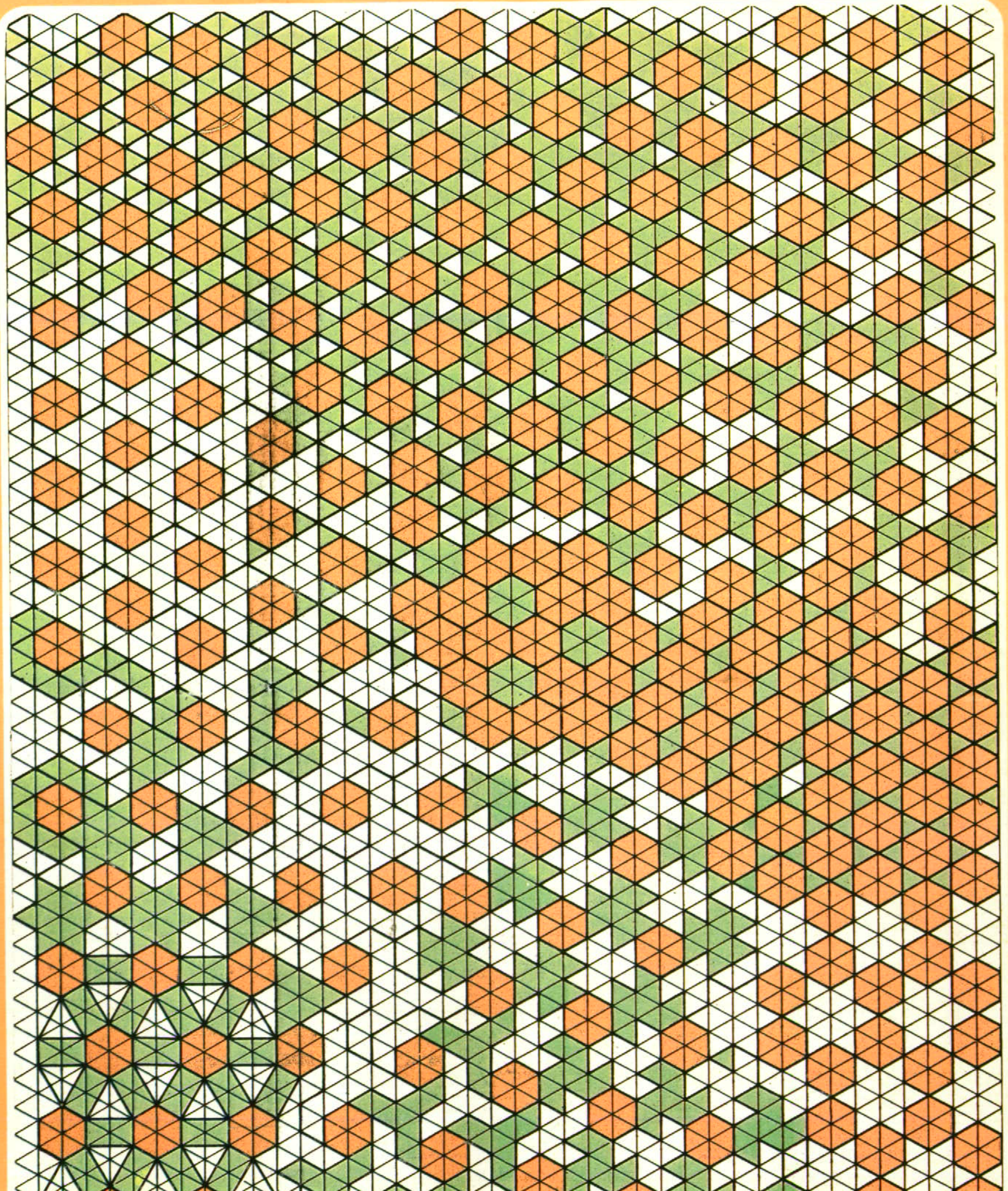
رشد آموزش ریاضی

سال هشتم - پاییز ۱۳۷۰ - شمارهٔ مسلسل ۳۱

بها: ۲۰۰ ریال



بسم‌الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یکبار از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی منتشر می‌شود هدف از انتشار این مجله اعتلای دانش ریاضی دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلّم است. علاوه بر این ایجاد ارتباط متقابل بین معلّمین ریاضی و دفتر برنامه‌ریزی، به‌منظور تبادل تجارب، ارائه روشهای جدید آموزش ریاضی، معرفی جنبه‌های تاریخی، فلسفی، کاربردی ریاضیات در سطح پیش دانشگاهی است. هیأت تحریریه از مشارکت و همکاری همهٔ علاقه‌مندان بویژه دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان در ارائه مقالاتی در زمینه‌های زیر استقبال می‌کند:

الف) آموزش ریاضی (طرح و بررسی آموزش ریاضی، بویژه آموزش ریاضی در دوره‌های پیش دانشگاهی).

ب) تاریخ ریاضی (مشتمل بر سیر تحول مفاهیم ریاضی، شرح و احوال ریاضیدانان و کارهای علمی آنها، بویژه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی).

ج) فلسفه ریاضی (تبیین مفاهیم ریاضی، ریاضیات چیست، بررسی مکاتب ریاضی، بررسی ارتباط تاریخ و فلسفه ریاضی).

ریاضی کاربردی (مشتمل بر مباحثی در زمینه‌های آنالیز عددی، کامپیوتر و برنامه‌ریزی، تحقیق در عملیات، آمار و احتمال).

د) سایر مباحث ریاضی (مشتمل بر مقالات مختلفی در زمینه‌های مختلف، ارائه راه‌حلهای مختلف برای مباحث ریاضی، ارائه مسائل نمونه).

رعایت نکات زیر در مورد مقالات ارسالی ضروری است:

۱) مقالات ارسالی باید در چهارچوب اهداف فوق و با سبکی مشابه با سبک مقالات چاپ شده در رشد ریاضی باشد و در سطحی عرضه شوند که ضمن داشتن محتوی مطلوب دارای کیفیت عرضه مطلوب هم باشند؛

۲) مقالات باید با خطّ خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) و به صورت یک سطر در میان و با در نظر گرفتن جای کافی در حاشیه تهیه شود و صفحات به طور دقیق شماره‌گذاری شود؛

۳) فهرست مراجع مقاله به طور کامل و در دو قسمت فارسی و خارجی و به ترتیب الفبایی و طبق استاندارد مقالات علمی درج شود؛

۴) مقالات ترجمه شده از زبانهای خارجی همراه با متن اصلی ارسال شود؛

۵) مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور به چاپ رسیده باشد؛

۶) رد یا قبول و حک و اصلاح و ویراستاری مقالات به عهدهٔ هیأت تحریریه است.

سردبیر: دکتر محمدحسن بیژن‌زاده

اعضاء هیأت تحریریه: دکتر اسماعیل بابلیان، دکتر علیرضا مدقالچی، دکتر محمدحسن بیژن‌زاده، ابراهیم دارایی، جواد لالی، محمود نصیری، حسین غیور، میرزا جلیلی، دکتر امیر خسروی

ویراستار ارشد: دکتر علیرضا مدقالچی

رشد آموزش ریاضی

سال هشتم ـ پاییز ۱۳۷۰ ـ شمارهٔ مسلسل ۳۱

نشریهٔ گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تلفن ۴ ـ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۵۰)

سردبیر: دکتر محمدحسن بیژن‌زاده

مدیر داخلی: میرزا جلیلی

مسوول هماهنگی و تولید: فتح‌ا... فروغی

صفحه‌آرا و رسام: محمد پریسای

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر دانش‌پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. جهت ارتقاء کیفی آن نظرات ارزنده خود را به صندوق پستی تهران ۳۶۳ ـ ۱۵۸۵۵ ارسال فرمائید.

فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

در خردادماه سال‌گذشته دانشکده علوم‌ریاضی دانشگاه صنعتی شریف سمیناری تحت عنوان «ریاضیات سال اول» ترتیب داد. هدف از برگزاری این سمینار بررسی محتوا و روش تدریس ریاضیات سال اول دانشگاهها به شمار می‌رفت.

منظور از ریاضیات سال اول غالباً دروس ریاضیات عمومی و مبانی ریاضیات است. دروس ریاضیات عمومی برای کلیه رشته‌های علوم و مهندسی تدریس می‌گردد. در حالی‌که مبانی ریاضیات، خاص دانشجویان رشته‌های ریاضی است.

شکی نیست که ریاضیات سال اول نقش عمده‌ای درتربیت علمی دانشجویان و آماده سازی آنان جهت کسب تبحر بیشتر در دروس تخصصی‌تر رشته ریاضی و یا به‌کارگیری مهارت‌های کسب شده در حیطه‌های دیگر علمی است.

از آنجا که یادگیری و آموزش ریاضیات امری مستمر و مرتبط می‌باشد امید داریم که ارائه این‌گونه بحث‌ها به هر چه باروتر شدن محتوای ریاضیات دبیرستانی و ارتباط بهتر آن با ریاضیات دانشگاهی کمک نماید. آنچه که در این پیشگفتار

می‌آید صرفاً بخشی از نظریات سردبیر است. این نظریات حاصل تجربیاتی است که طی سالها تحصیل وتدریس ریاضیات و نیز طی همکاری در دفتر برنامه ریزی و تألیف کتب درسی وزارت آموزش و پرورش حاصل شده است.

قبل از همه ذکر این نکته را لازم می‌دانم که در سمینار فوق ظاهراً هیچ فردی از دفتر برنامه ریزی درسی و یا دبیران شاغل شرکت نداشته‌اند وهمان‌گونه‌که آقای دکتر بهبودیان نیز متذکر شده‌اند بـه جا بود کـــه دعوتی مستقیم از گــروه ریاضی دفتر برنامه ریزی درسی و تألیف کتب به عمل می‌آمد تا حداقل به عنوان ناظـر در جلسات سمینار شرکت می‌جستند و از بحثهای زنده و ارزندهٔ آن بهره‌مند می‌شدند.

متاسفانه بسیاری از مسائـل فرهنگـی و اجتماعـی ما در محدوده‌هایی گسسته از هم مطرح و مورد بحث و تبادل نظر قرار می‌گیرد. مساله بهبودآموزش ریاضیات و تغییر محتوایی آن در دانشگاه بی ارتباط بـه محتوا و آموزش آن در دبیرستان امری تصنعی و غیر عملی است. مـا ممکن است بـه عنوان مدرس دانشگاهی چنین تصور کنیم که آمـوزش ریاضیات در دبیرستان ربطی به ما ندارد، این کـــه فارغ‌التحصیلان دبیرستانی اگر ضعیف هستند مشکـــل دبیرستان است و بـاید چارهٔ آن را در دبیرستان جستجو نمود.

ولی وقتی‌که به‌عنوان یك سخنران ویا صاحب‌نظر این‌گونه پنداشت‌ها مطرح می‌گردد باید به طور جدی نگران قضیه بود.

اگـر معلم دبستان و دبیر دبیرستان ضعیف بـاشند نتیجه‌اش ضعف بنیادین دانش‌آموزان در ریاضیات می‌شودکه تا دانشگاه نیز تسری می‌یابد. اگر دانشگاه، رسالت خود را فقط در تدریس ریاضیات خلاصه کند و امر تربیت ریاضی دانشجویان دبیری را در اولویت ننگرد نتیجه آن تسلسل مسأله افت کیفی و یا کمی ریاضی خواهد بود کـــه نتیجه‌اش بالطبع متوجه خود دانشگاه نیز خواهد شد.

آقای دکتر شفیعی مدعـی هستند چنانچه دانش‌آمـوزان از ضعف اساسی در ریاضیات دبیرستان رنـج مـی‌برند ربطی به دانشگـاه ندارد. باید توجه داشت از یـك جهت این مساله به دانشگاه ربط دارد. اگر دانشگاهها و بـه خصوص دانشگاههای بزرگ نقشی در تربیت ریاضی در دبیرستانها نداشته باشند و این مهم را به دانشگاههای تازه تاسیس شهرستانهای کوچك محول نمایند، نتیجهٔ آن ضعف بیشتر دانش‌آمـوزان رشته ریـاضی و دانشجویان دانشگــاه می‌باشد. باید توجه داشت کـه آموزش ریاضیات فقط به عنوان یك کل می‌تواند مطرح باشد. مساله دیگر انتخاب ورودیهای دانشگاه است‌که فرایندی پیچیده داشته وآموزش وپرورش نقش چندانی در آن ندارد. اگر دانشگاهها به خاطر اجرای مساله سهمیه‌بندی، به جای انتخاب نخبگـان، ضعیفان را برگزینند چگونه می‌توان حتی با داشتن برنامه‌های درسی بـا محتوا و متناسب بـا شرایط روز مـوفـق شد؟ بیشتر دانشجویان ورودی دانشگاههـای تربیت‌معلم دارای معدل کتبی دیپلم بین ۱۵ تا ۱۲ هستند. وما انتظار داریم که تربیت بنیادی ریاضی را در دبیرستان در آتیه بدانها بسپاریم. ضمناً باید توجه داشت در بیشتر کشورهـای جهان، حتی در کشورهـای پیشرفته علمی و صنعتی این‌گونه نیست که تصور شود دبیرستان موظف است همهٔ فارغ‌التحصیلان خود را برای ورود بـه دانشگاه مهیا نماید. بلکه بـرعکس بیشتر بـرنامه ریزان فرض را بـــر این می‌گذارند کـه اکثریت فارغ‌التحصیلان دبیرستانی جذب مراکز غیر دانشگاهـی می‌شوند. فلذا آموزش محتوای دبیرستانی به گونه‌ای تنظیم می‌گردد که متناسب با این اصل باشد.

دبیرستان و دانشگاه دومقطع تحصیلی مشخص و جدا از هم می‌باشند. جواز قبولی دانش‌آموزان کلاس اول نظری که می‌تواند به‌کلاس دوم بروند قابل مقایسه با جوازقبولی دانش - آموز کلاس چهارم که پایان مقطع دبیرستان است نمی‌باشد. حتی در کلاس اول ریاضی تجربی نیز شرط ورود به کلاس دوم که شامل رشته‌های ریاضی - فیزیك و علوم تجربی است تنها جواز قبولی مطرح نیست، بلکه شرط داشتن حداقل معدل نیز لازم است.

شکی نیست که هم ریاضیات دبیرستان و هم ریاضیات دانشگاهی لازم است تغییریابند. درمورد مقطع دانشگاهی لزومی ندارد این همه تنوع درس با شماره‌های مختلف داشته باشیم، ریاضیات سال اول را می‌توان در دو درس **ریاضیات خطی و ریاضیات گسسته** خلاصه نمود. قسمت عمده درس ریاضیات خطی شامل مبحث فضاهای برداری، روشهای مشتق‌گیری و انتگرالگیری و معادلات دیفرانسیل است. لازم به یادآوری که درحالی‌که جواب معادلات دیفرانسیل یك فضای برداری است، ما غالباً این درس را جدا از مبحث فضاهای برداری تدریس می‌کنیم دانشجویان ارتباط مباحث مختلف ریاضی را کمتر متوجه شده و به جواب عمومی معادله به عنوان یك جواب، نه زیر فضایی از یك فضای برداری، می‌نگرد. در درس ریاضیات گسسته نیز مباحثی از قبیل ساختارهای جبری مانند گروه و حلقه (به صورت مقدماتی) و نگاشتهای بین آنها، نظریه مجموعه‌ها و نظریه اعداد ذکر می‌گردد.

باید اذعان کنیم که ضعف دانش‌آموزان و یا دانشجویان در مبحث حد ناشی از خود این مبحث نیست و بلکه دوعامل عمده دارد. یکی ارائه نادرست مفهوم حد و دیگری عدم آماده سازی محصلین برای کار با نامساویها. چنانچه مفهوم حد با ارائه مثالهای تجربی و به نحو مطلوبی ارائه‌گردد برای اکثریت آنان قابل درك بوده و آنان را برای فراگیری درس جدی‌تر آنالیز ریاضی مهیا می‌سازد. بیشتر ریاضیدانان معتقدند که حد یك مفهوم طبیعی است و برای ارائه مفاهیمی طبیعی‌تر نظیر پیوستگی لازم و قابل ارائه است.

همچنانکه آقای دکترشهشهانی دراین سمینار یادآور شده‌اند جا دارد که یك تجدید نظر اساسی در مورد تنوع دروس ریاضی و رشته‌های مهندسی و علوم نظیر فیزیك، شیمی، زیست‌شناسی انجام گرفته و حتی‌المقدور مباحث مشترك را با دیدی کاربردی برای همه دانشجویان منجمله، دانشجویان رشته ریاضی تحت عناوین مشترك ارائه داد. این یك کار اساسی است‌که لازم است در دستور کار کمیته‌های برنامه‌ریزی دپارتمان‌های ریاضی و شورای عالی انقلاب فرهنگی قرار گیرد. در بخش دبیرستانی، تصور برنامه‌ریزان بر این است که چنانچه مفاهیم دنباله‌ها که ساده‌تر از مفهوم کلی حد توابع‌اند قبلاً ارائه شوند قابل درك‌تر بوده وارائه مفهوم حد به نحو بهتری در دبیرستان به شکلی تکنیکی انجام خواهد شد. مباحث مختلف ریاضیات گسسته که خلاء آن هم در دبیرستان و در دانشگاه احساس می‌شود، در سطحی قابل فهم نیز در برنامه ریاضی آتی دبیرستانها جایگزین خواهد شد. ریز مواد درس ریاضیات دبیرستانی که تاکنون به تصویب رسیده است جهت‌اطلاع همه دبیران ارجمند وهمکاران دانشگاهی درشماره‌های مختلف رشد ریاضی به چاپ می‌رسد. از همه دانشگاهیان انتظار داریم که با مطالعه این ریز مواد چنانچه نظرات یا پیشنهاداتی دارند گروه ریاضی دفتر را مطلع نمایند.

سردبیر

نقش ریاضیات در زندگی بشر و شناخت طبیعت

قسمت سوم

دکتر غلامرضا دانش ناروئی

اینشتاین: چگونه است که نتایج ریاضیات، این محصول اندیشهٔ محض و مستقل از تجربه، این چنین تحسین‌انگیز در مورد اشیاء حقیقی پذیرفته می‌شود؟

در شماره گذشته به ضعف حواس و نارسائی آنها وناتوانی ادراك شهودی پی بردیم و بر ضرورت استدلال ریاضی برای جلوگیری از لغزشهای احتمالی ناشی از خطاهای حواس و رسیدن به نتایج مطلوب و مطمئن آگاه شدیم. پیش‌از آنکه

بـه تعریف و ویژگی‌هـای استدلال ریاضی بپردازیم، فضای خاصی راکه این استدلال در آن صورت‌می گیرد معرفی‌می کنیم. ازآنجائی‌که زبانهای معمولی محاوره‌ای در بسیاری مـوارد گنگ و نارسا است (برخی از گرفتاریهای اجتماعی و سیاسی از همین نارسائی‌ها است‌که قوانین و مقرارت بنابر نظر افراد و طبق حب و بغض آنها تعبیر و تفسیر مـی‌شوند). استدلال ریاضی نیاز بـه زبان و فضای ویژه‌ای داردکـه عاری از این عیوب و شك وتردید باشد وجائی برای اعمال نظرهای همراه با حب و بغض موجود نباشد. فضائی‌کـه درآن دانشهـا و داده‌ها روشن وصریح بیان ویا نمایش داده شوند. ریاضی‌دان برای ساختن این فضا بسیاری از ویژگی‌های اشیاء فیزیکی را کـه در یك مطالعه خاص مـورد بررسی قرار می‌گیرند ندیده می‌گیرد و تنها ویژگی‌هائی را در نظر می‌گیردکه مستقیماً در آن مطالعه لازم‌اند و بدین طریق یك شیئی دلخواه و مطلوب (یا به‌عبارت‌دیگرشیئی مجرد) می‌سازد. در زیرمراحل دلخواه سازی راکه‌آن را تجرید خواهیم خواند توضیح خواهیم داد و نکات مثبت و منفی و برداشتهائی‌که از آن می‌شود به تفصیل می‌آوریم.

علاوهٔ بر فضای مناسب، استدلال ریاضی نیاز بـه یك زبان رسا و قوی داردکـه بتوانیم بـه‌کمك‌آن با اطمینان بیشتر و امکانات بهتر مراحل استدلال و برهـان را انجام دهیم. معرفی این زبان راکـه در عین حال‌که باید هدفهای، را برآورده‌کند از سادگی نیز بهره‌مند باشد وبا زبان معمولی خیلی دورنباشد به شماره‌های آینده موکول می‌کنیم.

تجرید

دیرایك: تجرید حیات بجش ریـاضیات است و بالعکس ریاضیات ابزار مناسبی است برای مفاهیم مجرد.

در استدلالهـــای ریاضی، مستقیماً بـا خود اشیاء فیزیکی سروکاری نداریم‌بلکه ازاین اشیاء یك تصویر دلخواه وایدآلی درذهن ترسیم می‌کنیم‌که درآن بسیاری از ویژگی‌های‌نامربوط به موضوع مورد مطالعه و بررسی راکنار مـی‌گذاریم. و تنها به‌آن دسته ازویژگی‌ها اکتفامی‌نماییم‌که مورد علاقه ما هستند. مثلاً خطوط مستقیم‌که در طبیعت وجود دارند و ما هر روز با آنها سروکارداریم دارای ضخامت، رنگ، ساختمان مولکولی و معمولاً جامد هستند، با این وصف خط مستقیمی‌که مورد نظر ریاضی‌دان است هیچیك از این خـواص را ندارد. همین امر در مورد سایر اشکال هندسی ازقبیل مثلث، دایره و ... صادق است. با این عملی‌که یك مرحلهٔ **دلخواه‌سازی یا مطلوب‌سازی** است وما ازآن بنام «تجرید» یا «مجردسازی» یاد خواهیم‌کرد ریاضیدان ذهن را از عوامـل مخل و نـامربـوط موجود در اشیاء یا در روابط بین‌آنها آزاد مـی‌کند تا بتواند این روابط را روشنتر به بیند.

