lambda}{\lambda}-$ را قرار دادن) بــه نسبت ساده‌ای در جابه‌جا شدن دو عضو اول آن دست یافته‌ایم. این نسبت البته درجدول (۷.۲) موجود است واین همان است که می‌خواستیم اثبات کنیم.

دوباره به فرمول (۸.۲) برمی‌گردیم. دریافتیم که به ازای $i=۳$ و $j=۶$ بدست می‌آوریم $K=۲۴$. مسأله را اکنون به طور قابل درك حل مـی‌کنیم یعنی مقدار K را بـه ازای هرزوج مقدار i و j پیدا می‌کنیم.

اول، به خاطر آوریم عمل دوتایی یعنی عملهائی کــه شامل مؤلفه هستند، در حساب و جبر چه مفهومی دارند (عملهای با یك مؤلفه نیز وجود دارند مثلاً بــه دست‌آوردن ریشهٔ دوم). فرض می‌کنیم مجموعهٔ مشخص M داده شده است. یك عمل دوتایی عملی است کــه فقط و فقط یك عضو از M را با زوج مرتب $(a\ ,\ b)$ از اعضای این مجموعه متناظر می‌کند[۸].

مثال ۱. مجموعهٔ M را مجموعهٔ اعداد طبیعی ... , ۲ , ۱ درنظر می‌گیریم. عمل جمع هرزوج فقط و فقط یك عضو از مجموعهٔ مجموعشان را متناظر با زوج فوق مـی‌کند. علامت عمل عموماً بین مؤلفه‌های زوج نوشته می‌شود: $۲+۳=۵$.

مثال ۲. عمل ضرب اعضای همان مجموعه‌را درنظر بگیرید. این، یك عمل دیگری است. این، ۶ و نه ۵ را، به همان زوج (۵ , ۲) متناظر می‌کند: $۲\cdot۳=۶$.

هردوعمل فوق، دارای‌خواص مشابه هستند. هردو خاصیت جابه‌جایی دارند ($a+b=b+a$ و $a\cdot b=b\cdot a$) بنابراین مرتب بودن زوج اهمیت ندارد. با این حال اگــر عمل $a^b=c$ را درنظر بگیریم می‌بینیم مؤلفه‌ها در نقش خود یکسان نیستند.

حال مجموعهٔ M راکــه مؤلفه‌هایش تابعهای (۸.۱) هستند درنظر بگیرید. برای این مجموعه عملی بــه نام «ضرب» را تعریف می‌کنیم و آن را با علامت $\odot$ نشان مـی‌دهیم (گیومه و دایره را به منظور اشتباه نشدن عمل فوق با عمل ضرب حقیقی به کار می‌بریم).

«ضرب کــردن» a_i در a_j به این معنی است کــه در a_i به جای λ، a_j قرار داده شود. آن به شکل زیر می‌باشد:

$$a_i\odot a_j=f_i[f_j(\lambda)]=a_k \qquad (۸.۳)$$

قبلاً نشان دادیم که

$$f_3[f_6(\lambda)]=f_4(\lambda)$$

این می‌تواند به‌صورت زیر فرمولبندی شود: هرگاه a_3 در a_6 «ضرب» شود، a_4 حاصل می‌شود: یا

$$a_3\odot a_6=a_4$$

خــواننده باید تمام ۳۶ «حــاصلضرب» $a_i\odot a_j$ را پیدا کند. نتایج در جدول زیر خلاصهٔ شده‌اند.

(۸.۴)

عامل اول	عامل دوم					
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_2	a_2	a_1	a_4	a_3	a_6	a_5
a_3	a_3	a_5	a_1	a_6	a_2	a_4
a_4	a_4	a_6	a_2	a_5	a_1	a_3
a_5	a_5	a_3	a_6	a_1	a_4	a_2
a_6	a_6	a_4	a_5	a_2	a_3	a_1

جدول (۸.۴) را می‌توان جدول «ضرب»[9] نامید. نگاهی دقیق به‌آن می‌اندازیم و می‌بینیم:

۱. «ضرب»خاصیت جابه‌جایی ندارد. به‌عنوان مثال داریم:

$$a_2 \odot a_3 = a_4$$

ولی

$$a_3 \odot a_2 = a_5 .$$

بنابراین هنگامی‌کـه «ضرب در a_i» را مطرح مـی‌کنیم باید عبارت «از راست» و یـا «از چپ» را نیز اضافه‌کنیم. مثلاً «ضرب a_2 از راست» یعنی

$$a_2 \odot a_3 = a_4$$

و «ضرب a_2 در a_3 از چپ» یعنی

$$a_3 \odot a_2 = a_5 .$$

۲. در «ضرب» عضو a_1 همان نقشی را ایفا می‌کندکـه ۱ درضرب معمولی. ضرب هرعددی در ۱ عدد را تغییر نمی‌دهد

$$a \cdot 1 = a .$$

همان‌گونه‌که از جدول (۸.۴) برمی‌آید، «ضرب» هرعامل در a_1 (چه از راست و چه از چپ)، آن عضو را تغییر نمی‌دهد:

$$a_i \odot a_1 = a_1 \odot a_i = a_i$$

$$(i = 1 , 2 , 3 , \cdots , 6)$$

به همین علت، a_1 «واحد» نامیده می‌شود.

۳. «ضرب» شرکت‌پذیر است.

$$(۸.۵) \quad (a_i \odot a_j) \odot a_k = a_i \odot (a_j \odot a_k)$$

به عنوان مثال، اگـر ابتدا «$a_2 \odot a_3$» را ضرب‌کنیم و سپس نتیجه را در راست در a_4 «ضرب»کنیم، به دست می‌آید:

$$(a_2 \odot a_3) \odot a_4 = a_4 \odot a_4 = a_5$$

اما اگـر ابتدا a_3 را در a_4 «ضرب»کنیم، $a_3 \odot a_4$، حاصل می‌شود:

$$a_2 \odot (a_3 \odot a_4) = a_2 \odot a_6 = a_5$$

نتیجه یکسان می‌باشد.

به‌همین طریق می‌توانیم تمام ترکیبها را امتحان‌کنیم‌ودریابیم کـه دستور (۸.۵) صحیح است. در نوشتن «حاصلضرب» سه عامل یـا بیشتر، بـه کار بردن پرانتز زائد است زیـرا دارای خاصیت شرکت‌پذیری است. می‌توانیم بسادگی بنویسیم:

$$a_i \odot a_j \odot a_k$$

که معادل هردو طرف تساوی (۸.۵) است.

می‌توانیم عمل «تقسیم» راهم تعریف‌کنیم ولی، کافی است! توقف لازم است. این کار را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم که در موردآن خود بیندیشد.

مجموعه‌ای از عناصرکه عملیاتی با خصوصیات مشخص(که در اینجا ما از تك‌تك آنها نام نمی‌بریم) بـرروی آن تعریف شده است، گروه نامیده می‌شود.

عناصر(۸.۱) با عملی‌که با فرمول(۸.۳) تعریف شده است، یك‌گروه تشکیل می‌دهند.

ما فقط از یك شکاف باریك به نظریه‌گروهها نظر انداختیم، امیدواریم خـواننده این‌کتابچه خـود بعداً به این نظریه از دریچهٔ بزرگتری وارد شود.

زیرنویسها

۱– The Oriented aegment

۲– Directed line aegmert

۳– جهت پاره‌خط از سوی نقطهٔ ابتدایی به نقطهٔ انتهاست.

۴– در اینجا و از این پس، e را پاره خط واحد درنظر می‌گیریم یعنی پارهٔ خطی به طول واحد.

۵– Simple Ratio

۶– به خواننده یادآوری می‌کنیم‌که پاره خطها جهت دارند.

۷– خواننده می‌تواند شروع‌کند باکتابهای:

I– مقدمه‌ای نیز نظریه گروههای تألیف P.S Aleksandrov چاپ دوم، مسکو ۱۹۵۱.

II– گروههاو نمودارهای آنها تألیف W.Magnus,I.Grossman، نیویورك، ۱۹۶۴،

۸– این تعریف به طور مطلق الزامی نیست، ولی ما خود را به این حالت محدود می‌کنیم.

۹– درنظریه‌گـروهها، به نام مربع‌کیلی (Cayley Square) معروف است.

مراجع

N. M. Beskin, Dividing a segment in a given ratio, Little Mathematics Library, Mir Publisher, Moscow, 1975.

بازی با عدد ۱۹۹۱

ترجمهٔ: احمد قرائی

«بررسی ویژگیهای عدد سال نو یا بازی با رقم‌ها، ازسرگرمی‌هائی است که همه ساله دانش‌آموزان را به‌خود مشغول کرده است و سریع به نتیجه می‌رسد.»

آنچه درعدد ۱۹۹۱ جلب توجه می‌کند تقارن آن است، به این معنی که این عدد ومقلوب آن با یکدیگر برابرهستند. اما نه تنها خود عدد بلکه عامل‌های اول ۱۸۱؛ $۱۱ \times ۱۸۱ = ۱۹۹۱$ نیز دارای این ویژگی هستند.

این تقارن درتساوی‌های زیرهم مشاهده می‌شود:

$$۱\cdot۹\cdot۹\cdot۱+۱+۹+۹+۱=۱+۹۹+۱$$

و

$$۱+۹:۹+۱+۱+\sqrt{۹}+\sqrt{۹}+۱=$$
$$=۱۹+۹۱-۱\cdot۹۹\cdot۱$$

درمربع‌های جادوئی ترجیحاً ازعددهای متوالی استفاده می‌شود. برای ۱۹۹۱ به‌عنوان مجموع جادوئی فقط مربع‌های ۱۱×۱۱ با $۱۲۱=۱۱^{۲}$ عدد، از ۱۲۱ تا ۲۴۱ می‌توان ساخت. مربع‌های جادوئی دراندازه‌های دیگروبا رقم‌های متوالی وجود ندارند.

۱۷۶	۱۸۹	۲۰۲	۲۱۵	۲۲۸	۲۴۱	۱۲۲	۱۳۵	۱۴۸	۱۶۱	۱۷۴
۱۷۵	۱۷۷	۱۹۰	۲۰۳	۲۱۶	۲۲۹	۲۳۱	۱۲۳	۱۳۶	۱۴۹	۱۶۲
۱۶۳	۱۶۵	۱۷۸	۱۹۱	۲۰۴	۲۱۷	۲۳۰	۲۳۲	۱۲۴	۱۳۷	۱۵۰
۱۵۱	۱۶۴	۱۶۶	۱۷۹	۱۹۲	۲۰۵	۲۱۸	۲۲۰	۲۳۳	۱۲۵	۱۳۸
۱۳۹	۱۵۲	۱۵۴	۱۶۷	۱۸۰	۱۹۳	۲۰۶	۳۱۹	۲۲۱	۲۳۴	۱۲۶
۱۲۷	۱۴۰	۱۵۳	۱۵۵	۱۶۸	۱۸۱	۱۹۴	۲۰۷	۲۰۹	۲۲۲	۲۳۵
۲۳۶	۱۲۸	۱۴۱	۱۴۳	۱۵۶	۱۶۹	۱۸۲	۱۹۵	۲۰۸	۲۱۰	۲۲۳
۲۲۴	۲۳۷	۱۲۹	۱۴۲	۱۴۴	۱۵۷	۱۷۰	۱۸۳	۱۹۶	۱۹۸	۲۱۱
۲۱۲	۲۲۵	۲۳۸	۱۳۰	۱۳۲	۱۴۵	۱۵۸	۱۷۱	۱۸۴	۱۹۷	۱۹۹
۲۰۰	۲۱۳	۲۲۶	۲۳۹	۱۳۱	۱۳۳	۱۴۶	۱۵۹	۱۷۲	۱۸۵	۱۸۷
۱۸۸	۲۰۱	۲۱۴	۲۲۷	۲۴۰	۱۲۱	۱۳۴	۱۴۷	۱۶۰	۱۷۳	۱۸۶

طبیعی است، نمایش عدد سال با رقم‌های خودش را نباید فراموش کنیم.

$$\begin{aligned}
۱۹۹۱ &= ۱۹\cdot۹۱+۱۹\cdot۹\cdot۱+(۱+۹)\cdot۹+۱\\
&=(۱+۹+۹+۱)\cdot۱\cdot۹۹\cdot۱+۱۹-۹+۱\\
&=۱۹٫۹۱\cdot(۱\cdot۹+۹۱)\\
&=(۱۹۹+۱)\cdot(۱+\sqrt{۹}\cdot\sqrt{۹}\cdot۱)\\
&\quad-\sqrt{۱\cdot۹\cdot۹\cdot۱}
\end{aligned}$$

$$=۱\cdot۹۹۱+۱+۹۹۱+۱+\sqrt{۹}+\sqrt{۹}+۱$$

یا همیشه با رقم‌های یکسان (شاید خواننده نمایش‌های کوتاه‌تری را پیدا کند).

$$۱۹۹۱=(۱۱۱۱-۱۱\cdot۱۱)\cdot(۱+۱)+۱۱$$
$$=۲۲۲۲-۲۲۲-۲\cdot۲\cdot۲-۲:۲$$
$$=۳۳۳\cdot(۳+۳)-۳:۳-۳-۳$$
$$=۴۴\cdot۴۴+۴۴+۴۴:۴$$
$$=۵۵\cdot(۵\cdot۵+۵۵:۵)+۵۵:۵$$
$$=۶۶\cdot(۶\cdot۶-۶)-۶:۶+۶+۶$$
$$=۷\cdot۷\cdot(۷\cdot۷-۷)-۷۷+(۷۷-۷):۷$$
$$=۸۸۸۸:۸+۸۸۸-۸$$
$$=۹۹۹+۹۹۹+(۹+۹):۹-۹$$

بنا به متقارن بودن ۱۹۹۱ تعداد زیادی تساوی ساده وجود دارد که با چهار رقم این عدد ساخته می‌شوند.

$$۱+۹۹+۱=۱+۹+۹۱$$
$$۱-۹+۹۱=۱+۹\cdot۹+۱$$
$$۱۹-۹+۱=۱٫۹+۹٫۱$$
$$۱۹-۹-۱=۱^{۹}\cdot۹^{۱}$$
$$۱\cdot۹+۹\cdot۱=۱+۹+۹-۱$$
$$۱\cdot۹\cdot۹\cdot۱=۱+۹\cdot۹-۱$$
$$۱\cdot۹۹\cdot۱=۱+۹۹-۱$$
$$۱\cdot۹+۹۱=۱\cdot۹۹+۱$$

یا به‌عبارت دیگر،

$$۱۹+۹۱=۱\cdot۹+۹۱+۱۹-۹\cdot۱$$

به‌صورت کسر نیز امکان‌پذیر است.

$$\frac{۱۹}{۹۱}=\frac{۱+۹+۹\cdot۱}{۱+۹\cdot(۹+۱)}$$

چون این بازی از سالها قبل معمول بوده مروری کوتاه به دههٔ گذشته می‌کنیم

۱ سال قبل

$$(۱۱۱۱-۱۱۱-۱۱)\cdot(۱+۱)+۱۱+۱=۱۹۹۰$$

۲ سال قبل

$$۲۲۲۲-۲۲۲-۲۲:۲=۱۹۸۹$$

۳ سال قبل

$$۳۳۳\cdot(۳+۳)-۳۳:۳+۳:۳=۱۹۸۸$$

۴ سال قبل

$$۴۴\cdot۴۴+۴۴+۴۴:۴-۴=۱۹۸۷$$

۵ سال قبل

$$۵۵۵+۵\cdot۵\cdot۵۵+۵۵+۵:۵=۱۹۸۶$$

۶ سال قبل

$$۶۶\cdot(۶\cdot۶-۶)+۶-۶:۶=۱۹۸۵$$

۷ سال قبل

$$۷\cdot۷\cdot(۷\cdot۷-۷)-۷۷+(۷+۷+۷):۷=۱۹۸۴$$

۸ سال قبل

$$۸۸۸۸:۸+۸۸۸-۸-۸=۱۹۸۳$$

۹ سال قبل

$$۹۹۹+۹۹\cdot۹+۹۹-۹+(۹+۹):۹=۱۹۸۲$$

۱۰ سال قبل

$$۱۰\cdot۱۰\cdot۱۰+۱۰\cdot۱۰\cdot۱۰-۱۰-۱۰+۱۰:۱۰=۱۹۸۱$$

یا با رقم‌های عدد همان سال:

$$۱۹۹۰=۱+۹۹۰+۱\cdot۹۹۰+۱\cdot۹+۹\cdot۰$$
$$۱۹۸۹=۱۹۸\cdot۹+۱۹۸+۹$$
$$۱۹۸۸=۱۹۸\cdot۸-۱\cdot۹\cdot۸\cdot۸-۱+۹-۸-۸+۱\cdot۹۸۸$$
$$۱۹۸۷=۱۹\cdot۸\cdot۷+۱\cdot۹۸۷+۱-۹\cdot۸+۷$$
$$۱۹۸۶=۱۹\cdot۸۶+۱۹۸+۶+۱۹+۸۶$$
$$۱۹۸۵=۱۹۸\cdot۵+۱۹۸\cdot۵+۱-۹+۸+۵$$
$$۱۹۸۴=۱۹\cdot۸۴+۱\cdot۹۸\cdot۴+۱-۹+۸-۴$$
$$۱۹۸۳=۱+۹۸۳+۱-۹+۸\cdot۳+۱\cdot۹۸۳$$
$$۱۹۸۲=۱\cdot۹۸۲+۱\cdot۹+۸+۲-۱+۹۸۲$$
$$۱۹۸۱=۱+۹۸۱+۱\cdot۹۸۱+۱\cdot۹+۸+۱$$
$$۱۹۸۰=۱۹+۸\cdot۰+۱+۹۸۰+۱\cdot۹۸۰$$

درپایان نگاهی به‌سال آینده

$$۱۲۳۴+۵۶+۷۸\cdot۹=۱۹۹۲$$

از هینس‌زیگلر

مجلهٔ MATHEMATIKLEHREN

این هم یک بازی با ۱۳۷۰

۲۷۲	۲۷۱	۲۶۵	۲۸۴	۲۷۸
۲۷۹	۲۷۳	۲۶۷	۲۶۶	۲۸۵
۲۸۶	۲۸۰	۲۷۴	۲۶۸	۲۶۲
۲۶۳	۲۸۲	۲۸۱	۲۷۵	۲۶۹
۲۷۰	۲۶۴	۲۸۳	۲۷۷	۲۷۶

مربع جادوئی ۵×۵ با عددهای ۲۶۲ تا ۲۸۶ ومجموع ۱۳۷۰

تعمیم قضیه ویلسون

هاشم سازگار

قضیه. به ازاء هرعدد اول p وهرعدد طبیعی n،

$$\frac{(np-1)!}{(n-1)!\,p^{n-1}} \equiv (-1)^n \pmod p$$

قبل ازاینکه به‌اثبات حکم فوق بپردازیم لازم است که چند قضیه را یادآوری کنیم.

قضیه لاگرانژ(۱). فرض کنید p عدد اولی باشد و

$$f(x)=c_0+c_1x+\dots+c_nx^n$$

یك چندجمله‌ای از درجه n با ضرایب صحیح باشد به‌طوری که $c_n \not\equiv 0 \pmod p$.
دراین صورت، همنهشتی چندجمله‌ای $f(x)\equiv 0 \pmod p$ حداکثر n جواب خواهد داشت.

قضیه (کاربرد قضیه لاگرانژ). فرض کنید

$$f(x)=c_0+c_1x+\dots+c_nx^n$$

یك چندجمله‌ای از درجه n با ضرایب صحیح باشد و p عدد اولی باشد به‌طوری که همنهشتی

$$f(x)\equiv 0 \pmod p$$

بیش از n جواب داشته باشد. در این صورت، هر ضریب f بر p بخشپذیر خواهد بود اینك، می‌خواهیم قضیه ویلسون را به کمك قضایای فوق ثابت کنیم

قضیه. به‌ازاء هرعدد اول p همه ضریبهای چندجمله‌ای

$$f(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)-x^{p-1}+1$$

بر p بخشپذیر است.

برهان. فرض کنید که

$$g(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)$$

ریشه‌های g عبارتند از -1، -2، ...، $-(p-1)$؛ در نتیجه، درهمنهشتی

$$g(x)\equiv 0 \pmod p$$

صدق می‌کنند. اگر $h(x)=x^{p-1}-1$، بنابرقضیه فرما، این اعداد درهمنهشتی $h(x)\equiv 0 \pmod p$ نیز صدق می‌کنند. از طرفی چندجمله‌ای

$$f(x)=g(x)-h(x)$$

از درجه $p-2$ است وهمنهشتی $f(x)\equiv 0 \pmod p$ دارای $p-1$ جواب -1، -2، ...، $-(p-1)$ است. بنابر کاربرد قضیه لاگرانژ، همه ضرایب چندجمله‌ای $f(x)$ بر p بخشپذیر است.

قضیه ویلسون. به‌ازاء هرعدد اول p

$$(p-1)!\equiv -1 \pmod p$$

برهان. جمله ثابت چندجمله‌ای $f(x)$ درقضیه قبل، عبارت $(p-1)!+1$ است که بر p بخشپذیر است.

حال، به‌اثبات قضیه تعمیم ویلسون می‌پردازیم.

برهان. چندجمله‌ای

$$g(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)$$

را می‌توان به‌صورت

$$g(x)=x^{p-1}+S_1x^{p-2}+\dots+S_{p-2}x+(p-1)!$$

نوشت که ضرایب‌آن بر p بخشپذیراند. چون

$$g(p)=(p+1)(p+2)\cdots(2p-1)=p^{p-1}+S_1p^{p-2}+\dots S_{p-2}p+(p-1)!$$

بنابراین، نتیجه می‌شودکه

$$(p+1)(p+2)\cdots(2p-1)\equiv(p-1)! \equiv -1 \pmod p,$$

که اگر دوطرف را در $(p-1)!$ ضرب‌کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{(2p-1)!}{p}\equiv(-1)^2(\text{mod } p)$$

و این حکم قضیه، به‌ازای $n=2$، است.

اینك به‌استقراء حکم قضیه را ثابت می‌کنیم. به‌ازاء $n=1$، قضیه ویلسون است‌که برقرار است. حال فرض کنیدکه فرض استقراء، به‌ازاء $n=k$، برقرارباشد؛ یعنی،

$$\frac{(kp-1)!}{(k-1)!\,p^{k-1}}\equiv(-1)^k\ (\text{mod } p)$$

اینك، حکم استقراء را، به‌ازای $n=k+1$ ثابت‌می‌کنیم؛ یعنی،

$$\frac{((k+1)p-1)!}{k!\,p^k}\equiv(-1)^{k+1}(\text{mod } p)$$

با توجه به‌توضیحات ابتـدای برهان، $g(kp)$ را محـاسبه می‌کنیم، بنابراین

$$(kp+1)(kp+2)\cdots((k+1)p-1)\equiv(p-1)!$$

$$\equiv(-1)\ (\text{mod } p)$$

همنهشتـی فرض استقراء را درهمنهشتـی فوق ضـرب می‌کنیم. بنابراین،

$$\frac{(kp-1)!}{(k-1)!\,p^{k-1}}(kp+1)\cdots((k+1)p-1)$$

$$\equiv(-1)^k(-1)(\text{mod } p)$$

$$\frac{((k+1)p-1)!}{k!\,p^k}\equiv(-1)^{k+1}\ (\text{mod } p)$$

حال می‌توان قضیه ویلسون وعکس‌آن را به‌صورت ذیل‌تعمیم داد

قضیه. شرط لازم کافی برای اینکـه عدد طبیعـی نا یک m اول باشد آنست که، به‌ازای هرعدد طبیعی n، عدد m عدد

$$\frac{(nm-1)!}{(n-1)!\,m^{n-1}}-(-1)^n$$

را عاد کند.