مرحلهٔ تجرید مختص ریاضی نیست بلکه در سایرحوزه‌های تحقیق علمی و اجتماعـی تـا حدود زیادی از تجرید استفاده می‌شود و صورتهای مجرد اشیاء مورد بررسی قرار می‌گیرد. مفاهیم فیزیکی نیرو، جرم وانرژی اشیاء مجردی ازپدیده‌های حقیقی موجود در طبیعت هستند. مفهوم ثروت در اقتصاد یك مفهوم مجرد از پول، زمین، ساختمان، طلا و جواهـرات و ... است. مفاهیم‌آزادی، عدالت و دموکراسی نیز مجردات در علوم اجتماعی سیاسی می‌باشند. دراینجا تلاش براین است‌که مطالعه‌کنندگـان و محققین بـه اشیاء و حوادث واقعی نزدیك بمانند ویا مستقیماً باآنها ارتباط داشته باشند. مثلاً در مطالعهٔ ساختمانهای مولکولـی سعی برآن است‌کـه دقیقاً بـه اجزاء متشکله فیزیکی برسند و نیز مطالعهٔ دستمزد، درآمد، سود و ... با پدیده‌هـای واقعی مربوط است. درصورتی‌کـه در ریاضی این طور نیست و در بسیاری از موارد این فاصله بسیار زیاد است.

جهان اشیاء ایدآلـی افلاطون خیلـی نـزدیك بـه جهان دلخواه ریاضی است. افلاطون می‌گوید: «آنچه جهان واقعی تجربی نامیده می‌شود ابداً واقعی نیست. ما شبیه ساکنین یك غار هستیم‌کـه سایه‌های اشیاء جهان خارج را درك می‌کنند و آنهـا را بـا اشیاء اصلی اشتباه مـی‌گیرند (کتاب جمهوری افلاطون فصل۷، صفحه ۵۱۴–۵۱۷)» اشیاء ریاضی‌تماماً مجرد هستند و جهان افلاطونی جایگاه دایره‌ها، مربع‌ها و... راستین هستند. این جایگاه ، اشکال راستین،کمال مطلوب راستین است و زبان ریاضی توصیف راستین را برای این جهان می‌دهد.

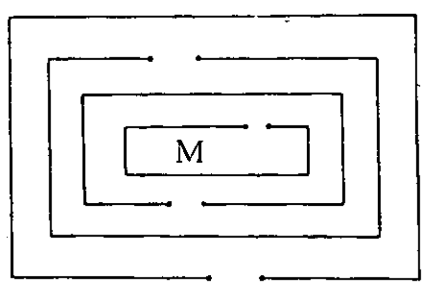
پنج‌کتاب، پنج نفر، پنج درخت و... یك وجه مشترك دارند وآن«درکلمهٔ پنج» است همین استفادهٔ «پنج» مستلزم وجود یك پروسه تجرید است‌کـه درآن وجه مشترك‌کتاب، نفر و درخت و... جدا می‌شود. برای هرکتاب یك نفر و برای هر نفر یك کتاب وجـود دارد و بـه این ترتیب یـك تناظر یکبیك بین

کتابها و نفرها برقرار است. ملاحظه می‌کنید که در اینجا، از یك دید، اشیاء مورد نظر هستند و از دید دیگر اعداد مجرد که بظاهر مجزا ازکتاب و نفر وجود دارند و به‌عنوان شیئی مستقل تجلی می‌کنند.

لازم است یادآور شویم که امروز ریاضیات روال تاریخی را که چگونه تجرید صورت می‌گیرد کنار می‌گذارد و به توصیف نظریه مجموعه‌ای تجرید توجه می‌کند. بنابر نظر برتراند راسل و وایتهد درپرنسیپا ماتیماتیکا مفهوم مجرد «پنج» عبارت است از مجموعهٔ تمام دسته‌هائی از اشیاء که تناظر یکبیك با ۵ کتاب دارند.

وجه تمایز بین ریاضیات وعلوم تجربی واجتماعی در به‌کار گرفتن مفاهیم مجرد چندان دقیق نیست. در واقع، نفوذ ریاضیات و تفکر ریاضی در سایر حوزه‌ها به ویژه در علوم تجربی منجر به استفاده روز افزون مفاهیم مجرد دراین حوزه‌ها به حدی است که بعضی ازآنها ابداً همتای فیزیکی (حقیقی) ندارند (مانند فرمولهای ریاضی). ممکن است چنین به نظر برسد که خارج شدن از جهان واقعی و تنها تکیه کردن بر تعدادی ویژگی مجرد اشیاء فیزیکی اثرکاربردی ریاضی را ازبین ببرد. با این حال، قسمتی از رمز قدرت ریاضیات در بهره‌گیری ازهمین مفاهیم مجردات است. زیرا به این ترتیب فکرمان را از جزئیات نامربوط و غالباً مزاحم‌آزاد می‌کنیم و می‌توانیم به نتایج بیشتری دست یابیم.

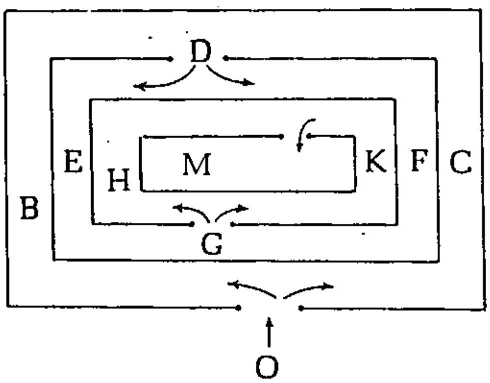
برای روشن شدن پروسه تجرید توجه شما را به مثال زیر که ازنظریهٔ گرافهای مجرد (اقتباس شده است جلب می‌کنیم.) شکل مقابل نقشهٔ یك ساختمان مرکب از چند سالن تودرتو را نشان می‌دهد. فرض کنیم شخصی از خارج وارد این ساختمان شود و بخواهد خودش را به سالن مرکزی M برساند. وی کم‌وبیش در راهروها سرگردان می‌شود تا سرانجام راهی برای



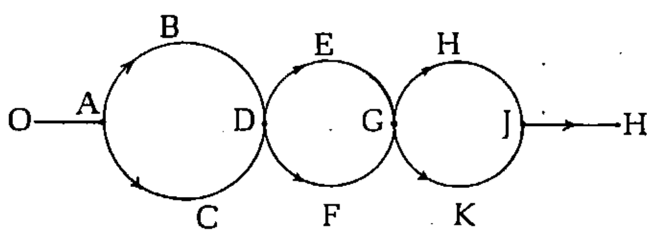
ش ۱

ورود به راهروهای درونی پیدا نماید به این امید که به‌نقطهٔ آغاز برنگردد.

پس‌از یك بررسی کامل می‌توان مسیر را کاملاً مشخص‌کرد وحتی آن‌را شفاهاً بیان‌کرد. حال اگر این نقشه را نامگذاری کنیم یك توصیف از انتخاب یکسر ممکن است چنین باشد. از نقطهٔ O واقع در خارج نقشه بسمت ورودی A حرکت کند. در A دو راهرو B و C وجود دارد که هریك را می‌تواند برگزیند تا خود را به ورودی D برساند و ... .



این توصیف را اگر از بعضی ویژگی‌های شکل بگذریم و تنها پیمودن مسیر برای رسیدن به نقطهٔ M هدف، باشد می‌توان به صورت شکل زیر ترسیم کرد.

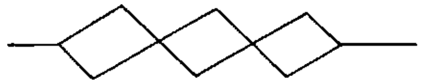


ش ۲

با این عمل ما نه تنها چیزی از دست نمی‌دهیم بلکه دراین پروسه برداشت هم می‌کنیم. می‌بینیم که شکل ۲ برای هدف ما بسیار ساده‌تر و روشن‌تر است و اثری از این پیچ‌وخمهای گمراه‌کننده در آن دیده نمی‌شود.

قابل ذکر است که برخی از خواص هندسی شکل ۲ (مثلاً دایره‌ای بودن) ضروری نیستند و شکل ۲ با شکل‌های ۳ و ۴ فرقی ندارد.

پروسه تجرید را هنوز می‌توان ادامه داد وآن‌را ازصورت



ش ۳

ش ۴

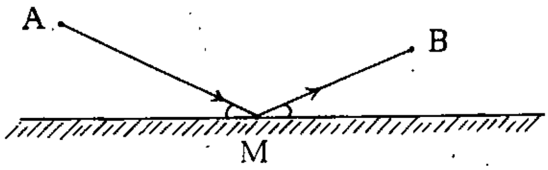
هندسی‌اش کاملاً خارج نمود. مثلاً می‌توان همهٔ داده‌ها را در یك جدول قرار داد.

	A	B	C	D	E	F
A	۰	۱	۰	۰	۰	۰
B	۱	۰	۲	۰	۰	۰
C	۰	۲	۰	۲	۰	۰
D	۰	۰	۲	۰	۲	۰
E	۰	۰	۰	۲	۰	۱
F	۰	۰	۰	۰	۱	۰

این جدول بنام ماتریس Incidence پوانکاره نامیده می‌شود ـ بعدازاین‌مسئله‌رابه‌کمك‌نظریه گراف بررسی می‌کنیم. می‌بینیم که با این کار مسئله پیمودن یك نقشهٔ پر پیچ‌وخم به صورت حسابی بیان می‌شود. با این ماتریس به عنوان ماده اولیه (یك شیئی مطلوب ریاضی) استدلال و استنتاج را آغاز و سرانجام نتایج بدست‌آمده را با توجه به شکل ۱ تعبیر می‌کنیم.

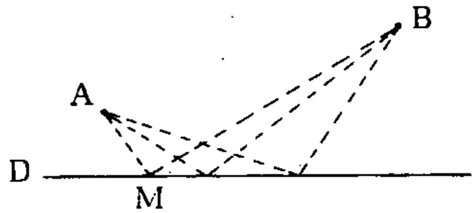
برای اینکه به بینیم تجرید، علاوه‌بر ساده نمودن و برطرف کردن ابهامات و روشن نمودن روابط موجود بین اشیاء، چه استفاده‌هائی ممکن است عاید بکند به مثال‌های زیر توجه کنید:

از عهد یونان باستان ریاضیدانان و دانشمندان پیوسته موضوع نور را دنبال می‌کردند. علاقه این دسته به‌این پدیده قابل فهم است؛ بشربرای بقاء خود به نور متکی است. هرون ریاضیدان یونانی (در قرن اول زاد روز مسیح) دریافت‌که نور پس‌از برخورد به‌آینه طوری منعکس می‌شودکه زاویهٔ انعکاس با زاویهٔ تابش برابر است. مهمتر آنکه از میان اشعه مختلف یك و تنها یك پرتو نور پس‌از برخورد به‌آینه به B می‌رسد واین بگونه‌ای است‌که AM+MB می نیموم است.



تا اینجا تنها رفتار اشعهٔ نوری مورد توجه بود؛ولی بطوری که در زیر می‌بینید این مسأله یك محتوای محض ریاضی دارد. که مستقل از پدیدهٔ فیزیکی نور است. از نظر ریاضی به AM و MB از دید پاره‌خط معمولی بدون ماهیت فیزیکی که مسیر نورند می‌نگریم. در این حالت قضیهٔ زیر حاصل می‌شودکه یك قضیه مجرد هندسی است.

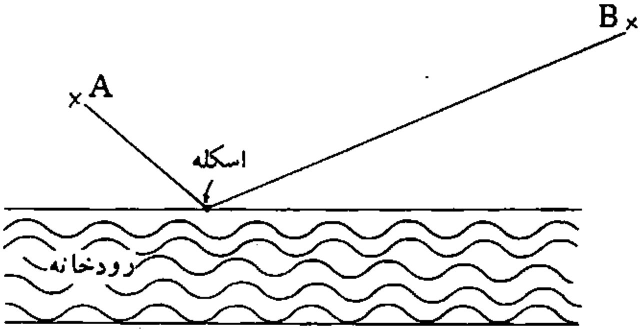
قضیه: اگر از نقطهٔ M واقع برخط D به‌دونقطهٔ A و B که در یك طرف‌آن قرار دارند وصل‌کنیم طول خط شکسته AMB (یا AM+MB) هنگامی می‌نیموم است‌که زوایای حاصل از MA و MB با D برابر باشند. (ثابت‌کنید).



به این ترتیب با رفتن به جهان تجرید از یك اصل فیزیکی به یك قضیهٔ مجرد ریاضی‌که رابطهٔ بین طول زاویه است می‌رسیم این قضیه دست ریاضیدان را باز می‌گذاردکه‌آن را در موقعیتهای مختلف‌که رابطه‌های با نور ندارند به‌کار برد و تعبیرهای مختلف‌ازآن بنماید. تعبیرهائی‌که هنگام طرح مسألهٔ اولیه هرگز مطرح نبوده است. به مثالهای زیر توجه‌کنید:

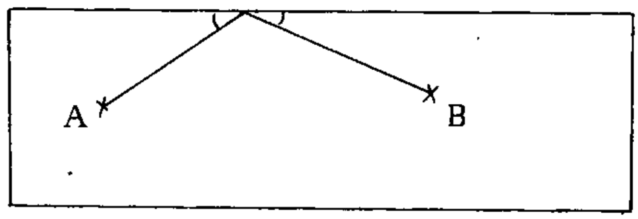
مثال ۱: فرض‌کنیم یك شرکت حمل‌ونقل که قرار است

کالاهای تجارتی را از ساحل یك رودخانه به دو شهر A و B برساند قصد نماید اسکله‌ای در ساحل درجای مناسبی بسازد



بقسمی‌که کالاهای هردو شهر را مشترکاً درآنجا تخلیه و سپس آنها را به‌تساوی تقسیم و بین این دوشهر توزیع نماید. سؤال شرکت این است‌که این اسکله را درکجا بسازد تا از نظر زمان و هزینه‌های جاری حمل‌ونقل حداکثر صرفه‌جوئی را بنماید. واضح است‌که پاسخ این مسأله در قضیهٔ بالا است. دراینجاخطوط مجرد MA و MB (M نقش اسکله را بازی خواهدکرد) به جاده‌های‌واصل‌بین اسکله ودوشهرتعبیرمی‌شوند.

مثال ۲. این مثال مربوط به بازی Snooker است،که یك نوع بازی با توپ روی میز است.و جنبهٔ بین‌المللی دارد.



در اینجا دورهٔ میز برآمده است و توپ پس‌از برخورد به آن با زاویه‌ای برابر زاویه برخورد از لبهٔ میز به سمت داخل با خط مستقیم حرکت می‌کند. بازی‌کنان این بازی هنگامی که مانعی بین توپ اصلی‌که در اختیار بازی‌کن است و توپ مورد نظرکه باید هدف قرارگیرد وجود دارد از این اصل استفاده می‌نمایند. بازی‌کن خوب و قوی‌آن است‌که بتواند محل برخورد توپ را به لبهٔ میز درست حدس بزند و بتواند توپ را به‌آن نقطه هدایت کند.

مثال ۳. اگر سه‌آینه را طوری به هم وصل‌کنیم‌که یك‌کنج سه قائمه تشکیل دهند، می‌توان نشان داد اشعه‌ای‌که به یکی از این‌آینه‌ها برخورد می‌کند پس‌از برخورد معمولی به سه آینه به‌موازات امتداد اولیه برمی‌گردد. ازآنجائی‌که امواج رادیوئی مانند امواج‌نوری رفتار می‌کنند ازاین ویژگی برای تعیین جهت وزش باد در ارتفاعات خارج از دسترس استفاده می‌کنند. به‌این‌ترتیب‌که یك‌کنج سه قائمه‌آینه‌ای‌را به‌یك بالن وصل می‌کنندوآن‌را به‌فضا می‌فرستند. با ارسال مداوم امواج رادیوئی درجهات مختلف وبا دریافت امواج برگشتی حرکت بالن را دنبال می‌کند. چون بالن تحت‌تأثیر باد جابجا می‌شود از تغییر جهت‌های‌آن همراه با اطلاعات دیگر از قبیل فاصلهٔ بالن از مرکزکنترل می‌توان سرعت باد را محاسبه‌کرد.

ازآنجائی‌که پروسهٔ تجرید از اهمیت خاصی برخوردار است بحث در این موضوع را ادامه می‌دهیم. فرض‌کنیم شخصی مثلاً به وزن ۶۵کیلوگرم و ناآشنا به فن شنا در لبهٔ یك سکوی شیرجه، که ارتفاع‌آن از سطح‌آب ۵ متر است، به قصدآفتاب‌گرفتن نشسته باشد. اگر یکی‌از دوستان شوخش غفلتاً وی‌را هل دهد و وی درآب بیفتد، چه زمانی طول خواهد کشید تا وی به‌آب برسد؟

تاآن جائی‌که به ریاضیات مربوط است این شخص جرم فیزیکی است. این جرم را ممکن است، از دیدگاه مسأله، در یك نقطه متمرکز محسوب‌کرد. به عبارت دیگر، وی یك نقطه مادی است این مطلب که وی را هل داده‌اند، نزد ریاضیدان، صرفاً بدین معنی است‌که وی سقوطش را بدون سرعت اولیه‌آغاز می‌کند.

چون فاصلهٔ سقوط نسبتاً کوتاه است ریاضیات مقاومت هوا را ندیده می‌گیرد. می‌دانیم وقتی مقاومت هوا ندیده‌گرفته شود تمام اشیاء با یك نرخ سقوط می‌کنند و بنابراین وزن این شخص بی‌اثر است. اما اشیائی‌که تحت نیروی جاذبه سقوط‌آزاد می‌کنند در زمان t ثانیه فاصلهٔ $d=\frac{1}{2}gt^2$ را طی می‌کنندکه‌درآن g شتاب ثقل زمین است. حال کافی است دراین فرمول،که رابطهٔ بین زمان و مساحت طی شده را در سقوط‌آزاد نشان می‌دهد، به جای d مقدار ۵ را جانشین‌کنیم و زمان را محاسبه نماییم.

نه تنها افراد روی یك سکوی شیرجه بلکه اجسام بزرگی مانند زمین و یا خورشید را برای بعضی مقاصد ممکن است نقطه‌های مادی درنظرگرفت. در مطالعهٔ حرکت سیارات، که درآن اجسام به فاصلهٔ میلیونها کیلومتر از هم قرار دارند،

اندازه‌های اجسام را می‌توان غالباً ندیده گرفت و تمامی وضعیت را به عنوان یك مسأله حرکت نقاط مادی در طول منحنی (که همان مدار حرکت آنها است) محسوب کرد بدون اینکه چیزی از دست داده باشیم. باید توجه داشت که چنین تجریدی از کره زمین یعنی تصور زمین به عنوان یك نقطهٔ مادی دردی را برای مطالعهٔ حرکت در سطح زمین دوا نمی‌کند. اما دراینجا تجرید به نوع دیگری مطرح است و آن این است که زمین را کرهٔ کامل فرض می‌کنیم (در حقیقت زمین بیضوی است).

بهره‌گیری از تجرید ریاضی برای مطالعهٔ جهان فیزیکی موجب می‌شود عده‌ای دانشی راکه ریاضی به‌دست می‌دهد رد کنند. اما پروسهٔ ریاضی‌گونه تجرید در سایر زمینه‌ها بی‌نظیر نیست. مثلاً مجسمه مرمر یك شخص خود آن شخص نیست، با این حال خصوصیات آن شخص را که هنگام دیدن موجود زنده از نظر پنهان است آشکار می‌کند. به عبارت دیگر، این مجسمه می‌تواند سیماهای شخصیت و عاطفی را آشکار کند. البته در اینجا غالباً این پروسه مورد تمجید قرار می‌گیرد؟

کسانی که با پروسهٔ تجرید سروکار ندارند ممکن است تصور نمایند که با کنار گذشتن شیئ اصلی و به کار گرفتن صورت مجرد آن فرمولها و نتایج حاصله بی‌فایده است. اما تاکنون قدرت آنها را دیده‌ایم و دریافتیم که این پروسه نه تنها منجر به گرفتن نتایج مهمی درمورد خود پدیده فیزیکی مورد سؤال می‌شود، (مثل قوانین مغناطیسی ماکسوئل که منجر به پیش‌بینی امواج رادیوئی شد) بلکه تجرید و فرمولبندی کردن روابط دور از انتظاری را آشکار می‌کنند. دلیل این امر آن است که قوانین کمی برای خیلی از پدیده‌ها، علی‌رغم به هم نامربوط بودن ظاهری آنها، یکی است. صحت این مدعا با کشف ماکسوئل که نور و امواج مغناطیسی دارای ویژگی‌های واحدی هستند تأیید می‌شود.

همین قدرت تجرید است که به ریاضیات امکان کاربرد زیاد در مسائل اجتماعی، سیاسی، اقتصادی و علمی می‌دهد. تجرید نقاب از چهره واقعی پدیده‌ها برمی‌دارد، پرده اسرار را کنار می‌زند، لباس ظاهری را از تن آنها خارج و بزك ظاهری را که واقعیتهای وجود آنها را مخفی کرده است پاك می‌کند و سرانجام آنها را آن طورکه در عالم اسرار و جهان هستی هستند نشان می‌دهد و به این ترتیب راز نهفتهٔ آنها برای بشر فاش می‌شود. دراینجا است که ریاضیدان در بسیاری موارد به‌وضوح می‌بیند که پدیده مورد مطالعه با پدیده شناخته شده دیگری رفتار یکسان دارد و تنها پوشش ظاهری آن را برای ما نشناخته نگهداشته است. درنتیجه با اطمینان خاطر واعتماد کامل ویژگی‌های این پدیده را بدون هیچ دردسر اضافی و یا اتلاف وقت درآزمایشگاه به‌کمك دانش قبلی خود در مورد پدیدهٔ مشابه بیان می‌کند و آن را به جامعه عرضه می‌نماید.

واتهید ریاضیدان و فیلسوف فقید قرن حاضر این چنین برقدرت تجرید تأکید می‌کند. «هیچ چیزی جالبتر از این واقعیت نیست که هرچه ریاضیات بیشتر و بیشتر ازجهان فیزیکی خارج و به سمت اندیشه مجرد نزدیك شده است با اهمیت روزافزونی در تجزیه و تحلیل واقعیتهای فیزیکی به زمین برگشته است... . اینك بدون شك می‌توان گفت که تجریدها اسلحه راستین هستند که با آنها اندیشه‌مان را در مورد واقعیتهای فیزیکی کنترل می‌کنیم».

کسانی که باوجود پذیرفتن این واقعیت هنوز اظهار تأسف می‌کنند که به کار گرفتن تجرید ریاضی برای حصول موفقیت درعلوم فیزیکی بهای سنگینی پرداخته می‌شود، باید در دیده‌گاه خود از هدف نهائی در تجسس ماهیت جهان فیزیکی تجدید نظر کنند. جوابی که فیزیکدان معروف آ. اس. ادفینگتن به اینها می‌دهد این است که دستیابی به روابط ریاضی موجود در پدیده‌ها تمام آن چیزی است که علم فیزیك به ما می‌دهد. و سر جیمز چنین گفته است که توصیف ریاضی گونه جهان هستی حقیقت نهائی است. تصاویر و مدلهائی که ما برای درك و شناخت آنها به کار می‌گیریم به نظر وی، یك قدم از واقعیت بدورند. مسئولیت خطر پا را از فرمولهای ریاضی بیرون گذاشتن باخود ما است.

سؤال کردن در کلاس درس

تقدیم بـه روان پاك معلم دانشمند و فداکار مرحوم تیمور غیائی‌نژاد به‌مناسبت سالگرد فوت‌آن بزرگوار

گردآوری از علی رجالی، دانشگاه صنعتی اصفهـان (بـا راهنمایی مرحوم تیمور غیائی‌نژاد)

مقدمه

برخی از معلمین بـه مطلب مورد بحث آ گاهی کامل دارند ولـی در انتقال‌آن به دانش‌آموزان وایجادانگیزه لازم درآنان ضعیف هستند. یکی از وسایلی کـه باآن می‌توان در دانش‌آموزان انگیزه به‌وجود آورده وآنها را به‌آموختن تشویق نمود، دخالت دادن‌آنها در امر آموزش می‌باشد. این دخالت و مشارکت در ارائه درس و کشف حقایـق، در بیشتر موارد با طـرح سؤالهای دقیق و به موقع امکان‌پذیراست. اما چگونگی، زمان طرح ومخاطب سؤال درتاثیر سؤال خوب وبا هدف نقش عمده دارد. دراین‌مقاله سعی براین است‌که با استفاده از منابع مآخذ متعددکـه به‌آنها اشاره مـــی‌شود و تجارب نــویسنده و راهنمائیهای‌مرحوم‌غیائی‌نژاد، خصوصیات و انــواع و اقسام سؤالات خوب مــورد بحث قرارگیرد. امید است خوانندگـان عزیز با راهنمائیهای خودگردآورنده را بی‌بهره نسازند.

فهرست مطالب

۱. نکاتی‌کـه قبل‌از طـرح سؤال لازم است مورد توجه قرارگیرد.

۱.۱. هدف از طرح سؤال و منظور از ادامه‌آن مشخص باشد. معلـم باید بداند به چه منظوری سؤال را مطرح می‌نماید و چـه رفتاری را پس از طـــرح سؤال از دانش‌آموز یا دانش‌آموزان انتظار دارد. مثلاً با طرح سؤال «حـل معادلـه درجهٔ دوم $x^2-5x+6=0$» مـی‌تـوان دو منظور داشت. یکـی فقط تعیین جوابها و دیگری به‌دست‌آوردن جوابها با تجزیه یا با استفاده از فرمول. معلم باید از ابتدا هدف رفتاری خود از طرح این سؤال را بداند. علاوه برآن منظورطرح سؤال هم که در بیشتر موارد بـا هدف عجین هستند، مشخص باشد. مثلاً آیا جنبه یادآوری حل معادلات درجهٔ دوم مهـم بوده و یا هدف دیگر ومنظورمتفاوتی در ذهن معلم با طرح این سؤال وجود داشته است؟ به هر حال معلـم بـاید هدف رفتاری (آنچه کـه از مخاطب سؤال انتظارمی‌رود) و منظورخود را از طرح یك سؤال قبل‌از ادامهٔ آن در نظر داشته باشد.

۲.۱. سؤال در زمینه موردبحث باشد. این امر امکان‌پذیر نیست مگـر این‌که معلم قبل از طـرح سؤال در موردآن فکر کرده باشد.

۳.۱. بیان سؤال جالب و برانگیزنده علاقه باشد. بـه طور مثال فرض‌کنیدکه هدف معلم این است‌کـه دانش‌آموزان به این نتیجه برسندکه مجموعه اعداد صحیح و مثبت تحت عمـل تفریق بسته نیست. از یك نفر سوال می‌کندکـه‌آیا همیشه حاصل ضرب دو عـدد صحیح و مثبت، یـك عدد صحیح و مثبت است؟ بعد جـواب مثبت یا منفی دانش‌آمـوز مخاطب را درکلاس به بحث می‌گذارد و با بیان مثالهـای نقض توسط خود دانش‌آموزان مطلب را تفهیم می‌کند. این مسئله مـی‌تواند در دانش‌ـ آموزان انگیزه ایجاد نماید.

۴.۱. سؤال خوش تعریف، واضـح و روشن باشد: یعنی دانش‌آمـوز منظور از سؤال‌را به‌طورکامل درك‌کرده و مفهوم‌آن

برایش روشن باشد. اصطلاحات به‌کار رفته درسوال برای‌اوقبلاً تعریف‌شده ومشخص باشد وجوابهای متعدد به دلیل‌عدم مشخص بودن سوال قابل قبول نباشند. به طور مثال اگر درکلاس اول راهنمایی سوال زیر مطرح شود:

«در قریهٔ مورچه خورت که در هشت‌فرسنگی اصفهان قرارداردچه واقعه مهمی رخ داده است؟» اولاً در این سوال معنی دوکلمه قریه و فرسنگ برای بسیاری از دانش‌آموزان مشخص نیست. ثانیاً ممکن است حوادث متعددی در مورچه خورت اتفاق افتاده باشد.که دانش‌آموز متوجه نشود، منظور معلم کدام حادثه است. بایستی سعی شودکه انتظار مشخص از دانش‌آموز در ارائه جواب وجود داشته باشد.

۵.۱. به محتوی، هدف، بیان، زمان طرح ومخاطب سؤال قبل‌از طرح آن فکر شود. اگر به نکات ذکر شده در طرح سؤال دقت نشود، جنبه‌های منفی و اثرات سؤال باقی می‌ماند. مثلاً اگر به مخاطب سؤال قبل‌از طرح‌آن فکر نشودو از یك دانش‌آموز بسیار ضعیف، سؤالی بسیار مشکل پرسیده شود، بدیهی است که عدم جوابگویی به‌آن اتکاء به نفس راکه یکی از عوامل مهم یادگیری است در او ازبین خواهد برد.

۲. انواع هدفهای آموزشی در طرح یك سؤال

با طرح یك سؤال دونوع هدف مورد توجه باید باشد یکی هدف رفتاری و دیگری هدف آموزشی. هدف آموزشی عبارتست از منظوری‌که معلم از طرح‌آن سؤال دارد تابه‌وسیلهٔ‌آن نوعی ازآموزش را به دانش‌آموز ارائه نماید. به طور مثال معلم با طرح‌یك سؤال می‌تواند انتظار داشته باشدکه دانش‌آموز اطلاعات خود را یادآوری نماید و یا اینکه با سؤال دیگری منظورش به‌کارگیری اطلاعات در جهت آموزش می‌باشد.

تقسیم‌بندیهای متعددی‌برای انواع هدفهای آموزشی وجود دارد، برخی ازمتخصصین تعلیم و تربیت آنرا به سه دسته، یادآوری و جمع‌آوری اطلاعات، تجزیه وتحلیل و تفکرکردن در مورد اطلاعات و سرانجام به‌کارگیری اطلاعات، تقسیم کرده‌اند.

البته مرزبندی دقیقی در تقسیم‌بندی انواع اهداف‌آموزشی وجود ندارد و سؤالاتی هستندکه با ترکیب چند نوع هدف مطرح می‌شوند ویا باتوجه به زمان طرح، محتوی و مخاطب از یك دسته به دسته دیگر منتقل می‌شوند. بعضی از نویسندگان اهداف را به دسته‌های زیر تقسیم نموده‌اند:

۱.۲. **حافظه‌ای.** یادآوری اطلاعات و از برخواندن. اگر تعریف یا فرمولی را دانش‌آموز قبلاً شنیده و یا خوانده است و بخواهیم یادآوری‌کند سوال از نوع حافظه‌ای است. مثل «فرمول مساحت دایره چیست؟».

۲.۲. **ترجمه‌ای.** تبدیل اطلاعات به فرم‌یا زبان‌دیگر، اگر بخواهیم دانش‌آموز گزاره‌ای را به بیان دیگر مطرح نماید، سوال ازنوع ترجمه‌ای است. مثلا مقصود از تعریفی‌که بیان شده چیست؟ یا معادله خطی راکه از دو نقطه مشخص می گذرد بنویسید.

۳.۲. **تعبیری.** کشف‌روابط بین‌حقایق، بسطها، تعاریف، ارزشها و مهارتها. اگر دانش‌آموز تعاریف، اصول و قضایایی را بداند واطلاعاتی هم از مدلی به او ارائه شود و بخواهدآنها را با مورد یا وضعیت ذکرشده منطبق نماید سوال ازنوع تعبیری است. مثلاً آیا مجموعه جوابهای معادله $x^2+px+q=5$ دارای‌دوعضواست، اگر $\frac{p^2}{4}-q$ منفی باشد؟

۴.۲. **تجزیه و تحلیلی.** حل مسایل در اثر آگاهیهای ذهنی مربوط به تفکرات. اگر تجزیه و تحلیل گزاره‌ای یا اثبات و یا رد ادعایی مطرح باشد سؤال از نوع تجزیه و تحلیلی است. به طور مثال «x در چه شرطی صدق‌کندکه $\frac{x}{3}$ و $\frac{x+5}{2}$ هر دو عدد صحیح و مثبت شوند؟».

۵.۲. **ترکیبی.** حل مسایل با ایجاد ابتکار و افکار اصیل. اگر نوآوری و ابتکاری در جواب دادن به یك سوال نیاز بوده و یا جواب‌آن در اثر ترکیب اطلاعات دانش‌آموز مشخص شود،آن سؤال از نوع ترکیبی است. مثلاً «یك دستگاه ریاضی متناهی شامل یك مجموعه چهار عضوی یك عمل خوش تعریف بسازیدکه تشکیل یك‌گروه بدهد».

۶.۲. **کاربردی.** حل‌مسائل‌که شناسایی موضوع، انتخاب و کاربرد مهارتها و بسطهای مناسب را دربردارد. اگر دانش‌آموز برای جواب دادن به سؤال، لازم باشد اصول یا تعاریف و یا قضایایی راکه قبلاً خوانده است به‌کارگیرد سؤال از نوع کاربردی است. مثلاً، a و b دو عدد اول بیشتر از دو هستند، آیا $a \cdot b$ و $a+b$ هر دو فرد هستند؟

۷.۲. **ارزیابی.** درك و قضاوت نمودن درستی و خطا، بد و خوب با توجه به استانداردهای معین. اگربا توجه به‌اصول و استانداردهای معین دانش‌آموز برای جواب دادن به سؤال نوعی ارزیابی و قضاوتی را انجام دهد، سوال از نوع ارزیابی یا قضاوتی است.

به طور مثال: کدام یك ازگزاره‌های زیر صحیح است هستند؟

الف) همه دانش‌آموزان درس می‌خوانند.

ب) حسن درس خوان هست.

ج) حسن درس خوان نیست.

و یا «آیا مجموعه اعداد صحیح ومثبت با عمل ضرب تشکیل یك گروه می‌دهد؟»

(با ذکر این مثال عدم مرزبندی بین انواع سوالات مشخص‌تر می‌شود). شاید بتوان سوالات حافظه‌ای، ترجمه‌ای وتعبیری را جزء گروه اول، تجزیه تحلیلی وترکیبی را جزء گروه دوم و کاربردی و ارزیابی را جزء گروه سوم قرار داد.

این تقسیم‌بندی نه تنها برای سوالات مطرح شده درکلاس توسط معلم به کار می‌رود بلکه در ارزیابی‌ها، سؤالات امتحانی و غیره هم قابل اعمال می‌باشد. مطلب مهم برای تقسیم‌بندی این است که معلم بایستی سعی کند بر اساس محتوی، زمان طرح و مخاطب از انواع سؤالات با هدفهای متفاوت استفاده نماید تا هم بتواند انگیزه لازم را جهت یادآوری مطالب و یا یادگیری موضوعات فراهم آورد و هم به طریق صحیح کار خود و دانش‌آموزان را ارزیابی نماید. همان‌طور که گفته شد این ارزیابی منحصر به دانش‌آموز نیست بلکه معلم با طرح سؤالات خوب می‌تواند میزان یادگیری دانش‌آموزان، نحوه پیشرفت کار، تاثیر مستقیم درس دانش‌آموزان و روش کار را نیز ارزیابی نماید. که به نظر می‌آید هدف دوم برای درس مهم‌تر خواهد بود و بر اساس این ارزیابی معلم می‌تواند روش خود را تصحیح و پروسه یادگیری را اصلاح نماید. بسیاری درکلاسهای درس به سؤالات حافظه‌ای اکتفا نموده، کشف استعدادها نوآوریها و خلاقیت دانش‌آموزان‌را فراموش نمی‌کنند. بایستی سعی شود از انواع سؤالات درکلاس درس استفاده نمود.

دراینجا، بعضی عبارات که در سؤالات مربوط به‌هردسته از اهداف به‌کارمی‌روند را بیان می‌کنیم. لازم به تذکر است که این دسته‌بندی به طور دقیق نوع سؤالها را مشخص نمی‌نماید و درپاره‌ای ازموارد یك سؤال از گروه خاصی با هدفی دیگر با عبارات متناسب قابل طرح می‌باشد و این مثالها فقط به صورت الگویی تقریبی بیان شده‌اند.

الف) سؤالات مربوط به هدف یادآوری و جمع‌آوری اطلاعات (حافظه‌ای): این سؤالات معمولاً دارای عباراتی از این قبیل هستند:

عبارت زیر را کامل کنید	بشمارید	تعریف کنید
توصیف کنید	تشخیص دهید	لیست کنید
جور کنید	اسم گذاری کنید	مشاهده کنید
از بر بخوانید	انتخاب کنید	اجمالاً نگاه کنید

ب) سؤالات مربوط به هدف تجزیه تحلیل و تفکر کردن دراطلاعات که هدف آنها درك ارتباطهای مُوجود و تجزیه تحلیل توسط دانش‌آموز می‌باشد معمولاً شامل عبارات زیر هستند:

تجزیه و تحلیل کنید	دسته‌بندی کنید*	مقایسه کنید
مقابله نمایند	تمیز دهید	شرح دهید
استنباط کنید	منظم کنید	مرتب کنید

درطرح سؤالات تجزیه وتحلیلی بایستی دقت بیشتری مبذول شودکه مبادا باعث گمراهی دانش‌آموزان گردد.

ج) سؤالات مربوط به هدف کاربردی معمولاً شامل عبارات زیر هستند:

	ارزیابی کنید	برون یابی کنید
آینده‌نگری کنید	عمومیت دهید	تصور کنید
قضاوت کنید	مدل‌سازی کنید	تحقیق کنید

طرح ریزی کنید به‌کار ببرید (یك اصل، قضیه یا فرمول را)

*ـ اگر دسته‌بندی مربوط به اطلاعات قبلاً تدریس شده باشد جزء دسته اول و در غیراین صورت یعنی استفاده ازمطالب جدید و درارتباط نزدیك با درك دانش‌آموز ازاوضاع واحوال باشد برای هدف تجزیه و تحلیل به‌کار می‌رود.

۳. تکنیکهای لازم جهت طرح سوال

۱.۳. معلم در رابطه با طرح سؤالات اصلی که بیشترجنبه‌های تجزیه و تحلیلی و کاربردی دارند، بایستی از قبل فکرکرده وارتباط آن با موضوع، جهت آن، مخاطب آن و زمان طرح سؤال را از قبل مشخص نماید.

۲.۳. سوال بایستی واضح و صریح مطرح شود. جای شك و شبهه اگر در سؤال باشد، یا جواب آن دقیق‌نباشد باعث دلسردی دانش‌آموزان خواهد شد.

۳.۳. در طرح سوال بایستی قدرت هوش مخاطب مورد نظر باشد.

۴.۳. سوالات باید منطقی و مرتب مطرح شوند. از طرح سؤالات به‌طور تصادفی و بدون هدف بایستی خودداری نمود در طرح سوال بایستی قدرت هوش ودرك دانش‌آموزمخاطب ازمطلب‌و اهداف درس مورد نظر باشد وعلاوه برآن سؤال لازم است درارتباط مستقیم با درس باشد.

۵.۳. سؤالات بایستی درسطوح مختلف برای دانش‌آموزان متفاوت مطرح گردند. طرح سؤالات بسیار سخت ویا بسیار ساده پشت سر هم باعث دلسردی و یا خستگی دانش‌آموزان می‌شود.

۶.۳. با تعقیب جواب سوالات بایستی سعی شود به دانش‌آموزجرات داده شود. مثلاً با بیان عبارت«آیا می‌توانید دومرتبه بگوئید»، «آیا می‌توانید توضیح بیشتر بدهید» «آیا به غیرازاین جواب، جواب دیگری هم هست»، «چگونه از جواب خود دفاع می‌کنید» وغیره می‌توان دانش‌آموز را به فکرکردن و تصحیح‌کردن جواب راهنمایی نمود.

۷.۳. پس از بیان سوال بایستی به دانش‌آموز وقت کافی برای فکرکردن و رسیدن به جواب داده شود. با عوض

کردن مخاطب سؤال یا جواب گفتن توسط معلم، جنبه‌های آموزشی و اثر مفید سوال از بین می‌رود.

۷.۳. با طرح سؤالات متعدد ومتفاوت می‌توان به همه دانش‌آموزان مجال شرکت کردن در پروسه یادگیری را داد. خواستن غیر داوطلب برای جواب سؤالات مشکل و راهنمایی کردن جهت رسیدن به جواب صحیح، به دانش‌آموزان جرات مشارکت در امر آموزش را می‌دهد.

۹.۳. دادن اطمینان بـه دانش‌آمـوز، جرات دادن به او نقش مهمی در یادگیری دارد. بزودی نباید از دانش‌آموزی کـه نتوانسته جواب دهـد صرفنظر نمود و با راهنمایی کردنش باید بـه او بفهماند که خودش توانسته و مـی‌تـواند جوابگوی سوالات معلم باشد.

۱۰.۳. گاهی تعبیرعبارت سؤال و بیان یك راهنمایی با توضیح، مـی‌تواند در رسیدن به جواب صحیح (توسط دانش‌ـ آموز) کمك کند.

موقعیتهـای مناسب بـرای طـرح سؤال

۱.۴. دانش‌آموز بخصوصی را وارد بحث کردن.

۲.۴. درك و قدرت یادگیری دانش‌ـ آموزان را آزمایش کردن.

۳.۴. تـوجه دانش‌آموزی را جلب کردن.

۴.۴. اطلاعات دانش‌آموز یا دانش‌ـ آموزان را راجع به مطلبی آزمایش کردن، که متقابلاً یك آزمایش در رابطه با نحوه ارتباط دانش‌آموزان و معلم نیز می‌باشد.

۵.۴. نقاط ضعف یك دانش‌آموز راجع به موضوعی را بـدون تحقیر او شناسایی کردن.

۶.۴. شکستن سکوت وجریان انداختن یك بحث متوقف شده.

۷.۴. اجازه شکـوفـایی و درخشیدن دادن به دانش‌آموز.

۸.۴. اساس مطلبی را بنا نهـادن و یا مطلبی مهم را شکافتن.

۹.۴. دوره کردن درس.

۱۰.۴. ایجاد اطمینان و اعتماد بنفس در دانش‌آموز.

۱۱.۴. کسب اطـلاع از فعالیتهـا و اطلاعات یك دانش‌آموز.

۱۲.۴. شروع بحث جدید.

۵. نکات ضروری دیگر

۱.۵. عکس‌العمل معلم در برابر جواب سؤال، معمولاً مهم‌تر از خود سؤال است.

۲.۵. راهنمایی کردن صحیح وجهت‌دار درکشف جواب توسط دانش‌آموز مؤثر است.

۳.۵. امیددادن، تشویق کردن وفهماندن به یك دانش‌آموزضعیف که قدرت رسیدن به جواب صحیح را دارد خیلی با اهمیت است.

۴.۵. گاهی با آوردن یـك مثال نقض می‌توان دانش‌آموز را به جواب غلط خود واقف نمود. انجام این کار یك راهنمایی در جهت کشف مطلب توسط خود دانش‌ـ آموز می‌باشد.

۵.۵. نحوه بـرخورد با دانش‌آموز ضعیف نبایستی آنقدر واضح باشد که خود او و سایر دانش‌آموزان آن را درك کنند.

۶.۵. بسیاری از معلمـان همیشه منتظر جواب دادن یـك یا چند دانش‌آمـوز می‌شوند وبه بقیه مجال فکر کردن نمی‌دهند. این باعث سردی و بی‌عـلاقگی دانش‌ـ آموزان دیگر می‌شود.