برهان. شرط لازم بنا برقضیه ویلسون‌برقراراست؛ اینک باید کفایت‌آن را ثابت‌کرد.

بدیهی است که اگر $n=1$ قضیه فوق همان عکس قضیه ویلسون است[۲]. پس فرض کنید

$$m>1\ ,\ m\,|\,\frac{(nm-1)!}{(n-1)!\,m^{n-1}}-(-1)^n\ ,\ n>1$$

اگر m اول نباشد عدد طبیعی مانند d هست‌که

$$1<d<m,\ d|m$$

چون $1<d\leqslant m-1$، پس d یکی از اعداد

$$2,\ldots,(m-1)$$

است واهذا $d|(m-1)!$. ازطرفی

$$(nm-1)!=(m-1)!\,m\,(m+1)\cdots(2m)\cdots$$
$$(3m)\cdots((n-1)m)\cdots(nm-1)$$
$$=(m-1)!\,(n-1)!\,m^{n-1}k$$

بنابراین،

$$(m-1)!\ |\ \frac{(nm-2)}{(n-1)!\,m^{n-1}}$$

ازطرفـی $d\,|\,(m-1)!$ و بنـابر فـرض، $d|(-1)^n$ چـون $1<d\leqslant m-1$، این ممتنع است.

منابع:

۱ـ نظریه تحلیلی اعداد، تام. ام. اپـوستل، ترجمهٔ علی‌اکبر رحیم‌زاده و دیگران.

۲ـ تئوری مقدمـاتی اعداد، جلـد دوم. قسمت اول. دکتـر غلامحسین مصاحب، انتشارات حبیبی.

دورهٔ تناوب ـ تابع متناوب

دکتر علی اکبر مهرورز
عضو هیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه تبریز

درکتابهای ریاضی، دورهٔ تناوب و توابع متناوب موردبررسی دقیق قرار نگرفته است. بدین مناسبت این موضوع برای ارائه درکنفرانس ریاضی مشهد مقدس دراسفندماه ۱۳۶۹ ـ انتخاب گردید. مسلماً انتقادات سازنده و راهنمائیهای ارزنده علاقمندان محترم دراین زمینه موجب کمال سپاسگزاری خواهد بود. ضمناً توجه خوانندگان‌گرامی را به‌این‌نکته معطوف می‌داردکه اصولاً این نوشته شامل مطالب نظری است و هدف حل مسأله و تمرین نیست، درعین حال حل مسائل مربوط به دورهٔ تناوب و توابع متناوب برپایهٔ این مطالب نظری آسان خواهد بود.

درسراسر این مقاله منظور ازیك مجموعه، مجموعه غیرخالی ازاعداد حقیقی است ومنظور از یك تابع، تابعی است که حوزهٔ تعریف وحوزهٔ مقادیر آن مجموعه‌هائی ازاعداد حقیقی است.

مقدمات

تعریف. عدد a را عضو ماکسیمم یا عضو انتهای مجموعه A می‌نامند درصورتی کـه اولاً $a\in A$ وثانیاً a ازهرعضو مجموعه A ناکمتر باشد. مثلاً عدد ۴عضوماکسیمم $A=\{-۱, ۰, ۲, ۴\}$ است وعدد ۵ عضو ماکسیمم مجموعه $B=\{x \mid x\leqslant ۵\}$ است. بدیهی است کـه هرمجموعه دارای عضو ماکسیمم نیست مثلاً مجموعه‌های اعداد طبیعی، اعداد صحیح، اعداد گویا، و اعداد حقیقی هیچکدام عضو ماکسیمم ندارند. عضوماکسیمم مجموعه A را با نماد $MaxA$ نشان می‌دهند.

لم ۱. عضوماکسیمم هرمجموعه، درصورت وجود، منحصر به‌فرد است. اثبات‌آسان و به‌عهده خواننده است.

عضو مینیموم یا عضوابتدای یك مجموعه به‌طورمشابه تعریف می‌شود. عضومینیموم مجموعه با نماد $\min A$ نشان‌داده می‌شود.

لم ۲. اگرمجموعه A دارای عضومینیموم باشد، این عضومنحصر به‌فرد است.

لم ۳. اگر مجموعه A دارای عضوماکسیمم وعضو مینیموم باشد آنگاه

$$\min A\leqslant MaxA$$

اثبات هر دولم آسان و به‌عهدهٔ خوانندهٔ است.

تعریف. عدد a را یک کران بالا یا یـك بند بالای مجموعه A می‌نامند درصورتی که a ازهر عضو مجمـوعه A ناکمتر باشد. مثلاً اعداد ۴ و ۳ یک‌کران بالای‌مجموعه $A=\{-۱، ۲، ۳\}$ است واعداد ۵ و ۲ ــ یك کران بالای مجموعه

$$B=\{x \mid x<-۲\}$$

است. بدیهی است اگر a یک کران بالای مجموعه A باشد هر عدد بزرگتر از a هم یک کران بالای مجمـوعه A است یعنی، اگرمجموعه A دارای یک کران بالا باشد دارای بینهایت کران بالا خواهد بود. به‌طوری که ملاحظـه می‌شود کران بالا ممکن است عضو مجموعه باشد یا نباشد واگر کران بالا عضومجموعه باشد همان عضو ماکسیمم مجمـوعه خـواهـد بود و نیز عضو ماکسیمم یک مجمـوعه یک کران بالای‌آن مجموعه است. هر مجموعه دارای کران بالا نیست مثلاً مجموعه‌های اعداد طبیعی، اعداد صحیح، اعداد گویا، واعداد حقیقـی هیچ کدام کران بالا ندارند. چنین مجموعه‌ها را از بالا بیکران نامند. کران پائین و مجموعه‌های ازپائین کراندار هم به‌طورمشابه به تعریف می‌شوند.

تعریف. مجموعه A را کراندارنامند درصورتی که هم ازبالا وهم ازپائین کراندار باشد مانند مجموعه‌های

$$A=\{۴، ۳، ۲، ۱\} \quad \text{و} \quad B=\{-۲<x\leqslant ۰\}$$

تعریف. عدد a را کوچکتـرین کران بالای مجموعه A می‌نامند درصورتی‌که اولاً a یک کران بالای A باشد ثانیاً a ازهرکران

بالای A نابیشتر باشد. کوچکترین کران بالای مجموعه A را سوپریموم A می‌نامند و با نماد $\sup A$ نشان می‌دهند. مثلاً صفر کوچکترین کران بالای مجموعه

$$A=\left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots\right\}$$

است و عدد ۳ کوچکترین کران بالای مجموعه

$$B=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$$

است. چنانکه ملاحظه می‌شود ممکن است کوچکترین کران بالای یک مجموعه عضو آن باشد یا نباشد. هرمجموعه دارای کوچکترین کران بالا نیست مثلاً مجموعه اعداد طبیعی، اعداد صحیح و اعداد گویا و اعداد حقیقی.

لم ۴. سوپریموم یک مجموعه درصورت وجود منحصر به فرد است.

اثبات این لم نیز آسان و به‌عهدهٔ خواننده است.

تعریف. عدد a را بزرگترین کران پائین مجموعه A می‌نامند در صورتی که اولاً a یک کران پائین A باشد ثانیاً a از هر کران پائین A ناکمتر باشد مثلاً عدد ۲ بزرگترین کران پائین مجموعه

$$A=\{x \mid x>2\}$$

است و عدد ۵ بزرگترین کران پائین

$$B=\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

است. چنانکه ملاحظه می‌شود بزرگترین کران پائین یک مجموعه ممکن است عضو آن مجموعه باشد یا نباشد. بزرگترین کران پائین یک مجموعه مانند A را اینفیموم A می‌نامند و آن را با نماد $\inf A$ نشان می‌دهند همهٔ مجموعه‌ها دارای بزرگترین کران پائین نیستند، مثلاً مجموعه اعداد صحیح، اعداد گویا و اعداد حقیقی بزرگترین کران پائین ندارند.

لم ۵. اینفیموم یک مجموعه درصورت وجود منحصر به‌فرد است.

اثبات این لم نیز آسان و به‌عهدهٔ خواننده است.

لم ۶. فرض می‌کنیم A یک مجموعه و B مجموعه قرینه‌های اعضای A باشد یعنی $B=\{-x \mid x\in A\}$ آنگاه

(آ) اگر a یک کران بالای A باشد آنگاه $-a$ یک کران پائین B است.

(ب) اگر b یک کران پائین A باشد آنگاه $-b$ یک کران بالای B است.

اثبات هر دو قسمت آسان و به‌عهده خواننده است.

لم ۷. فرض می‌کنیم A یک مجموعه و $B=\{-x \mid x\in A\}$،

(آ) اگر $\sup A=a$ آنگاه $\inf B=-a$؛

(ب) اگر $\inf A=b$ آنگاه $\sup B=-b$.

اثبات ـ قسمت (آ) را ثابت می‌کنیم اثبات قسمت (ب) هم مانند آن است. چون $a=\sup A$ پس a یک کران بالای A است پس بنابر قسمت (آ) و از لم (۶) $-a$ یک کران پائین B است. حال اگر b نیز یک کران پائین B باشد آنگاه بنابر لم (۶)، $-b$ یک کران بالای A خواهد بود پس $a\leqslant -b$ و در نتیجه $-a\geqslant b$، یعنی $-a$ بزرگترین کران پائین B است و اثبات تمام می‌شود.

لم ۸. شرط لازم و کافی برای آنکه عدد a اینفیموم مجموعه A باشد آن است که

(آ) a یک کران پائین برای A باشد.

(ب) به‌ازای هرعدد b که $a<b$، عضوی از مجموعهٔ A مانند x_0 موجود باشد که $x_0<b$.

اثبات

(لزوم) فرض می‌کنیم $a=\inf A$، بنابر تعریف اینفیموم، a یك کران پائین A است و لذا (آ) ثابت می‌شود. حال فرض می‌کنیم b عددی باشد که $a<b$. ثابت می‌کنیم عضوی مانند x_0 در A وجود دارد که $x_0<b$. اگر چنین نباشد آنگاه تمام اعضای A از b ناکمتر خواهند بود، یعنی $x\in A, b\leqslant x$ در نتیجه b یک کران پائین برای A است و چون $a=\inf A$ پس باید $b\leqslant a$ که یک تناقض است زیرا بنا بفرض $a<b$. پس حکم ثابت می‌شود.

(کفایت) فرض می‌کنیم که (آ) و (ب) هردو برقرارند. ثابت می‌کنیم که $a=\inf A$ بنابر (آ) a یک کران پائین است. اگر b یك کران پائین دیگر باشد ثابت می‌کنیم که $b\leqslant a$. اگر چنین نباشد داریم $a<b$ و لذا بنابر قسمت (ب) از فرض عضوی مانند x_0 از A وجود دارد که $x_0<b$ و این یک تناقض است زیرا b یک کران پائین است و باید $b\leqslant x_0$ باشد پس حکم ثابت می‌شود.

مشابه این لم درمورد سوپریموم نیز وجود دارد وچون در این نوشته موردنیاز نیست از بیان واثبات آن صرفنظر می‌نمائیم.

حال این سؤال پیش می‌آید که آیا هرمجموعه $\inf$ یا $\sup$ دارد و اگر چنین نیست تحت چه شرایطی آنها وجود دارند. در این مورد اصلی وجود دارد که به‌اصل موضوع تمامیت اعداد حقیقی مشهوراست که به‌صورت زیراست:

اصل موضوع تمامیت. هرمجموعه غیرخالی از اعداد حقیقی که کران بالا داشته باشد سوپریموم دارد.

با توجه به‌این اصل و لم (۷) معلوم می‌گردد که هرمجموعه غیرخالی ازاعداد حقیقی که کران پائین داشته باشد اینفیموم دارد. ما ازاین نکته درمطالب مربوط به دورهٔ تناوب و تابع متناوب استفاده خواهیم کرد. اینک مقدمات لازم فراهم آمده است تا هدف اصلی خود را دنبال نمائیم.

تعریف. عدد حقیقی ω را یک دورهٔ تناوب تابع f می‌نامیم در

صورتی که اولاً به‌ازای هر x از حوزه تعریف f هر دو عدد $x+\omega$ و $x-\omega$ عضو حوزهٔ تعریف f باشد و ثانیاً

$$f(x+\omega)=f(x)$$

لم ۹. اگرعدد حقیقی $\omega\neq 0$ یک دورهٔ تناوب تابع f باشد آنگاه، به‌ازای هر x ازحوزه تعریف f، داریم

$$f(x-\omega)=f(x)$$

اثبات. بنا بر تعریف دورهٔ تناوب اگر x عضو حوزه تعریف f باشد آنگاه $x-\omega$ هم‌عضو حوزه تعریف f می‌باشد درنتیجه به‌ازای $x-\omega$ ازحوزه تعریف باید داشته باشیم

$$(1)\quad f[(x-\omega)+\omega]=f(x-\omega)$$

نیزمی‌توان نوشت

$$(2)\quad f[(x-\omega)+\omega]=f[x+0]=f(x)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $f(x-\omega)=f(x)$.

پس با توجه به تعریف دورهٔ تناوب و این لم، اگر ω یك دورهٔ تناوب غیرصفر تابع f باشدآنگاه به‌ازای هر x ازحوزه تعریف f خواهیم داشت $f(x\pm\omega)=f(x)$ یعنی اگر $\omega\neq 0$ یک دورهٔ تناوب باشد $-\omega$ هم یک دورهٔ تناوب است.

تعریف. تابع f را متناوب می‌نامیم درصورتی که دورهٔ تناوبی غیر ازصفر داشته باشد. با توجه به لم (۹) هرتابع متناوب هم دورهٔ تناوب مثبت وهم دورهٔ تناوب منفی دارد.

چند تذکر

(آ)ـ اگر f تابعی متناوب باشد و $\omega\neq 0$ یک دورهٔ تناوب آن باشد به‌استقراء ثابت می‌شود که به‌ازای هرعدد طبیعی n، $n\omega$ هم یک دورهٔ تناوب است و لذا $-n\omega$ هم یک دورهٔ تناوب است.

(ب) اگر f تابعی متناوب باشد با توجه به تعریف باید حوزه تعریف هم ازبالا وهم ازپائین بیکران باشد. البته بطوری که در مثالهای زیر مشاهده خواهد شد لازم نیست که تمام اعداد حقیقی حوزه تعریف باشد.

(پ) صفریک دورهٔ تناوب برای هرتابع با هرحوزه تعریف چه بیکران وچه‌کراندار می‌باشد ولی ممکن‌است این توابع متناوب نباشند.

(ت) توابع ثابتی که حوزه تعریف آنها تمام اعداد حقیقی‌باشد متناوب‌اند وهرعدد غیرصفر منفی یا مثبت یک دورهٔ تناوب آنها می‌باشد.

(ث) تمام‌توابع متناوب‌نیستند، مثلاً توابع‌غیرثابت‌که حوزه‌های تعریف آنها ازبالا یا از پائین ویا ازهر دوطرف کراندار باشد متناوب نیستند. هم‌چنین توابعی وجود دارد که حوزهٔ تعریف‌آنها اشکالی نداردولی بازهم متناوب نیستند که بین مثالهای ذیل به چند نوع ازاین توابع اشاره می‌کنیم:

مثال ۱

ثابت‌کنید تابع f با ضابطه

$$f(x)=(-1)^n,\ n\in Z$$

تابعی متناوب است و یک دورهٔ تناوب غیرصفر از آن را تعیین کنید.

حل. چون حوزه تعریف مجموعه اعداد صحیح است پس اگر f متناوب‌باشد باید ω دورهٔ تناوب غیر صفرآن عددی صحیح باشد تا اینکه $x\pm\omega$ عضو حوزه تعریف باشد ونیز باید داشته باشیم

$$(-1)^{n+\omega}=(-1)^n$$

ویا

$$(-1)^{\omega}=1$$

پس باید ω عدد صحیح زوج باشد. درنتیجه f متناوب است و هرعدد صحیح زوج غیرصفر یک دورهٔ تناوب غیرصفر آن است.

مثال ۲

اولاً ثابت‌کنید شرط لازم وکافی برای‌آنکه $[x+T]=[x]+T$ باشدآن است که T عددی صحیح باشد که درآن‌نماد $[x]$ بمعنای جزء صحیح x است.

ثانیاً ثابت کنید تابع f با ضابطه

$$f(x)=x-[x],\ x\in R$$

تابعی متناوب است ویک دورهٔ تناوب غیرصفرآن را تعیین کنید.

حل. اگر T عدد صحیح باشد بدیهی‌است‌که $[x+T]=[x]+T$ بعکس اگر داشته باشیم $[x+T]=[x]+T$ باید T عدد صحیح باشد زیرا اگر T عدد صحیح نباشد می‌توان فرض کرد که $T=m+r$ که درآن m عدد صحیح و $0<r<1$، پس خواهیم داشت

$$m+r=[x+m+r]-[x]=[x+r]+m-[x]$$

ویا

$$r=[x+r]-[x]$$

که یک تناقض است زیرا عدد سمت چپ عددی غیرصحیح ولی عدد سمت راست عددی صحیح است. پس باید T عددی‌صحیح باشد.

درمورد قسمت دوم اگر ω دورهٔ تناوب غیرصفر باشد باید داشته باشیم

$$x+\omega-[x+\omega]=x-[x]$$

ویا

$$\omega=[x+\omega]-[x]$$

بنا برقسمت اول باید ω یک عدد صحیح باشد. پس هرعدد صحیح غیرصفریک دورهٔ تناوب غیرصفراست.

مثال ۳

ثابت کنید تابع f با ضابطه

$$f(x)=[x]\ (x\in R)$$

متناوب نیست.

حل. اگر f متناوب باشد و $\omega\neq 0$ یک دورهٔ تناوب مثبت آن باشد باید داشته باشیم

$$[x+\omega]=[x],\ (x\in R)$$

اما این تساوی به‌ازای هیچ مقدار غیرصفر ومثبت ω برقرار نیست زیرا اگر ω عدد صحیح مثبت باشد آنگاه خواهیم داشت

$$[x]+\omega=[x]$$

ویا

$$\omega=0$$

که غیرممکن است. اگر ω عدد غیرصحیح مثبت باشد مثلاً

$$\omega=m+r,\ 0<r<1,\ m\geqslant 0$$

چون رابطه $[x+\omega]=[x]$ به‌ازای هر x باید برقرار باشد لذا x را برابر $-r$ انتخاب می‌کنیم خواهیم داشت

$$[-r+m+r]=[-r]$$

ویا

$$m=-1$$

وچون $m\geqslant 0$ پس تساوی مذکور غیرممکن است لذا تابع مذکور متناوب نیست.

مثال ۴

ثابت کنید تابع f با ضابطه زیرمتناوب نیست.

$$f(x)=\sin\sqrt{x},\ x\in[0,+\infty)$$

حل. چون‌حوزه تعریف ازپائین کرانداراست پس متناوب‌نیست.

مثال ۵

ثابت کنید تابع f با ضابطه

$$f(x)=x+\sin x,\ x\in R$$

متناوب نیست.

حل. اگر f متناوب باشد و $\omega\neq 0$ یک دورهٔ تناوب مثبت آن باشد به‌ازای عدد صحیح ومثبت k عدد $k\omega$ هم یک دوره تناوب خواهد بود یعنی

$$x+k\omega+\sin(x+k\omega)=x+\sin x$$

ویا

$$k\omega=\sin x-\sin(x+k\omega)$$

اما عبارت سمت راست بین -2 و $+2$ قرار دارد درحالی که می‌توان عدد صحیح و مثبت k را چنان اختیار کرد که $k\omega>2$.

پس f متناوب نیست

مثال ۶

تابع f با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ اصم}\\ 0, & x \text{ گویا}\end{cases}$$

مفروض است تحقیق‌کنید هرعدد گویا ازجمله اعدادگویا بصورت $\frac{1}{m}$ که m عددی صحیح و مثبت است یک دورهٔ تناوب f است ولذا f دوره‌های تناوب مثبت وهرقدرکوچک که بخواهیم دارد.

حل. اگر x اصم باشد $x+\frac{1}{m}$ هم اصم است و اگر x گویا باشد $x+\frac{1}{m}$ هم گویا است وبا بزرگ شدن m عدد $\frac{1}{m}$ کوچک می‌شود لذا حکم ثابت می‌گردد.

لم ۱۰. اگر f تابعی متناوب باشد مجموعه دوره‌های تناوب‌آن با عمل جمع یك گروه آبلی تشکیل می‌دهد.

اثبات. با توجه به‌مطالب قبلی اثبات به‌آسانی انجام می‌گیرد و به‌عهدهٔ خواننده است.

قضیه

ثابت کنید که هرتابع متناوب یا دوره‌های تناوب مثبت هرقدر کوچک که بخواهیم دارد ویا مجموعه دوره‌های تناوب مثبت‌آن عضو مینیموم دارد و دراین صورت هردوره تناوب تابع مضرب صحیحی ازاین عضومینیموم است. بنابه تعریف این عضومینیموم را دورهٔ تناوب اصلی تابع مینامند.

اثبات

چون تابع متناوب است پس مجموعه دوره‌های تناوب مثبت آن خالی نیست و از پائین به صفر کراندار است. پس بنابراصل تمامیت‌اعداد حقیقی ولم (۷) این‌مجموعه دارای اینفیموم است. اگراین مجموعه را با A نشان بدهیم و $\inf A$ را α فرض کنیم دوحالت پیش می‌آید.

(حالت اول) $a=0$، دراین حالت اگر $\varepsilon>0$ عددی دلخواه باشد چون $0=\inf A=a<\varepsilon$ بنابرلم (۸) عضوی ازمجموعه A مانند ω_1 وجود دارد که $\omega_1<\varepsilon$ وچون $\omega_1\in A$ پس $\omega_1>0$ ولذا داریم $0<\omega_1<\varepsilon$ یعنی دورهٔ تناوب ω_1 از عدد دلخواه و مثبت εکوچکتراست پس دراین حالت دورهٔ تناوب مثبت هرقدر کوچک که بخواهیم وجود دارد.

(حالت دوم) اگر $a>0$، ثابت می‌کنیم که $a\in A$. زیرا اگر a عضو A نباشد پس تمام اعضای A اکیداً از a بزرگتر خواهند بود. حال اگرعدد $2a$ را درنظر بگیریم خواهیم داشت

$$\inf A=a<2a$$

بنابر لم (۸) عضوی از A مانند ω_1 وجود دارد که $a<\omega_1<2a$ و به همین ترتیب عضوی از A وجود دارد مانند ω_2 که $a<\omega_2<\omega_1$ پس داریم $a<\omega_2<\omega_1<2a$. از اینجا نتیجه می‌شود که $0<\omega_1-\omega_2<a$ وچون $\omega_1-\omega_2$ یك دورهٔ تناوب مثبت است پس عضو A است واین غیرممکن است زیرا تمام اعضای A اکیداً از a بزرگتر بودند. پس $a\in A$. لذا a هم اینفیموم A است و هم عضو A است پس $a=\min A$.

حال ثابت می‌کنیم که در حالت دوم هرعضو A مضرب صحیحی از a است. اگر ω عضوی دلخواه از A باشد یعنی

$$0<\min A=a\leqslant\omega$$

داریم $\omega-a\geqslant 0$. اگر جزء صحیح $\frac{\omega-a}{a}$ را k فرض کنیم خواهیم داشت

$$\left[\frac{\omega-a}{a}\right]=k$$

ویا

$$\frac{\omega-a}{a}=k+r,\quad 0\leqslant r<1$$

ویا

$$\omega-a=ka+ra,\quad 0\leqslant ra<a$$

ویا

$$\omega-(k+1)a=ra,\quad 0\leqslant ra<a$$

چون ω و a هرکدام دورهٔ تناوب هستند پس $\omega-(k+1)a$ هم یک دورهٔ تناوب است ولی این غیرممکن است زیرا a کوچکترین دورهٔ تناوب مثبت است درحالی که $0\leqslant ra<a$. پس باید $r=0$ ولذا $(k+1)a=\omega$ واثبات کامل می‌شود.