۷.۵. طرح سؤالاتی کـه باعث کشف جدید برای دانش‌آموز باشد خیلی مفید است. اگر دانش‌آموزی مطلبی را خود کشف کند ویا سؤالی را خود جواب دهد هرگز فراموش نمی‌کند.

۸.۵. سؤالاتی کـه ممکـن است چند جواب داشته باشند ودانش‌آموز را گمراه کنند مضر هستند اما طـرح سؤالاتی چند جوابی برای اینکه هر دانش‌آموزی قسمتی را جواب دهد خیلـی مفید است (مثلاً خواص دایره یا متوازی‌الاضلاع را لیست کنید.)

۹.۵. درك احساسات دانش‌آموزان و نزدیك بودن بـه آنهـا، کمك بزرگی به مشارکت آنها در یادگیری نموده واستعداد آنها را شکوفا می‌نماید.

۱۰.۵. اهمیت دادن به مطالب درس با ارائـه سوالات منطقـی از متن کتاب در یادگیری نقش عمده دارد.

مراجع

1_ Byer Barry K. (1971). Inquiry in the Social Studies , Class Room,a strategy for teaching Charles E. Merrilco.

2_ Gullette M.M. (1984). The Art and Craft of Teaching , Harvard University press.

3_ Hunkins F.P. (1986). Involving Students in Questioning , Allyn and Bacon, Inc.

4_ Hunkins F.P. (1987). Questioning Strategies and Techniques

5_ Hyman R.T. (1974). Ways of Teaching , 2nd ed.J.B. Lippincott Company

6_ Sanders Norris M. (1966). Classroom Questions, Harper and Row.

7_ Willen , W. (1986). Questioning Skills for Teachers , 2nd ed. National Education Ass.

رشد مفاهیم ریاضی

دکتر محمدحسن بیژن‌زاده

دریك یادگیری فعال، مفاهیم به‌جای آنکه به صورتی ایستا تصورشوند حالتی دینامیك دارند. درحالت ایستا، معلم مفهومی را تعریف کرده و به‌گونه‌ای ارائه می‌دهد که از حیث شروع ابتدا به ساکن جلوه‌کرده و از حیث پایان چنین می‌نمایاند که همه اشکال آن مفهوم را به تمامی وکمال تدریس کرده است. در مقابل، وقتی مفاهیم در بستری گسترده، از جنبهٔ روانشناختی مطرح می‌شوند، چیزی تلقی می‌شوند که در یادگیرنده ریشه داشته و هنر معلم در این است که آن را بارور ساخته و متکاملتر سازد. این باور برمبنای فلسفه‌ای استوار است که جهان را متغیر می‌داند به‌جای آنکه آن را ایستا بینگارد[1].

دراین سخنرانی پیرامون اینکه مفاهیم ریاضی نیز از این قاعده مستثنی نیستند چندکلمه‌ای ایراد خواهد شد. با مثالهایی شروع می‌کنیم که همه باآنها آشنا هستیم واز حیث آموزشی از جمله مهمترین مفاهیم ریاضی به شمار می‌روند.

با مثال حد شروع می‌کنیم. هر مفهوم برای آنکه بهتر تفهیم گردد نیازمند زمینه سازی است که ازمدتها قبل باید انجام گیرد. دراصطلاح برنامه ریزی به این زمینه سازی پیشنیاز می‌گوییم.

بدین سؤالها توجه می‌کنیم:

الف ـ چندکسر به شکل $\frac{1}{n}$ می‌شناسید.

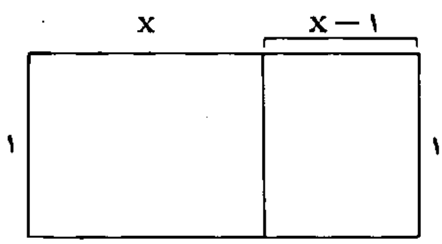
ب ـ در بین کسرهای به شکل $\frac{1}{n}$ کوچکترین آنها کدام است؟

ج ـ بزرگترین عددی که می‌شناسید کدام است؟

اینها سؤالاتی است که می‌تواند برای دانش‌آموزان سالهای آخر دبستان و یا سالهای اول راهنمایی مطرح شود. شکی نیست که کوشش برای پاسخگویی به اینگونه سؤالات تمهید بسیار خوبی برای درك مفهوم حد می‌باشد. سؤال (ب) در واقع زمینه ساز این واقعیت است که حد دنباله $\frac{1}{n}$ وقتی n به بینهایت میل می‌کند برابر صفراست. درسالهای بعد این مفاهیم دقیقتر بیان شده و مفهوم حد فرمولبندی می‌گردد. از جهت آموزشی نیز ارزنده‌تر است که ابتدا مفهوم حد دنباله و سپس مفهوم حد تابع ارائه گردد[2].

بعضی مفاهیم ظاهرشان به‌گونه‌ای است که ممکن است تصور شود حالتی ایستا داشته ودر مراحل بعدی آموزشی استمراری نداشته باشند. ولی در واقع چنین نیست. مثالی نیزازاینگونه مفاهیم ذکر می‌کنیم.

این مثال را باطرح این مسأله شروع می‌کنیم که فرض کنیم بخواهیم مستطیلی پیداکنیم که وقتی به اندازهٔ ضلع کوچکتر آن مربعی از آن جدا می‌گردد مستطیل حاصله (باقیمانده) با مستطیل اولی مشابه گردد.



اگر ضلع کوچکتر مستطیل برابر ۱ واحد فرض شود باید تساوی ذیل برقرار باشد

$$\frac{x}{1}=\frac{1}{x-1}$$

و یا

$$x^2-x-1=0$$

بنابراین

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

یعنی مستطیلی که نسبت ابعادش (ضلع بزرگتر به ضلع کوچکتر) برابر $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ باشد هرچندبار که از آن مربعی با ضلع کوچکتر جدا گردد همواره نسبت ابعادش برابر همین عدد و ثابت می‌ماند.

حال یك مسأله جبری مطرح می‌کنیم. دنبالهٔ ذیل از اعداد را درنظر می‌گیریم

$$4,\ 5,\ 9,\ 14,\ 23,\ 37,\ 60,\ \cdots$$

به جز ۴ و ۵ هرجمله برابر حاصلجمع دو جمله قبلی است.
نسبت هرجمله به جمله قبلی را حساب می‌کنیم

$$\frac{5}{4}=1.25 \quad \text{و} \quad \frac{9}{5}=1.8 \quad \text{و} \quad \frac{14}{9}=1.55$$

$$\frac{23}{14}=1.64 \quad \text{و} \quad \frac{37}{23}=1.60$$

و

$$\frac{60}{37}=1.62 \quad \text{و} \quad \cdots$$

ملاحظه می‌کنیم پس‌ازطی چند مرحله اول، نسبت حاصله به‌حد ۱/۶۲ که برابر $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ می‌باشد گرایش می‌یابد.

با هر دو عددی که شروع کنیم نتیجه همین است، نسبت هر جمله به‌جمله قبل به حد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ گرایش می‌یابد.

برای اثبات این مدعا متوسل بهٔ تجرید (کلیت) می‌شویم. فرض‌کنیم a_0 و a_1 دو عدد دلخواهی باشند. قرارمی‌دهیم

$$a_2=a_0+a_1 \quad \text{و} \quad a_3=a_1+a_2$$

به طور کلی

$$a_{n+1}=a_{n-1}+a_n \qquad \text{(تعریف تراجمعی)}$$

برای یافتن $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ چنین عمل می‌کنیم

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$=1+\frac{1}{a_n/a_{n-1}}$$

فرض کنیم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\varphi$$

پس

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\varphi$$

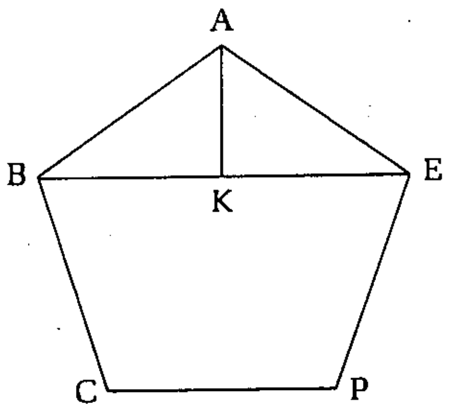
و لذا از تساوی اخیر به دست‌می‌آوریم

$$\varphi=1+\frac{1}{\varphi}$$

که منجر به معادلهٔ

$$\varphi^2-\varphi-1=0$$

می‌شودکه جواب آن $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ می‌باشد!! یك بار دیگر مسأله‌ای هندسی مطرح می‌کنیم. پنج ضلعی منتظم راکه



در آن‌طول AB برابرواحد است درنظرمی‌گیریم. می‌خواهیم نسبت $\frac{BE}{AB}$ را بیابیم.

$$BE=2BK$$
$$BE=2AB\cos\frac{\pi}{5}$$
$$=2\,\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

باز، باکمال تعجب عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ را می‌یابیم!

بار دیگر به مسأله‌ای از نظریه اعداد توجه می‌کنیم. فرض کنیم مرادمان محاسبه کسر مسلسل

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

باشد. مقدار این کسر را φ می‌نامیم:

$$\varphi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

پس

$$\varphi=1+\frac{1}{\varphi}$$

لذا

$$\varphi^2-\varphi-1=0$$

و یا

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

بعضی‌ها این پدیده را جنبه‌ای از شگفتی‌های ریاضیات می‌نامند. و عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ را عدد طلایی[3] می‌نامند. جای تعجب نیست.

یك دبیر خوب مجموعه‌ای از مسائل جالب راکه در حد توان ودرك دانش‌آموزان باشد مهیا می‌کند و به عنوان پروژه به دانش‌آموزان خود ارائه می‌دهد تا بدانها فکر کنند، آنها را تعمیم دهند و عمق آنها را بهتر بشناسند. محصلین وقتی مسائل را بدون ارتباط با یکدیگر می‌بینند آنها را غالباً مشکل یافته و به حل آنها کمتر فکر می‌کنند[4].

بازی و ریاضی

مسأله برای حل

سه میله قائم برروی صفحه‌هایی نصب شده‌اند. برروی یکی ازآنها n دیسك (قرص) مدور سوار شده است به طوریکه میله از مرکز برقرص گذشته وقرصها از پایین به بالا از بزرگ به کوچك مرتب شده‌اند:

قواعد بازی:

۱ــ درهرحرکت فقط یك قرص می‌تواند جابه‌جا شود (از میله‌ای به میله دیگر تغییرمکان یابد).

۲ــ هیچ‌وقت نباید یك قرص بزرگتر روی یك قرص کوچکتر قرار گیرد.

هدف: برداشتن تمام قرص‌ها از میله اول و قرار دادن آنها در یکی از میله‌های خالی.

سؤال: پس‌از طی چند حرکت می‌توان به هدف دست یافت.

راهنمایی: ابتدا با ۲،۳،۴ و ۵ قرص مسأله را حل کنید.

پانوشت‌ها:

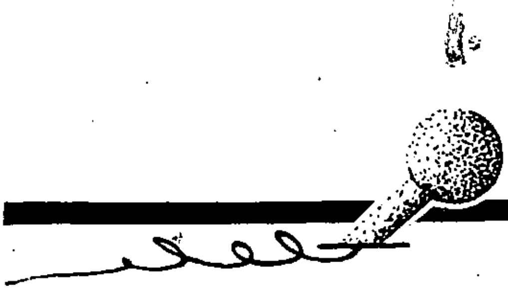
(۱) یکی ازاصول فلسفه وایتهد از این قرار است‌که جهان ساکن نیست، بلکه همواره در تغییر است.

(۲) در برنامه‌ریزی جدید شورای تالیف دفتر برنامه‌ریزی و تحقیق نیز ابتدا مفهوم دنباله و سپس مفهوم حد تابع ذکر شده است.

(۳) Golden Number

(۴) مقاله فوق چکیدهٔ سخنرانیی است‌که بنابر دعوت آموزش و پرورش استان مازندران در محمودآباد آمل برای دبیران ریاضی ایراد شده است.

مصاحبه
با علی رجایی
عضو تیم ایران در
المپیاد چین



س ۱. انگیزهٔ شما از تغییر رشتهٔ الکترونیک به رشتهٔ ریاضی چه بوده است؟

ج ۱. در حقیقت این جای پرسش دارد که چرا با این‌که به ریاضیات علاقه‌مند بودم، به الکترونیک رفتم. باید بگویم که تا دو روز قبل از تغییر رشته‌ام، نگرش کاملاً متفاوتی از تحصیلات دانشگاهیم داشتم. در حقیقت دچار این توهم شده بودم که چیزی را که نتواند «پیچ ببندد» نباید خواند. خوب البته انکار نمی‌کنم که جوسازیهای اجتماع ما هم در من اثر گذاشته بود. بالاخره پس از این‌که خوب فکرش را کردم، دیدم که این خیانت است که انسان استعدادش را در زمینه‌ای سرکوب کند تا مصلحت ظاهری را انجام دهد: خوب که دقیق شویم، می‌بینیم که در بیشتر موارد در تشخیص مصلحت‌ها اشتباه می‌کنیم. وانگهی در جامعه نیازمند ما، هر کسی در هر چه که علاقه دارد، اگر کار کند، گوشه‌ای از دردهای بیشمار این اجتماع را درمان کرده است. من نمی‌توانم بگویم که نباید به رشتهٔ الکترونیک رفت و باید رشتهٔ ریاضی را در اولویت قرار داد اما می‌توانم این درخواست را از هم سن و سالهایم داشته باشم که به هرچه علاقه دارند بپردازند و خود را خیلی مقید به مد نظر قرار دادن گرایشهای اجتماع ندانند.

س ۲. خانوادهٔ شما چه نقشی در آموزش ریاضیات و تربیت ریاضی شما داشته است؟

ج ۲. به نظر من، همین که خانواده، محیطی ایجاد کند که روحیهٔ مطالعه را در انسان از بین نبرد، تأثیر بسیار بزرگی در سرنوشت اعضای خانواده دارد. خوشبختانه خانوادهٔ ما خانواده‌ای فرهنگی است و پدر و مادر من هر دو دبیر زبان هستند. من خانواده‌های بسیاری را دیده‌ام که کتاب در آن خانواده‌ها وسیله‌ای تشریفاتی است. فرزندانی که در این خانواده‌ها پرورش می‌یابند، اگر هم درس بخوانند، غالباً گرایشات بازاری خواهند داشت. من خدا را بسیار شکرگزارم که در خانواده ما کتاب جزء اقلام اساسی زندگی بوده است.

س ۳. تصور شما از ریاضیات چیست؟ چگونه آن را مطالعه و فرا می‌گیرید؟

ج ۳. من اعتقاداتی راجع به ریاضیات دارم که آن را نه باور و نه تصور می‌دانم، بلکه نوعی «ایمان» به‌حساب می‌آورم. اعتقاد من به ریاضیات نوعی اعتقاد افلاطونی است؛ من یقین دارم ریاضیدان چیزی می‌یابد، نوعی اکتشاف از واقعیت کرده است. چیزی وجود داشته که سایه‌ای از آن در گوشه‌ای از پردهٔ سراسر بی‌کران ریاضیات نقش بسته است. نمی‌توانم به کسی توصیه کنم که این عقیده را داشته باشد، شاید هم از دیدگاهی جهان شمول‌تر این درست نباشد، اما ایمان من این است که این اعتقاد نه‌تنها در زندگی علمی من، بلکه در زندگی روزمرهٔ من: حداقل موضعاً راهنمای بسیار خوبی بوده است.

س ۴. جالبترین مبحث ریاضی به نظر شما کدام است؟

ج ۴. در اولین برخوردهایم با ریاضی (که طبعاً بسیار

سطحی هم بوده است) «هندسهٔ جبری»، «توپولوژی جبری»، «هندسهٔ دیفرانسیل»، «سیستمهای دینامیکی» را بیشتر از بقیه پسندیده‌ام، چراکه به نظر من طبیعی‌ترین روند را در تفکر ریاضی انسان مشخص می‌کند. ریاضیدانهای بسیار بزرگی هم دراین چهارشاخه تلاش کرده‌اند؛ ازدیوفانتوس تا بزرگترین ریاضیدانان معاصر همگی در تکوین هندسهٔ جبری نقش داشته‌اند. بررسی هندسی خمهای جبری (به‌عنوان مثال حل حدس آخر فرما درمورد خم ($x^n+y^n=z^n$) موضوع این شاخه است که واقعاً تلفیق چندین شاخهٔ مختلف ریاضی است. تولد «توپولوژی» را باید مدیون نبوغ آخرین ریاضیدان و در عین حال فیزیکدان بزرگ بشریت «پوانکاره» دانست. او هم توپولوژی را به وجود آورد و هم مدت کوتاهی پس‌از آن توپولوژی جبری را ایجاد کرد و هم تا مدتها خط سیر این مولود مبارك را از پیش تعیین کرد. خیلی از پارامترسازیهایی که دانش‌آموزان دبیرستان برای بررسی منحنیهای خاص دبیرستانی (!) انجام می‌دهند، ایده‌هایی خام از «هندسهٔ دیفرانسیل» است. [صرف نظر از «گاوس» و «ریمان» «میلنور» که به‌حق بهترین مقاله نویس ویکی ازبزرگترین ریاضیدانهای معاصر است، درهندسهٔ دیفرانسیل (و یا بهتر بگویم؛ توپولوژی دیفرانسیل) صاحب نام است.] سیستمهای دینامیکی و شاخه‌ای از آن تحت عنوان Chaos و نمودی از آن تحت عنوان Fractal اخیراً رشد و نمو قابل توجهی داشته است و به سرعت جای خود را در علوم مختلف بازکرده است؛ ازعلوم کامپیوتری گرفته تا فیزیك کوآنتمی. از صاحب نامان این شاخه می‌توان از «سمیل Smale» و «پیو Pugh» نام برد که به‌حق پیشرفتهایی اساسی را دراین رشته باعث شده‌اند. از ریاضیدان ایرانی هم که در این رشته صاحب‌نظر باشند می‌توان از «دکتر شهشهانی» (استاد ریاضی دانشگاه صنعتی شریف) نام برد که ایشان زمانی دراین رشته کارکرده‌اند که این شاخه تازه در حال شکل‌گیری بود. [خوانندگان علاقه‌مند به مجلهٔ نشر ریاضی، شمارهٔ دوم، «مصاحبه با دکتر شهشهانی» مراجعه کنند].

س ۵. از چه سالی شکوفایی شما در ریاضیات بر خودتان مشخص شده است؟

ج ۵. من شکوفایی خاصی در تحصیلات ریاضی خود نمی‌بینم، برعکس روند مطالعاتی بسیار کندی هم داشته‌ام. ولی فکرمی‌کنم منظور ازاین سؤال تاریخ کشف علاقه است. باید بگویم که درکتابهای دوران تحصیلات دبستانی، سؤالاتی غالباً در زمینهٔ نظریهٔ اعداد ـ وآن هم اغلب به شکل یافتن ارقام اعداد در یك تقسیم که به جای ارقام اعداد، ستاره، مربع و ... گذاشته بودند ـ مطرح می‌شد که برای دروس دبستان کلاسیك نبود و واقعاً از این لحاظ مفید بود و اولین علایقم به حساب در مورد این مسائل برایم نمود پیداکرد. الان که به کتابها نگاه می‌کنم، از این جور سؤالات نمی‌بینم که وجودش شاید مفید باشد.

س ۶. نظرتان راجع به آموزش ریاضی در کتابهای دبیرستانی چیست؟ چه پیشنهادی راجع به بهبود آن دارید؟

ج ۶. به نظرمن حداقل در رشتهٔ ریاضی (ودو رشتهٔ شیمی و فیزیك) این کتابها برای کسانی که به این رشته‌ها علاقه‌مندند نوشته نشده‌اند و در بسیاری موارد حاوی مطالبی است که پرداختن زیاده از حد به مسائل جنبی می‌باشد. پیشنهادی در این مورد نمی‌توانم ارائه کنم، چون شاید اگر خودم کتابها را می‌نوشتم، وضع اسف‌بارتر ازاین بود. اما نظر من این است که چه لزومی دارد شما برای دانش‌آموزان علاقه‌مند و غیر علاقه‌مند یك کتاب چاپ کنید؟ می‌شود دانش‌آموزان علاقه‌مند را به کتابهای تکمیلی که دراین‌جور موارد نوشته می‌شوند یا برخی مقالات مجلات مربوط به‌آن موضوع ارجاع داد. در واقع رسالت یك کتاب درسی، آشنایی دادن با موضوع مورد بحث و فراهم آوردن سریع پیش‌نیازهای ورود به‌آن مطلب است و چنانچه بیش‌از این منظور نظر باشد، به نظر من اشتباه است.

اشکالی که گفته شد یك اشکال کلی است. ازیك دید موضعی هم اشکالات زیادی وارد است. این کتابها غالباً جهت‌گیری ناصحیحی به مطالعات ریاضی دانش‌آموزان می‌دهد، مثلاً غیرازچند مورد استثنایی، هر دانش‌آموزخوبی که دیده‌ام، در مطالعات خارج از درس بلافاصله گرفتار حسابان شده است بعضی ازکتابهای تایپی و دست‌نویس داخلی تا بسیاری از کتابهای آشفته و پریشان خارجی همه از بی‌دقتی و ضعف بیان رنج می‌برند، نوعاً به این دانش‌آموزان جمود فکری دست می‌دهد. درحالی‌که حداکثر در ریاضی ۲ تمام مطالب موجود در حسابان و در یك دورهٔ آنالیز کلیهٔ مطالب ممکن آن حل و فصل می‌شود. خیلی از تأکیدهای نابجای این کتابهای درسی

هم باعث می‌شود که ایده‌های ناصحیحی از ریاضی به دانش‌آموزان منتقل شود. مثلاً دچار تب اصل موضوع شوند و فکر کنند که تمام ریاضیات را با آنچه در جبر گزاره‌ها می‌خوانند می‌شود تحلیل کرد! حال آن که اگر از قضیهٔ گودل و پیشرفتهای اخیر منطق آگاهی می‌یافتند، موی بر بدنشان راست می‌شد!