تذکر. قضیه (۱) درتعیین دورهٔ تناوب اصلی نقش اساسی دارد زیرا اگرعدد a یک دورهٔ تناوب مثبت باشد دورهٔ تناوب اصلی یکی ازاعداد a، $\frac{a}{2}$، . . . خواهد بود. مثلاً اگرتابع f باضابطه $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$ داده شود وآن را به حالت $f(x)=\operatorname{tg} x$ ننوشته باشیم شاید به نظر برسد که دورهٔ تناوب اصلی 2π است ولی بعد ازحدس 2π به‌عنوان دورهٔ تناوب اصلی لازم است $\frac{2\pi}{2}$ و $\frac{2\pi}{3}$، . . . هم آزمایش شوند که درنتیجه دورهٔ تناوب اصلی برابر π به‌دست خواهدآمد.

قضیه

فرض می‌کنیم f تابعی متناوب و ω یکی از دوره‌های تناوب مثبت f باشد. فرض می‌کنیم A حوزه تعریف f باشد. ثابت کنید اگر a عضومعینی ازحوزهٔ تعریف باشد ومقادیر f برمجموعه $A\cap[a,a+\omega)$ معلوم باشدآنگاه مقدار f درهر نقطه ازحوزه تعریف معلوم خواهد بود.

اثبات

اگر x عضو دلخواهی ازحوزه تعریف f باشد جزء صحیح $\frac{x-a}{\omega}$ را حساب می‌کنیم خواهیم داشت

$$\frac{x-a}{\omega}=\left[\frac{x-a}{\omega}\right]+r,\quad 0\leqslant r<1$$

واز آنجا خواهیم داشت

$$x=a+\omega\left[\frac{x-a}{\omega}\right]+r\omega,\quad 0\leqslant r\omega<\omega$$

درنتیجه خواهیم داشت

$$f(x)=f\left(a+\omega\left[\frac{x-a}{\omega}\right]+r\omega\right)=f(a+r\omega)$$

وحکم ثابت می‌شود.

براساس همین لم برای مشخص کردن یك تابع متناوب کافی است مقادیر آن دریک دوره تناوب بخصوص در دوره تناوب اصلی مشخص نمائیم.

مثال ۸

مجموعه $A=\{m+n\sqrt{2}\mid m,n\in Z\}$ مفروض است. تابع f را برمجموعه اعداد حقیقی با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

ثابت کنید تابع f متناوب است و دورهٔ تناوب مثبت هرقدر کوچک که بخواهیم دارد.

اثبات. به راحتی ثابت می‌شود که هرعدد بصورت $a+b\sqrt{2}$ که درآن a و b اعداد صحیح‌اند یک دورهٔ تناوب f است. بخصوص دوعدد $1=1+0\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}=0+\sqrt{2}$ هردو دوره تناوب f هستند. حال اگر f دارای دوره تناوب اصلی مانند a باشدآنگاه بنابرقضیهٔ ۱ باید ۱ و $\sqrt{2}$ مضرب صحیحی از a باشند و درنتیجه باید خارج قسمت ۱ و $\sqrt{2}$ بر یکدیگر عددی گویا باشد که نیست. پس f دارای دورهٔ تناوب اصلی نیست و درنتیجه بنابرقضیه ۱، f دورهٔ تناوب مثبت هرقدر کوچک که بخواهیم دارد. یعنی به‌ازای هر $\varepsilon>0$ می‌توان اعداد صحیح m و n را چنان پیدا کرد که $0<m+n\sqrt{2}<\varepsilon$.

لم ۱۱. فرض می‌کنیم f تابعی متصل و x_0 عضوی از حوزهٔ

تعریف f باشد. آنگاه

(آ) اگر $f(x_0)=m>0$ آنگاه درحومه‌ای به مرکز x_0، مقادیر f مثبت است.

(ب) اگر $f(x_0)=n<0$ آنگاه درحومه‌ای به مرکز x_0، مقادیر f منفی است.

اثبات

(آ) اگر $\varepsilon=\frac{m}{2}$ انتخاب شود بنابرتعریف پیوستگی عدد مثبتی مانند δ وجود دارد که به‌ازای هر x ازحوزه تعریف

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-m|<\varepsilon=\frac{m}{2}$$

ویا

$$-\frac{m}{2}<f(x)|-m<\frac{m}{2}$$

ویا

$$\frac{m}{2}<f(x)<\frac{3m}{2}$$

پس درحومه به‌مرکز x_0 وشعاع δ تمام مقادیر f مثبت است.

برای اثبات (ب) کافی است تابع $-f$ را درنظر گرفته و ازقسمت (آ) استفاده کنیم. نتیجه این دوقسمت این است‌که اگر مقداریك تابع متصل در یك نقطه مخالف صفر باشد در حومه‌ای به مرکزآن نقطه مقادیر تابع مخالف صفر خواهند بود.

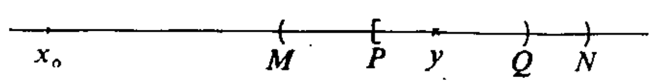
قضیه ۳

f تابعی متصل ومتناوب است. ثابت کنید اگر f دارای دورهٔ تناوب مثبت هرقدر کوچك که بخواهیم باشد آنگاه f تابع ثابت است.

اثبات

فرض می‌کنیم x_0 عضوی ازحوزه تعریف f باشد باید ثابت کنیم‌که به‌ازای هر x ازحوزه تعریف f تساوی $f(x)=f(x_0)$ برقراراست یعنی f تابعی ثابت است. حال فرض می‌کنیم y عضوی ازحوزه تعریف باشد بطوری که $f(y)\neq f(x_0)$، (فرض خلف)، درنتیجه خواهیم داشت $f(y)-f(x_0)\neq 0$.

پس بنابرلم ۱۱ حومه‌ای به‌مرکز y وشعاع مثلاً δ وجود دارد که دراین حومه مقادیرتابع مخالف صفراست. اگر این حومه را مطابق شکل زیر مورد بررسی قرار دهیم ملاحظه می‌شود



شکل ۱

که حومه به مرکز y و دوانتهای M و N وبا شعاع δ است‌چون دورهٔ تناوب مثبت هرقدرکوچك که بخواهیم وجود دارد پس یك دوره تناوب مثبت مانند ω چنان درنظرمی‌گیریم که $2\delta>\omega$. لذا می‌توانیم این دوره تناوب را در داخل حومه MN مانند بازه نیم‌بسته PQ که طول‌آن برابر ω درنظرگرفته شده است قرار دهیم. حال بنابر قضیهٔ ۲، f همه مقادیر خود را دربازه نیم‌بسته PQ خواهد گرفت ازجملهٔ نقطه‌ای مانند z دربازه نیم‌بسته PQ وجود خواهد داشت که $f(z)=f(x_0)$ ویا

$$f(z)-f(x_0)=0$$

که این متناقض با فرض خلف است. پس لازم است که f تابع ثابتی باشد.

درتنظیم مقدمات این نوشته ونیز برخی ازمثالها ازمنابع زیر استفاده شده است.

مراجع

۱ـ لآلی، جواد، تعریف عدد e به‌کمك اصل تمامیت، رشدآموزش ریاضی شماره ۲۶، ۴۵ـ۳۸.

۲ـ مصاحب، غلامحسین، آنالیز ریاضی جلد اول، قسمت ۱، انتشارات فرانکلین

3- Maror, I. A. Problems in Calculus of one varable 1973.

مسایل ویژه ۵

تهیه و تنظیم از ابراهیم دارابی

۱ـ مثلث متساوی‌الاضلاع و دایره محیطی آن را رسم می‌کنیم. ثابت کنید فاصله هر نقطه دلخواه دایره محیطی از یکی از رئوس مثلث با مجموع فواصل آن نقطه از دو رأس دیگر مثلث برابر است.

(راهنمایی: قطر دایره را رسم کنید.)

۲ـ هرگاه درمثلث ABC داشته باشیم $AB>BC$ و اضلاع روبه‌روی زوایای A و B و C را به ترتیب با a و b و c نشان دهیم، به‌اندازه $\frac{c-a}{2}$ روی AB و از طرف A و B جدا می‌کنیم نقاط حاصل را M و N می‌نامیم. از M و N به نقطه K وسط AC وصل می‌کنیم ثابت کنید مثلث KMN قائم‌الزاویه است.

(راهنمایی: از K به موازات BC رسم کنید تا AB را در نقطه L قطع کند. ثابت کنید $KL=NL=LM$)

(امیر حمیدی دانش‌آموز: از تهران)

۳ـ ثابت کنید خطوط راستی که وسط ارتفاع چهاروجهی منتظمی را به رئوس وجهی که ارتفاع بر آن وارد شده است وصل می‌کند، دو به دو بریکدیگر عمود می‌شوند.

(راهنمایی: یال چهاروجهی را a فرض کنید و فاصله وسط ارتفاع از رئوس قاعده را برحسب a حساب کنید. با استفاده از قضیه فیثاغورث مسئله به نتیجه می‌رسد.)

۴ـ ثابت کنید حجم چندوجهی محیط برکره‌ای به شعاع R از فرمول $V=\frac{1}{3}S_nR$ محاسبه می‌شود. که در آن S_n مساحت سطح کل چندوجهی می‌باشد.

(راهنمایی: مرکز کره را به رئوس چندوجهی وصل کنید تا هرم‌هایی که قاعده‌هایشان وجوه چندوجهی‌اند، به‌دست آید.)

۵ـ مجموع تمام اعداد دو رقمی را پیدا کنید که باقیمانده آنها بر ۴ برابر با ۱ باشد.

(راهنمایی: اعداد مفروض را به‌صورت $4n+1$ بنویسید که در آن $n=3, 4, 5, \ldots 24$)

(با استفاده از تصاعد نتیجه می‌شود: $S=1210$)

۶ـ ثابت کنید به‌ازای جمیع مقادیر n تساوی زیر برقرار است:

$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)\cdots\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}$$

(راهنمایی: از استقراء استفاده کنید.)

۷ـ اتومبیلی ازمبدأ A به مقصد C حرکت می‌کند. از A تا B را که بین A و C واقع است با سرعت ۴۸ کیلومتر در ساعت طی می‌کند. در نقطه B راننده سرعت ماشین را به اندازه a کیلومتر در ساعت ($0<a<48$) کم می‌کند و با همین سرعت $\frac{1}{3}$ فاصله B تا C را طی می‌کند. درجهت B به C به‌حرکت خود ادامه می‌دهد، اما بقیه راه را با سرعت $2a$ کیلومتر در ساعت بیش ازسرعت اولیه (۴۸کیلومتر بر ساعت) طی می‌کند. به‌ازای چه مقداری از a اتومبیل فاصله B تا C را در کمترین مدت طی می‌کند؟

۸ـ ثابت کنید نقطه H محل برخورد ارتفاعات مثلث ABC است اگر وتنها اگر یکی ازشرایط زیر برقرار باشد:

الف) $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

ب) $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$

ج) $\overrightarrow{HA}\,\mathrm{tg}\,A+\overrightarrow{HB}\,\mathrm{tg}\,B+\overrightarrow{HC}\cdot\mathrm{tg}\,C=0$

(O مرکز دایره محیطی مثلث است.)

(راهنمایی: رابطه الف را درمبنای G محل برخورد سه میانه بنویسید. می‌دانیم که

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GR}+\overrightarrow{GC}=0$

درمورد ب، پای ارتفاعات را با E و F و P نشان دهید. همواره داریم

$(\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{HB}\;\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HP}$

درمورد ج. می‌توان از ب کمک گرفت.)

۹ـ اگر درمثلث ABC داشته باشیم

$|BC|\,\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}\,|GB|+|AB|\,\overrightarrow{GC}=0$

(G مرکز ثقل مثلث است.)

نوع مثلث را مشخص کنید.

(راهنمایی: می‌دانیم درهر مثلث $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$)

(جواب: متساوی‌الاضلاع)

۱۰ـ ثابت کنید اگر α و β و γ زوایای مثلث باشند آنگاه

دانش آموز

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2>9\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

راهنمایی: ازنامساوی کوشی استفاده کنید.

۱۱ـ معادله زیر را حل کنید.

$$3\,\mathrm{Arc}\sin x+\pi x-\pi=0$$

(راهنمایی: $x_1=\frac{1}{2}$ یکی از ریشه‌های معادله است. ثابت کنید معادله ریشه دیگری ندارد.)

۱۲ـ معادله زیر را حل کنید.

$$\cos^2[\pi(\sin x+\sqrt{2}\cos^2x)]-\mathrm{tg}^2(x+\frac{\pi}{4}\mathrm{tg}^2x)=1$$

(راهنمایی: ازاینکه مربع کوسینوسها هر آرگمان از واحد تجاوز نمی‌کند، کمک بگیرید.)

(جواب: $x=-\frac{\pi}{4}+2n\pi$ (n عدد صحیح است.))

۱۳ـ عدد ۲ را به‌صورت مجموع مربعات دو عدد اعشاری بنویسید که هریك ازآنها بعد از ممیز درست سه رقم مخالف از صفر داشته باشند.

(راهنمایی: اعداد طبیعی x و y را طوری تعیین می‌کنیم که داشته باشیم

$$2000000=x^2+y^2$$

جواب: $2=0/584^2+1/288^2$

۱۴ـ ثابت کنید

$$(a+b+c)^{333}-a^{333}-b^{333}-c^{333}$$

بر $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$ بخشپذیر است.

راهنمایی:

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$$

۱۵ـ دستگاه زیر را حل کنید

$$\begin{cases}\dfrac{x_2x_3\cdots x_n}{x_1}=a_1\\[2ex]\dfrac{x_1x_3\cdots x_n}{x_2}=a_2\\[2ex]\dfrac{x_1x_2\cdots x_{n-1}}{x_n}=a_n\end{cases}$$

(جواب: $\left(x_k=\sqrt{\sqrt[n-1]{\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{a_k}}}\right.$

۱۶ـ مطلوبست

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$$

۱۷ـ تابع $f(x)=A\sin\pi x+B$ مفروض است. A و B را طوری تعیین کنید که داشته باشیم:

$$f'(1)=2\ ,\ \int_0^2 f(x)\,dx=4$$

۱۸ـ کدام یك از زیرمجموعه‌های

$(1)\ u=\{(a,b,c,d)\,|\,a+b=c+d\}$

$(2)\ u=\{(a,b,c,d)\,|\,a+b=0\}$

$(3)\ u=\{(a,b,c,d)\,|\,a^2+b^2=0\}$

R^4 زیر فضای آن است؟

(راهنمایی: (۱) و (۳) جواب هستند. در (۱) داریم $u\neq\emptyset$ زیرا $0\in u$ و u تحت عمل جمع و ضرب اسکالرها بسته است. در (۳) از $a^2+b^2=0$ نتیجه بگیرید که $a=b=0$).

۱۹ـ G گروه اعداد گویای ناصفر با عمل ضرب است و

$$H=\{2^n\,|\,n\in Z\}\ ,\ K=\left\{\frac{1+2n}{1+2m}\,|\,n.\ m\in Z\right\}$$

آیا H و K زیرگروهند؟

(راهنمایی: الف. اگر x و $y\in H$ آنگاه $n, m\in Z$ ای وجود دارد که

$$x=2^n\ .\ y=2^m$$

ب. اگر $x, y\in K$ آنگاه $S\in Z$, r و m و nای وجود دارد که

$$x=\frac{1+2n}{1+2m}\quad و\quad y=\frac{1+2r}{1+2S}$$

۲۰ـ ثابت کنید اگر $a^3+b^3+c^3\overset{7}{\equiv}0$ آنگاه حداقل یکی از c, b, a مضرب ۷ است.

راهنمایی: به برهانی خلف عمل کنید، فرض کنید هیچ یك از اعداد c, b, a مضرب ۷ نیست. بنابراین این اعداد نسبت به ۷ متباین هستند. بنابرقضیه فرما

$$c^6\underset{7}{\equiv}1\ ،\ b^6\underset{7}{\equiv}1\ ،\ a^6\underset{7}{\equiv}1$$

که منجر به تناقض می‌شود.

(جالینوس عظیم‌پور دانشجوی رشته فیزیك دانشگاه تربیت معلم)

روشی برای محاسبه دترمینان ماتریس ۴ × ۴

سید محمد سادات، دانشجو

مقدمه. برای محاسبهٔ دترمینان ماتریسهای مربع از روش عمومی بسط برحسب اعضای یك سطریا یك ستون استفاده می‌شود. و درحالت خاص برای ماتریسهای ۳ × ۳ ازقاعدهٔ ساروس بهره گرفته می‌شود وبرای محاسبهٔ دترمینان ماتریسهای با مرتبه‌ای بالاتراز ۳×۳، روش ساده‌تر وجود ندارد.

روشی‌که ذیلاً ارائه می‌گردد روشی است نظیرقاعدهٔ ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های ۴×۴ که امید است مورد توجه واستفاده قرار گیرد.

محاسبهٔ دترمینان ماتریس ۴×۴ ازطریق روش عمومی بسط برحسب اعضای سطراول.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} f & g & h \\ i & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c$$

$$\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix} =$$

$$a\left(f\begin{vmatrix} k & l \\ o & p \end{vmatrix} - g\begin{vmatrix} j & l \\ n & p \end{vmatrix} + h\begin{vmatrix} j & k \\ n & o \end{vmatrix} \right)$$

$$- b\left(e\begin{vmatrix} k & l \\ o & p \end{vmatrix} - g\begin{vmatrix} i & l \\ m & p \end{vmatrix} + h\begin{vmatrix} i & k \\ m & o \end{vmatrix} \right)$$

$$c\left(e\begin{vmatrix} j & l \\ n & p \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} i & l \\ m & p \end{vmatrix} + h\begin{vmatrix} i & j \\ m & n \end{vmatrix} \right)$$

$$-d\left(e\begin{vmatrix} j & k \\ n & o \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} i & k \\ m & o \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} i & j \\ m & n \end{vmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} &= afkp - aflo - agjp + agln \\ &+ ahjo - ahkn - bekp + belo \\ &+ bgip - bglm - bhio + bhkm \\ &+ cejp - celn - cfip + cflm \\ &+ chin - chjm - dejo + dekn \\ &+ dfio - dfkm - dgin + dgjm \end{aligned}$$

محاسبه دترمینان ماتریس ۴×۴ از طریق روشی نظیر قاعدهٔ ساروس.

الف) ابتدا اعضای ماتریس ۴×۴ را درسمت راست خودش می‌نویسیم سپس قطر اصلی ماتریس سمت چپ باتفاق سه خط موازی آن درسمت راست وقطر فرعی ماتریس سمت راست باتفاق سه خط موازی آن در سمت چپ را رسم می‌کنیم.

به قطراصلی علامت مثبت (+) وقطرهای موازی آن یك در میان علامت منفی ومثبت می‌دهیم.

به‌قطر فرعی علامت مثبت (+) وقطرهای موازی‌آن یک در میان علامت منفی ومثبت می‌دهیم.

حاصلضرب عناصر برروی قطراصلی و موازی آن تعیین و با توجه به علامت هرقطر با هم جمع می‌شوند.

حاصلضرب عناصر بر روی قطر فرعی وموازی‌آن تعیین و با توجه به علامت هرقطر با هم جمع می‌شوند.

قسمت اول با قسمت دوم جمع می‌شوند.

$$\begin{array}{|cccc|cccc|}
+ & - & + & - & - & + & - & + \\
a & b & c & d & a & b & c & d \\
e & f & g & h & e & f & g & h \\
i & j & k & l & i & j & k & l \\
m & n & o & p & m & n & o & p
\end{array}$$

ب) سطرچهارم دترمینان اولیه را بین سطراول وسطر دوم قرار می‌دهیم، سپس کلیه عملیات قسمت الف را بر روی آن اجرا می‌کنیم.

$$\begin{array}{|cccc|cccc|}
+ & - & + & - & - & + & - & + \\
a & b & c & d & a & b & c & d \\
m & n & o & p & m & n & o & p \\
e & f & g & h & e & f & g & h \\
i & j & k & l & i & j & k & l
\end{array}$$

ج) سطرچهارم ماتریس اخیر را بین سطر اول و دوم آن قرار می‌دهیم، سپس کلیه عملیات قسمت الف را بر روی آن اجرا می‌کنیم.

$$\begin{array}{cccccccc}
+ & - & + & - & - & + & - & + \\
a & b & c & d & a & b & c & d \\
i & j & k & l & i & j & k & l \\
m & n & o & p & m & n & o & p \\
e & f & g & h & e & f & g & h
\end{array}$$

پس از انجام عملیات سه مرحله مذکور مجموع جوابها به صورت زیرخواهد بود.

(قسمت الف)

$$\underline{afkp} - \underline{bglm} + \underline{chin} - \underline{dejo}$$
$$\underline{dgjm} - \underline{cfip} + \underline{belo} - \underline{ahkn}$$

(قسمت ب)

$$\underline{angl} - \underline{bohi} + \underline{cpej} - \underline{dmfk}$$
$$\underline{dofi} - \underline{cnel} + \underline{bmhk} - \underline{apgj}$$

(قسمت ج)

$$\underline{ajoh} - \underline{bkpe} + \underline{clmf} - \underline{ding}$$
$$\underline{dkne} - \underline{cjmh} + \underline{bipg} - \underline{alof}$$

که ملاحظه می‌شود با دترمینان ماتریس ۴×۴ که به روش کلی بدست‌آمد برابر است.

مثال. می‌دانیم که، با استفاده ازبسط برحسب سطراول،

$$\begin{vmatrix} ۴ & -۳ & ۲ & ۱ \\ -۶ & ۵ & -۴ & ۲ \\ ۰ & ۸ & -۷ & -۱ \\ ۱ & ۹ & -۲ & ۸ \end{vmatrix} = ۸۴۹$$

به‌روشی که دربالا ذکرشد نیز داریم:

$$\begin{array}{|cccc|cccc|}
۴ & -۳ & ۲ & ۱ & ۴ & -۳ & ۲ & ۱ \\
-۶ & ۵ & -۴ & ۲ & -۶ & ۵ & -۴ & ۲ \\
۰ & ۸ & -۷ & -۱ & ۰ & ۸ & -۷ & -۱ \\
۱ & ۹ & -۲ & ۸ & ۱ & ۹ & -۲ & ۸
\end{array}$$

$$\begin{array}{|cccc|cccc|}
۴ & -۳ & ۲ & ۱ & ۴ & -۳ & ۲ & ۱ \\
۱ & ۹ & -۲ & ۸ & ۱ & ۹ & -۲ & ۸ \\
-۶ & ۵ & -۴ & ۲ & -۶ & ۵ & -۴ & ۲ \\
۰ & ۸ & -۷ & -۱ & ۰ & ۸ & -۷ & -۱
\end{array}$$

$$\begin{array}{|cccc|cccc|}
۴ & -۳ & ۲ & ۱ & ۴ & -۳ & ۲ & ۱ \\
۰ & ۸ & -۷ & -۱ & ۰ & ۸ & -۷ & -۱ \\
۱ & ۹ & -۲ & ۸ & ۱ & ۹ & -۲ & ۸ \\
-۶ & ۵ & -۴ & ۲ & -۶ & ۵ & -۴ & ۲
\end{array}$$

$$-۱۱۲۰+۱۲-۹۶$$
$$-۳۲+۳۶+۵۰۴=-۶۹۶$$
$$۱۴۴+۳۵-۷۶۸$$
$$-۱۰۸+۴۲+۱۰۲۴=۳۶۹$$
$$-۱۲۸+۱۰۰۸-۱۰$$
$$۳۷۸-۳۲-۴۰=۱۱۷۶$$
$$-۶۹۶+۳۶۹+۱۱۷۶=۸۴۹$$

همگرایی و واگرایی سری ریمان؛ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$

جواد لآلی

درکتابهای درسی این موضوع بررسی می‌شود که، اگر قدر نسبت یك تصاعد هندسی کمتر از یك باشد، حد مجموع جملات آن محاسبه‌پذیر است. به‌عنوان مثال، درتصاعد هندسی

$$(۱)\quad 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots,$$

حد مجمــوع آن برابر $\frac{3}{2}$ است. زیرا، n جملهٔ اول آن یك تصاعد هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{3}$ است، و بنابر دستور حاصلجمــع جملات یك تصاعد هندسی،

$$(۲)\quad 1+\frac{1}{3}+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right].$$

دراینجا، n را به بینهایت میل می‌دهیم. بدیهــی است که حد $\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$ برابر صفرمی‌شود وطرفین راست وچپ (۲)، به‌ترتیب، به $\frac{3}{2}$ و عبارت (۱) تبدیل می‌گردد. درچنین‌حالتی، با عبارات غیر-رسمی، می‌گویند «مجموع جمــلات متوالی این تصاعد هندسی تا بی‌نهایت برابر $\frac{3}{2}$ است.» عبــارت (۲) را سری متنــاهی و عبارت (۱) را سری نامتناهی، یا مختصراً، سری می‌خوانند.