گذشته از اینها در همهٔ کتابهای درسی یك ضعف اساسی به چشم می‌خورد و آن کمبود مطالب توصیفی، تاریخی و ارتباطی (رابطهٔ این شاخه با شاخه‌های دیگر) است.

س ۷. خاطرهٔ شما از معلمین خودتان در دبیرستان چیست؟ آنها چه نقشی در شکوفائی شما داشته‌اند؟

ج ۷. خوشبختانه من در دبیرستانی درس خوانده‌ام که کمتر سروکار بامعلمین کنکوری داشته‌ام من بیشترین سهم را در پرورش اندیشهٔ ریاضی خود ناشی از تأثیرات یکی از معلمین خودکه دانشجوی ریاضی بود می‌دانم. گرچه از مطالبی که ایشان درس می‌دادند نه می‌شد تست کنکور حل کرد و نه هیچ یك از مسایل المپیاد را، اما نشستن سر کلاس ایشان برایم خیلی خوشایند بود.

س ۸. تصور شما از ریاضیات دانشگاهی چیست و چه پیشنهادی برای بهبود آن دارید؟

ج ۸. به نظر من ریاضیات دانشگاهی انبوهی از جزئیات بی عمق است. البته اگر زیبائیهایی در آن موجود نبوده کسی به ریاضیات دانشگاهی رهنمون نمی‌شد و من فکر می‌کنم که حداقل در «دانشگاه صنعتی شریف» هدف گیری دقیقی به سوی ریاضیات ناب شده است اما امکانات کم است، کتابخانه نیست و مسؤلین امور آموزش وزارت فرهنگ و آموزش عالی بینش لازم را درمورد آیندهٔ تحصیلاتی دانشجویان ندارند. کتابخانه خوب برای دانشگاه مانند پشتوانهٔ ارزی است برای چاپ اسکناس. ایجاد دوره‌های «دکترا» بدون وجود کتابهای لازم برای این کار، اقدامی بیهوده و چنین مدرکی فاقد ارزش است.

س ۹. آیا در دورهٔ دبیرستان یا دانشگاه مطالعات جنبی نیز داشته‌اید؟ در چه زمینه‌هایی؟

ج ۹. مطالعاتی که درکنار ریاضی داشته‌ام، بیشتر به شیمی و فیزیك مربوط می‌شده است. زمانی بیشترین حجم مطالعه‌ام شیمی بود، ولی چون راهنمای خوبی نداشتم، وقت زیادی را تلف کردم. پس از بررسی امکانات آزمایشگاهی و مطالعات شیمی در ایران، به این نتیجه رسیدم که این کار را باید کنار گذاشت. البته هنوز براین باور هستم که یك دانشجوی خوب ریاضی حتماً باید از فیزیك معاصر خود اطلاعاتی ولو مقدماتی و کم عمق داشته باشد، لذا به خواندن فیزیك همچنان ادامه می‌دهم. به هم سن و سالهای فیزیك دوست خود توصیه می‌کنم که با توجه به امکاناتی که اخیراً توسط پرفسور عبدالسلام برای مطالعهٔ فیزیك نظری در کشورهای جهان‌سوم فراهم شده است، از زیر بار گذاشتن علایق خود جداً خودداری کنند.

س ۱۰. تفریحات شما چیست؟ به عبارت دیگر اوقات فراغت خود را چگونه می‌گذرانید؟

ج ۱۰. متاسفانه تفریح خاصی ندارم و اوقات فراغتم اکثراً به بطالت می‌گذرد، اما خوشبختانه کاری هم نمی‌کنم که به فکر آزاد و اوقات کارم لطمه بزند (مثلاً شطرنج!!). زمانی تصمیم به کوهنوردی داشتم اما دو سه باری که رفتم، منصرف شدم زیرا که باید اعتراف کرد وضع آشفته و کثیفی دارد (حداقل در ارتفاعات پائین!!).

س ۱۱. آیا توصیهٔ خاصی برای هم سن و سالهای خود دارید؟

ج ۱۱. همان طور که گفتم، به علایق خود بپردازند و از قیودی که ممکن است اجتماع در خلاف مسیر حرکتشان ایجاد کند، نهراسند. درمورد علایق خود، موفقیت‌های ظاهری ومقطعی خود را دخیل نکنند و از پرداختن به مسائل خیلی جزئی که صرف محو شدن تصویر کلی مسیر مطالعاتیشان می‌شود جداً خودداری کنند. علی‌الخصوص مباداکه المپیاد سبب ایجاد تب مسأله در آنان شود و این مسألهٔ کوچك (المپیاد) را هدف خود قرار دهند، معضلی که خودم از آن رنج می‌برم و به دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی توصیه می‌کنم که دچار آن نشوند، این است که قبل از ورود به دانشگاه، از دانشگاه بی‌خبر نباشد. بعضی اوقات امکانات بسیار خوبی برای پیشرفت در دانشگاهها فراهم است که از آنها غفلت می‌شود. از قبیل: کتابخانه‌ها و سمینارهایی تخصصی که بعضی اوقات برپا می‌شود. اگر از هیچ‌کدام از این امکانات هم استفاده نکردند، حداقل در مورد دروس دانشگاهی و عناوین دروس رشتهٔ ریاضی، با دانشجویان یا استادان دانشگاه مشورت کنند وسعی کنند که خط مطالعاتی خود را با توجه به توصیه‌های آنان تنظیم کنند.

حل مسائل چهل و نهمین مسابقه ریاضی پاتنام

ترجمه و تنظیم از: محمود نصیری

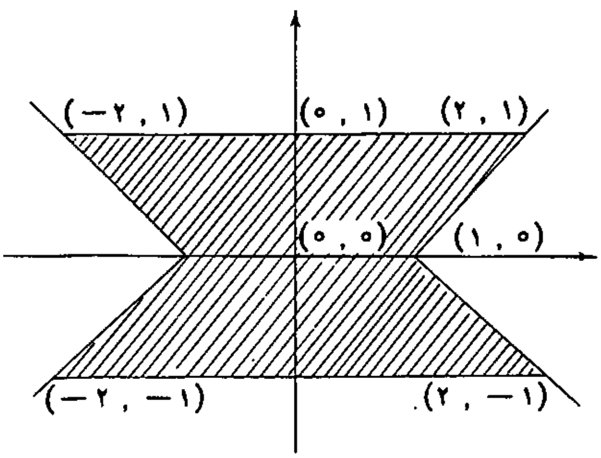
۱–A. فرض‌کنید R ناحیه‌ای متشکل از نقاط $(x\ ,\ y)$ درصفحه مختصات دکارتی باشدکه در دو رابطه

$$|x|-|y| \leqslant ۱ \quad \text{و} \quad |y| \leqslant ۱$$

صدق می‌کند. ناحیه R و مساحت‌آن را پیداکنید.

حل. قسمتی از R که در ربع اول است به‌خطهای $x = ۰$ و $y = ۰$ ، $x-y = ۱$ و $y = ۱$ محدود است.
این قسمت یك ذوزنقه است که مختصات رئوس‌آن $(۰\ ,\ ۰)$، $(۱\ ,\ ۰)$، $(۲\ ,\ ۱)$ و $(۰\ ,\ ۱)$ است. لـذا مساحت این قسمت برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

چون وقتی‌که $(x\ ,\ y)$ در R باشدآنگاه $(\pm x\ ,\ \pm y)$ نیز در R است.
قسمت در سایر ناحیه‌هـا به به کار بردن تقارن نسبت بـه



محورها و مبدأ به دست می‌آید، و درنتیجه، مساحت R، ۶ است.

A-۲. یك اشتباه غیر عادی حسابان نیست که باور داشته باشیم که قاعده مشتق حاصلضرب دو تابع می گوید

$$(fg)'=f'g'$$

اگر $f(x)=e^{x^2}$، با برهان تعیین کنید، که یك بازهٔ باز $(a\ ,\ b)$ و یك تابع ناصفر g بر $(a\ ,\ b)$ وجود دارند به طوری که این قاعده نادرست، مشتق حاصلضرب به ازای هر x در بازه $(a\ ,\ b)$ درست است.

حل. تابع g با ضابطهٔ

$$g(x)=e^x\sqrt{2x-1}$$

به ازای $\frac{1}{2}<a<x<b$ دارای خاصیت مطلوب است
و

$$g(x)=e^x\sqrt{1-2x}$$

به ازای $a<x<b<\frac{1}{2}$ دارای خاصیت فوق است.

برای نتیجه گیری فرض کنید $y=g(x)$ درمعادله دیفرانسیل $(e^{x^2}y)'=(e^{x^2})'y'$ صدق کند. با توجه به این که اگر $y=e^u$ آنگاه $y'=u'e^u$ داریم،

$$2xe^{x^2}y+y'e^{x^2}=2xe^{x^2}y'$$

که به معادله دیفرانسیل $2xy+y'=2xy'$ تقلیل می‌یابد، که به صورت زیر تجزیه می‌شود،

$$\frac{2x\,dx}{2x-1}=\frac{dy}{y}$$

اکنون با توجه به آنکه

$$\int\frac{du}{u}=ln|u|+c$$

چنین داریم؛

$$ln|y|=x+\frac{1}{2}ln|1-2x|+c$$

که C مقدار ثابت دلخواهی است.

اگر $\frac{1}{2}<a<x<b$، در این صورت

$$y=g(x)=ke^x\sqrt{2x-1}.$$

که k عدد حقیقی مثبت دلخواهی است.

اگر $a<x<b<\frac{1}{2}$، در این صورت

$$y=g(x)=ke^x\sqrt{1-2x}.$$

A-۳. با برهان، مجموعه اعداد حقیقی x را که به ازای آنها $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\csc\frac{1}{n}-1\right)^x$ همگرا باشد، تعیین کنید.

حل. فرض کنیم

$$a_n=\frac{1}{n}\,cosec\,\frac{1}{n}-1$$

آنگاه، بنا به بسط،

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

داریم،

$$a_n=\frac{1}{n\sin\frac{1}{n}}-1$$

$$=\frac{1}{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+\frac{1}{120n^5}-\cdots\right)}-1$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{6n^2}+\frac{1}{120n^4}+\cdots}-1$$

$$=1+\frac{1}{6n^2}+\frac{1}{n^2}g(n)-1$$

$$=\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{6}+g(n)\right)$$

که درآن، وقتی $n\to\infty$ آنگاه $g(n)\to 0$ بنابراین، اعداد حقیقی مثبت c، d و N وجود دارند بطوری که، به ازای هر $n>N$،

$$\frac{c}{n^2}\leqslant a_n\leqslant\frac{d}{n^2}$$

با به کاربردن آزمون مقایسه و p — آزمون درمی‌یابیم که به ازای هر $x>\frac{1}{2}$، Σa_n^x همگرا و به ازای $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ واگرا است.

اما به سادگی مشاهده می‌شود که این‌سری به‌ازای $x\leqslant 0$ واگرا است.

بنابراین جواب

$$\left\{x|x>\frac{1}{2}\right\}$$

است.

۴-A. (a) اگر هر نقطه یك صفحه با یکی از سه رنگ متمایز رنگ‌آمیزی شود، آیا لازم است دونقطه همرنگ با فاصله دقیقاً یك اینچ ازهم وجود داشته باشد؟

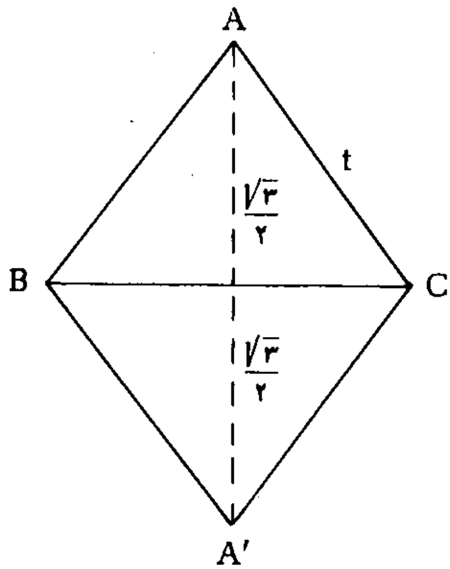
(b) اگر «۳» با «۹» جایگزین شود، چگونه است. جواب خود را محقق کنید.

حل. (a) جواب مثبت است. برای اثبات فرض کنید A نقطه دلخواهی درصفحه باشد. و ABC مثلث متساوی‌الاضلاع دلخواهی به ضلع واحد باشد. (که در آن واحدها اینچ هستند) که A روی یکی از رأسهای آن قرار دارد.

اگر هر دو نقطه A، B و C همرنگ باشند، ساختن تمام است.

اگر چنین نباشد، فرض کنید A' قرینه A نسبت به خط BC باشد. اگر A' با یکی از B یا C همرنگ باشد آنگاه ساختن تمام است.

اگر چنین نباشد، آنگاه A و A' دارای رنگهای یکسان می‌باشند. توجه کنید که فاصله A و A' برابر $\sqrt{۳}$ است (قطر بزرگ یك لوزی به ضلع واحد)،



شکل (۱)

درحقیقت هردو نقطه به فاصله $\sqrt{۳}$ از یکدیگر می‌توانند با ساختن یك مثلث متساوی‌الاضلاع به‌ضلع واحد وسپس پیدا کردن قرینه رأس‌آن نسبت به ضلع مقابل رأس به دست آیند. شکل (۱).

نتیجه‌ای که به این ترتیب به دست آید نتیجه می‌دهد که برای هرنقطه اولیه A، یا هریك از **مثلث‌های متساوی‌اضلاع** یا، قرینه آن که ساخته می‌شود با رئوس‌دیگر آنها یعنی B و C جواب مسأله را به‌دست می‌دهد، یا درغیر این صورت هر نقطه که به فاصله $\sqrt{۳}$ از A قرار دارد با A دارای رنگ یکسان است. مجموعه نقاطی مانند A'، که به فاصله $\sqrt{۳}$ از A می‌باشند، روی دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۳}$ واقع‌اند؛ لذا هروتر به طول واحد دراین دایره، یك زوج نقطه را به دست می‌دهد که دارای رنگ یکسان و دقیقاً به فاصله یك اینچ از هم قرار دارند.

(b) جواب منفی است.

برای اثبات، صفحه را با مربعهای به طول اضلاع برابر می‌پوشانیم که طول ضلع آنها طوری انتخاب می‌شوند که طول قطر هر مربع نزدیك به ۱ باشد ولی برابر یك نباشد. مثلاً طول قطر آنها برابر ۰/۹ باشد.

اگر این طول را به کار ببریم آنگاه طول ضلع هر مربع برابر $\frac{۰/۹}{\sqrt{۲}}$ است، که از ۰/۶۳ بزرگتر است. یك مربع‌را با رنگ شماره یك رنگ می‌کنیم، و هشت مربع مجاورآن‌را با رنگهای شماره ۲ تا شماره ۹ رنگ می‌کنیم.

۷	۸	۹
۶	۱	۲
۵	۴	۳

سپس این عمل را در سرتاسر صفحه ادامه می‌دهیم! طرح نقشه رنگی از مربع بزرگ (شامل نه مربع کوچك) به دست

می‌آید.

(برای مقصود اخیر این که چه قرار داد سازگاری برای مرزهای مربعها برقرار باشد اهمیتی ندارد. یك امکان این است که مرزهای پائینی و چپ هر مربع همان رنگ قسمت داخلی مربع را داشته باشد.)

نتیجه اینکه صفحه با نه رنگ، رنگ‌آمیزی شده است که هیچ دو نقطه همرنگ با فاصله دقیقاً یك اینچ نداریم. در حقیقت، برای هر نقطه نقاط همرنگ آن یا در فاصله کمتر از ۰/۹ اینچ و یا درفاصله بیشتر از $۲\times ۰/۶۳ = ۱/۲۶$ اینچ از آن قرار دارند.

A–۵. ثابت کنید یك تابع منحصر به‌فرد f ازمجموعه R^+ (اعداد حقیقی مثبت) به R^+ وجود دارد بطوری که

$$f(f(x)) = ۶x - f(x)$$

و به ازای هر $x > ۰$ ، $f(x) > ۰$.

حل. برای هر $x > ۰$ دلخواه، فرض کنید $a_۰$ ، $a_۱$ ، $a_۲$ ، ... به صورت زیر تعریف شود.

$$a_۰ = x \quad \text{و} \quad a_{n+۱} = f(a_n).$$

آنگاه به ازای $n = ۰ , ۱ , ۲ , \cdots$

$$a_{n+۲} + a_{n+۱} - ۶a_n = ۰.$$

ریشه‌های مشخصه این معادله تفاضلی ۲ و ۳− می‌باشند.

بنابراین k و Cای وجود دارد بطوری که

$$a_n = (-۳)^n C + ۲^n k.$$

چون به ازای هر n

$$a_{n+۱} = f(a_n) > ۰$$

باید $C = ۰$ و بنابراین $f(x) = ۲x$.

این تابع منحصربه‌فرد f در شرایط مسأله صدق می‌کندچون

$$f(f(x)) = f(۲x) = ۴x = ۶x - f(x)$$

و برای $x > ۰$،

$$f(x) = ۲x > ۰.$$

A–۶. اگر یك تبدیل خطی A روی یك فضای برداری n بعدی دارای $n+۱$ بردار ویژه باشد بطوری که هر nتای آنها مستقل خطی‌اند آیا آن نتیجه می‌دهد که A یك مضرب عددی تبدیل همانی است؟ پاسخ خود را ثابت کنید.

حل. بلی، A باید یك مضرب عددی همانی باشد. فرض کنید

$$x_۱ , x_۲ , \cdots , x_n , x_{n+۱}$$

بردارهای ویژه A باشند بطوری که هر nتای آنها مستقل خطی، با مقادیر ویژه متناظر

$$\lambda_۱ , \lambda_۲ , \cdots , \lambda_n , \lambda_{n+۱}.$$

هستند. چون هر n تا از xها مستقل خطی‌اند، نتیجه می گیریم که n تا ازآنها تمام فضا را تولید می‌کنند.

از این‌رو، هر x یك ترکیب خطی از بقیه است؛ بویژه

$$x_{n+۱} = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i x_i .$$

توجه داریم که هیچ یك از αها صفر نیست. به دلیل آن که: اگر $\alpha_i = ۰$، آنگاه x_i نظیر آن در مجموعه

$$\{x_۱ , x_۲ , \cdots , x_n , x_{n+۱}\}$$

وابسته خطی است.

A را در این معادله به کار می‌بریم به دست می‌آید

$$Ax_{n+۱} = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i$$

از طرف دیگر، چون

$$Ax_{n+۱} = \lambda_{n+۱} x_{n+۱} = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \lambda_{n+۱} x_i$$

ازمستقل خطی بودن $\{x_۱ , x_۲ , \cdots , x_n\}$ به‌دست می‌آید که به ازای هر $i = ۱ , ۲ , \cdots , n$

$$\alpha_i \lambda_i = \alpha_i \lambda_{n+۱}.$$

چون $\alpha_i \neq ۰$، ازآن نتیجه می گیریم که به ازای هر $i = ۱ , ۲ , \cdots , n$ ،

$$\lambda_{n+۱} = \lambda_i .$$

B–۱. عدد مرکب (صحیح و مثبت) به‌صورت حاصلضرب ab است که a و b اعداد صحیح نه ضرورتاً متمایز از مجموعهٔ $\{۲ , ۳ , ۴ , \cdots\}$ هستند.

نشان دهید هر عدد مرکب به صورت، $xy + xz + yz + ۱$ قابل نمایش است، که x و y و z اعداد صحیح و مثبت‌اند.

حل. فرض کنید $z = ۱$، داریم

$$xy + xz + yz + ۱ = xy + x + y + ۱ = (x+۱)(y+۱)$$

و این وقتی x و y اعداد صحیح و مثبت را اختیار کنند کلیه اعداد مرکب، صحیح و مثبت را به دست می‌دهد.

B–۲. ثابت یا ردکنید: اگر x و y اعداد حقیقی باشند،

به طوری که

$$y(y+1) \leqslant (x+1)^2 \quad \text{و} \quad y \geqslant 0$$

آنگاه

$$y(y-1) \leqslant x^2 .$$

حل.

روش اول - اگر $x \leqslant y-\frac{1}{2}$، آنگاه

$$y^2-y \leqslant x^2+2x+1-2y \leqslant x^2$$

یا

$$y(y-1) \leqslant x^2$$

اگر

$$x \geqslant y-\frac{1}{2} \geqslant 0$$

آنگاه

$$y^2-y < y^2-y+\frac{1}{4} \leqslant x^2$$

یا

$$y(y-1) \leqslant x^2$$

اگر

$$0 \leqslant y < \frac{1}{2}$$

آنگاه

$$y(y-1) \leqslant 0 \leqslant x^2$$

یا

$$y(y-1) \leqslant x^2$$

روش دوم - اگر $0 \leqslant y \leqslant 1$ نامساوی ثابت است، بنابراین فرض می‌کنیم $y > 1$.

اگر

$$(x+1)^2 \geqslant y(y+1)$$

می‌توانیم فرض کنیم $x > 0$، و بنابراین

$$x \geqslant \sqrt{y(y+1)}-1 \geqslant \sqrt{y(y-1)}$$

در نتیجه،

$$x^2 \geqslant y(y-1).$$

زیرا بنابه نامساوی

$$\sqrt{ab}+1 \leqslant \sqrt{(a+1)(b+1)}$$

که درآن a و b اعداد حقیقی مثبت‌اند (با به توان رساندن به نامساوی واسطه حسابی وهندسی منجر می‌شود) چنین داریم؛

$$\sqrt{y(y-1)}+1 \leqslant \sqrt{(y+1)(y-1+1)} = \sqrt{(y+1)y}.$$

۳-B. برای هر n در مجموعه

$$Z^+=\{1, 2, \cdots\}$$

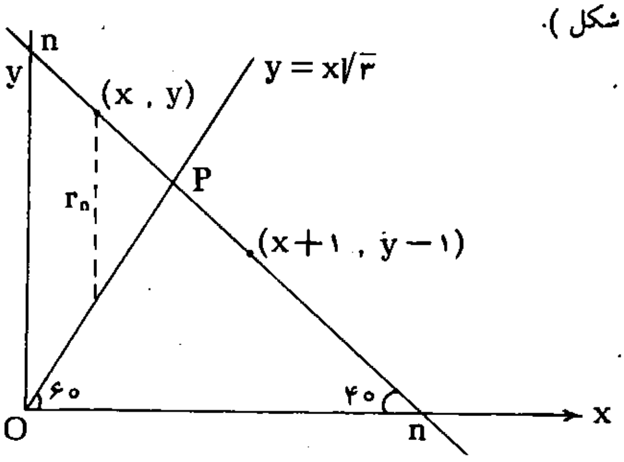
ازاعداد صحیح مثبت، فرض کنیم r_n مقدار مینیمم $|y-x\sqrt{3}|$ برای تمام اعداد صحیح ونامنفی x و y باشدکه $x+y=n$. با دلیل کوچکترین عدد حقیقی و مثبت g ای را بیابید که به ازای هر n داشته باشیم $r_n \leqslant g$.

حل.

روش اول - عدد $|y-x\sqrt{3}|$ دو برابر فاصله عمودی نقطه (x, y) از خط $L_1: y=x\sqrt{3}$ است.

فرض کنیم (x, y) و $(x+1, y-1)$ دونقطه مشبک (دونقطه متوالی بامختصات صحیح) روی خط $L_2: x+y=n$، در دو طرف خط L_1 باشند.

فرض کنیم a مینیمم فاصله (x, y) و $(x+1, y-1)$ از نقطه P باشدکه P نقطه تقاطع L_1 و L_2 است. (مطابق شکل).



سپس

$$r_n = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \text{،} \quad \text{و} \quad a \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \text{،}$$

بنابراین

$$r_n \leqslant \frac{(1+\sqrt{3})}{2} = g.$$

اگــر چه اعداد به فرم $\dfrac{y-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}$ در مجموعه اعــداد حقیقی مثبت چگال هستند وهمچنین هر مقدار دلخواهی را درنزدیکی $\sqrt{3}$ می‌گیرند، نقطه وسط $\left(x+\frac{1}{2}\,,\,y-\frac{1}{2}\right)$ می‌تواندبه هر مقدار دلخواهی به P نزدیك باشد و بنابراین a می‌تواند به هر اندازه دلخواهی به $\frac{\sqrt{2}}{2}$ نزدیك باشد. لذا r_n می‌تواند به هر اندازه دلخواه به g نزدیك باشد.

روش دوم - فرض‌کنیم

$$g = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

چون به ازاء هر مقدار ثابت n دنباله

$$n\,,\,n-1-\sqrt{3}\,,\,n-2-\sqrt{3}\,,\,\cdots\,,\,-n\sqrt{3}$$

یك دنباله تصاعد عددی با قدر نسبت $-2g$ است، لذا جمله منحصر به‌فردی مانند x_n از این دنباله وجود دارد به طوری که، $-g < x_n < g$.

واضح است‌که $r_n = |x_n|$.

فرض‌کنیم $\varepsilon > 0$. بنابه اصل لانه‌کبوتری(اصل حجره‌ها)، اعداد a و b که $a \neq b$ وجود دارند به طوری‌که

$$|x_a - x_b| < \varepsilon.$$

فرض‌کنیم

$$t = |a-b|.$$

در دنبالــه $r_t\,,\,r_{2t}\,,\,r_{3t}\,,\,\cdots$ یك r_{kt} وجــود دارد به طوری‌که $g-\varepsilon < r_{kt} \leqslant g$. بنابراین g کوچکترین کران بالای r_n است.

B-۴. ثابت‌کنید اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ یك سری همگرا ازاعداد حقیقی مثبت باشد،آنگاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{n}{n+1}}$ نیز چنین است.

حل. فرض‌کنیم

$$S = \left\{ n : a_n^{\frac{n}{n+1}} < 2a_n \right\}.$$

اگر

$$n \notin S\text{،}\quad a_n^{\frac{n}{n+1}} \geqslant 2a_n \quad \text{یا} \quad a_n^{\frac{n}{n+1}-1} \geqslant 2$$

در نتیجه

$$a_n^{-\frac{1}{n+1}} \geqslant 2 \quad \text{یا} \quad a_n^{\frac{n}{n+1}} \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

لذا به دست می‌آید

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{n}{n+1}} \leqslant \sum_{n\in S} a_n^{\frac{n}{n+1}} + \sum_{n\notin S} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

زیـرا $\sum\limits_{n\notin S} \frac{1}{2^n}$ همگرا و همچنین به ازاء هر

$$n\in S\text{،}\quad \sum_{n\in S} a_n^{\frac{n}{n+1}} < \sum_{n\in S} 2a_n$$

که باتوجه به فرض $\sum\limits_{n\in S} a_n^{\frac{n}{n+1}}$ نیز همگرا می‌باشد.

B-۵. برای عدد صحیح و مثبت n، فرض‌کنیم M_n یك مـــاتریس متقارن چپ (مـــاتـــریس ضد تقارن) از مـــرتبه $(2n+1)\times(2n+1)$ باشد به‌طوری هر درایه روی اولین n قطر فرعی، زیر قطر اصلی، برابر ۱ و باقی مانده درایه‌های زیر قطر اصلی برابر ۱- باشند. رتبه M_n را با اثبات پیدا کنید. (طبق تعریف رتبه یك مـــاتریس بـــزرگترین مقدار K است به طوری‌که یك زیرماتریس $K\times K$ وجود داشته باشد که دترمینان‌آن مخالف صفر باشد)

در ذیل دو نمونه از ماتریس M_n نشان داده شده است.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

حل. در M_n، مجموع درایه‌های هـــر سطر (یا هر ستون) برابر صفر است. بنابراین،

$$\det M_n = |M_n| = 0$$

و لذا رتبه M_n کوچکتر از $2n+1$ است.

فرض‌کنیم S ماتریسی باشدکه از حذف سطر iم و ستون iم ماتریس M_n به دست می‌آید.

درایه‌های روی قطر اصلی S صفر و بقیه درایه‌های آن ۱+ یا ۱− است. بنابراین دترمینان S برابر مجموع جمله‌هایی است که، هرکدام برابر ۱ ± است، که متناظر هریك از d_{2n} بهم ریختگی از 2n شی یك جمله متناظر شده است.

می‌دانیم فرمولهای شامل d_m

$$d_m=m!\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{m!}\right)$$

$$(5)\quad d_m=(-1)^m(1-m+m(m-1)-m(m-1)(m-2)+\cdots)$$

$$(2)\quad d_m=md_{m-1}+(-1)^m$$

$$(3)\quad d_m=(m-1)(d_{m-1}+d_{m-2})$$

با به کاربردن هریك از (۱) و (۲) یا (۳) به‌آسانی مشاهده می‌کنیم که وقتی m زوج است d_m فرد می‌باشد، به عنوان مثال d_{2n} فرد است. این بیان می‌کند که دترمینان S یك عدد صحیح فرد است و بنابراین صفر نیست. لذا رتبه M_n برابر 2n است.

۶-B. ثابت‌کنید تعداد نامتناهی زوجهای مرتب (a, b) از اعداد صحیح وجود دارد به طوری‌که برای هرعدد صحیح مثبت t عدد $at+b$ یك عدد مثلثی است اگر و فقط اگر t یك عدد مثلثی باشد.

حل.

روش اول - مجموعه نامتناهی

$$\left((2m+1)^2 \quad \text{و} \quad \frac{m(m+1)}{2}\right)$$

برای $m=1, 2, \cdots$ دارای خواص مورد نظر می‌باشد

اثبات از طرف اول، اگر $t=\frac{n(n+1)}{2}$ یك عدد مثلثی باشد، آنگاه

$$at+b=(2m+1)^2\frac{n(n+1)}{2}+\frac{m(m+1)}{2}$$

$$=\frac{(2mn+m+n)(2mn+m+n+1)}{2}.$$

یعنی $at+b$ یك عدد مثلثی است.

اثبات از طرف دوم، فرض‌کنیم x عدد صحیحی باشدکه $ax+b$ مثلثی است یعنی؛

$$(2m+1)^2x+\frac{m(m+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

برای بعضی اعداد صحیح و مثبت n.

دراین صورت

$$x=\frac{n(n+1)-m(m+1)}{2(2m+1)^2}$$

$$=\frac{(n^2-m^2+(n-m)}{2(2m+1)^2}$$

$$=\frac{(n-m)(n+m+1)}{2(2m+1)^2}$$

درصورت تفاضل عـاملهـای $n+m+1$ و $n-m$ برابر $2m+1$ است و چون x عددی صحیح است لذا $2m+1$ هر یك از عاملهای $n-m$ و $n+m+1$ را عاد مـی‌کند پس‌از تفکیك این‌کسر به دو عامل

$$\frac{n+m+1}{2m+1} \quad \text{و} \quad \frac{n-m}{2m+1}$$

مشخص است‌کـه تفاضل‌آن دو برابر ۱ و لذا x عـدد مثلثی است.

روش دوم - فرض‌کنیم

$$t_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

یك عدد مثلثی باشد. به سادگی مشخص است‌که

$$t_{3n+1}=1+9t_n.$$

و

$$t_{3n}\equiv t_{3n+2}\equiv 0\pmod{3}.$$

از این نتیجه می‌گیریم $(1, 9)$ یکـی از این زوج‌هـای مرتب است. اگر اعداد a_m و b_m را به صورت زیر تعریف کنیم

$$f(x)=9x+1$$

و

$$f(9x+1)=a_2x+b_2, \cdots$$

و

$$f(a_m+b_m)=a_{m+1}x+b_{m+1}$$

به‌کمک استقراء روی m به‌سادگی ثابت می‌شود که $(a_m\ ,\ b_m)$ به ازاء $m=۲\ ,\ ۳\ ,\ \cdots$ دارای خاصیت مطلوب است.

روش سوم - نشان می‌دهیم زوج مرتب‌های $(۸t_r+۱\ ,\ t_r)$ دارای خواص مطلوب است.

فرض کنیم

$$T=\{۰\ ,\ ۱\ ,\ ۳\ ,\ ۶\ ,\ \cdots\}$$

مجموعه اعداد مثلثی و

$$Q=\{۱\ ,\ ۹\ ,\ ۲۵\ ,\ ۴۹\ ,\ \cdots\}$$

مجموعه مربع اعداد صحیح و فرد باشند.

از معادله

$$(۲n+۱)^۲=۸\left(\frac{n^۲+n}{۲}\right)+۱$$

نتیجه می‌گیریم t در T است اگر و فقط اگر $۸t+۱$ در Q باشد.

فرض کنیم

$$t_r=\frac{r(r+۱)}{۲}$$

در T باشد و $q=۸t_r+۱$.

الف - فرض کنیم t در T باشد. چون Q نسبت به عمل ضرب بسته است و $۸t+۱$ در Q است، مشاهده می‌کنیم

$$\begin{aligned} q(۸t+۱)&=۸qt+q=۸qt+۸t_r+۱\\ &=۸(qt+t_r)+۱ \end{aligned}$$

نیز در Q است و بنابراین $qt+t_r$ در T است.

ب - فرض کنیم t عددی صحیح و $qt+t_r$ در T باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} ۸(qt+t_r)+۱&=۸[(۸t_r+۱)+t_r]+۱\\ &=(۸t_r+۱)\,(۸t+۱) \end{aligned}$$

نیز در Q است.

چون $(۸t+۱)$ عددی صحیح و خارج قسمت مربعات در Q است، نتیجه می‌گیریم $۸t+۱$ خودش نیز در Q است. بنابراین t در T است. این اثبات را کامل می‌کند.

ترکیب و بستار نسبتها و ماتریسهای بولی

دکتر علیرضا جمالی
عضو هیئت علمی دانشگاه تربیت معلم

۱. مقدمه

در این مقاله ابتدا نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان به یک نسبت مانند R از مجموعهٔ A در مجموعهٔ B ماتریسی - موسوم به ماتریس بولی - نظیر کرد. سپس ترکیب نسبتها را بر حسب ضرب این ماتریسها، به‌معنایی که خواهد آمد، بیان خواهیم کرد. بعضی از خواص نسبتها را به کمک ماتریسهای بولی به خواص متناظر آنها در ماتریسها تبدیل می‌کنیم. بالاخره هرگاه R یک نسبت دلخواه در مجموعه‌ای متناهی مانند A باشد، روشی را برای تعیین کوچکترین نسبتی هم‌ارزی در A که حاوی R باشد ارائه خواهیم داد.

۲. نسبتها و ترکیب آنها

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند. در این صورت R را یک نسبت از A در B گوییم هرگاه $R\subseteq A\times B$. هرگاه $A=B$ گوییم R یک نسبت در A است. معمولاً برای نشان‌دادن $(x,y)\in R$، علامت xRy را به‌کار می‌بریم و آن را چنین می‌خوانیم: «x نسبت R به y دارد». فرض کنیم R نسبتی در A باشد. R را در A منعکس نامیم هرگاه بازاء هر a از A، aRa. R را در A متقارن گوییم در صورتی که بازاء هر x و y از A اگر xRy آنگاه yRx. بالاخره R را در A متعدی خوانیم در صورتی که بازاء هر x، y، و z از A اگر xRy و yRz آنگاه xRz.

اینک فرض می‌کنیم R نسبتی از مجموعهٔ متناهی A در مجموعهٔ متناهی B باشد. ماتریسی متشکل از $|A|$ سطر و $|B|$ ستون تشکیل می‌دهیم: سطرها و ستونها را با درج اعضای A و B به صورت ذیل مشخص می‌کنیم

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{array} \begin{array}{c} b_1 \cdots\cdots b_m \\ \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{array}\right] \end{array},$$

که در آن $A=\{a_1,\dots,a_n\}$، $B=\{b_1,\dots,b_m\}$، و $|A|$، $|B|$ بترتیب تعداد اعضای A و B هستند. اینک درایه‌های ماتریس را به طریق زیر ۰ یا ۱ می‌گیریم: اگر $(a_i,b_j)\in R$ آنگاه درایهٔ واقع در سطر متناظر با a_i و ستون متناظر با b_j را ۱، و در غیر این صورت آن را ۰ می‌گیریم. ماتریس حاصل را ماتریس بولی نسبت R می‌خوانیم و آن را با $M(R)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱- هرگاه $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$، $B=\{a,b,c\}$، و $R=\{(۱,a),(۲,a),(۲,c),(۳,a),(۳,b),(۴,a),(۴,b),(۴,c),(۵,b)\}$، آنگاه

$$M(R)=\begin{array}{c} \\ ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \\ ۵ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{array}\right]\end{array}.$$

بعد از این جهت اختصار از نوشتن a_iها در مقابل سطرها و b_jها در مقابل ستونهای ماتریسهای بولی صرف نظر خواهیم کرد.

مثال ۲. فرض کنیم $A=\{۱,۲,۳,۴\}$. نسبتهای $R_۱$، $R_۲$، $R_۳$، و $R_۴$ را در A چنین تعریف می‌کنیم:

(آ) $mR_۱n \iff m<n$؛

(ب) $mR_۲n \iff |m-n|\leqslant ۱$؛

(پ) $mR_۳n \iff m\equiv n(mod\ ۳)$؛

(ت) $mR_۴n \iff m=n$.

در این صورت،

$$M(R_۱)=\begin{bmatrix} ۰&۱&۱&۱\\ ۰&۰&۱&۱\\ ۰&۰&۰&۱\\ ۰&۰&۰&۰ \end{bmatrix},\quad M(R_۲)=\begin{bmatrix} ۱&۱&۰&۰\\ ۱&۱&۱&۰\\ ۰&۱&۱&۱\\ ۰&۰&۱&۱ \end{bmatrix},$$

$$M(R_۳)=\begin{bmatrix} ۱&۰&۰&۱\\ ۰&۱&۰&۰\\ ۰&۰&۱&۰\\ ۱&۰&۰&۱ \end{bmatrix},\quad M(R_۴)=\begin{bmatrix} ۱&۰&۰&۰\\ ۰&۱&۰&۰\\ ۰&۰&۱&۰\\ ۰&۰&۰&۱ \end{bmatrix},$$

اگر R نسبتی از A در B و S نسبتی از B در C باشد، حاصلضرب نسبی R در S که $S\circ R$ (یا RS) نامیده می‌شود، بنا بر تعریف عبارتست از نسبت

$RS=S\circ R=\{(x,z)\in A\times C \mid$ yی از B هست که xRy و $ySz\}$.

در صورتی که R نسبتی در A باشد، RR را با $R^۲$ نشان می‌دهیم. به‌همین ترتیب می‌توان، به‌استقراء، R^n را، که در آن n یک عدد طبیعی دلخواه است، تعریف کرد. مطابق تعریف $R^{-۱}$ یعنی $\{(y,x)\mid(x,y)\in R\}$.

بسادگی می‌توان ملاحظه کرد که حاصلضرب نسبی نسبتها شرکت‌پذیر است. به عبارت دیگر، هرگاه T هم نسبتی از C در D باشد آنگاه

$$R(ST)=(RS)T.$$

ذیلاً در حالتی که مجموعه‌ها متناهی‌اند، سعی می‌کنیم که حاصلضرب نسبی نسبتها را به‌کمک ماتریسهای بولی متناظر آنها بیان کنیم. این کار را، برای آماده کردن ذهن، با مثال زیر شروع می‌کنیم.

مثال ۳. فرض کنیم $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$، $B=\{a,b,c\}$، و $C=\{e,f,g,h\}$، و

$R_۱=\{(۱,a),(۲,a),(۲,c),(۳,a),(۳,b),(۴,a),(۴,b),(۴,c),(۵,b)\}$,

$R_۲=\{(a,e),(a,g),(b,f),(b,g),(b,h),(c,e),(c,g),(c,h)\}$.

در این صورت

$R_۱R_۲=R_۲\circ R_۱=\{(۱,e),(۱,g),(۲,e),(۲,g),(۲,h),(۳,e),(۳,f),(۳,g),(۳,h),(۴,e),(۴,f),(۴,g),(۴,h),(۵,f),(۵,g),(۵,h)\}$.

و

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix},\qquad M(R_2)=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&0\end{bmatrix},$$

$$M(R_1R_2)=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}.$$

آیا ماتریس اخیر را بدون به‌دست آوردن R_1R_2، مستقیماً، می‌توان از ماتریسهـای بولی R_1 و R_2 بدست آورد؟ جواب مثبت است. می‌توان این کار را با ضرب ماتریسهای $M(R_1)$ و $M(R_2)$ به‌دست آورد مشروط بر اینکه به‌جای عمل ضرب و عمل جمع معمولی اعمـال بولی ∧ و ∨ را که در جداول زیر مشخص شده‌اند به‌کار برد:

∨	۰	۱
۰	۰	۱
۱	۱	۱

∧	۰	۱
۰	۰	۰
۱	۰	۱

مثلاً ملاحظه کنید در مثال فوق اولین درایهٔ حاصل از ضرب دو ماتریس $M(R_1)$ و $M(R_2)$ چنین است:

$$(1\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(0\wedge 1)=1\vee 0\vee 0=1.$$

بنابراین قضیهٔ ذیل را داریم:

قضیهٔ ۱ . فرض‌کنیم R_1 نسبتی از A در B و R_2 نسبتی از B در C باشد که در آن A، B، و C مجموعه‌هایی متناهی‌اند. در این صورت، با اعمال بولی،

$$M(R_1)M(R_2)=M(R_1R_2)$$

همچنین بسادگی دیده می‌شود که

قضیهٔ ۲ . فرض‌کنیم A مجموعه‌ای با n عضو باشد. در این صورت تناظری ۱ـ۱ بین $\mathcal{P}(A\times A)$ (مجموعهٔ همهٔ نسبتهـا در A) و مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای بولی $n\times n$ (ماتریسهایی که درایه‌های آنها یا ۰ است یا ۱) برقراراست. این تناظرحافظ عمل است؛ یعنی، هرگاه R_1، R_2، و R نسبتهایی در A با ماتریسهای بولی $M(R_1)$، $M(R_2)$، و $M(R)$ باشند آنگـاه فقط و فقط وقتی که $R_1R_2=R$. $M(R_1)M(R_2)=M(R)$

اینک فرض کنیم M_1 و M_2 دو ماتریس بولی $m\times n$ باشند. دراین صورت علامت $M_1\leqslant M_2$ را فقط وقتی به‌کارمی‌بریم که هر درایهٔ M_1 از درایهٔ متناظرش در M_2 نابیشتر باشد. با این قرارداد قضیهٔ سادهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ ۳ . فرض‌کنیم A و B دو مجموعهٔ متناهی‌و R_1، R_2 نسبتهایی از A در B باشند. در این صورت شرط لازم و کافی برای آنکه $R_1\subseteq R_2$ آنست که $M_1\leqslant M_2$.

بالاخره با اندکی تأمل قضیهٔ ذیل به ذهن متبادر می‌شود:

قضیهٔ ۴ . فرض کنیم R نسبتی در مجموعهٔ متناهی A باشد. در این‌صورت

(آ) شرط لازم و کافی برای آنکـه R منعکس باشد آنست که درایه‌های واقع بر قطر اصلی $M(R)$ جملگی ۱ باشند؛

(ب) شرط لازم و کافی برای آنکه R متقـارن باشد آنست که $M(R)=M(R)'$

(پ) شرط لازم و کافی برای آنکـه R متعدی بـاشد آنست که $M(R)M(R)\leqslant M(R)$.