۱.۱ تعریف. فرض کنید $\{a_n\}$ دنبــاله‌ای از اعداد حقیقی باشد. عبارت

$$(۳)\quad \sum_{k=1}^{\infty}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots$$

را سری نامتناهی، یا مختصراً، سری خوانیم. حاصلجمــع جزئی nاُم این سری، یا جمعک nاُم آن را، چنین تعریف می‌کنیم:

$$(۴)\quad A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+\cdots+a_n$$

اگر دنباله $\{A_n\}$ همگرا (واگرا) باشد آنگــاه سری را همگرا (واگرا) خوانند وحد دنباله $\{A_n\}$ را مقدار سری، یا حاصلجمع سری، گویند.

با کمی دقت درعبارتهای (۳) و (۴)، درمی‌یابیم‌که یك‌سری، درحقیقت، تعمیم عمل‌جمع است. معمولاً جمع یك عمل دوتایی است، وبا توجه به قانون الحاق از چپ، عمل جمع را می‌توان برای تعداد متناهی عدد نیز تعریف نمود. اما، عمل جمع درسری به‌معنی وسیعتــری نسبت به عمل آن درتعــداد متناهی عدد به‌کار می‌رود. بنابراین، ممکن است بسیــاری ازخــواص شناخته شده عمل جمع را از دست بدهد. به‌عنــوان مثال درجمــع معمولی می‌توان بین عوامل جمــع پرانتزگــذاری کرد ویا پرانتزها را برداشت، درصورتی که درسری‌ها اجرای این‌گونه اعمال جایز نیست؛ یعنی،

$$1-1+1-1=(1-1)+(1-1)=$$
$$(1+(-1\times 1))+1=\cdots$$

اگر انجام چنین اعمالی را درسریهــا انتظار داشتــه باشیم، باید نتیجه نامطلوب زیر را نیز بپذیریم؛

$$\begin{aligned}0&=0+0+0+\cdots\\&=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots\\&=1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots\\&=1+0+0+\cdots\\&=1\end{aligned}$$

بالنتیجه، $1=0$.

مثال فوق این واقعیت‌را روشن می‌سازدکه «جمع تعمیم‌یافته». درسریها جمع معمولی نیست وبسیــاری از خواص آن، ماننــد جابجائی، شرکت‌پذیری، را از دست می‌دهد. حاصل‌جمع دریك «جمع معمولی» ازجمع کردن اعداد یك مجموعه متناهی حاصل

می‌شود، درصورتی که مجموع دریك سری، حد یك دنباله است ومحاسبه برروی جملات آن باید با احتیاط بیشتری همراه باشد.

مسئله اصلی درمبحث سریها بررسی این موضوع است که کدام یك ازخواص جمع معمولی در «جمع تعمیم یافته» سریها محفوظ می‌ماند وتحت چه شرایطی خواص وجمع معمولی را می‌توان تعمیم داد. یکی ازشرایط تعمیم خواص درسریها این است که جملات سری نامنفی باشد، وبنا برقضیه دیریکله، مقدار یك سری نامنفی مستقل ازترتیب جملات آن است وتغییرنظم در جملات سری تأثیری درمقدار سری ندارد. چون سری ریمان یك سری نامنفی است، تعریف سریهای نامنفی وبررسی بعضی از خواص عمومی آنها، درارائه مطالب بعدی مفید خواهد بود.

۲٫۱ تعریف. سری که جملاتش نامنفی باشد یك سری نامنفی خوانیم. اگرتمام جملات سری مثبت باشد، آن را سری باجملات مثبت گوئیم.

نخستین خاصیت مهم سریهای نامنفی این است که مقداری در $R^*=R\cup\{\pm\infty\}$ دارند. این خاصیت ناشی ازاین حکم کلی در دنباله‌ها است که هر دنباله یکنوا حد دارد. با استفاده از این حکم قضیه عمومی زیر درسریهای نامنفی را ثابت می‌کنیم.

۳٫۱ قضیه. هر سری نامنفی همگرا یا واگرا به $+\infty$ است؛ یعنی، اگر سری ازبالا کراندار باشد، همگرا است؛ درغیر این صورت، واگرا به $+\infty$ است.

برهان. فرض کنید که $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ سری نامنفی باشد و $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$. دراین صورت، همواره داریم

$$A_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_k+a_{n+1}=A_n+a_{n+1}\geqslant A_n$$

بنابراین دنباله $\{A_n\}$ دنباله‌ای صعودی است، پس $\lim_{n\to\infty}A_n$ موجود است. اگراین دنباله ازبالا کراندارباشد، $\lim_{n\to\infty}A_n$ عدد حقیقی است. بنابراین، سری همگرا است؛ در غیر این صورت، $\lim_{n\to\infty}A_n=\infty$، یعنی، سری واگرا به $+\infty$ است.

۴٫۱ تعریف. سری

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots$$

را یك سری ریمان خوانیم که درآن p یك عدد حقیقی است.

نخستین نتیجه‌ای که ازقضیه ۳٫۱ حاصل می‌شود این است که:

۵٫۱ نتیجه. سری ریمان همگرا یا واگرا به $+\infty$ است.

درمورد سریهای نامنفی، قواعد ساده‌ای هست که به‌کمك آنها می‌توان همگرایی یا واگرایی بعضی ازسریها را تشخیص داد. برای اینکه بتوان ازاین قواعد استفاده کرد، باید همگرایی و واگرایی بعضی ازسریهای نامنفی را، ازجمله سری ریمان، را حاضرالذهن داشت وبه‌عنوان محك به‌کاربرد.

اصولاً، برای اثبات همگرایی یك سری با جملات نامنفی آن را با سری همگرایی، که جملاتش بزرگتر ازآن است، مقایسه می‌کنیم؛ واگر بخواهیم در واگرایی سری نامنفی تحقیق کنیم، باید سری‌نامنفی واگرایی بیابیم‌که جملاتش ازآن‌کوچکتر باشد. به‌بیان دقیق‌تر:

۶٫۱ قضیه (قاعده مقایسه). فرض کنید که k عدد ثابت و مثبت باشد و به‌ازاء هر n، $0\leqslant a_n\leqslant kb_n$. دراین صورت،

(الف) اگر سری $\sum b_n$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum a_n$ نیز همگرا است و

$$0\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}a_n\leqslant k\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

(ب) اگر سری $\sum a_n$ واگرا به $+\infty$ باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ نیز واگرا به $+\infty$ است.

برهان. با توجه به اینکه دنباله «حاصلجمع جزئی n ام» صعودی است، حکم بدیهی است.

قاعده دیگری موجود است که صورت بیان آن کمی با این قاعده متفاوت است وگاهی آن را قاعده دوم مقایسه، یا قاعده مقایسه حدی، می‌گویند.

۷٫۱ قضیه (قاعده مقایسه حدی). فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ دوسری با جملات مثبت باشد؛ $a_n>0$، $b_n>0$، و $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$.

دراین صورت،

(الف) اگر $L>0$، دوسری همگرا یا واگرا است.

(ب) اگر $L=0$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ نیز همگرا است.

(ج) اگر $L=+\infty$ وسری $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ واگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ نیز واگرا است.

برهان. فرض کنید که $L>0$. متناظر با $\varepsilon=\frac{1}{2}L$، عدد طبیعی مانند N هست که به‌ازاء هر n، اگر $n\geqslant N$،

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-L\right|<\frac{1}{2}L,$$

ویا،

$$\left(\frac{1}{2}L\right)b_n\leqslant a_n\leqslant\left(\frac{3}{2}L\right)b_n,$$

بنابرقاعده مقایسه، حکم برقراراست، برای‌حالتهای‌دیگر، به‌همین طریق می‌توان استدلال کرد.

اگرصورت این دوقاعده را، با دقت بیشتری، مطالعه کنیم

مشاهده می‌کنیم که برای نتیجه‌گیری از آنها نیاز به همگرایی و واگرایی سریهای خاصی داریم. سری ریمان ازجمله سریهای نامنفی ومناسبی است که کاربرد عملی آن دراین دوقاعده بسیار است.

۲. قضیه: درسری ریمان $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ ؛
اگر $p\leqslant 1$، سری واگرا است؛ واگر $p>1$، سری همگرا است.

برهان. ابتدا فرض کنید که $p=1$. درچنین حالتی، این سری را توافقی یا همساز می‌خوانند. فرض‌کنید که (فرض خلف) این سری به S همگرا باشد؛ یعنی،

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=S$$

بنابراین،

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right)=\frac{1}{2}S,$$

یا،

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots=\frac{1}{2}S$$

از اینجا نتیجه می‌شود که سری با جملات فرد (درسری ریمان) نیز به $\frac{1}{2}S$ همگرا است.

زیرا،

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right)=S-\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}S$$

ازطرفی،

$$\frac{1}{1}>\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}$$
$$\vdots$$

اگرطرفین نامساویهای فوق را جمع کنیم، نامساوی اکیدی حاصل می‌شود؛ یعنی

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots$$

یا

$$\frac{1}{2}S>\frac{1}{2}S$$

واین یك تناقض است. پس سری دراین حالت واگرا است.

حال، فرض کنید $p<1$. بنابراین، $\frac{1}{n}<\frac{1}{n^p}$، بنابر قاعده مقایسه، سری واگرا است.

تنها حالتی باقی می‌ماند که $p>1$. اثبات دراین حالت از قضیه ۳.۱ ونتیجه ۵.۱ استفاده می‌شود.

فرض کنید

$$S_n=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$$

بدیهی است که $\{S_n\}$ دنباله‌ای صعودی است، کافی است ثابت کنیم که این دنباله از بالا کرانداراست. فرض کنید n عددطبیعی دلخواه وبعد ازاین ثابت باشد.

$$\begin{aligned}S_{2n+1}&=1+\left[\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]\\&\quad+\left[\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^p}\right]\\&\leqslant 1+\left[\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]+\left[\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]\\&=1+2^{-p}S_n+2^{-p}S_n=1+2^{(1-p)}S_n\\&\leqslant 1+2^{(1-p)}S_{2n+1}\end{aligned}$$

بنابراین، ازاینجا نتیجه می‌شود که

$$\left(1-2^{(1-p)}\right)S_{2n+1}<1$$

چون $p>1$، پس‌عامل $\left(1-2^{(1-p)}\right)$ عددی مثبت است وتقسیم طرفین نامساوی فوق، بر آن، جهت نامساوی را تغییر نمی‌دهد. بالنتیجه،

$$S_{2n+1}\leqslant\frac{1}{1-2^{(1-p)}}=k$$

که درآن، k عددی مستقل از n است. چون

$$S_n\leqslant S_{2n}\leqslant S_{2n+1}\leqslant k$$

پس دنباله $\{S_n\}$ ازبالا کراندار است. بالنتیجه، درچنین حالتی همگرا است.

منابع:

۱ــ دکتر غلامحسین مصاحب، آنالیز ریاضی، انتشارات فرانکلین، دی ماه ۱۳۴۸.

۲ــ دکترمحمد مهدی ابراهیمی، ریاضی عمومی ۲ (رشته شیمی)، انتشارات دانشگاه پیام نور، اسفند ۱۳۶۸.

۳ــ Mathematics Magazine. Vol. 52. No. 3 May 1979

بقیه از صفحهٔ ۳

آموزشی موجود، می‌توان اینگونه مسائل را تا حدی غیرمعمولی وغیرکلاسیک تلقی نمود.

سنت بر این جاری است که برای انتخاب تیم شرکت‌کننده در المپیاد بین‌المللی درمیان محصلینی‌که معدل سالانه آنهابالای هیجده می‌باشد، آزمونی برگـزار گردد وعـده‌ای برای مرحله دوم انتخاب گردند. دراین راستا چنانچـه مسائل ارائه شده، از نوع مسائل المپیادی باشد، چه بسا که دانش‌آموزان مستعد، با معدل بالا، درگوشه وکنار مملکت ازحل آنها عاجز، آینده وخود را یک باره فاقد توانایی‌های لازم برای شرکت‌دراین رقابت‌یافته واحیاناً موجب یأس آنان در فراگیری و ادامه مطالعه ریاضی بشود.

فلهذا پیشنهاد می‌گردد که درآزمون مرحلـه اول دانش‌آموزان دقت و احتیاط بیشتـری به‌عمل آید و مسائلی ارائه گردد که در سطح مسائل داخلی دبیرستانها و در سطـح مطالب تدریس شده باشد. درنتیجه دانش‌آموزان شرکت‌کننده احساس نگرانی ننموده وتعداد موردنیاز برای آماده‌سازی وشرکت درآزمون مرحلـهٔ دوم با اختلاف کمتری از سایرین از حیث امتیازات کسب شده بـرگزیده گردند.

درمرحله دوم‌که انتخاب نهایی تیم شرکت‌کننده صورت‌می‌پذیرد می‌توان ازسئوالات ومسائل ابتکاری و المپیادهای سالهای قبل بهره گرفت. البته قبل از این آزمون، همچنـان که معمول است، دانش‌آموزان در کـلاسهای آماده سازی با روشهای حل مسأله، تکنیک‌ها، مهارت‌ها، مفاهیم، وخلاقیت‌های ریاضی آشنامی‌شوند وهیچگونه نگرانی ازطرح مسائل مشکل و نمونه‌ای مورد نخواهد داشت.

مجله رشد ریاضی ازابتدای فعالیت‌های مربوط به‌المپیادهای ریاضـی کشورمان سعـی نمـوده است تـا ضمن طـرح مسائل المپیادهای ملی، بین‌المللی والمپیادهای سایر کشورها، جامعه دبیران و دانش‌آموزان ریاضی علاقمند به دانش ریاضـی را با اینگونه مسائل آشنا سازد.

به‌هر تقدیر، امیدواریم که کمیته محترم المپیاد ریاضی درهرچه بهتر برگزار کردن مسابقات مربوط به انتخـابات تیم نهایی و نیز بهینه کردن عوارض ومشکلات روانی-آموزشی آن بیش از پیش موفق باشد.

سردبیر

اسامی خوانندگانی که حل مسایل ۲۸ را فرستاده‌اند

اگـر چه اکثر خوانندگـان، جهت تنظیم و ارسال مسایل، متحمل زحماتی شده‌اند، ولـی، کار دونفر قابل تحسین است. یکی **آقای محمدعلی پورسکندانی**، دانشجو از تبریز، کـه مسایل المپیاد کانادا را، با راه حل آن، برایمان ارسال داشتند، که از ایشان تشکرمی‌شود. دیگرآنکه، **آقای امیرمحمد آهنی**، دانش‌آموز دوم ریاضی از تهران، که تمام مسایل را به‌صورت منظم ومرتب (با مقدمه، فهرست بندی مطالب، غلط‌نامه، منابعی که به‌آنها ارجاع نموده‌اند) نوشته‌اندکه کار ایشان نیز قابل تقدیر است. تنها خانمی که راه‌حل مسایل را ارسال داشته‌اند **خانم زهرا جاقوری**، دانش‌آموز سوم ریاضی، از مشهد بود. درضمن، بسیاری از خوانندگـان مسایل ویژه دانش‌آموزی را حل کرده‌اند و چون اینگونه مسایل با راهنمایی درج می‌شود. از بررسی راه حل‌ها آنها خودداری می‌شود. بنا براین، تقاضا داریم‌که حل این نوع مسایل را برایما نفرستند.

اسامی خوانندگانی‌که راه‌حل مسایل‌را برایمان فرستاده‌اند بقرار زیر است:

آقایان: آرش یـاوری و محمدرضا تجلی، دانش‌آمـوز، سمنان؛ ۱، ۳، ۶.

محمدرضانوری، دانش‌آموز، تهران؛ ۱، ۲، ۳، ۵.

بهنام قلیچ‌خانی، دانش‌آموز، تهران، ۱، ۳، ۵.

اکبر ایروانی، دانشجو، اصفهان، ۱، ۲.

مجیدکندمکار، دانش‌آموز، ساوه، ۱.

کیاوش تسلیمی، بابلسر، ۲، ۳، ۵، ۶.

امیر صادقی، تهران، ۱، ۳، ۵، ۷.

محمد قلی‌پورطالبی، دانش‌آموز، رشت، ۱، ۲، ۵، ۷.

امیرحسین بابارضا، اصفهان، ۵، ۶، ۷.

نوید باقری‌یکتا، دانش‌آموز، تهران، ۱.

آیدین پیروزه، دانش‌آموز، تبریز، ۱، ۸.

داود رضایی، لرستان، ۳.

محمد مهدی‌امین، دانشجو، تهران، ۱، ۲، ۵.

مهدی نیکزاد، دانش‌آموز، اصفهان، ۱، ۲.

حل مسائل شماره ۲۸

تنظیم از: جواد لألی

توجه. با کمال تأسف در مسئله ۱ و ۹ اشتباهاتی رخ داده است که پس از تصحیح به‌درج آن اقدام کردیم.

۱ـ در زنگ تفریح مدرسه‌ای بین علی، حسین، مهرداد و جهانگیر سخنانی به‌این صورت رد و بدل شد:

مهرداد: هرکس که به جهانگیر کمک نکند دوست ناظم مدرسه نیست.

علی: من کسانی را که با حسین بازی می‌کنند کمک نمی‌کنم.

جهانگیر: من، با هر کسی که با مهرداد بازی نکند، بازی می‌کنم.

حسین: من با مهرداد بازی نمی‌کنم.

سؤال: آیا علی دوست ناظم است؟ چرا؟

اگر ناظم و علی دوست یکدیگر باشند، چه کسی با حسین بازی می‌کند.

حل. فرض کنید a، b، c، d، e، به ترتیب، جایگزین علی، حسین، مهرداد، جهانگیر و ناظم مدرسه باشند ومؤلفه‌های گزاره‌ای P و Q، R را چنین تعریف شوند

$P(x, y)$؛ یعنی، x با y بازی می‌کند.

$Q(x, y)$؛ یعنی، x به y کمک می‌کند.

$R(x, y)$؛ یعنی، x دوست y است.

بنابراین، گزاره‌های فوق را به زبان سورهای منطق می‌توان به صورت ذیل نوشت:

$$(1)\quad \forall x(\sim Q(x, d) \Rightarrow \sim R(x, e))$$
$$(2)\quad \forall x(P(x, b) \Rightarrow \sim Q(a, x))$$
$$(3)\quad \forall x(\sim P(x, c) \Rightarrow P(d, x))$$
$$(4)\quad \sim P(b, c)$$

از (۳)، با قرار دادن $x=b$، و (۴) نتیجه می‌شود که

$$(5)\quad P(d, b)$$

همچنین، در (۲)، با قرار دادن $x=d$ و گزاره (۵)، نتیجه ذیل حاصل می‌شود

$$(6)\quad \sim Q(a, d)$$

واز (۱) و (۶) نتیجه می‌شود که $\sim R(a, e)$؛ یعنی، علی دوست ناظم مدرسه نیست.

بنابراین، اگرحسین با مهرداد بازی نکند آنگاه علی دوست‌ناظم مدرسه نیست.

عکس نقیض این گزاره جواب سؤال دوم است؛ یعنی، اگر علی دوست ناظم مدرسه باشد آنگاه حسین با مهرداد بازی می‌کند.

۲ـ کلیه جوابهای حقیقی دستگاه معادلات چند مجهولی زیر را به‌دست آورید.

$$\begin{cases} 2x(1+y+y^2)=3(1+y^4) \\ 2y(1+z+z^2)=3(1+z^4) \\ 2z(1+x+x^2)=3(1+x^4) \end{cases}$$

حل. معادلات فوق ازیکدیگر با تبدیل x و y و z به همدیگر به‌دست می‌آیند. بنابراین، بدون‌آنکه به‌کلیت برهان خللی وارد شود می‌توان فرض کرد $z\leqslant y\leqslant x$. چون

$$1+x+x^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

با مشاهده عبارت طرف دوم، که عددی مثبت است، x و y و z اعداد حقیقی مثبت‌اند و

$$2x(1+x+x^2)\geqslant 2z(1+x+x^2)=3(1+x^4)$$

بنابراین،

$$2x(1+x+x^2)\geqslant 3(1+x^4)$$

یا

$$(x-1)^2(3x^2+4x+3)\leqslant 0$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $x=1$. از معادلات سوم و دوم، به ترتیب، نتیجه می‌شود که $z=1$ و $y=1$.

۳ـ درستی تساوی ذیل را تحقیق کنید

$$3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\cdots}}}}}$$

حل. عبارت فوق بدین معنی است که

$$3=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}$$

مشاهده می‌کنیم که

$$3=\sqrt{1+2\times 4}=\sqrt{1+2\sqrt{16}}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}}$$
$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}}$$

این محاسبات ما را به‌حدس زیرهدایت می‌کند.

به‌ازای هرعدد طبیعی $n>1$،

$$(*)\quad 3=\sqrt{1+2\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+n\sqrt{(2+n)^2}}}}$$

به برهان خلف عمل می‌کنیم:

اگرحدس فوق، به‌ازای تمام اعداد طبیعی، برقرار نباشد آنگاه مجموعهٔ

$$A=\left\{n \mid 3\neq\sqrt{1+2\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+n\sqrt{(2+n)^2}}}},\ n\in N\right\}$$

یک زیرمجموعه ناتهی از اعداد طبیعی است. بنابر اصل

خوشترتیبی مجموعه A ابتدا دارد.

اگر $(n+1)$ ابتدای A باشد آنگاه $(n+1)\in A$ و $n\notin A$ و رابطه (*) برای n برقرار است. ازطرفی،

$$(n+2)^2=n^2+4n+4=1+(n+1)(n+3)=1+(n+1)\sqrt{(n+3)^2}$$

اینک، در رابطه (*) به‌جای $(n+2)^2$ عبارت سمت راست فوق را قرارمی‌دهیم. بنابراین،

$$3=\sqrt{1+2\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{(n+3)^2}}}}}$$

یعنی؛ $(n+1)\notin A$ و این با این فرض که $(n+1)$ ابتدای A است تناقض دارد. با این تناقض نتیجه می‌شود که رابطه (*) به‌ازای هر n برقرار است.