(توضیح اینکه M' مبین ترانسپوزهٔ ماتریس M است.)

۳. نسبتها و بستار آنها

فرض کنیم R نسبتی در مجموعهٔ A باشد. در این صورت، این سؤال مطرح می‌شود که آیا کوچکترین نسبتی در A وجود دارد که حاوی R بوده و فلان خاصیت را داشته باشد. بالاخص، گاهی از اوقات لازم می‌آید که با مفروض بودن R کوچکترین نسبت هم‌ارزی را که حـاوی R است تعیین کنیم. در حالتی که مجموعهٔ A متناهی باشد، تعیین چنین نسبتی به‌کمک ماتریسهای بولی عملی آسان است.

ابتدا قرارداد می‌کنیم که کوچکترین نسبتهایی در A را که حاوی R بوده و منعکس، متقارن، و متعدی باشند بترتیب با $r(R)$، $s(R)$، و $t(R)$ نشاندهیم. همچنین جهت اختصار، مثلاً، $t(r(R))$ را به $tr(R)$ نشان خواهیم داد.

مثال ۴ . فرض کنیم R نسبتی در مجموعهٔ $\{1,2,3,4\}$ باشد که ماتریس بولی آن

$$M(R)=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

باشد. در این صورت

(آ) R منعکس نیست؛ زیـرا $(1,1)\notin R$ و $(4,4)\notin R$. بنابراین برای تعیین $r(R)$ کافی است این دو زوج را به R اضافه کنیم. پس

$$M(r(R))=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}.$$

(ب) نسبت R متقارن نیست؛ زیرا $(1,3)\in R$ ولی $(3,1)\notin R$. اگر $(3,1)$ را به R اضافه‌کنیم $s(R)$ به‌دست خواهدآمد. بنابراین

$$M(s(R))=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

(پ) نسبت R متعدی هم نیست؛ زیرا به عنوان مثال $(4,1)\in R$ و $(1,3)\in R$ ولی $(4,3)\notin R$. یافتن طرحی برای تعیین $t(R)$ (یا ماتریس بولی آن) مانند $r(R)$ و $s(R)$ ساده نیست. چون $4R1$ و $1R3$، $t(R)$ باید شامل $(4,3)$ هم باشد. بنابراین باید $(4,3)$ را نیز در $t(R)$ بیاوریم. در حالت کلی، اگر زنجیری از x به y موجود باشد، یعنی اعضایی مانند x_1، ...، x_{m-1} باشند بطوری که

$$xRx_1,\ x_1Rx_2,\ \dots,\ x_{m-1}Ry,$$

آنگاه (x,y) باید در $t(R)$ باشد. هرگاه زنجیری از x به y و نیز زنجیری از y به z موجود باشد آنگاه زنجیری از x به z موجود است. بنابراین مجموعهٔ همهٔ زوجهایی مانند (x,y) که به وسیلهٔ زنجیر بهم وصل شده‌اند یک نسبت متعدی است و همان $t(R)$ مطلوب، یعنی کوچکترین نسبت متعدی حاوی R، است.

قضیهٔ ذیل تا حدودی روشن است. قبل از آنکه برهان آن را بخوانید، در مورد برقراری آن قدری تأمل کنید.

قضیهٔ ۵. اگر R نسبتی در مجموعه‌ای مانند A باشد، آنگاه

(آ) شرط لازم و کافی برای آنکه $R=r(R)$ آنست که R منعکس باشد؛

(ب) شرط لازم و کافی برای آنکه $R=s(R)$ آنست که R متقارن باشد؛

(پ) شرط لازم و کافی برای آنکه $R=t(R)$ آنست که R متعدی باشد.

بعلاوه، $rr(R)=r(R)$، $ss(R)=s(R)$، و $tt(R)=t(R)$.

برهان. به عنوان نمونه حکم (آ) را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم R منعکس باشد. در این صورت روشن است که R کوچکترین نسبت منعکسی است که حاوی R می‌باشد. یعنی $R=r(R)$. بالعکس، درصورتی که $R=r(R)$، R منعکس است؛ زیرا $r(R)$ منعکس‌است. اینک‌چون $r(R)$ منعکس‌است، $rr(R)=r(R)$. ■

قضیهٔ آتیه صریحاً نسبتهای $r(R)$، $s(R)$، و $t(R)$ را مشخص می‌کند. این نسبتها را بترتیب بستار منعکس R، بستار متقارن R، و بستار متعدی R می‌نامیم.

قضیهٔ ۶. فرض کنیم R نسبتی در مجموعهٔ A باشد و $E=\{(x,x)|x\in A\}$. در این صورت،

(i) $r(R)=R\cup E$;

(ii) $s(R)=R\cup R^{-1}$;

(iii) $t(R)=\bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$.

برهان. احکام (i) و (ii) به‌سهولت ثابت می‌شوند. ذیلاً به‌اثبات حکم (iii) می‌پردازیم. ابتدا ثابت می‌کنیم‌که $S=\bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$ متعدی است. فرض کنیم x، y، و z در A باشند بطوری که $(x,y)\in S$ و $(y,z)\in S$. بنابراین اعدادی طبیعی مانند n و m موجودند که $(x,y)\in R^n$ و $(y,z)\in R^m$. بدیهی است که $(x,z)\in R^nR^m$، یعنی $(x,z)\in R^{n+m}$. بنابراین، $(x,z)\in S$. پس S متعدی است.

برای اثبات اینکه S کوچکترین نسبت متعدی است که حاوی R می‌باشد، فرض می‌کنیم R_1 نسبت متعدی دلخواهی که حاوی R است باشد. ثابت می‌کنیم که $S\subseteq R_1$. برای این منظور (به استقراء) ثابت می‌کنیم که $R^k\subseteq R_1$. حکم به‌ازاء $k=1$ بدیهی‌است. فرض‌کنیم حکم به‌ازاء عددطبیعی k برقرار باشد. داریم

$$R^{k+1}=R^kR\subseteq R_1R_1\subseteq R_1$$

(چون R_1 متعدی‌است، $R_1R_1\subseteq R_1$). حال چون به‌ازاء هر k طبیعی $R^k\subseteq R_1$، $S\subseteq R_1$. پس S کوچکترین نسبت‌متعدی‌است که حاوی R می‌باشد، و

$$t(R)=S=\bigcup_{k=1}^{\infty} R^k. \blacksquare$$

اینک سعی می‌کنیم در حالتی که A مجموعه‌ای متناهی است، مطالب فوق‌را به‌زبان ماتریسهای بولی بیان کنیم. ابتدا دو تعریف ساده را ذکر می‌کنیم. فرض کنیم $M_1=(a_{ij})$ و $M_2=(b_{ij})$ دو ماتریس بولی $n\times m$ باشند. در این صورت ماتریسهای بولی $M_1\vee M_2$ و $M_1\wedge M_2$ را به طریق ذیل تعریف می‌کنیم:

$M_1\vee M_2=(c_{ij})$ و $M_1\wedge M_2=(d_{ij})$

که در آن $c_{ij}=a_{ij}\vee(b_{ij}$ و $d_{ij}=a_{ij}\wedge b_{ij}$. به‌عنوان مثال، هرگاه

$$M_1=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\1&1&0&1\end{bmatrix},\qquad M_2=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&0\end{bmatrix},$$

آنگاه

$$M_1\vee M_2=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix},\quad M_1\wedge M_2=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

با خلاصه کردن نتایج فوق، به قضیهٔ زیر می‌رسیم:

قضیه ۷.

فرض کنیم R نسبتی در مجموعه n عضوی A باشد. در این صورت:

(i) $M(r(R))=M(R)\vee I$;

(ii) $M(s(R))=M(R)\vee M(R)'$;

(iii) $M(t(R))=M(R)\vee M(R)^2\vee\cdots\vee M(R)^n$;

که در آن I ماتریس واحد $n\times n$ است.

تبصره. اگر R نسبتی در مجموعه‌ای n عضوی مانند A باشد آنگاه

$$t(R)=\bigcup_{k=1}^{n} R^k$$ (ثابت کنید)

مثال ۵. در مثال ۴ ملاحظه کردیم که

$$M(r(R))=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix},M(s(R))=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

به‌سادگی ملاحظه می‌شود که:

$$M(sr(R))=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}=M(rs(R)).$$

این امر تصادفی نیست بلکه همواره چنین است (ثابت کنید).
بستار متعدی $rs(R)$ (یا $sr(R)$) از ماتریس بولی زیر حاصل می‌شود:

$$M(tsr(R))=M(trs(R))=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}.$$

نسبت متناظر این ماتریس بولی، یعنی $tsr(R)$، یک نسبت هم‌ارزی در $\{۱,۲,۳,۴\}$ است و دسته‌های هم‌ارزی آن عبارتند از $\{۲\}$ و $\{۱,۳,۴\}$.

مثال ۶. فرض کنیم R نسبتی در $\{۱,۲,۳\}$ با ماتریس بولی

$$M(R)=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

باشد. چون $M(R)^2=M(R)$، R متعدی است. نسبت $s(R)$ دارای ماتریس بولی

$$M(s(R))=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

است که متعدی نیست. به‌عنوان مثال، $(۲,۱)$ و $(۱,۳)$ در $s(R)$اند ولی $(۲,۳)$ در $s(R)$ نیست.

برای اثبات قضیهٔ اصلی (قضیهٔ ۸) به لم زیر نیاز داریم. اثبات آن ساده و به خواننده محول می‌شود.

لم. فرض کنیم R نسبتی در مجموعهٔ A باشد. در این صورت

(آ) اگر R منعکس باشد، آنگاه $s(R)$, $t(R)$ نیز چنین‌اند؛
(ب) اگر R متقارن باشد، آنگاه $r(R)$, $t(R)$ نیز چنین‌اند؛
(پ) اگر R متعدی باشد، $r(R)$ نیز چنین است.

قضیهٔ ذیل به سؤال اساسی ما که در ابتدای این مبحث مطرح شد پاسخ می‌دهد.

قضیهٔ ۸. اگر R نسبت دلخواهی در مجموعهٔ A باشد آنگاه $tsr(R)$ کوچکترین نسبت هم ارزی است که حاوی R می‌باشد.

برهان. چون $r(R)$ منعکس است، با به‌کار بستن (آ) لم، معلوم می‌شود که $tsr(R)$ منعکس است. چون $sr(R)$ متقارن است، با به کار بستن بند (ب) لم نتیجه می‌شود که $tsr(R)$ متقارن است. بالاخره $tsr(R)$ متعدی است، و بنابراین $tsr(R)$ یک نسبت هم‌ارزی در A است. حال فرض کنیم R_1 یک نسبت هم‌ارزی دلخواه در A باشد بطوری که $R\subseteq R_1$. در این صورت، $r(R)\subseteq r(R_1)=R_1$. از اینجا، $sr(R)\subseteq s(R_1)=R_1$ و بالاخره $tsr(R)\subseteq t(R_1)=R_1$. بنابراین $tsr(R)$ کوچکترین نسبت هم‌ارزی در A است که حاوی A می‌باشد.

مثال ۷. در مثال ۵، $tsr(R)$ که ماتریس بولی آن

$$\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$$

است کوچکترین نسبت هم‌ارزی حاوی R است.

مثال ۸. در مثال ۶

$$M(r(R))=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad M(sr(R))=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix},$$

$$M(tsr(R))=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

بنابراین کوچکترین نسبت هم‌ارزی حاوی R در این مثال، نسبت عمومی $\{۱,۲,۳\}\times\{۱,۲,۳\}$ است.

مرجع.

در تهیهٔ این مقاله عمدتاً از کتاب زیر استفاده شده‌است:

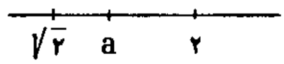
1. Kenneth A. Ross, Charles R. B. Wright, *Discrete Mathematics*, Second edition, Prentice – Hall International Editions, 1988.

حد و پیوستگی

دکتر علیرضا مدقالچی

مقالهٔ زیر متن سخنرانی نگارنده در دومین کنفرانس ریاضی و فیزیك دبیران استان مازندران که در بهار ۷۰ در محمودآباد تشکیل شده بود، می‌باشد.

مقدمه. بازهٔ $(\sqrt{2}\,,\,2)$ را درنظر بگیرید. کوچکترین عدد گویای این بازه چیست؟ آیا این سؤال با معنی است؟ آیا چنین عدد گویایی وجود دارد. اگر صرفاً به طور شهودی به این



سؤال بنگریم ملاحظه می‌کنیم که اگر a چنین عددی باشد. از خواص اعداد حقیقی [۳] نتیجه می‌گیریم که عدد گویای دیگری مانند b وجود دارد که $\sqrt{2} < b < a$، مسلماً این مراحل ادامه دارد. به عبارت دیگر، دنباله‌ای از عداد گویا وجود دارد که به $\sqrt{2}$ «نزدیك می‌شود». این مثال ساده نشان می‌دهد که موضوع حد دقیقاً به ساختمان اعداد حقیقی وابسته است. خواستاران اطلاعات بیشتر دراین زمینه می‌توانند به مقالهٔ «نظری به دستگاه اعداد حقیقی» [۳] مراجعه کنند. این مقاله در سمینار دبیران استان اهواز در زمستان ۶۷ ارائه شده است.

هدف از این مقاله، ارائه حد به وسیلهٔ دنباله‌ها است. ملاحظات تاریخی در این زمینه در مقالهٔ خوب آقای فریبرز آذرپناه آمده است [۱]. ایشان دراین مقاله براساس تجربیات شخصی روشهایی برای ارائه δ برحسب ε ارائه داده‌اند حد دنباله‌ها در مقالهٔ آقای دکتر منوچهر وصال به صورت آموزنده‌ای آمده است [۴].

۱) یك دنباله عبارت است از تابعی بر N (مجموعهٔ اعداد طبیعی) و یا بر Z_k (مجموعهٔ اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی k). یك دنباله را معمولاً به صورت

$$a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,,\,\cdots$$

و یا $\{a_n\}_{n\geq 1}$ نمایش می‌دهیم. خواصی ازدنباله‌ها که معمولاً مورد بحث است خواص «جمله‌های دوردست» یا خواص جملات آن «به ازای مقادیر بزرگ n» می‌باشند در بعضی دنباله هرچقدر پیش برویم جملات دنباله «هموار» می‌شوند دربعضی دیگر وضعیت دقیقاً بعکس است. مثلاً دنبالهٔ $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ را درنظر می‌گیریم، اگر به جدول مقادیر $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ بنگریم:

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...
$\frac{1}{n}$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	...

ملاحظه می‌کنیم که وقتی پیش می‌رویم جملات دنبالهٔ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ کوچك می‌شوند به عبارت دیگر، مثلاً، اگر $n > 100$، آنگاه $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$ و ... اما به اگر به دنبالهٔ $\{(-1)^n\}$ بنگریم و جدول مقادیر این دنباله را ملاحظه کنیم:

n	۱	۲	۳	۶	۵	۶	۷
$(-1)^n$	-1	1	-1	1	-1	1	-1

ملاحظه می‌کنیم که هرچه بیشتر پیش می‌رویم جملات دنبالهٔ $\{(-1)^n\}$ مقادیر ۱ و ۱ − را می‌گیرند. پس جملات دنبالهٔ اول، به اصطلاح، هموارند و به تدریج در اطراف صفر جمع می‌شوند درصورتی که جملات دنبالهٔ دوم یك یا منهای یك هستند. از این‌رو، تعریف زیر را داریم:

تعریف: گوییم دنبالهٔ $\{a_n\}$ به صفر همگراست و می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$، اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند N باشد به طوری‌که به ازای هر n، اگر $n \geq N$، آنگاه

$$|a_n| < \varepsilon \qquad (1)$$

در این تعریف، هدف پیداکردن N برحسب $\varepsilon > 0$ است که به‌ازای هر $n \geqslant N$ رابطهٔ (۱) برقرار باشد. حد دنبالهٔ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ برابر صفر است زیرا به ازای هر $\varepsilon > 0$، از رابطهٔ

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

نتیجه می‌شود که $n > \frac{1}{\varepsilon}$. پس می‌توان N را یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از $\frac{1}{\varepsilon}$ گرفت (بنابه خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی چنین Nای وجود دارد).

هدف ما دراینجا ورود به مفاهیم دقیق دنباله‌ها نیست بلکه به طوری‌که در اول مقاله بیان‌گردید قصد ما بیان حد توابع بـه روش دنباله‌هـاست. از این‌رو، با ذکـر چند مثال و یك تعریف، بخش دنباله‌هـا را به پایان برده و وارد تعریف حد تابع می‌شویم.

۴) امثله (I)

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{2}-1)=0$$

برهان. فرض‌کنید $a_n=\sqrt[n]{2}-1$، آنگاه

$$2=(1+a_n)^n=1+na_n+\frac{n(n-1)}{2}a_n+\cdots+a_n^n$$

چون $a_n > 0$ پس

$$2 > 1+na_n$$

بالنتیجه، $0 < a_n < \frac{1}{n}$ پس

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0$$

(II) اگر $|a| < 1$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} na^n=0$$

برهان. فرض‌کنید

$$|a|=\frac{1}{1+\alpha} \qquad (\alpha > 0)$$

پس

$$|a|^n=\frac{1}{(1+\alpha)^n} < \frac{2}{n(n-1)\alpha^2}$$

پس

$$0 < n|a|^n < \frac{2}{(n-1)\alpha^2}$$

و لذا،

$$\lim_{n\to\infty} n|a|^n=0$$

(III) اگر p یك عدد حقیقی دلخواهی باشد و $|a| < 1$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} n^p a^n=0$$

برهان. اگر $p \leqslant 0$، حکم بدیهی است، و اگر $p > 0$ فرض‌کنید $|a|=a_1^p$ [۳]. پس

$$n^p|a|^n=n^p|a_1^p|^n=(n|a_1|^n)^p_{n\to\infty} \to 0$$

تعریف. گوییم $\lim_{n\to\infty} a_n=b$ $(b\in R)$ اگر

$$\lim_{n\to\infty} (a_n-b)=0$$

(IV)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=1$$

برهان. داریم

$$\frac{n^2}{n^2+n}=n\cdot\frac{n}{n^2+n} \leqslant \frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+2} \leqslant n\cdot\frac{n}{n^2+1}=\frac{n^2}{n^2+1}$$

واضح است که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}=1$$

و

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$$

پس حکم برقرار است.

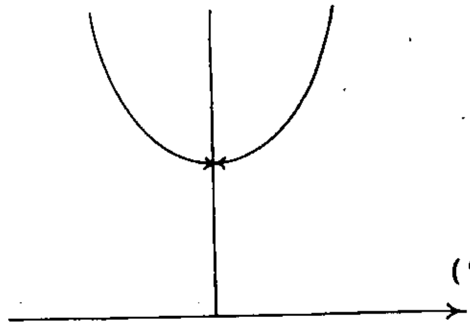
۳) برای تعریف حد توابع ابتدا مثالهای زیـر را ملاحظه کنید:

الف) تابع f را با ضابطهٔ

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

درنظر بگیریـد در نقطه صفر مقدار تابع صفر و در بقیه نقاط

از رابطهٔ $f(x)=x^2+1$ به دست می‌آید. وقتی که «x به صفر نزدیک می‌شود»، «تابع f به یک نزدیک می‌شود» در این مثال مهم نیست که x از کدام جهت (راست یا چپ) به صفر نزدیک می‌شود.



شکل (۱)

ب) حال اگر مقدار تابع را در نقطهٔ صفر تغییر بدهیم و آن را عدد حقیقی دلخواهی مانند a بگیریم آنگاه ضابطهٔ تعریف تابع جدید g چنین است.

$$g(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$$

دوباره، واضح است که اگر x به صفر نزدیک شود $g(x)$ به یک نزدیک می‌شود. مثلاً اگر

$$0<|x|<\frac{1}{\sqrt{10}}$$

آنگاه

$$|f(x)-1|=|x^2+1-1|=x^2<\frac{1}{10}$$

یا اگر

$$0<|x|<\frac{1}{10}$$

آنگاه

$$|f(x)-1|=|x^2|=|x|^2<\frac{1}{100}$$

به طور کلی، اگر

$$0<|x|<\sqrt{\varepsilon}$$

آنگاه

$$|f(x)-1|=x^2<\varepsilon$$

تعریف. فرض کنید f بر یک مجموعه به شکل

$$(x_0-\alpha\ ,\ x_0+\alpha)-\{x_0\}\quad (\alpha>0)$$

تعریف شده است. گوییم

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b$$

اگر به ازای هر $\varepsilon>0$ ؛ $\delta>0$ ای (وابسته به ε ، x_0) وجود داشته باشد به طوری که اگر $0<|x-x_0|<\delta$، آنگاه $|f(x)-b|<\varepsilon$. اگر $b=f(x_0)$، آنگاه گوییم f در x_0 پیوسته است $(x_0\ ,\ b\in\mathbb{R})$

نتیجه. اگر $\lim_{x\to x_0} f(x)=b$

آنگاه b منحصر به‌فرد است.