برهان دوم. چون اصل خوشترتیبی معادل استقراء است، بنابراین، به‌استقراء نیز می‌توان برهانی برای آن ارائه داد. مراحل استقراء را می‌توان درخلال برهان فوق دریافت.

برهان سوم. آقای بهنام قلیچ‌خانی دانش‌آموز سال چهارم ریاضی ازتهران؛ وآقای کیاوش تسلیمی ازبابلسر، درحالت کلی این مسئله را مطرح کردند، که خلاصه برهان آن چنین است. به‌ازای هرعدد حقیقی ومثبت x وهرعدد طبیعی n،

$$(x+n)^2=1+(x+n-1)(x+n+1)$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}(x+2)&=\sqrt{(x+2)^2}\\&=\sqrt{1+(x+1)(x+3)}\\&=\sqrt{1+(x+1)\sqrt{(x+3)^2}}\\&=\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{(x+4)^2}}}\\&\quad---\qquad\qquad---\\&=\sqrt{1+(x+1)\sqrt{\cdots(x+n)\sqrt{(x+n+2)^2}}}\end{aligned}$$

اثبات دقیق حکم فوق به‌استقراء است. حال اگر $x=1$ و n به بینهایت میل کند، حکم مسئله نتیجه می‌شود.

۴ــ مقدارانتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}(\text{Arctg}\,\pi x-\text{Arctg}\,x)\,dx$$

راه حل اول

$$\int_1^\pi \frac{dy}{1+(xy)^2}=\frac{1}{x}(\text{Arctg}\,\pi x-\text{Arctg}\,x),$$

بنابراین،

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}(\text{Arctg}\,\pi x-\text{Arctg}\,x)\,dx$$

$$=\int_0^\infty\left(\int_1^\pi \frac{1}{1+(xy)^2}\,dy\right)dx$$

$$=\int_1^\pi\left(\int_0^\infty \frac{1}{1+(xy)^2}\,dy\right)dx=\frac{\pi}{2}\int_1^\pi\frac{1}{y}\,dy=\frac{\pi}{2}\ln\pi$$

راه حل دوم

فرض کنید

$$f(a)=\int_0^\infty \frac{1}{x}(\text{Arctg}\,ax-\text{Arctg}\,x)\,dx$$

ازاین تابع نسبت به متغیر a مشتق می‌گیریم. بنابراین،

$$f'(a)=\int_0^\infty \frac{1}{x}\left(\frac{x}{1+(ax)^2}\right)dx$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{1+(ax)^2}\,dx=\frac{1}{a}\text{Arctg}\,(ax)\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{2a}$$

ازاینجا نتیجه می‌شود که

$$f'(a)=\frac{\pi}{2a}$$

$$f(a)=\frac{\pi}{2}\ln a+C$$

چون $f(1)=0$، پس، $C=0$. بنابراین، $f(a)=\frac{\pi}{2}\ln a$؛ و $f(\pi)=\frac{\pi}{2}\ln\pi$.

۵ــ درمسابقه‌ای، که k روز برگزار می‌شود، $n\geqslant 2$ بازیکن شرکت می‌کنند هرروز بازیکنان امتیازات ۱، ۲، ۳، . . . ، n را می‌گیرند وهیچ دوبازیکن امتیازات یکسانی دریافت نمی‌کنند. درپایان kمین روز معلوم می‌شود که هربازیکن درمجموع، دقیقاً، ۲۶ امتیازمی‌آورد.

همهٔ ازواج مرتب (n, k) را که ممکن است رخ دهد تعیین کنید.

حل. چون درهر روز، امتیاز هربازیکن متمایز از دیگری است، پس مجموع امتیازات بازیکنان دریک روز برابراست با

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

ازطرفی هریک از n بازیکن، در k روز، ۲۶ امتیاز می‌گیرد. بنابراین، مجموع امتیازاتی که، درتمام روزها، به هریک از بازیکنان داده می‌شود چنین است:

$$\frac{1}{2}kn(n+1)=26n,$$

$$k(n+1)=52$$

با فرض $2 \leqslant n$، حالتهای ممکن برای (n, k) عبارت است از $(4, 12)$ و $(3, 13)$ و $(2, 25)$ و $(1, 51)$

اینک هریک ازحالتهای فوق را بررسی می‌کنیم.

حالت $(n, k)=(1, 51)$، امکانپذیر نیست؛ زیرا، امتیازات بازیکنان دریک روزیکسان می‌شود.

بـرای حالـت $(n, k)=(2, 25)$؛ کـه در ۲ روز و ۲۵ بازیکن شرکت دارند، امتیازات به‌صورت زیرتوزیع می‌شود.

$$(26, 26 \cdots 26, 26)=(1, 2, \cdots, 24, 25)+(25, 24, \cdots, 2, 1).$$

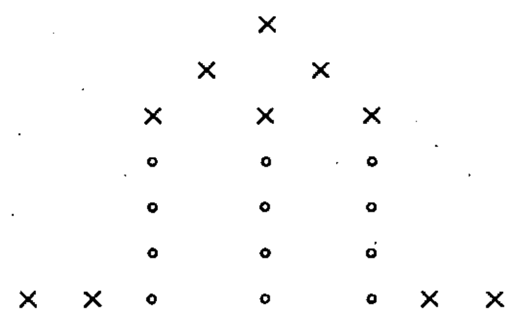
اگـر $(n, k)=(3, 13)$ آنگـاه در ۱۳ روز ۳ بازیکـن شرکت دارند که توزیع امتیازات چنین است:

$$(26, 26, 26)=(1, 2, 3)+2(2, 3, 1)+2(3, 1, 2)+3(1, 3, 2)+3(2, 1, 3).$$

وبالاخره، برای حالت $(n, k)=(4, 12)$، داریم

$$(26, 26, \cdots, 26, 26)=2(1, 2, \cdots, 11, 12)+2(12, 11, \cdots, 2, 1)$$

۶ـ مجموعـه‌ای با تعداد $\frac{1}{2}n(n+1)$ عضومتمایز، به‌تصادف، برروی‌آرایه مثلثی مرتب شده‌اند؛



فرض کنید M_k بزرگترین عدد در kمین سطـر از رأس آن باشد. احتمال

$$M_1<M_2<M_3<\cdots<M_n$$

را پیدا کنید.

حل. فرض کنید که P_n احتمالی باشد کـه درسطـر nام رخ می‌دهد. بدیهی است که $p_1=1$، $P_2=\frac{2}{3}$. در حالـت کلـی، احتمالی که می‌بایستی درآخرین سطر بیاید برابر

$$\frac{n}{\frac{1}{2}n(n+1)}=\frac{2}{n+1}$$

است. باید توجه داشت که برای اعداد باقیمـانده آخرین سطر هیچ قیدی وجود ندارد. احتمال اینکه اعداد «$n-1$ سطر اولیه» درجای مناسب خود قراربگیـرند برابر P_{n-1} است. بنابراین،

به‌ازای $n \geqslant 3$،

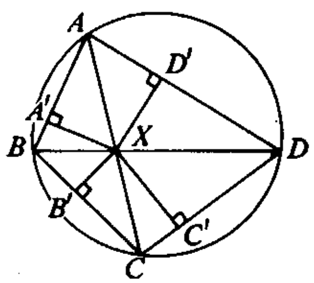
$$P_n=\frac{2}{n+1}P_{n-1}=\frac{2}{(n+1)}\cdot\frac{2}{n}P_{n-2}$$
$$=\cdots=\frac{2^n}{(n+1)!}$$

۷ـ فرض کنید $ABCD$ یک چهار ضلعـی محـدب در دایره‌ای باشد. واقطار AC و BD یکدیگر را درنقطه X قطـع می‌کنند. عمودهایی از X اضلاع AB، BC، CD، و DA را، به‌تـرتیب در A'، B'، C' و D' قطع می‌کنند. ثابت کنید

$$|A'B'|+|C'D'|=|A'D'|+|B'C'|$$

($|A'B'|$ طول پاره‌خط $A'B'$ است، وقس‌علیهذا.)

حل (برهان اول). فرض کنیـد که d طـول قطر دایره $ABCD$ باشد.



شکل ۱

$A'XB'B$ بر روی یک دایره است و زاویه مقـابل کمان $A'B'$ در B برابر زاویه مقابل کمان AC در دایره $ABCD$ است. چون BX قطر دایره $A'XB'B$ است، بنابر رابطه

$$\sin B=\frac{b}{2R}$$

در دومثلث $A'BB'$ و ABC،

$$\sin B=\frac{|A'B'|}{|BX|}=\frac{|AC|}{d}.$$

به‌طریق مشابه،

$$\frac{|C'D'|}{|DX|}=\frac{|AC|}{d}$$

ازاینجا نتیجه می‌شود که

$$|A'B'|+|C'D'|=\frac{|AC|}{d}[|BX|+|DX|]=\frac{|AC||BD|}{d}$$

به‌همین طریق ثابت می‌شود که

$$|A'D'|+|B'C'|=\frac{|AC||BD|}{d}$$

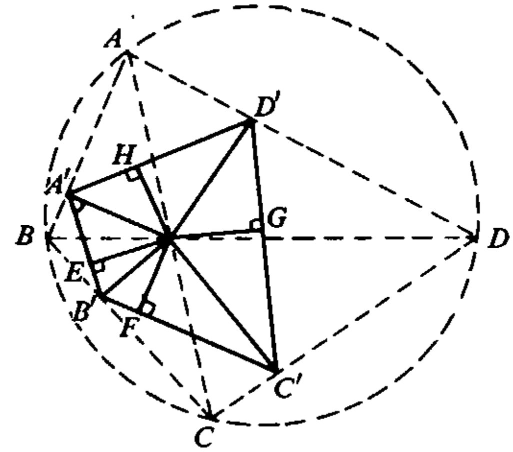
چون طرفین تساویهای فوق یکسان‌است، پس حکم برقراراست.

برهان (دوم). چون $A'XB'B$ روی دایره است، پس

$$B'\hat{B}X=B'\hat{A'}X.$$

چون $A'AD'X$ روی دایره است، پس، $X\hat{A'}D' = X\hat{A}D$.
چون $ABCD$ نیز روی دایره است، پس، $C\hat{A}D = C\hat{B}D$،
بنابراین،

$$B'\hat{A'}X = C\hat{B}D = C\hat{A}D = X\hat{A'}D'$$



شکل ۲

بالنتیجه، XA' نیمساز زاویه $D'\widehat{A'}B'$ است. به طریق مشابه، XB'، XC'، XD'، به‌ترتیب، نیمسازهای زوایای $A'\hat{B'}C'$، $B'\widehat{C'}D'$، $C'\hat{D'}A'$ است.

عمودهایی از نقطه X اضلاع $A'B'$، $B'C'$، $C'D'$، $D'A'$ را، به‌ترتیب، درنقاط E، F، G، H قطع می‌کنند. بنابراین،

$$|A'H| = |A'E|,\ |B'E| = |B'F|,$$
$$|C'F| = |C'G|,\ |D'G| = |D'H|$$

ازاینجا نتیجه می‌شود که

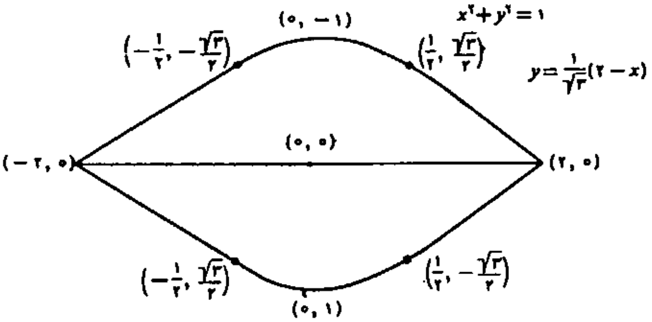
$$|A'D'| + |B'C'| = |A'B'| + |C'D'|$$

۸ـ یک ذرهٔ مادی می‌تواند با سرعت حداکثر ۲ متر برثانیه در امتداد محور xها و با سرعت حداکثر یک متر برثانیه درمسیرهای دیگرصفحه حرکت کند. نمودارناحیه‌ای را درصفحه تعیین‌کنید که ذره مادی می‌تواند دریک ثانیه با شروع ازمبدأ به مرزآن ناحیه برسد.

حل. بعلت تقارن ناحیه مسیرها، می‌توانیم توجه خود را به ربع مثبت صفحه محدود کنیم. دورترین نقاط قابل دسترس، بر روی مسیر، نقطه‌ای روی محور xها است و نقطه $(t, 0)$، که در آن $0 \leqslant t \leqslant 2$، به‌طورمستقیم به‌سمت آن نقطه حرکت می‌کند. ما مسیرهایی ازاین نوع را بررسی می‌کنیم:

x، طول قابل دسترس مسیر را ثابت گرفته نسبت به مقادیر ممکن y تحقیق می‌کنیم.

حداکثرمسافتی که متحرک، از نقطه $(t, 0)$ روی محور xها، می‌تواند در مسیرهای دیگر به پیماید برابر $\frac{1}{2}(2-t)$ است



شکل ۳

[زیرا، حداکثر سرعت برروی محور xها ۲ و بر روی مسیرهای دیگریک است. با یک تناسب ساده، و اینکه حداکثر مسافت باقیمانده بر روی محور xها $2-t$ است، حکم فوق نتیجه می‌شود]. بنابراین، مجموعه نقاطی که قابل دسترسی ذره مادی است، ازنقطه $(t, 0)$ روی محورxها، در داخل دایره‌ای به‌مرکز $(t, 0)$ وشعاع $\frac{1}{2}(2-t)$ است؛ یعنی،

$$(x-t)^2 + y^2 \leqslant \left(\frac{2-t}{2}\right)^2.$$

ازاینجا نتیجه می‌شود که

$$y^2 \leqslant \left(\frac{2-t}{2}\right)^2 - x^2 = \frac{3}{4}\left[\frac{4}{9}(2-x)^2 - \left(t - \frac{2(2x-1)}{3}\right)^2\right]$$

اگر $\frac{1}{2} < x < 2$ آنگاه ماکزیمم y زمانی رخ می‌دهد که $t = \frac{2}{3}(2x-1)$، بالنتیجه، $y \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}(2-x)$. اگر

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$$

آنگاه

$$-\frac{2}{3}(2x-1) \geqslant 0$$

بنابراین، y وقتی ماکزیموم می‌شود که $t = 0$، و از اینجا نتیجه می‌شود که

$$y^2 \leqslant 1 - x^2$$

تبصره. مجموعه نقاط قابل دسترس ذره مادی، از نقطه $(t, 0)$ روی محور xها، در درون دایره‌ای به مرکز $(t, 0)$ و شعاع $\frac{1}{2}(2-t)$ است. این دایره‌ها، تحت‌گسترش، به‌مرکز $(2, 0)$، به دایره $x^2 + y^2 = 1$ شبیه یکدیگرند.

خطوط $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(2-x)$ پوشش خانواده این دسته دوایر است.

۹ـ فرض کنید که تابعی، مانند f، برمجموعه اعداد صحیح

مثبت تعریف شده باشد و دراین شرط صدق کند:

$$f(1)=1,\ f(2)=2,$$

و به‌ازای هر $n\geqslant 1$،

$$f(n+2)=f(n+2-f(n+1))+f(n+1-f(n))$$

الف) ثابت کنید:

(i) $0\leqslant f(n+1)-f(n)\leqslant 1$.

(ii) اگر $f(n)$ فرد باشد آنگاه $f(n+1)=f(n)+1$.

(ب) با ذکر دلیل، همه مقادیر n را تعیین کنید که

$$f(n)=2^{10}+1$$

حل. برهان (الف) (i). حکـم را به استقـراء قـوی ثابت می‌کنیم. به‌ازای $n=1$ حکم برقراراست. فرض کنیدکه به‌ازای $1\leqslant n\leqslant m-1$، برقرارباشد؛ یعنی،

$$0\leqslant f(n+1)-f(n)\leqslant 1$$

دراین صورت، به‌ازای چنین nهایی،

$$(1)\quad [(n+2)-f(n+1)]-[(n+1)-f(n)]=1-[f(n+1)-f(n)]\in\{0,1\},$$

با توجه به‌فرض استقراء، از اینجا نتیجه می‌شود که

$$(2)\quad f(n+2-f(n+1))-f(n+1-f(n))\in\{0,1\}$$

زیرا، حاصل عبارت (1) برابر 0 یا 1 است، که اگر صفرباشد، حکم (2) برقراراست؛ درغیراین صورت،

$$[(n+2)-f(n+1)]-[(n+1)-f(n)]=1,$$

که ازاینجا نتیجه می‌شود که،

$$f(n+1)=f(n),$$

حال اگر $k=n+1-f(n+1)$ آنگاه $k\leqslant m-1$ است، بنابرفرض استقراء،

$$f(k+1)-f(k)=f(n+2-f(n+1))-f(n+1-f(n))\in\{0,1\}$$

واین همان حکم رابطهٔ (2) است.

اینک، برای تکمیل برهان استقراء، دوحالت درنظرمی‌گیریم:

حالت اول، $f(m)=f(m-1)+1$. دراین صورت، باتوجه به‌رابطه تراجعی درفرض مسئله،

$$f(m+1)-f(m)=f(m+1-f(m))-f(m-1-f(m-2))=f(m-f(m-1)-f(m-1-f(m-2))\in\{0,1\}$$

که عضویت فوق بنابررابطه (2) است.

حالت دوم، $f(m)=f(m-1)$. ازاینجا نتیجه می‌شود

$$f(m-f(m-1))=f(m-2-f(m-3))$$

از رابطه (2)، نتیجه می‌شود که هریک از اعداد طرفین تساوی فوق برابر $f(m-1-f(m-2))$ است. بنـابـراین، بنابر رابطه تراجعی و رابطه (2)،

$$f(m+1)-f(m)=f(m+1-f(m))-f(m-1-f(m-2))=f(m+1-f(m))-f(m-f(m-1))\in\{0,1\},$$

بالنتیجه، (الف) (i)، به‌ازای $n=m$ برقرار می‌شود وبا اثبات این حکم نتیجه لازم برای برقراری استقراء مهیا می‌گردد.

برهان (الف) (ii)، فرض کنید که این نتیجه به ازای

$$n=1,3,\dots,m-1$$

برقرارباشد و $f(m)$ عددی فرد باشد. دراین صورت،

$$f(m-1)$$

زوج است، وچون $0\leqslant f(m)-f(m-1)\leqslant 1$، پس

$$f(m)=f(m-1)+1$$

بنابراین،

$$f(m+1)=f(m+1-f(m))+f(m-f(m-1))=2f(m-f(m-1))$$

بنابراین، $f(m+1)$ زوج است، و بنـابر قسمت (الف)، (i)، خواهیم داشت

$$f(m+1)=f(m)+1$$

برهان (ب). به‌استقراء ثابت می‌کنیم که؛ به‌ازای هرعدد صحیح k، عدد $n=2^k$ جواب منحصر به‌فردی برای $f(n)=2^{k-1}+1$ است. بالنتیجه، برای حالت خاص، $n=2^{11}$، جواب منحصر به فرد برای $f(n)=2^{10}+1$ است.

به‌ازای $k=2$ حکـم برقراراست. فرض کنید ثابت کرده باشیم که $n=2^m$ جواب منحصربفرد برای $f(n)=2^{m-1}+1$ باشد. ازقسمت (الف)، نتیجه می‌شود کـه عدد منحصر بفـردی مانند u موجود است که

$$f(u)=2^m+1$$

[اگرچنین uیی موجود نباشد آنگاه $f(n)$، برای بعضی ازنقاط، مقادیر ثابتـی خواهد داشت کـه این با تعریف معادلـه تراجعی $f(n+2)$، برای nهای بزرگ، تناقض دارد.]

اینک،

$$2^m+1=f(u-f(u-1))+f(u-1-f(u-2))$$

و $f(u-1)=2^m$. چون

$$f(u-f(u-1))-f(u-1-f(u-2))\in\{0,1\},$$

بنابراین، خواهیم داشت

$$f(u-f(u-1))-f(u-1-f(u-2))+1=2^{m-1}+1.$$

بالنتیجه، بنابرفرض استقراء،

$$u-f(u-1)=2^m,$$

و ازاینجا نتیجه می‌شود که

$$u=2^m+f(u-1)=2^m+2^m=2^{m+1}.$$

بقیه از صفحهٔ ۱۲

۲ــ چند پیشنهاد

۱ــ به‌نظر می‌رسد با این پرسش مواجه هستیم‌که در المپیاد انفورماتیك شرکت کنیم یا نه؟ جنبه‌های مثبت آن را می‌توان حضور دریك جمع‌بین‌المللی تازه تأسیس که پرستیژ ویژه‌ای دارد، دانست، و اینکه برقراری یك ارتباط بین‌المللی گذشته از جنبه‌های عام آن موجب افزایش کیفیت درس کامپیوتر و انفورماتیك خواهد شد. ولی تصمیم به‌حضور در المپیاد نیاز به‌برنامه‌ریزی و تمهیدات ویژه‌ای دارد که هرچند توانایی آن وجود دارد ولی انرژی خاصی را طلب می‌کند و آیا صرف این توان و انرژی، در کارهای بنیادی و اشاعه و تحکیم درس کامپیوتر و انفورماتیك ضروری‌تر نیست؟

جواب‌پرسش‌فوق نیاز به‌بررسی و تصمیم‌گیری اصولی دارد ولی پاسخ هرچه که باشد می‌توان در راه‌اندازی المپیادملی انفورماتیك تردیدی‌نداشت، این‌امر چندان دشوار نیست و‌می‌توانیم به‌سهولت یك‌امتحان‌دومرحله‌ای‌برگزار کنیم.

۲ــ درلزوم اشاعهٔ دروس آشنائی با کامپیوتر و انفورماتیك به‌نظر‌نمی‌رسد که تردیدی وجود داشته باشد، در این رابطه می‌توان نکات زیر را ملحوظ داشت:

الف‌ــ افزایش مباحثی دربارهٔ کامپیوتر و انفورماتیك به درس علوم در کلاسهای چهارم و پنجم دبستان، و سالهای اول، دوم و سوم راهنمائی این مباحث به‌طور عمده برای ایجاد یك شناخت مقدماتی درنظر گرفته می‌شود و از این‌رو که‌صرفاً مشتمل بر مباحث تئوری خواهد بود و حجم چندانی نیز ندارد می‌توان در مورد تألیف و نگارش آنها مبتنی برهدف آشنایی با کامپیوتر و تفکر الگوریتمی بلافاصله اقدام لازم را شروع کرد و در چاپ سال ۱۳۷۱ کتابهای درسی آنها را گنجاند.

آموزش پیشرفته‌تر کامپیوتر در سالهای آخر دبستان و دورهٔ راهنمائی نیاز به تجهیزات‌سخت‌افزاری دارد در حال حاضر چند گروه در طرحهای تحقیقاتی مشغول تدوین و تألیف کتب لازم برای این دوره‌ها هستند می‌توان تجهیز دبستانها و مدارس راهنمائی به کامپیوتر مناسب را در شرایط فعلی به خود مدارس واگذار کرد تا با استفاده از منابع اختصاصی و ابتکاری ویژه نسبت به برقراری یك درس فوق برنامه اقدام نمایند. بدیهی است در شرایط مناسب پوشش کلیهٔ دبستانها و مدارس راهنمائی با تجهیزات لازم می‌تواند در دستور کار قرار گیرد.

بــ گام بعدی می‌تواند ایجاد درس کامپیوتر و انفورماتیك در رشته‌تجربی باشد برای‌این منظور تهیهٔ‌کتاب‌ویژه‌ای با مثالها و کاربردهای مناسب ضروری است. چون این برنامه نسبت به برنامهٔ رشتهٔ ریاضی‌ــفیزیك محدودتر خواهد بود‌طبعاً‌تجهیزات‌سخت‌افزاری‌محدودتری نیاز خواهد داشت.

جــ در رشته‌های فرهنگ و ادب و هنر، باید طراحی و تهیهٔ نرم‌افزارهای ویژه مورد توجه قرار گیرد و آموزش کامپیوتر با توجه به این نرم‌افزارها و تجهیزات سخت‌افزار مناسب و محدود انجام شود.

در رشته‌های فنی بسته به هر رشته باید آموزش مبانی کامپیوتر یا آشنایی با نرم‌افزارهای ویژه در نظر گرفته شود.

د ــ تهیهٔ نرم‌افزارهای کمك‌آموزشی و استفاده از کامپیوتر به‌عنوان ابزار کمك‌آموزشی همچنان‌ضرورت دارد در بسیاری از دروس از تاریخ و جغرافیا تا فیزیك و شیمی و ریاضی این نرم‌افزارها می‌توانند تهیه شود وزارت آموزش و پرورش می‌تواند با استفاده از سهمیه بودجهٔ پژوهشی خود برای دانشگاهها، تهیهٔ چنین نرم‌افزارهائی را به دانشگاهها پیشنهاد نماید.

۳ــ یك امکان اساسی در تکنولوژی انفورماتیك، ایجاد شبکه‌های‌کامپیوتری و استفاده از آنها در انتقال و تبادل اطلاعات است. مطالعه و بررسی ایجاد یك شبکه کامپیوتری در سطح کشور بین مراکز آموزش و پرورش می‌تواند مورد توجه قرار گیرد.

۳ــ مؤخره

۱ــ سومین‌المپیاد انفورماتیك‌توسط یونانیها با حسن دقت درکلیهٔ امور اعم ازامکانات رفاهی و دقت عمل درسلامت برگزاری امتحان و غیره همراه بود، گذشته از آن حسن برخورد و برقراری احترامات شایسته برای شرکت‌کنندگان در المپیاد نیز جای سپاسگزاری دارد..

۲ــ نظر به‌ضرورت‌برقراری‌ارتباط بین سرپرستان و اعضاء تیمها در اینگونه المپیادها به‌نظر می‌رسدکه‌لازم است برای کلیهٔ سرپرستان و دانش‌آموزان کارت نام‌ونشانی مناسبی‌تهیه شده و در اختیار آنها قرار داده شود.

۳ــ جدول زیر سال شروع مسابقات ملی انفورماتیك در بین دانش‌آموزان دبیرستانی را درکشورهای مختلف‌نشان می‌دهد:

نام کشور	سال شروع
آرژانتین	۱۹۹۰
آلمان	۱۹۸۸
اتحاد جماهیر شوروی	۱۹۸۸
بلغارستان	۱۹۸۲
تایلند	۱۹۹۰
چك‌واسلواکی	۱۹۸۳
چین	۱۹۸۴
رومانی	۱۹۷۵
سوئد	۱۹۸۹
کوبا	۱۹۸۶
لهستان	۱۹۸۵
مجارستان	۱۹۸۵
مغولستان	۱۹۹۰
ویتنام	۱۹۸۹
هلند	۱۹۹۱
یوگسلاوی	۱۹۸۹
یونان	۱۹۸۹

تابع اولیه و انتگرالپذیری

امیرخسروی عضو هیئت‌علمی دانشگاه تربیت معلم

یکی ازقضایای مفید در محاسبهٔ انتگـرالها قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل وانتگـرال است. اگر تابـع f دارای تابع اولیه‌ای مانند F و f بر $[a, b]$ دارای انتگـرال ریمان باشد، آنگاه $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$، پس بـد نیست بـدانیم چه توابعی دارای تابع اولیه‌اند. دراین رابطه به برخی از خواص تابع مشتق نیاز داریـم که مهمترین آن خاصیـت مقدار متوسط تابع مشتق است.

دراینجا تعاریف را یادآوری می‌کنیم وبعضی ازقضایا را که اثبات آنها دراکثر کتابهای‌آنالیـز آمده است بدون اثبات بیان می‌کنیم تا مطلب طولانی نشود.

تعریف. اگرتوابع f و F بر $[a, b]$ تعریف شده باشند بطوری که به‌ازاء هر x از $[a, b]$ داشته باشیم $F'(x)=f(x)$ آنگاه F را یك تابع اولیهٔ f می‌نامند.

فرض‌کنید تابع f بر $[a, b]$ محدود باشد. اگر

$$P=\{x_0=a, x_1, \dots, x_n=b\}$$

بطوری که $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$ و به‌ازاء هر k که $1\leqslant k\leqslant n$ داشته باشیم

$$m_k=\inf\{f(t): x_{k-1}\leqslant t\leqslant x_k\}$$

و

$$M_k=\sup\{f(t): x_{k-1}\leqslant t\leqslant x_k\}$$

آنگاه

$$L(P, f)=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})$$

و

$$U(P, f)=\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1})$$

تعریف می‌شود. پس همواره

$$L(P, f)\leqslant U(P, f)$$

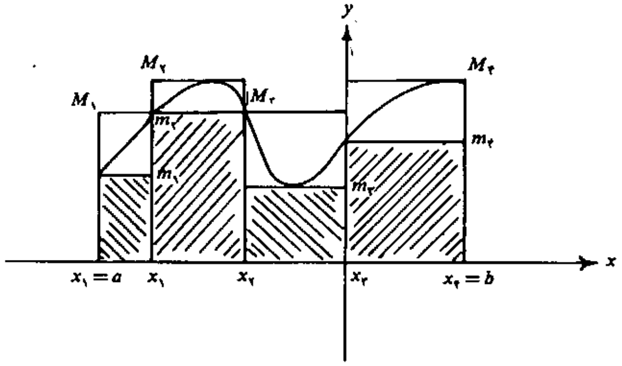
گوئیم تابع f بر $[a, b]$ دارای انتگرال ریمان است هرگاه‌حد $L(P, f)$ وحد $U(P, f)$ وقتی

$$Max\{x_k-x_{k-1}: 1\leqslant k\leqslant n\}$$

به‌سمت صفر میل کند موجود ومساوی باشند. به عبارت دیگر به ازاء هرعدد مثبت ε مجموعه‌ای مانند

$$P=\{x_0=a, x_1, \dots, x_n=b\}$$

با شرایط فوق باشد که $U(P, f)-L(P, f)<\varepsilon$.



این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم که اگرتابـع f بر $[a, b]$ پیوسته باشد f بر $[a, b]$ دارای انتگرال ریمان است.

قضیه. اگر تابع f بر $[a, b]$ پیوسته باشد آنگـاه f بر $[a, b]$ دارای تابع اولیه است.

اثبات. اگر $a\leqslant x\leqslant b$ آنگاه تابع f بر $[a, x]$ دارای‌انتگرال است واگر $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ و $\Delta x\neq 0$ آنگاه

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt}{\Delta x}$$

$$=\frac{\int_x^{x+\Delta x}\frac{f(t)\,dt}{\Delta x}}{\Delta x}$$

واگر M و m بترتیب ماکزیمم ومی‌نیمم تابـع f بر بازهٔ با دو انتهای x و $x+\Delta x$ بـاشد آنگاه

$$m\leqslant\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x}\leqslant M$$

پس بنابر قضیهٔ مقدار متوسط yای بین x و $x+\Delta x$ هست‌که

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x}=f(y)$$

واضح است که اگر $\Delta x\to 0$ آنگاه $y\to x$ و بنابر پیوستگی f در x نتیجه می‌شود که $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ موجود ومساوی $f(x)$ است. پس F در x مشتق‌دارد و $F'(x)=f(x)$.
بنابراین F یك تابع اولیهٔ f است.

قضیه. اگر تابع f درهر نقطه از (a,b) دارای مشتق (متناهی یا نامتناهی) و درنقاط a و b به‌ترتیب

$$f_+'(a)=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

و

$$f_-'(b)=\lim_{x\to b-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

موجود (متناهی یا نامتناهی) و متمایز باشند آنگاه به‌ازاء هر c بین $f_+'(a)$ و $f_-'(b)$ نقطه‌ای مانند x_0 در (a,b) هست که $f'(x_0)=c$.

ابتدا لم ذیل را ثابت می‌کنیم

لم. فرض کنید تابع f بر $[a,b]$ پیوسته باشد.

الف) اگر c نقطه‌ای از $[a,b)$ باشد که $f_+'(c)>0$ یا $f'_+(c)=+\infty$ آنگاه عددی مانند δ هست‌که $0<\delta<b-c$ و به‌ازاء هر x اگر $c<x<c+\delta$، آنگاه $f(x)>f(c)$؛

ب) اگر c نقطه‌ای از $(a,b]$ باشد که $f'_-(c)<0$ یا $f'_-(c)=-\infty$ آنگاه عددی مانند δ هست‌که $0<\delta<c-a$ و به‌ازاء هر x اگر $c-\delta<x<c$، آنگاه $f(x)<f(c)$.

اثبات. الف) تابع کمکی $g(x)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ را در (c,b) تعریف می‌کنیم. می‌دانیم که حد راست تابع g درنقطهٔ c موجود ومساوی $f'_+(c)$ است که عددی است مثبت یا $+\infty$ پس $0<\delta$ای هست که $\delta<b-c$ واگر $c<x<c+\delta$ آنگاه $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=g(x)>0$ وچون برای چنین xهایی $x-c>0$ بنابراین $f(x)>f(c)$.

اثبات ب) نظیر اثبات فوق است وآن را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

اثبات قضیه. فرض کنید c عددی بین $f'_+(a)$ و $f'_-(b)$ باشد. تابع کمکی $g(x)=f(x)-cx$ را درنظرمی‌گیریم. پس g بر $[a,b]$ پیوسته و درنتیجه درنقطه‌ای از $[a,b]$ دارای ماکزیمم و درنقطه‌ای از $[a,b]$ دارای می‌نیمم است. اگر

$f_+'(a)<c<f_-'(b)$

آنگاه از می‌نیمم داشتن g در $[a$ و $b]$ استفاده کرده می‌گوئیم x_0ای در $[a,b]$ هست که تابع g در x_0 می‌نیمم دارد. ولی $g_+'(a)=f_+'(a)-c$ ولذا $g_+'(a)<0$ یا $g_+'(a)=-\infty$. پس بنابر لم قبل δ ای هست که $0<\delta<b-a$ و به‌ازاء هر x از $(a,a+\delta)$ داریم $g(x)<g(a)$ پس تابع g در a می‌نیمم ندارد. چون $g'_-(b)=f'_-(b)-c$ بنابراین $g_-'(b)=+\infty$ یا $g_-'(b)>0$ پس مجدداً بنابرلم قبل δای هست که $0<\delta<b-a$ وبه‌ازاء هر x از $(b-\delta,b)$ داریم $g(x)<g(b)$. پس تابع g در b هم می‌نیمم ندارد. بنابراین $a<x_0<b$ وتابع g دریك نقطهٔ داخلی $[a,b]$ می‌نیمم دارد و دراین نقطه دارای مشتق پس $0=g'(x_0)=f'(x_0)-c$ در نتیجه $f'(x_0)=c$.

قضیه. فرض کنید f بر (a,b) پیوسته و c نقطه‌ای از (a,b) وتابع f درهر نقطه از (a,b) بجز محتملاً در c دارای مشتق متناهی باشد. اگر $\lim\limits_{x\to c} f'(x)$ موجود ومساوی A آنگاه f در c مشتق دارد و $f'(c)=A$.

اثبات. بنابر قاعدهٔ هوپیتال داریم

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{1}=A$$

پس $f'(c)=A$.

می‌توان لم زیر را نتیجه گرفت.

لم. اگر f در (a,b) دارای تابع اولیه و $a<c<b$ و f در c دارای حد چپ یا حد راست باشد آنگاه این حدود با $f(c)$ برابرند.

دومثال زیرنشان می‌دهد که نباید تابع اولیه داشتن را با انتگرالپذیری یکی دانست.

مثال ۱. تابع $f(x)=[x]$ برهر بازهٔ $[a,b]$ دارای انتگرال ریمان است ولی f مشتق هیچ تابعی نیست، زیرا خاصیت‌مقدار متوسط را ندارد. اگر $0\leqslant x<1$ آنگاه

$f(x)=[x]=0$ و $f(1)=1$ و $f(0)<\frac{1}{2}<f(1)$

درحالی‌که به‌ازاء هر x از $[a, 1]$ داریم $f(x)\neq\frac{1}{2}$

مثال ۲. تابع $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2} & (0<x\leqslant 1)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ درهر نقطه از $[0, 1]$ مشتق دارد واگر $f(x)=F'(x)$ آنگاه

$$f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & (0<x\leqslant 1)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

پس f بر $[0, 1]$ تابع اولیه دارد اما چون بر $[0, 1]$ تابع f محدود نیست انتگرال ریمان ندارد و لذا $F(1)-F(0)$ با $\int_0^1 F'(t)\,dt$ برابرنیست. ولی اگر $\int_0^1 F'(t)\,dt$ را انتگرال ناسرهٔ $\lim\limits_{c\to 0+}\int_c^1 F'(t)\,dt$ بگیریم آنگاه بنابر پیوستگی F خواهیم داشت:

$$\int_0^1 F'(t)\,dt=\lim_{c\to 0+}\int_c^1 F'(t)dt=\lim_{c\to 0+}[F(1)-F(c)]$$
$$=F(1)-\lim_{c\to 0+}F(c)=F(1)-F(0)$$

مثال ۳. فرض کنید x عددی حقیقی در $[0, 1]$ با نمایش در مبنای ۳ به‌صورت $x=\sum_{n=1}^{n}\frac{a_n}{3^n}$ باشدکه درآن $a_n=0, 1, 2$.
فرض کنید $N=\infty$ اگرهیچ‌یک از a_nها برابر ۱ نباشد و در غیراین‌صورت N کوچکترین مقدار n باشد به‌طوری‌که $a_n=1$.
حال به‌ازای هر n کوچکتر از N عدد b_n را مساوی $\frac{1}{2}a_n$ و $b_N=1$ می‌گیریم وتابع f را با ضابطهٔ $f(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n}{2^n}$ تعریف می‌کنیم. پس $f(1)=1$ و $f(0)=0$. به سادگی می‌توان نشان داد که f بر بازهٔ $[0, 1]$ پیوسته و یکنوا است. درآنالیز حقیقی نشان می‌دهند که f' بر $[0, 1]$ دارای انتگرال «لوبك» است ولی مقدار انتگرال با $f(1)-f(0)$ برابر نیست. باید دانست که اگرتابعی بر $[a, b]$ دارای انتگرال ریمان باشد بر $[a, b]$ دارای انتگرال لوبك است و مقدار این دوانتگرال برابراست.

مراجع

1. T. M. Apostol, Mathematical Analysis, 2nd ed. Addison-wesley, 1978,
2. R. G. Bartle, The elements of Real Analysis, 2nd ed. John wiley & sons, 1976.
3. w. Rudin, Real and Complex Analysis, Third ed. Mc Graw-Hill, 1987.

معرفی

کتب و نشریات ریاضی

۱ــ آمادگی برای کنکورها و المپیادها؛ ترجمه و تنظیم از ابراهیم دارابی، انتشارات نوپا، تهران ۱۳۶۹.

۲ــ مسائلی در هندسه؛ آی. اف. شاریگین، ترجمهٔ میرزا جلیلی و ابراهیم دارابی؛ از انتشارات مبتکران، ۱۳۷۰.

۳ــ کار و دانش، نام فصلنامه آموزشی ــ خبری وزارت آموزش و پرورش دفتر آموزشی کاد می‌باشد. یك نسخه از شمارهٔ ۱۴ این نشریه به دفتر مجله رسیده‌است.

۴ــ هندسهٔ ایرانی: تألیف ابوالوفاء محمدبن محمدالبوزجانی، برگردان سیدعلیرضا جذبی، انتشارات سروش تهران ۱۳۶۹.

۵ــ آنالیز عددی: تألیف دکتر اسمعیل بابلیان، از سری انتشارات دانشگاه پیام نور، تهران ۱۳۷۰

۶ــ جبر به روش تمرین، در سه مجلد، تی. امس. بلایس و ای. اف. رابرتسون؛ ترجمهٔ دکتر حسین دوستی؛ انتشارات مبتکران، تهران ۱۳۷۰.

فاصلهٔ اصلی یک نقطه از خط مفروض از دو سر پاره‌خط واقع در آن صفحه

استاد حسین غیور

قبلاً اندازهٔ اصلی پاره‌خط AB نسبت به خط d در رشد شمارهٔ ۲۹ صفحهٔ ۳۵ ذکرشده است. از نظر اهمیتی که این موضوع در فهم سایر مطالب دارد، در این جا مجدداً به ذکر مقدمه‌ای از آن می‌پردازیم.

۱.۱ **تعریف.** پاره‌خط AB وخط d درصفحه مفروضند. A_1 و B_1 قرینه‌های A و B نسبت به خط d دوپاره‌خط AB_1 و BA_1 را پدید می‌آورند که با توجه به‌خواص تقارن محوری؛

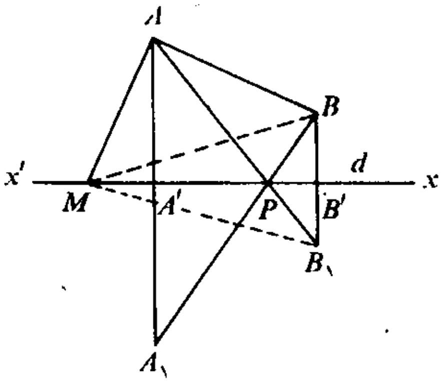
الف) درنقطهٔ P روی خط d یکدیگر را قطع می‌کنند.

ب) نسبت به‌خط d قرینهٔ یکدیگرند.

ج) طول‌های متساوی و میل‌های برابر نسبت به محور xx' منطبق به d دارند.

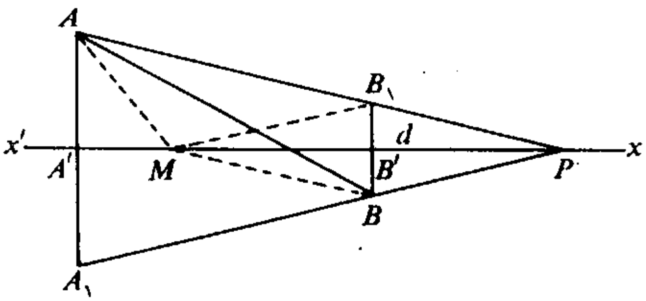
بنابه قرارداد نقطهٔ P را مرکزاصلی و $AB_1 = BA_1$ را فاصلهٔ اصلی پاره‌خط AB نسبت به‌خط d می‌نامیم وآن را با نماد AB_d نشان می‌دهیم.

تبصره. درحالت خاصی که دونقطهٔ A و B برهم منطبق شوند فاصلهٔ اصلی مجموع فاصله‌های دونقطه ازخط d است.



شکل ۱

۲.۱ قضیه. پاره‌خط AB وخط d دریك صفحه مفروضند.



شکل ۲

الف) درحالتی که A و B دریک طرف خط d باشند AB_d کوچکتراست ازمجموع فواصل هر نقطه مانند M ازخط d از دونقطهٔ A و B. (M منطبق بر P نیست)

$$AP+PB=AB_1<AM+MB_1=AM+MB$$

ب) درحالتی که A و B در دوطرف خط d باشند فاصلهٔ اصلی دونقطهٔ A و B ازخط d یعنی $AB_1=A_1B=AB_d$ بزرگتر است از تفاضل فواصل هر نقطه مانند M ازخط d یعنی $|AM-MB|=|AM-MB_1|<AB_1$ از دو نقطهٔ A و B (به شرط اینکه M منطبق بر P نباشد)

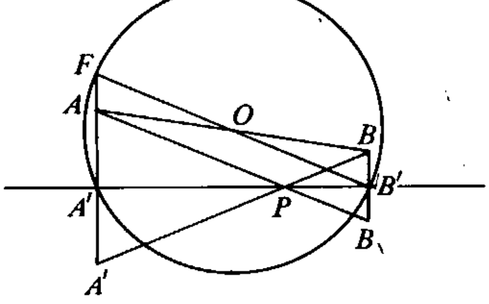
۳.۱ دایرهٔ اصلی پاره‌خط AB نسبت به‌خط d

۱.۳.۱. دایرهٔ اصلی پاره‌خط AB نسبت به‌خط d دایره‌ای است که مرکز آن O وسط AB واز A' و B' تصویرهای قائم A و B روی خط d می‌گذرد چون در مثلث $ABA_۱$، O وسط AB و A' وسط $AA_۱$ است OA' با $BA_۱$ موازی و نصف آن است، و در مثلث $B_۱AB$، BB' موازی $AB_۱$ و نصف آن است.
بنابراین؛ مرکز دایرهٔ اصلی وسط پاره‌خط AB و شعاع آن $\frac{۱}{۲}AB_d$ است.

۲.۳.۱ **قضیه.** رابطهٔ بین دایرهٔ اصلی و پاره‌خط AB و $\overline{AA'}\cdot\overline{BB'}$ یعنی (حاصلضرب اندازهٔ جبری فاصلهٔ دوسر پاره‌خط مفروض ازخط d)

$$AB_۲^d = AB^۲+۴\overline{AA}\cdot\overline{BB},$$

برهان خط عمود بر خط d را جهت‌دار فرض می‌کنیم و در دو شکل ۳ و ۴ قوت نقطهٔ A را نسبت به‌دایرهٔ اصلی به‌کارمی‌بریم

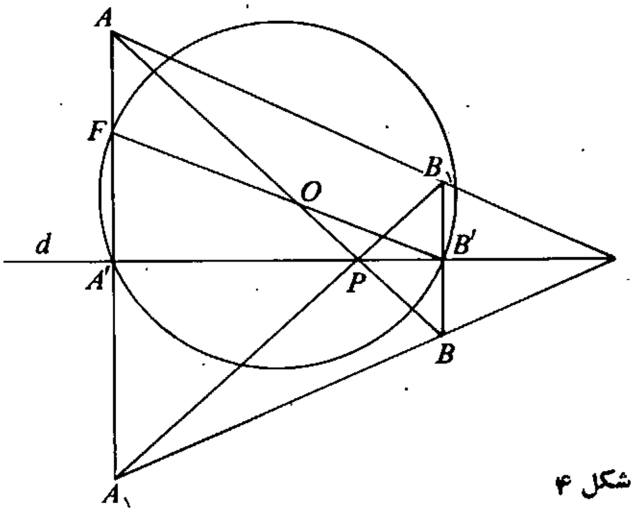


شکل ۳

$$\overline{AF}\ \overline{AA'}=OA^۲-OA'^۲$$

$$-\overline{BB}\cdot\overline{AA'}=\frac{۱}{۴}AB^۲-\frac{۱}{۴}AB_d^۲$$

$$AB_d^۲=AB^۲+۴\overline{AA'}\ \overline{BB'}$$



شکل ۴

۴.۱ اندازهٔ اصلی پاره‌خط AB نسبت به محور d در امتداد φ

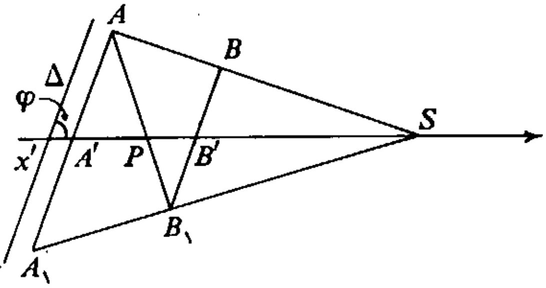
پاره‌خط AB وخط d دریک صفحه مفروضند. خط d را بامحور $x'x$ جهت‌دار کرده وآن را با خط Δ طوری قطع می‌کنیم که با $x'x$ زاویهٔ φ بسازید. $A_۱$ و $B_۱$ قرینه‌های A و B را به‌موازات Δ نسبت به‌خط d تعیین‌می‌کنیم وآنها را قرینه‌های A و B نسبت به‌خط d درامتداد φ می‌نامیم و با نماد $AB_{d,\varphi}$ نشان می‌دهیم. با این تعریف AB_d مساوی $AB_{d,\frac{\pi}{۲}}$ می‌شود.

قضیه ۱.۴.۱ $AB_۱$ و $BA_۱$ یکدیگر را در نقطهٔ P، و AB و $A_۱B_۱$ درنقطهٔ S قطع می‌کنند که هردو نقطه روی خط d واقعند و S و P مزدوج توافقی یکدیگر نسبت به A' و B' می‌باشند.

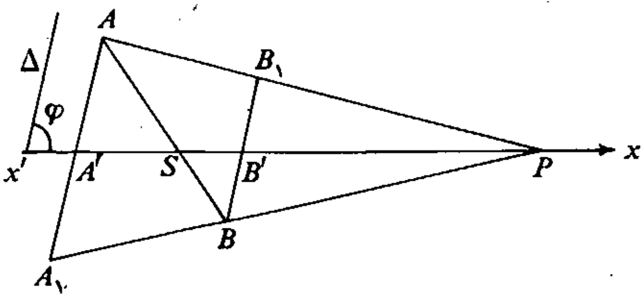
تبصره. درحالت استثنایی که AB موازی d باشد P وسط $A'B'$ واقع می‌شود و S وجود ندارد که آنرا نقطهٔ دزارگ در امتداد $x'x$ می‌نامند.

درحالت استثنایی دیگر که AB موازی با Δ باشد، A' و B' و S و P دریك نقطه از d متمرکزند.

به‌غیر از این دوحالت استثنایی، اگر A و B دریك طرف خط d باشند نقطهٔ مرکزی P بین $A'B'$ و S خارج فاصلهٔ آن دونقطه است شکل ۵ و اگر A و B در دوطرف خط d باشند، S نقطهٔ محوری بین A' و B' و P خارج آن است.



شکل ۵



شکل ۶

برهان. درشکل ۵ ابتدا ثابت می‌کنیم AB و $A_۱B_۱$، $x'x$ را در یك نقطهٔ S قطع می‌کنند. AB را امتداد می‌دهیم تا $x'x$ را در S قطع کند. از تشابه دومثلث SAA' و SBB' با توجه به این که $AA'=A'A_۱$ و $BB'=B'B_۱$ است ثابت می‌کنیم $A_۱B_۱$ از S می‌گذرد.

$$SBB' \sim SAA' \Rightarrow \frac{\overline{SA'}}{\overline{SB'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}$$

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{A'A_1}}{\overline{B'B_1}} \Rightarrow \frac{A'A_1}{B'B_1} = \frac{SA'}{SB'}$$

تساوی اخیر نشان می‌دهد کــه دومثلث $SA'A_1$ و $SB'B_1$ با هم متشابهند و درنتیجه $\angle A'SA_1 = \angle B'SB_1$ یعنی A_1B_1 از S می‌گذرد.

برای اثبات اینکه AB_1 و BA_1 درنقطه P یکدیگر را قطع می‌کند ابتدا با روش زیر حکم دیگــرقضیه را که P و S نسبت به A' و B' قرینهٔ یکدیگرند ثابت‌می‌کنیم. AB_1 را رسم می‌کنیم تا $x'x$ را در P قطع کند. ازتشابه دومثلث $PB'B_1$ و $PA'A$

$$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PB'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{B_1B'}}$$

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{B_1B'}} = -\frac{\overline{A_1A'}}{\overline{B_1B'}}$$

$$\frac{-A_1A'}{\overline{B_1B'}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SB'}}$$

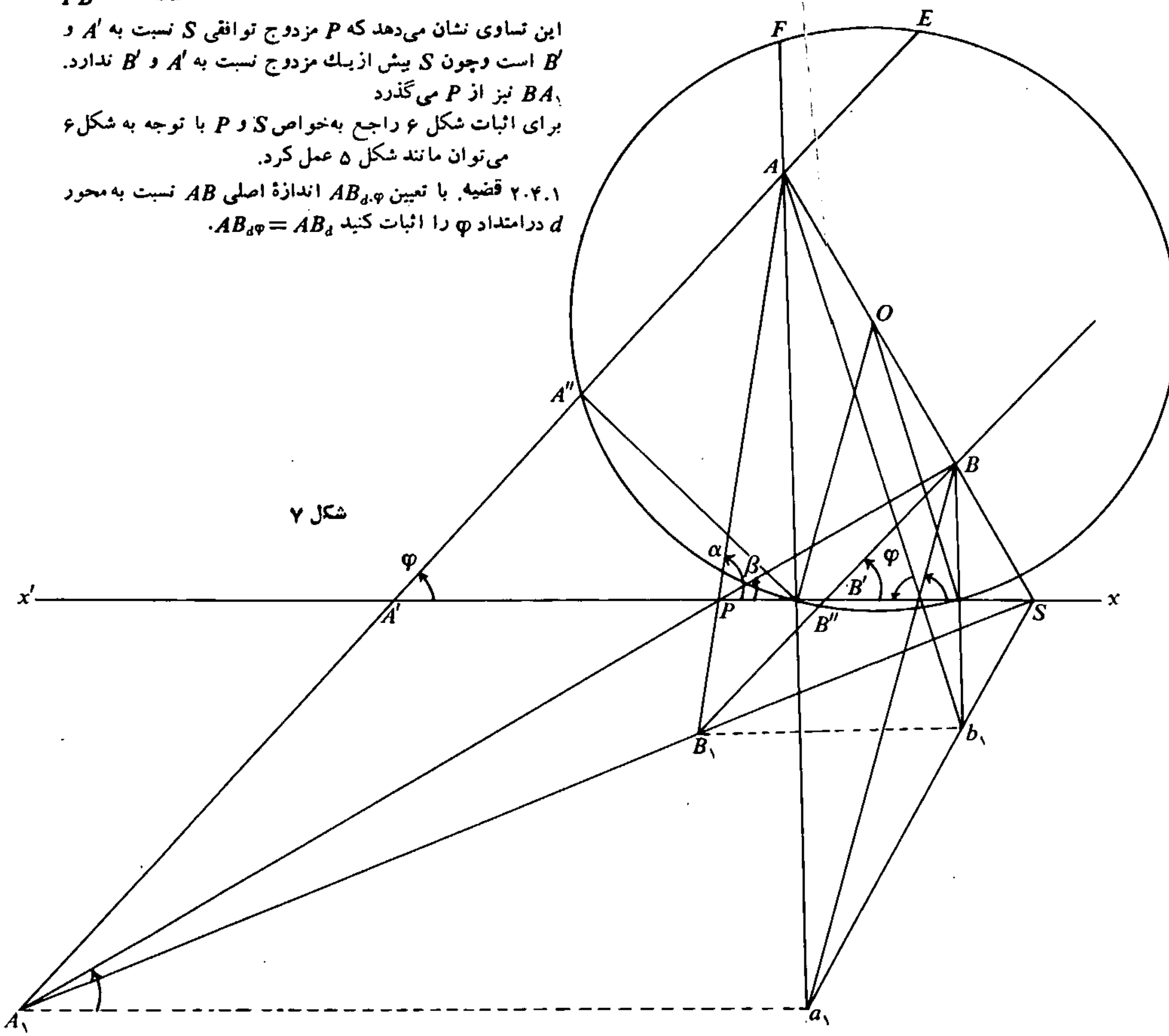
ازاین سه تساوی نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PB'}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SB'}}$$

این تساوی نشان می‌دهد که P مزدوج توافقی S نسبت به A' و B' است وچون S بیش ازیک مزدوج نسبت به A' و B' ندارد. BA_1 نیز از P می‌گذرد

برای اثبات شکل ۶ راجع به‌خواص S و P با توجه به شکل۶ می‌توان مانند شکل ۵ عمل کرد.

۲.۴.۱ قضیه. با تعیین $AB_{d.\varphi}$ اندازهٔ اصلی AB نسبت به‌محور d درامتداد φ را اثبات کنید $AB_{d\varphi} = AB_d$.



شکل ۷

برهان. درشکل ۳ که A_1 و B_1 قرینه‌های A و B در امتداد φ تعیین شده و S و P مرکزهای آن نیزمشخص شده است.

اندازهٔ اصلی AB را نسبت به محور d با امتداد قائم، با تعیین a_1 قرینهٔ A و b_1 قرینهٔ B، و r نقطهٔ تقاطع Ab_1 و Ba_1، رسم می‌کنیم. شکل ۳ ازتقارن محوری به‌سادگی می‌توان ثابت کرد

$$rb_1 = rB,\ ra_1 = rA,\ Ab_1 = Ba_1$$

بنابراین

$$AB_d = Ab_1 = Ba_1 = rA + rB$$

چون A_1 و a_1 قرینه‌های نقطهٔ A نسبت به نقطه‌های A' و a است $A_1a_1 || A'a$. وچون b_1 و B_1 به‌ترتیب قرینه‌های نقطهٔ B نسبت به b و B' است $B_1b_1||B'b$.

با شباهت این مطلب که در دستگاه

$$\angle SrA = \pi - V \ ,\ \angle SrB = V AB_d$$

در دستگاه $AB_{d\varphi}$ اندازهٔ زاویه‌های $\angle SPA$ و $\angle SPB$ را α و β نظیر V و $V-\pi$ می‌نامیم. در دو مثلث AB_1b_1 و BA_1a_1 به‌ترتیب ازقضیهٔ سینوسها دوتساوی زیر را به‌دست می‌آوریم. شکل ۳.

$$AB^\Delta_1 b_1 \qquad \frac{AB_1}{\sin V} = \frac{Ab_1}{\sin \alpha} \Rightarrow Ab_1 = \frac{\sin \alpha}{\sin V} AB_1$$

$$BA^\Delta_1 a_1 \qquad \frac{BA_1}{\sin V} = \frac{Ba_1}{\sin \beta} \Rightarrow Ba_1 = \frac{\sin \beta}{\sin V} BA_1$$

ازاین دوتساوی نتیجه می‌گیریم.

الف) $AB_1 \sin \alpha = BA_1 \sin \beta$

$$AB_1 = \frac{\sin V}{\sin \alpha} Ab_1,\ BA_1 = \frac{\sin V}{\sin \beta} Ba_1$$

ب) در دومثلث APr و BPr چون قضیهٔ سینوسها را به‌کارببریم دوتساوی ذیل حاصل می‌شود.

$$AP = Ar\frac{\sin \alpha}{\sin V}\ ,\ BP = \frac{\sin \beta}{\sin V} Br$$

ازجمع دوطرف این دوتساوی دستور زیر به‌دست می‌آید.

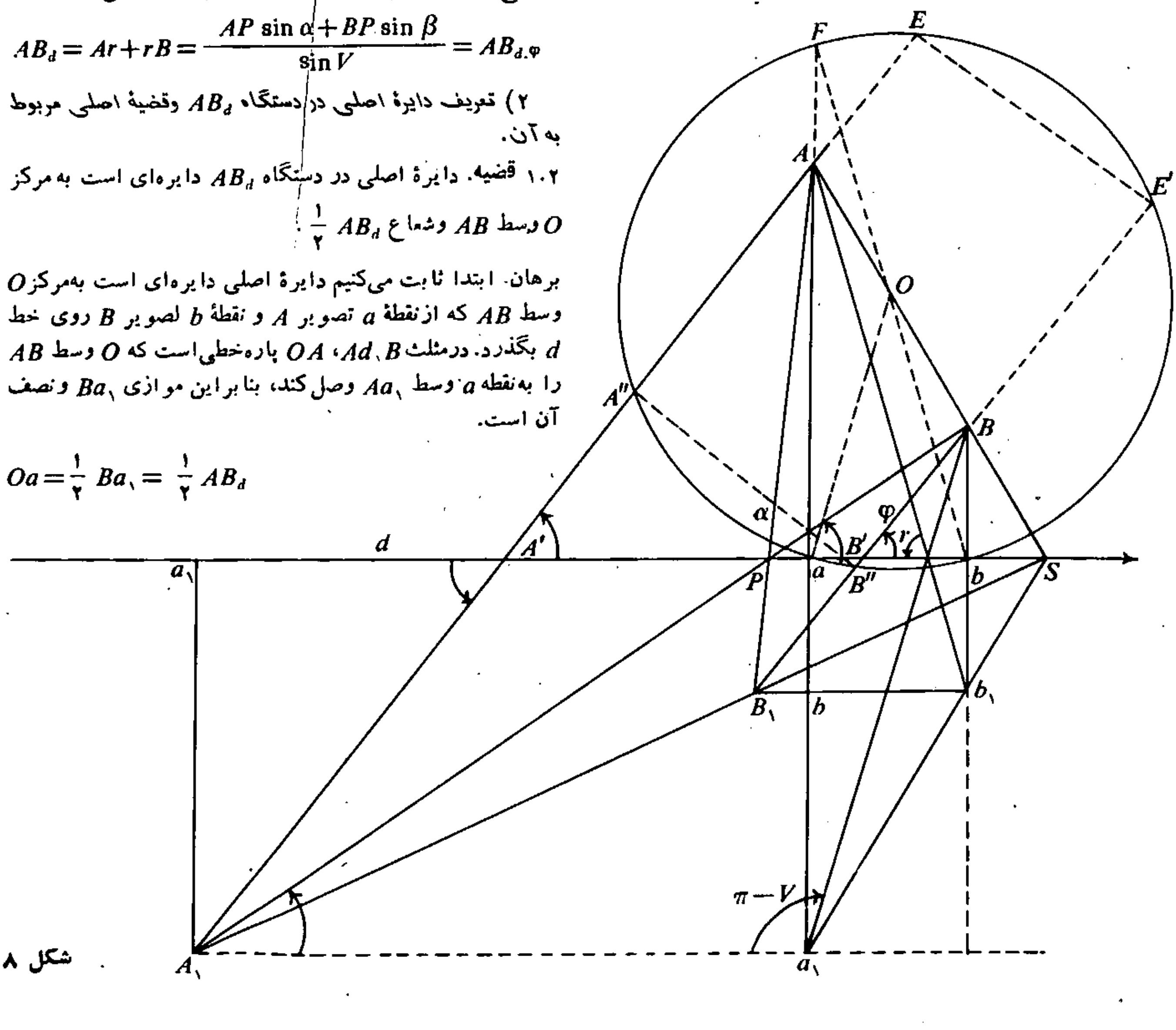
$$AB_d = Ar + rB = \frac{AP \sin \alpha + BP \sin \beta}{\sin V} = AB_{d.\varphi}$$

۲) تعریف دایرهٔ اصلی در دستگاه AB_d وقضیهٔ اصلی مربوط به آن.

۱.۲ قضیه. دایرهٔ اصلی در دستگاه AB_d دایره‌ای است به‌مرکز O وسط AB وشعاع $\frac{1}{2} AB_d$.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم دایرهٔ اصلی دایره‌ای است به‌مرکز O وسط AB که ازنقطهٔ a تصویر A و نقطهٔ b تصویر B روی خط d بگذرد. درمثلث Ad_1B، OA پاره‌خطی‌است که O وسط AB را به‌نقطه a وسط Aa_1 وصل کند، بنابراین موازی Ba_1 ونصف آن است.

$$Oa = \frac{1}{2}\ Ba_1 = \frac{1}{2}\ AB_d$$



شکل ۸

و همین‌طور درمثلث Ab_1B

$$Ob = \frac{1}{2}\ Ab_1 = \frac{1}{2}\ AB_d$$

بنابراین شعاع دایرهٔ اصلی $Oa = Ob = \frac{1}{2}\ AB_d$ و قضیه ثابت است.

۲.۲ قضیهٔ اصلی. در دستگاه AB_d همواره این رابطهٔ بین پاره‌خط AB و AB_d و $\overline{Aa}\ \overline{Bb}$ یعنی حاصل‌ضرب با اندازهٔ جبری فاصله‌های A و B ازمحور d برقرار است (شکل ۸).

$$AB_d^2 = AB^2 + 4\overline{Aa}\ \overline{Bb}$$

این دستور را به‌این شکل هم می‌توان نوشت.

$$AB_d^2 = AB^2 + \overline{Aa_1}\ \overline{Bb_1}$$

برهان. دوپاره‌خط AF و Bb چون هردو برمحور d عمودند، باهم موازی می‌باشند و با توجه به‌اینکه O مرکز تقارن AB است و $OA = -OB$، به‌شرح زیر ثابت می‌کنیم AF و Bb نسبت به‌مرکز O قرینهٔ یکدیگرند. قرینهٔ نقطهٔ b نسبت به O روی نیم‌خط AF واقع شود از طرف دیگر چون b نقطه‌ای از دایره است قرینهٔ آن نسبت به دایره باید روی دایره یعنی روی نقطهٔ F باشد. به‌عبارت دیگر پاره‌خط dO از نقطهٔ F می‌گذرد و $\overline{AF} = -\overline{Bb}$ بعد ازاین مقدمه r قوت نقطهٔ A را نسبت به دایرهٔ اصلی تعیین می‌کنیم.

$$r = \overline{AF}\ \overline{Ad} = OA^2 - Od^2$$

$$-\overline{Aa}\ \overline{Bb} = \frac{1}{4}\ AB^2 - \frac{1}{4}\ AB_d^2$$

$$AB_d^2 = AB^2 + 4\overline{Aa}\ .\ Bb$$

این تساوی را به‌این شکل هم می‌توان نوشت

$$AB_d^2 = AB_d^2 + \overline{Aa_1}\ \overline{Bb_1}$$

۲.۳ دایره اصلی در دستگاه $AB_{d,\varphi}$ و قضیهٔ اصلی مربوط به آن

دیدیم که دایره اصلی در دستگاه AB_d دایره‌ای به‌مرکز O وسط AB و شعاع $\frac{1}{2}\ AB_d$ است. بنابراین مرکز دایره در دستگاه $AB_{d,\varphi}$ نقطه O وسط AB وشعاع آن $\frac{1}{2}\ AB_{d,\varphi}$ است زیرا عطف به قضیهٔ ۱۰۳

$$\frac{1}{2}AB\ d,\varphi = \frac{1}{2}\ AB_d$$

یعنی دایرهٔ اصلی‌در دستگاه $AB_{d,\varphi}$ همان دایرهٔ اصلی در دستگاه AB_d است.

قضیهٔ اصلی در دستگاه $AB_{d,\varphi}$ در دستگاه AB_d دستور قضیه اصلی چنین است.

$$AB_d^2 = AB^2 + \overline{Aa}\cdot\overline{Bb}$$

چون $AB_d = AB_{d,\varphi}$ است در دستگاه $AB_{d,\varphi}$ دو جملهٔ AB_d^2 و AB^2 تغییر نمی‌کند و باید نظیر $\overline{Aa}\cdot\overline{Bb}$ را در دستگاه $AB_{d,\varphi}$ تعیین کرد.

درشکل ۳ یا ۴ در دومثلث $A'Aa$ و $B'Bb$ دوتساوی زیر بدست می‌آید.

$$Ad = AA'\sin\varphi\ ,\ Bb = BB'\ \sin\varphi$$

بنابراین قضیه اصلی دربارهٔ $AB_{d,\varphi}$ چنین است

$$AB^2{}_{d,\varphi} = AB^2 + AA'\sin\varphi\cdot BB'\sin\varphi$$

چون در دستگاه اصلی AB_d، p قوت نقطهٔ A نسبت به دایره اصلی در تساوی زیرصدق می‌کند

$$p = -\overline{Ad}\cdot\overline{Bb}$$

درقضیه اصلی $AB_{d,\varphi}$ نیز

$$p = -AA'\sin\varphi\cdot BB'\sin\varphi$$

ازآنچه گفته شد قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود.

۲.۴ در دستگاه $AB_{d,\varphi}$ به ازاء جمیع اندازه‌های φ تنها یك دایرهٔ اصلی وجود دارد که قوت نقطهٔ A نسبت به همهٔ دوایر یکسان است.

۲.۵ قضیه. در دستگاه $AB_{d,\varphi}$، $2\cotg\varphi = \cotg\alpha + \cotg\beta$ درشکل ۴ دومثلث $aA'A$ و $a_1A'A_1$ با هم مساوی می‌باشند.

درمثلث aPA

$$\cotg\varphi = \frac{\overline{aP}}{\overline{aA}}$$

درمثلث Pa_1A_1

$$\cotg\beta = \frac{\overline{a_1P}}{\overline{a_1A_1}} = \frac{\overline{Pa_1}}{\overline{A_1a_1}} = \frac{\overline{Pa_1}}{\overline{aA}}$$

$$\cotg\alpha + \cotg\beta = \frac{\overline{aP} + \overline{Pa_1}}{\overline{aA}} = \frac{\overline{aa_1}}{\overline{aA}} = 2\cotg\varphi$$

$$\cotg\alpha + \cotg\beta = 2\cotg\varphi$$

یادآوری. درتمام قضایا می‌توان A' و B را در دوطرف محور اختیارکرد به شرط اینکه نام‌گذاری که درهردوشکل ازنظرظاهر متفاوت هستند یکی باشد.

قضایا وتعریفها وآنچه دراین مختصر نوشته شده، منحصراً مربوط به این جانب است و ازجایی اقتباس نشده است. در استفاده ازاین مطالب و نقل آنها مأخذ را فراموش نفرمائید. در اثبات قضایا کوشش فراوان شده است، که مطالب یا قضایایی که به‌کار می‌رود مقدماتی ومعروف باشد و در دبیرستانها تدریس شود.

ادامه دارد

مسائل شماره ۳۲

تهیه و تنظیم: محمود نصیری

۱ـ تمام سه‌تائی مرتب‌های (x, y, z) اعداد صحیح را که $2 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$ پیدا کنید به‌طوری که

$$xy \equiv 1 \pmod{z}$$
$$xz \equiv 1 \pmod{y}$$
$$yz \equiv 1 \pmod{x}$$

۲ـ فرض کنیم

$$S=\{(x, y)\in R\times R \mid x^2+y^2-10x+16=0\}$$

و $f: S \to R$ به‌صورت $f(x, y)=\frac{y}{x}$ تعریف شود.

با تعبیرهندسی این تابع، برد تابع را پیدا کنید.

اگر $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$ آنگاه برد f چیست؟

۳ـ نشان دهید اگر $P(x)$ یك چندجمله‌ای با ریشه‌های حقیقی باشد، آنگاه به‌ازاء هر x حقیقی

$$P'(x)^2 \geqslant P(x)\, P''(x)$$

۴ـ فرض کنیم $T_0=2$، $T_1=3$، $T_2=6$، و به ازای هر $n \geqslant 3$،

$$T_n=(n+4)\, T_{n-1}-4nT_{n-2}+(4n-8)\, T_{n-3}$$

چند جمله اول دنباله چنین‌اند:

۲, ۳, ۶, ۱۴, ۴۰ , ۱۵۲ , ۷۸۴ , ۵۱۶۸ , ۴۰۵۷۶

نشان دهید که $T_n=A_n+B_n$ که A_n و B_n دو دنباله هستند.

۵ـ ثابت کنید مساحت هر پنج ضلعی محدبی که رأسهای آن دارای مختصات صحیح باشد، بزرگتر یا مساوی $\frac{5}{2}$ است.

۶ـ اگر a، b و c اعداد حقیقی مثبت باشند، آنگاه

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{a/b}\left(\frac{b}{c}\right)^{b/c}\left(\frac{c}{a}\right)^{c/a} \geqslant 1 \geqslant \left(\frac{a}{b}\right)^{b/a}\left(\frac{b}{c}\right)^{c/b}\left(\frac{c}{a}\right)^{a/c}$$

۷ـ درمثلث ABC، ازپای ارتفاع وارد بریك ضلع، چهارعمود بردوضلع وارتفاعهای وارد بر آن دوضلع رسم می‌کنیم ثابت کنید چهارنقطه پای عمودها بریك استقامتند.

۸ـ نقاط M، N و P به‌ترتیب روی اضلاع AB، BC و CA ازمثلث ABC قرار دارند، به‌طوری که

$$\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2}, \quad \frac{BN}{NC}=\frac{2}{3}, \quad \frac{CP}{PC}=\frac{3}{1}$$

مثلث ABC را تنها با داشتن نقاط M، N و P رسم کنید.

۹ـ فرض کنید

$$a_N=\prod_{n=1}^{N} \frac{n^2+1}{\sqrt{n^4+4}}$$

ثابت کنید:

$$\lim_{N\to\infty} a_N=\sqrt{2}$$

۱۰ـ اگر a و b اعضای گروه متناهی G باشند و $ab \neq ba$، ثابت کنید مرتبه ab با مرتبه ba مساوی است.

اخبار ریاضی

نحوهٔ اجرای طرح آموزش مبانی کامپیوتر و انفورماتیك برای دانش‌آموزان سال سوم متوسطه رشته ریاضی ـ فیزیك در سال ۷۱ـ۷۰ طی بخشنامه شماره ۹۱۰/۴۷۲۶ — ۷۰/۶/۵ از سوی مدیرکل محترم دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی به کلیه ادارات کل آموزش و پرورش ابلاغ گردید.

شکی نیست که اجرای این طرح گامی مهم در جهت ارتقاء کیفی آموزش و پرورش در این‌رشته می‌باشد. به‌دلیل اهمیت موضوع، بندهائی از این بخشنامه جهت اطلاع دبیران محترم ریاضی ذیلا درج می‌گردد.

۱) کلاسها فقط در مناطق و شهرستانهائی که قبلا جهت انتخاب و اعزام دبیران برای شرکت در دوره کارآموزی کامپیوتر موضوع دستورالعمل شماره ۱۰۰/۶۲۰/۴۵ مورخ ۷۰/۳/۱۹ اداره کل آموزشهای‌ضمن خدمت معین شده‌اند تشکیل خواهد شد.

۲) در هر منطقه یا شهرستان مشمول طرح، فقط یك‌کارگاه‌آموزشی شامل ۱۰ دستگاه ریز کامپیوتر جهت دانش‌آموزان و یك‌دستگاه جهت‌مربی، در یکی از دبیرستانهای دارای رشته ریاضی ـ فیزیك یا محل مناسب‌دیگری که شرایط مندرج در بند ب بخشنامه ۹۱۰/۱۳۳۰ مورخ ۷۰/۲/۲۸ معاونت محترم پژوهشی را دارا بوده و برای استفاده پسران و دختران مناسب باشد، تأسیس می‌شود. دستگاه‌های کامپیوتر پس از اعلام آمادگی ادارات آموزش و پرورش مبنی بر فراهم ساختن شرایط مورد نظر و بازدید از محل توسط کارشناسان، ارسال خواهد شد و این کارگاه کلیه کلاسهای مشمول طرح را تحت پوشش آموزشی قرار می‌دهد.

۳ـ درس کامپیوتر و انفورماتیك، سه ساعت در هفته به‌صورت نظری و عملی ارائه می‌شود و برای تسهیل در امر تنظیم برنامه بهتر است یك هفته ۴ ساعت نظری و هفته دیگر ۴ ساعت عملی برای یك کلاس در نظر گرفته شود که در بخش عملی هر کلاس ۴۰ نفری به دو گروه ۲۰ نفری تقسیم می‌شود و هر گروه ساعت در کارگاه حضور خواهند داشت. بدین ترتیب مجموع ساعات آموزشی هر دانش‌آموز در دو هفته ۶ ساعت‌خواهد بود. بدیهی است تا زمانی که دستگاهها نصب و راه اندازی نشده باشند ساعات عملی نیز صرف‌آموزش نظری خواهد شد. همچنین پس از نصب دستگاهها می‌توانند برای جبران عقب‌ماندگی کار عملی، بخشی از ساعات نظری را به‌کار عملی‌اختصاص دهند. لازم به یادآوری است‌که تشکیل کلاسهای تئوری در خارج از فضای کارگاه، امکان استفاده بیشتر از دستگاهها را فراهم می‌سازد.

۴) این درس برای دانش‌آموزان مشمول طرح، جایگزین آموزش کاد خواهد شد. مسائل مربوط به طرح کاد سال چهارم این دانش‌آموزان و تغییر برنامه کاد برای سال اول و دوم دانش‌آموزان رشته ریاضی ـفیزیك در سالهای آینده و همچنین آموزش کاد دختران، از سوی دفتر آموزش کاد و آموزشهای مهارتی تعیین تکلیف خواهد شد.

۵) در هر منطقه یا شهرستان حداکثر ۱۲ کلاس به عنوان کلاسهای مشمول طرح تعیین می‌شود. بدیهی است در نقاطی که بیشتراز ۱۲ کلاس سوم ریاضی ـ فیزیك وجود دارد به علت محدودیت ظرفیت کارگاه، سایر دانش‌آموزان منطقه فعلا مشمول طرح نمی‌شوند البته چنانچه دبیران دوره دیده آمادگی داشته باشند که درخارج از ساعات موظف تدریس کنند، می‌توان به‌میزان ساعات آمادگی دبیران، کلاسهای بیشتری را مشمول طرح نمود.

۶) در صورت تأخیر در ارسال کتاب سال تحصیلی ۷۱ـ۷۰ دبیران محترم بر اساس آموخته‌های دوره کارآموزی وکتاب سال تحصیلی ۷۰ـ۶۹ که یك نسخه در اختیارشان قرارگرفته است تدریس خواهند نمود.

۷) ساعات تدریس نظری بین دبیرانی که دوره دیده‌اند، به نحو مناسب تقسیم شود. در کار عملی در صورتی‌که تعداد دانش‌آموزان هر گروه حدود ۳۰ نفر باشد، توصیه می‌شود به‌منظور بالا بردن کیفیت آموزش کار عملی، هر دو مربی در کارگاه حضور داشته باشند. بدیهی است در نقاطی که دبیر واجد شرط فقط یك نفر است و یا تعداد دانش‌آموزان حدود ۱۵ نفر است و یا تعداد زیاد کلاسها با اوقات دبیران مناسبت ندارد، کار عملی با یك مربی اداره می‌شود، و بهتر است نظری و عملی یك کلاس به یك مربی محول گردد.

۸) جهت هر یك از مناطقی که در سال تحصیلی ۷۱ـ۷۰ مشمول طرح می‌شوند در بودجه سال ۷۱ مبلغ دو میلیون ریال هزینه تعمیر ونگهداری دستگاهها پیش‌بینی‌ شود.

۹) کتاب مربوط به این درس از طریق کتابفروشی‌ها توزیع نخواهد شد لذا پس از انتخاب کلاس‌ها سریعاً آمار دانش‌آموزان مشمول طرح را به این دفتر اعلام فرمایند.

۱۰) علاوه بردبیرستانهای مشمول طرح چنانچه دبیرستانی دارای‌امکانات آموزشی این درس (مربی ـ تجهیزات) می‌باشد و تمایل به اجرای طرح دارد می‌تواند با تأیید آن اداره کل مشمول طرح قرار گیرد.

جواب نامه‌ها

خانم نادیا حبیبی اره‌جان.

درارتباط با نامه شما واینکه می‌نویسید درتوابع نمایی به اشکال برخورد کرده‌اید. برای روشن شدن مطلب، فرض کنیم درتابع نمایی $f(x)=a^x$، $a<0$ و مثلاً $a=-2$ باشد. در این صورت تابع به‌صورت $f(x)=(-2)^x$ نوشته می‌شود.

می‌دانیم به‌ازای مثلاً $x=0$ مقدارتابع ۱ وبه‌ازای $x=1$ مقدارتابع ۲− می‌شود. رفتار تابع را دربازه‌ای مثلاً $[0, 1]$ درنظرمی‌گیریم. مقدارتابع به‌ازای $x=\frac{1}{2}$ برابراست با

$$f(x)=(-2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-2}$$

که‌عددی است موهومی یا به‌عبارت دیگر تابع به‌ازای $x=\frac{1}{2}$ تعریف نشده است، درحالی که به‌ازای $x=\frac{1}{3}$ از همان بازه برابراست با

$$f(x)=(-2)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-2}$$

که عددی است حقیقی یعنی f به‌ازای $x=\frac{1}{3}$ تعریف شده‌است.

چند مقدارگویا (فعلاً ازاعداد اصم صرف‌نظر می‌کنیم) دربازه $[0, 1]$ موجود است که به‌ازای آنها مقدار تابع عدد موهومی ویا حقیقی باشد؟ بی‌تردید بی‌شمار یعنی مثلاً تابع به ازای $x=\frac{1}{8}$ تعریف نشده وبه‌ازای $x=\frac{1}{9}$ تعریف شده است. برای اینکه به‌مثال بالا تعمیم داده باشیم می‌گوئیم فرض کنیم

$$f(x)=a^x$$

که درآن $a<0$ و $x=\frac{m}{n}$ باشد، $(m, n\in Z)$ پس خواهیم داشت:

$$f(x)=a^{\frac{m}{n}} \qquad (1)$$

$\frac{m}{n}$ را آن‌قدر ساده می‌کنیم که غیرممکن‌التحویل باشد. واضح است‌که دراین صورت m وn هردو با هم نمی‌توانند زوج باشند از (۱) داریم

$$f(x)=\sqrt[n]{a^m}$$

حال اگر n زوج باشد، دراین صورت m فرد است و زیر رادیکال یك عدد منفی خواهد بود یعنی f تعریف نخواهد شد.

اما اگر n فرد باشد، تابع همواره قابل تعریف است. (دراعداد حقیقی) ملاحظه می‌شود که وقتی $a<0$ تابع وضع مشخصی پیدا نمی‌کند درنقاط مختلف محورطولها وضع بخصوصی بخود می‌گیرد از این‌رو در توابع نمایی پایه را همواره مثبت درنظر می‌گیرند.

اینکه می‌نویسید تابع‌نمایی $f(x)=a^x$ رامی‌توان به‌صورت

$$f(x)=(a)^{2\times\frac{x}{2}}=(a^2)^{\frac{x}{2}}$$

نوشت وبنابراین اگرهم a منفی باشد $a^2=b>0$ و درنتیجه

$$f(x)=b^{\frac{x}{2}}$$

یعنی می‌خواهید بگوئید مثلاً

$$(-2)^{\frac{1}{2}}=(-2)^{2\times\frac{1}{4}}=[(-2)^2]^{\frac{1}{4}}=(4)^{\frac{1}{4}}=$$

$$\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$$

ویا

$$\sqrt{-2}=\sqrt{2}$$

ملاحظه می‌کنید که سمت چپ عددی است موهومی درحالی که سمت راست عددی است حقیقی و $\sqrt{-2}\neq\sqrt{2}$

در واقع اگرپایه مثبت باشد، می‌توان این کار را کرد. اما اگر منفی باشد و توان آن کسری باشد غیرممکن‌التحویل با مخرج زوج، این‌کار را نمی‌توان انجام داد. یعنی دراین حالت (حالت اخیر) $f(x)=a^{m/n}$ عددی است موهومی و در اعداد حقیقی تعریف نمی‌شود. وقتی شما تابع را به‌صورت

$$f(x)=a^{2\times\frac{2n}{2m}}$$

می‌نویسید، کسر نما را ازصورت غیرممکن‌التحویل بودن خارج می‌کنید درنتیجه

$$f(x)=a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}$$

که تعریف نشده نیست (n زوج و m فرد است) به‌صورت

$$f(x)=a^{2n/2m}=\sqrt[2n]{a^{2m}}$$

می‌نویسیدکه به‌ازای هرمقدار $m\in Z$ و $a<0$ تعریف شده‌است.

آقای وحید عبدالکریمی، دانش‌آموز، شهرری

حل مسئله دانش‌آموز ارسالی شما درست است ولی ما بنا نداریم که برهان مسائل دانش‌آموزی را درمجله درج کنیم. در ضمن، برای دریافت مسائل بیشترمی‌توانید به کتابهای مسائل المپیادهای ریاضی کشورها، که جدیداً ترجمه ومنتشرشده است،

مراجعه‌کنید؛ همچنین، با مراجعه به‌مجلات رشد ریاضی حدود ۳۰ مسئله در آن می‌بینید که برای شما کافی است. درمورد کارها و کشفیات پیر دوفرما، می‌توانید به‌کتاب آشنایی با تاریخ ریاضیات (ترجمه محمدقاسم وحیدی، تألیف هاوردو. ایوز، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی) وهمچنین، به‌کتاب تئوری مقدماتی اعداد (تألیف دکتر غلامحسین مصاحب، جلد اول، قسمت دوم، انتشارات دهخدا) مراجعه نمائید.

آقای محمد انصاری، دانش‌آموز سال سوم ریاضی، گچساران

ازاینکه مقالات شماره ۲۸ مورد رضایت شما است موجب خشنودی ما است. ازمسائل ارسالی شما، در صورت مناسب بودن، در بخش مسائل، استفاده خواهیم کرد. اولین سؤال شما در مورد $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)$ است که برابر $(e-1)$ است که $e=2/71828$. درمورد سؤال دوم شما که چگونه می‌توان ثابت کرد که $\binom{n}{k}$ عددی صحیح است؟ کافی است به استقراء آن را ثابت‌کنید و از دستور زیر استفاده نمائید.

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}\quad (k<n)$$

آقای محسن برزو، کرج

نامهٔ تشکرآمیز شما، در مورد مقالات شماره ۲۸، در هیأت تحریریه مطرح شد وازاینکه مطالب مجله به‌گونه‌ای تنظیم‌یافته که رضایت خوانندگان را برآورده می‌سازد موجب خشنودی اعضاء است. همچنین، بسیاری از تذکرات ونکات شما را می‌پذیریم، ولی، تکیه زیاد به ترجمه کتابهای خوب ریاضی، که با فرهنگ ریاضی کشور سازگاری داشته باشد، بهتر از تألیفاتی است که بدون نظم وهدفی جمع‌آوری شده باشند. درضمن، مطالبی که در مورد الگوهای عددی، صفحه ۳۴ مجله رشد ریاضی، شماره ۲۸، ارسال داشته‌اید بدون دلیل و محاسبات آن مشکل است، وهمان‌طوری‌که خود متذکر شده‌اید، محاسبه اعداد ابتدایی وانتهایی آن بسیار وقت‌گیراست.

آقای حسین رحامی، دانش‌آموز، اراک

با تشکر مسئله ارسالی شما را دریافت کردیم برای مسائل درج مأخذ ضرورت دارد.

آقای محمدرحیم، دانشجو، تهران

با تشکر ازشما مسایل شما را دریافت کردیم. درصورت لزوم ازآنها استفاده خواهیم کرد. برای مسایل ارسالی همیشه درج مأخذ ضروری است.

آقای احمد چنگیزی، دانش‌آموز، تبریز

برنامه‌های شما رسید. به‌شما تبریک می‌گوئیم‌که دو زبان برنامه‌نویسی می‌دانید. اما برنامه به‌زبان بیسیک شما در نسخه‌های دیگر بیسیک کار نمی‌کند و درتعجب هستیم که‌چرا برای اعداد ۹ رقمی در زبان فرترن ازاعداد اعشاری استفاده کرده‌اید. به‌هر جهت زمانی که به‌دست‌آورده‌اید خوب است. حالت کلی این مسئله را درمجله رشد مطالعه کنید.

آقای سید طه شاه خلیل‌الهی، دانش‌آموز، تهران

ضمن تشکر ازشما برای مسئله‌ای که می‌فرستید مأخذ بنویسید.

آقای احمد خدائی، دیپلمه، بروجرد

با تشکر ازمسایل ارسالی‌تان، درصورت نیاز ازمسائل شما استفاده خواهیم کرد.

آقای محسن سالاری، دانش‌آموز، تهران

مسایل ارسالی شما را دریافت کردیم. هردوی آنها درکتابها رایج وجود دارند.

آقای محمدرضا رحیمی، دانش‌آموز، اراک

آدرس مجلات خارجی را در شماره‌های قبل رشد درج کرده‌ایم. درمورد مطالبی که راجع به‌مثلث متساوی‌الساقین نوشته‌اید، نتیجه ساده‌ای ازاین مثلث است.

آقای محمد اسماعیل، دانش‌آموز، بروجرد

درمورد رشته‌های مختلف دانشگاهی، هرساله سازمان سنجش وآموزش کشور به وسیله دفترچه راهنما، توضیحاتی در اختیار داوطلبان می‌گذارد. درضمن، نشریه این مرکز تحت عنوان «راه دانشگاه» توضیحاتی دراین زمینه درج می‌کنند که مطالعه آنها نیازشما را برطرف می‌سازد. همچنین، مسائل ارسالی شما را در بخش مسائل مورد استفاده قرار خواهیم داد.

آقای امیرصادقی، تهران

مسائل ارسالی شما، در بخش مسائل، مورداستفاده قرارمی‌گیرد

آقای سیروس زمانی، دانش‌آموز، شیراز

برهان شما درمورد قضیه فرما، درحالتی که توان زوج باشد، نمی‌تواند درست باشد. شما حالت $x=y$ را مبنای اثبات خود قرار داده‌اید وبدیهی است‌که دراینحالت‌معادله فرماجواب‌ندارد، وحالتهای دیگر را هم به‌کمك دوران، بدینحالت برگردانده‌اید. بدین موضوع توجه نکردید که اگر مختصات نقطه‌ای گویا یا گنگ باشد، دلیلی ندارد که پس از دوران چنین خاصیتی حفظ شود. توضیح نامه دوم شما اشکال عمده را برطرف نمی‌کند.

اطلاعیه

دربارهٔ نشریات رشد آموزش تخصصی

مجلات رشد آموزش مواد درسی مدارس کشور که به منظور ارتقاء سطح دانش معلمان و ایجاد ارتباط متقابل میان صاحبنظران، معلمان و دانشجویان با برنامه‌ریزان امور درسی از سوی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش هر سه ماه یکبار ــ چهار شماره در سال ــ منتشر می‌شود و در حال حاضر عبارتند از:

۱ ــ آموزش ریاضی ۳۱
۲ ــ آموزش شیمی ۲۹
۳ ــ آموزش جغرافی ۲۷
۴ ــ آموزش ادب فارسی ۲۸
۵ ــ آموزش زیست‌شناسی ۲۴
۶ ــ آموزش زبان ۲۹
۷ ــ آموزش زمین‌شناسی ۲۳
۸ ــ آموزش فیزیک ۲۵
۹ ــ آموزش معارف اسلامی ۱۳
۱۰ ــ آموزش علوم اجتماعی ۹

دبیران، دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر علاقمندان به اشتراک این مجلات می‌توانند جهت دریافت چهار مجله درسال مبلغ ۸۰۰ ریال به‌حساب ۹۰۰۵۷ نزد بانک ملّی شعبه خردمند جنوبی ـ قابل پرداخت در کلیهٔ شعب بانک ملّی ـ واریز و فیش آن را همراه با فرم تکمیل شده زیر به نشانی تهران، جادّه آبعلی، خیابان سازمان آب بیست‌متری خورشید مرکز توزیع انتشارات کمک آموزشی کدپستی ۱۶۵۹۸ ــ تلفن ۷۷۵۱۱۰ ــ ارسال دارند. ضمناً: معلمان، کارشناسان، مدیران، پژوهشگران و سایر علاقمندان به امور تعلیم و تربیت جهت آگاهی بیشتر از یافته‌های صاحبنظران می‌توانند با پرداخت مبلغ ۸۰۰ ریال در هر سال ۴ جلد **فصلنامه تعلیم و تربیت** *دریافت نمایند.*

مجلات رشدتخصصی در مراکز استان در کتابفروشیهای زیر و سایر شهرستانها در فروشگاههای معتبرمطبوعات بصورت فروش آزادعرضه می‌شود

تهران: انتشارات مدرسه ــ اوّل خیابان ایرانشهر شمالی
اهواز: کتابفروشی ایرانپور زیتون کارمندی خیابان کمیل بین زاویه و زهره پلاک ۲۰
اصفهان: کتابفروشی مهرگان چهار باغ ابتدای سید علی خان
ارومیه: کتابفروشی زینالپور نمایندگی و خبرنگاری روزنامه
اراک: کتابفروشی گنج دانش بازارچه امیرکبیر
بندرعباس: کتابفروشی مالوک خیابان سید جمال الدین اسدآبادی
باختران: کتابفروشی دانشمند خیابان مدرس مقابل پارکینگ شهرداری
خرم‌آباد: کتابفروشی آسیا خیابان شهدا شرقی
رشت: کتابفروشی فرهنگستان خیابان نامجو جنب دانشگاه
زنجان: کتابفروشی شهید بهشتی خیابان آیت‌ا... طالقانی
سنندج: کتابفروشی شهریار خیابان فردوسی
ساری: شرکت ملزومات، و معارف خیابان انقلاب روبروی اداره برق داخل کوچه
شیراز: پیام قرآن میدان، شهدا جنب اداره آموزش و پرورش مرکز فرهنگی
کرمان: فرهنگ‌سرای زمین پارک مطهری
مشهد: انتشارات آستان قدس رضوی خیابان امام خمینی روبروی باغ ملی
یاسوج: کتابفروشی فرهنگ جنب سینما دنا خیابان شهید هرمزپور.

***** دانشجویان مرکز تربیت معلم می‌توانند با ارسال فتوکپی کارت تحصیلی خود از ۵۰٪ تخفیف برخوردار شوند.**

فرم اشتراک مجلات رشد تخصصی

اینجانب   با ارسال فیش واریز مبلغ ۸۰۰ ریال، متقاضی اشتراک یکسالهٔ مجلهٔ رشد آموزش   هستم.
نشانی دقیق متقاضی: استان   شهرستان   خیابان
کوچهٔ   پلاک   کُدپستی   تلفن

دانش‌آموزان ممتاز المپیاد ریاضی نروژ جوایز خود را از دست معاونت محترم رئیس‌جمهور دریافت می‌دارند.

بازگشت دانش‌آموزان ممتاز ریاضی کشور از سی‌ودومین مسابقات المپیاد بین‌المللی ریاضی از نروژ.

(خبر مفصل آن در شماره بعد خواهد آمد)

قابل توجه
دبیران و
دانشجویان
رشد آموزش زمین شناسی
رشد آموزش جغرافیا
رشد آموزش زیست شناسی
رشد آموزش فیزیک
رشد آموزش شیمی
رشد آموزش ادب فارسی
رشد آموزش ریاضی
فصلنامه
تعلیم و تربیت
نشریه
علمی کاربردی
مرکز تحقیقات آموزشی
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش
سال هفتم ـ شمارهٔ ۲ ـ تابستان ۱۳۷۰ ـ شمارهٔ مسلسل ۲۶
رشد آموزش علوم اجتماعی
رشد آموزش زبان
FLT
آیا شما
مجلات
رشد تخصصی
مخصوص دبیران و دانشجویان را که هر
سه ماه یکبار در زمینه آموزش دروس
دبیرستانی منتشر می شود می خوانید؟