امثله (I)

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$$

$$|\sin x-\sin x_0|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right|$$

$$\leqslant |x-x_0|<\delta=\varepsilon$$

(II) ثابت کنید

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

حل. با توجه به دایره مثلثاتی داریم

$$\sin x<x<\tan x$$

لهذا، اگر $0<x<\frac{\pi}{2}$ ، آنگاه

$$0<1-\frac{\sin x}{x}\leqslant 1-\cos x$$

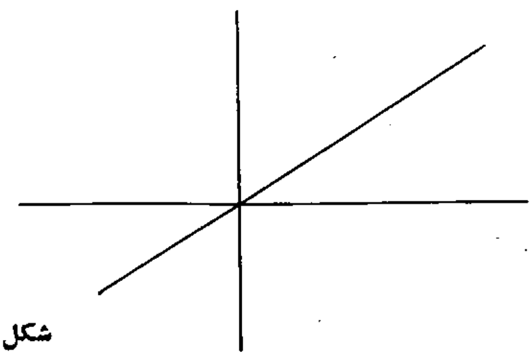
$$=2\sin^2\frac{x}{2}\leqslant 2\left|\frac{x}{2}\right|^2=|x|$$

حال اگر $0<|x|<\delta=\varepsilon$ ، آنگاه

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<\varepsilon$$

(III) مطلوبست تعیین تابعی که فقط در یک نقطه پیوسته باشد.

حل. تابع $f(x)=x$ در تمام نقاط دارای حد است.



شکل (۲)

حال اگر تابعی تعریف کنیم که مثلاً در نقطه صفر (فقط در نقطهٔ صفر) با f برابر باشد تابع جدید فقط در آن نقطه دارای حد خواهد بود. مثلاً:

$$g(x)=\begin{cases} x & x \notin Q \\ -x & x \in Q \end{cases}$$

این تابع درصفر دارای حد صفر است. زیرا

$$|g(x)-0|=\begin{cases} |x-0| & x \notin Q \\ |-x-0| & x \in Q \end{cases}$$
$$=|x|<\delta=\varepsilon$$

اما درسایر نقاط دارای حد نیست زیرا اگر $\lim\limits_{x\to a} g(x_0)=l$، آنگاه، به ازای هر $0<\varepsilon$، δای هست که اگر

$$0<|x-a|<\delta$$

آنگاه

$$|g(x)-l|<\varepsilon$$

در نتیجه، به ازای x_1 گویا و x_2اصم داریم

$$|x-l|<\varepsilon \quad و \quad |-x-l|<\varepsilon$$

یعنی

$$-2l<(x_1-l)+(-x_2-l)+(-x_2-l)$$

(می‌توان فرض کرد $x_1>x_2$)

$$|2l|\leqslant|x_1-l|+|-x_2-l|<2\varepsilon$$

یعنی، $|l|<\varepsilon$ چون $0<\varepsilon$ دلخواه است. پس $l=0$، از طرف دیگر $f(a)=-a$ یا $f(a)=a$ پس $-a=0$ یا $a=0$. در هرحال $a=0$.

(IV) تابع $f(x)=\begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$ در هیچ نقطه‌ای دارای حد نیست.

حل. اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$، آنگاه، به ازای هر $0<\varepsilon$، $0<\delta$ای هست که اگر

$$0<|x-a|<\delta$$

آنگاه

$$|f(x)-l|<\varepsilon$$

پس

$$|1-l|<\varepsilon \quad و \quad |l|<\varepsilon$$

از این‌رو،

$$1=|1-l+l|\leqslant|1-l|+|l|<2\varepsilon$$

چون ε دلخواه است این یک تناقض است.

حال قضیهٔ زیر را که حد توابع را به حدود دنباله‌ها تبدیل می‌کند می‌آموزیم.

قضیه ۱. شرط لازم و کافی برای آن‌که

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \quad (a\,,\, b\in R)$$

آن است که به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ به‌طوری‌که $x_n \neq a$، $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ و $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ موجود باشد.

برهان (لزوم). فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ و $\{x_n\}$ دنباله‌ای دلخواه باشد که دارای شرایط قضیه است. پس

$$\forall\varepsilon\exists\delta\forall x(0<|x-a|<\delta \Longrightarrow |f(x)-b|<\varepsilon)$$

$$(\varepsilon=\delta)\exists N\forall n(n\geqslant N \Longrightarrow |x_n-a|<\delta)$$

پس، اگر $n\geqslant N$، آنگاه $|f(x_n)-b|<\varepsilon$. یعنی

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=b$$

کفایت. ابتدا نشان می‌دهیم که به‌ازای هردو دنبالهٔ $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ با شرایط قضیه، $\{f(x_n)\}$ و $\{f(y_n)\}$ به یك حد همگرا هستند. دنباله $\{z_n\}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$z_n=\begin{cases} x_n & (\text{زوج } n) \\ y_n & (\text{فرد } n) \end{cases}$$

چون $x_n\to a$، $y_n\to a$ پس $z_n\to a$. لهذا $\{f(z_n)\}$ همگراست. حال چون $\{f(x_n)\}$ و $\{f(y_n)\}$ زیر دنباله‌های $\{f(z_n)\}$ هستند. پس هر دو باید دارای حد مشترك باشند. یعنی به ازای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$، با شرایط قضیه دنباله‌های $\{f(x_n)\}$ به یك حد مشترك میل می‌کنند. فرض کنید

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=b$$

نشان می‌دهیم که

$$\lim_{n\to a} f(x)=b$$

فرض کنید چنین نباشد. آنگاه،

$$\exists\varepsilon\forall\delta\exists x(0<|x-a|<\delta \ \&\ |f(x)-b|\geqslant\varepsilon)$$

حال اگر $\delta=\frac{1}{n}$، x_nای وجود دارد که $0<|x_n-a|<\delta$ ولی $|f(x_n)-b|\geqslant\varepsilon$ یعنی $x_n\to a$ ولی $f(x_n)\to b$ که یك تناقض است. پس حکم ثابت است.

(V) تابع $f(x)=\begin{cases} x & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$ بر $\mathcal{R}$ تعریف شده است. مطلوب است تعیین نقاط پیوستگی f است.

حل. فرض کنید $a\in\mathcal{R}$ دلخواه و

$$x_n \longrightarrow a \quad (x_n\neq a)$$

آنگاه

$$f(x_n)=\begin{cases} x_n & x_n\in Q\\ 0 & x_n\notin Q\end{cases}$$

پس اگر $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$ زیر دنباله‌های $\{x_n\}$ باشد به‌طوری که $x'_n\in Q$ و $x''_n\notin Q$. آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n)=\lim_{n\to\infty} x_n=a$$

و

$$\lim_{n\to\infty} f(x''_n)=0$$

لهذا، $a=0$ پس این تابع فقط در نقطه $a=0$ دارای حد است و $f(0)=0$. لهذا درصفرو فقط در صفر پیوسته است.

(VI) ثابت کنید

$$\lim_{x\to a} b^x=b^a \quad (b>0)$$

حل. برای تعریف b^x نگاه کنید به ([۳]). فرض کنید $f(x)=b^x$. اگر $b=1$، حکم واضح است. فرض کنید $b>1$. ابتدا فرض کنید $a=0$ اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای باشد به طوری که $x_n\to 0$ و $x_n\neq 0$ ، بنابه قسمت ۱ مثال (III) $\lim b^{\frac{1}{n}}=1$ پس به ازای $\varepsilon>0$، n_0ای وجود داردکه $b^{\frac{1}{n_0}}-1<\varepsilon$. حال Nای وجود داردکه به ازای هر n، اگر $n\geqslant N$، آنگاه $|x_n|<\frac{1}{n_0}$. پس، اگر $n\geqslant N$، آنگاه

$$|f(x_n)-1|=|b^{x_n}-1|$$
$$=\begin{cases} b^{x_n}-1<b^{\frac{1}{n_0}}-1<\varepsilon<(x_2>0)\\ 1-b^{x_n}<b^{-x_n-x}-1<b^{\frac{1}{n_0}}-1<\varepsilon<(x_1<x_2<x)\\ 0<\varepsilon\end{cases}$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)\longrightarrow 1$$

یعنی

$$\lim_{x\to 0} b^x=1=b^0$$

حال اگر $x_n\to a$ ،$x_n\neq a$ آنگاه، $x_n-a\to 0$ پس

بنابه بحث فوق $b^{x_n}=b^{x_n-a}\cdot b^a\to b^a$. پس

$$\lim_{x\to a} b^x=b^a$$

اگر $0<b<1$ ، آنگاه $\frac{1}{b}>1$ و

$$\lim_{x\to a} b^x=\lim_{x\to a}\frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^x}=\frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^a}=b^a$$

پس حکم برقرار است.

به طوری‌که در مثال‌های فوق دیده شد تبدیل حد توابع به حد دنباله مزیتی برآموزش حد به طور مستقیم دارد. درپایان قضیه شرط کشی را برای وجود حد بدون برهان می‌آوریم.

قضیه ۲. شرط لازم وکافی برای‌آنکه $\lim_{n\to\infty} x_n=x$ ، آن است که

$$\forall\varepsilon\exists N\forall m\,,\,n(m\,,\,n\geqslant N \Longrightarrow |x_m-x_n|<\varepsilon) \quad (a\in\mathcal{R})$$

نتیجه این قضیه در اثبات وجود حد برای توابع، در واقع، آن است که $\{f(x_n)\}$ برای هردنباله با شرایط قضیه ۱ کشی باشد.

مراجع

[۱]. آذرپناه، فریبرز، ε و δ، رشدآموزش ریاضی، ۸، زمستان ۶۸.

[۲]. مصاحب، غلامحسین، آنالیز ریاضی، جلد اول قسمت دوم، چاپ سوم، ۵۲.

[۳]. مدقالچی، علیرضا. نظری به دستگاه اعداد حقیقی، رشد شماره ۲۱، پاییز ۶۸.

[۴]. وصال، منوچهر، حد دنباله‌ها وحد توابع، رشد شماره ۱۱، پاییز ۶۵.

[5]. Parznski, W. R. & Zipse, P. W. Introduction to Mathematical Analysis, Mc Graw – Hill, 1987.

[6]. Silverman, R. A., Modern Calculus & Analytic Geometry, 1969.

چند عدد اول وجود دارد؟

مقالهٔ ارائه شده در دومین کنفرانس ریاضی‌وفیزیك مازندران محمودآباد اردیبهشت ۱۳۷۰
«آموزش‌وپرورش»

تهیه و تنظیم از: محمدتقی دیبائی-دانشگاه تربیت‌معلم

در این مقاله، از اعـداد طبیعی اول ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱ و... سخن خواهیم گفت، اعدادی که مضربی از هیچ عددکوچکتراز خـودشان غیراز ۱ نیستند: اگـر عددی طبیعی غیراز ۱ عدد اول نباشد،آن عدد، مرکب نامیده می‌شود.

اعداد اول در ریاضی، مهم هستند زیرا که قضیه‌ای بنیادی در حساب بیان مـی‌کندکـه هر عدد طبیعی بزرگتر از واحد مساوی حاصلضربی ازاعداد اول است. و به‌علاوه این‌نمایش منحصر به‌فرد است.

سؤالات زیادی در حول وحوش اعداد اول، از دیـرباز، مطرح شده است،که تاکنون بسیاری ازآنها پاسخ قطعی داده شده است. ولی سؤالاتی که هنوز بشر نتوانسته است برای آنها جوابی پیداکند،کم نیستند. هدف ما دراین نوشته طرح این‌گـونه سؤالات نیست، بلکه سؤالی را مورد بررسی قرار می‌دهیم‌که پاسخش را هر دانش‌آموز دبیرستانی هم می‌داند!

چند تا عدد اول وجود دارد؟

براساس قضیه‌ای‌درنظریهٔ اعداد پاسخ این سؤال چنین است «بینهایت عدد اول وجود دارد».

دراینجـا، روشهـای مختلف اثبات این قضیه را مطـالعه می‌کنیم. درحدود ده برهان برای این قضیه می‌آوریم. بی‌شك تعداد برهانهای این قضیه بیش‌از اینها است، اما بدون تردید تعدادآنها به تعداد اعداد اول نیست!

۱. برهان اقلیدس (۲۸۳ ق.م)

فرض‌کنیم تعداد اعداد اول متناهی باشد،پس فرض می‌کنیم تمام عددهای اول به صورت

$$P_1=2<P_2=3<\cdots<P_n$$

فهرست شده باشند. عدد

$$Q=P_1P_2\cdots P_n+1$$

را اختیار می‌کنیم و فرض می‌کنیم P عدد اولی باشدکه Q را عادکند. روشن است‌کـه P نمی‌توانـد هیچیك از اعداد P_1، P_2، ...، P_n بـاشد. زیـرا در غیر این صورت P حاصلضرب $P_1P_2\cdots P_n$ را عاد می‌کند، که چون P عدد Q را هم عاد می‌کند، الزاماً P باید ۱ را عادکندکـه ممتنع است. پس P متمایـز از P_1، ...، P_n است و درنتیجه عددی اول غیرازآنچه‌که فرض شده بود وجود داردکـه یك تناقض است. بنابراین مجموعهٔ اعداد اول نامتناهی است.

۲. برهان‌کومر (۱۸۷۸)

فرض‌کنیم تنها تعدادی متناهی عدد اول مانند

$$P_1<P_2<\cdots<P_n$$

وجود داشته باشد. عدد

$$N=P_1P_2\cdots P_n>2^1$$

را درنظر می‌گیریم. عدد $N-1$ حاصلضربی از اعداد اول است. لذا $N-1$ با N مقسوم‌علیه مشترکی چون P_i دارد. پس P_i عدد $N-(N-1)$، یعنی ۱، را عاد مـی‌کند؛کـه ممتنع است.

۳. برهان پولیا

برهان پولیا براین اساس استوار است‌که رشته‌ای نامتناهی از اعداد، چون

$$1<a_1<a_2<\cdots$$

می‌سازد به‌طوری‌که دوبه‌دو نسبت به هم اولند. ازآنجایی‌که هـریك ازآنها حداقل یك عامل اول دارد، پس بینهایت عدد اول وجود دارد.

پولیا برای تعریف رشتهٔ مذکور، a_n را عدد فرما، یعنی

$$F_n=2^{2^n}+1 \qquad (n\geqslant 0)$$

می‌گیرد. اکنون مشاهده می‌کنیم‌که

$$F_n-2=2^{2^n}-1=(2^{2^{n-1}}-1)F_{n-1}$$
$$=(2^{2^{n-2}}-1)F_{n-2}F_{n-1}=\cdots,$$

و بالاخره

$$F_n = F_0F_1\cdots F_{n-1}$$

بنابراین، اگر $m<n$، آنگاه F_m یك مقسوم‌علیه F_n-2 است، حال اگر p عددی اول باشدکه F_n و F_m را عاد کند، آنگاه $p|2$، یعنی $p=2$. امـا، با توجه به فرد بودن اعداد فرما، نتیجه می‌شود F_m و F_n مقسوم‌علیه مشترکی جز ۱ ندارند. به عبارت دیگر رشتهٔ اعداد فرما

$$F_0, F_1, F_2, \cdots$$

دو به‌دو متباین هستند و اثبات پولیا تمام می‌شود.

۴. برهان ادواردز

ادواردز درسال ۱۹۶۲ با اقتباس از برهان پولیا، رشته‌های مختلفی از اعداد ارائه می‌کندکه جمله‌های هریك از رشته‌ها دو به‌دو متباین هستند. فرض‌کنیم a و S_0 دو عدد متباین باشند. ادواردز رشتهٔ $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ را چنین تعریف می‌کند

$$S_n = S_{n-1}(S_{n-1}-a)+a \qquad (n\geqslant 1).$$

به استقرا بر n، می‌توان ثابت‌کرد که به ازای هر i و j، که $i, j\leqslant n$ و $i\neq j$، S_i و S_{j-1} باهم متباین هستند. ابتدا توجه‌کنیم‌که با توجه به

$$S_1 = S_0(S_0-a)+a$$

هرمقسوم علیه مشترك S_1 و S_0، یك مقسوم‌علیه مشترك S_0 و a است،که چون $(a, S_0)=1$، پس $(S_1, S_0)=1$. فرض کنیم به ازای هر j و i که $i\neq j$ و i و $j\leqslant n-1$، $(S_i, S_j)=1$. کافی است نشان دهیم‌که به ازای هر m که $m<n$، $(S_m, S_n)=1$

با توجه به رابطهٔ

$$S_r-a=S_{r-1}(S_{r-1}-a) \qquad r=1, 2, \cdots$$

داریم

$$\frac{S_r-a}{S_{r-1}-a}=S_{r-1}$$

لذا

$$\frac{S_n-a}{S_m-a}=S_mS_{m+1}\cdots S_{n-1}$$

بنابراین

$$S_n-a=(S_m-a)S_nS_{m+1}\cdots S_{n-1}$$

حال اگر p عددی اول باشدکه p یك مقسوم‌علیه مشترك S_n و S_m باشد، آنگاه $p|a$. بنابراین $p|S_m-a$ و $p|S_m$. پس $p^2|S_n-a$. از سوی دیگر داریم

$$S_n-a=(S_0-a)S_0S_1S_2\cdots S_{n-1}$$

چون p^2 سمت چپ را عاد می‌کند و $p|S_m$ و

$$p^2 \mid S_0S_1\cdots S_{n-1}$$

پس الزاماً $p|S_0-a$. اکنون باتوجه به‌این که $p|a$، نتیجه می‌شود $p|S_0$. این یك تناقض است. پس جمله‌های رشته

$$S_0, S_1, S_2, \cdots$$

دو به‌دو متباین هستند.

درحالت خاص، اگر $S_0=3$ و $a=2$، رشتهٔ $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ همان رشتهٔ اعداد فرما است.

یکی دیگر از روشهای‌آسان برای ارائهٔ رشته‌هایی با جمل دو به‌دو متباین، استفاده از رشتهٔ فیبوناتچی است. رشتهٔ فیبوناتچی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$u_0=0, \; u_1=1, \; u_n=u_{n-1}+u_{n-2} \quad (n\geqslant 2).$$

بنابراین، رشتهٔ فیبوناتچی با اعداد زیر شروع می‌شود

۰, ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, ۸۹, ۱۴۴, ...

می‌توان ثابت کردکه اگر $(m, n)=d$، آنگاه

$$(U_m, U_n)=d$$

این مطلب نشان می‌دهدکه یکبارکه رشته‌ای با جملات دو به‌دو متباین مـانند $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ داشته بـاشیم، بـا استفاده از رشتهٔ فیبوناتچی، می‌توان رشته‌های دیگری با جملات دو به‌دو متباین ساخت:

$$\begin{array}{llll}
S_1, & S_2, & S_3, & \cdots \\
U_{S_1}, & U_{S_2}, & U_{S_3}, & \cdots \\
U_{U_{S_1}}, & U_{U_{S_2}}, & U_{U_{S_3}}, & \cdots \\
U_{U_{U_{S_1}}}, & U_{U_{U_{S_2}}}, & U_{U_{U_{S_3}}}, & \cdots
\end{array}$$

۵. برهان اویلر

برهان اویلر: برهانی غیر مستقیم است. اویلر با استناد به این‌که حاصلجمع معکوسات اعداد اول مساوی بینهایت است: ثابت می‌کندکه بینهایت عدد اول وجود دارد.

اگـر p عددی اول باشد، آنگاه $\frac{1}{p}<1$ و لـذا سری

هندسی $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k}$ همگرا است و داریم

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^k}=\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

لذا اگر p و q دو عدد اول متمایز باشند، آنگاه

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{q}}=1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{pq}+\frac{1}{q^2}+\cdots$$

طرف راست رابطهٔ فوق حاصلجمع تمام اعداد به‌شکل $\frac{1}{p^iq^j}$ است ($i \geqslant 0$, $j \geqslant 0$) که هرجمله فقط یکبار ظاهر می‌شود (زیرا که تجزیه هرعدد به حاصلضرب اعداد اول، منحصر به‌فرد است).

این فکر روشن، اساس برهان اویلر را تشکیل می‌دهد.

فرض‌کنیم کلیهٔ اعداد اول عبارت باشند از

$$p_1\ ,\ p_2\ ,\ \cdots\ ,\ p_n\ ;$$

در این صورت داریم

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_i^k}=\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}\qquad i=1,\ 2\ \cdots\ ,\ n.$$

از روابط فوق نتیجه می‌شود

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_i^k}\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}$$

سمت چپ تساوی فوق، با توجه به بحث مذکور، حاصلجمع معکوسات تمام اعداد طبیعی است، که هرکدام فقط و فقط یکبار ظاهر می‌شود. اما حاصلجمع سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگرا است. از سوی دیگر سمت راست تساوی مورد نظر عددی حقیقی است. این تناقض، نامتناهی بودن اعداد اول را تأیید می‌کند.

۶. برهان تو (Thue)

برهان «تو» تنها برقضیهٔ یکتایی تجزیه اعداد طبیعی به حاصلضرب اعداد اول استوار است. فرض‌کنیم n و k اعدادی طبیعی باشند که $(1+n)^k < 2^n$ (*). فرض‌کنیم، اعداد اول

$$p_1=2\ ,\ p_2=3\ ,\ p_3=5\ ,\ \cdots\ ,\ p_r$$

تمامی اعداد اولی باشند که هر یك از آنها از 2^n کوچکترند. فرض‌کنیم $r \leqslant h$. با توجه به قضیهٔ یکتایی تجزیه، هرعدد صحیح m، که $1 \leqslant m \leqslant 2^n$، را می‌توان به شکل

$$m=2^{e_1}3^{e_2}\cdots p_r^{e_r}$$

نوشت، که در آن $0 \leqslant c_i \leqslant n$ ، $1 \leqslant i \leqslant r$.

با احتساب تمام حالات ممکنه، تعداد اعداد طبیعی m، که $1 \leqslant m \leqslant 2^n$، حداکثر مساوی $(n+1)^r$ است که با توجه به فرض $r \leqslant k$، داریم

$$(n+1)^r \leqslant (n+1)^k < 2^n\ ,$$

که ممکن نیست. پس لازم است $r \geqslant k+1$.

اکنون فرض می‌کنیم $n=2k^2$. از این که

$$1+2k^2 < 2^{2k}\qquad (k \geqslant 1)$$

نتیجه می‌شود

$$(1+2k^2)^k < 2^{2k^2}$$

و درنتیجه رابطهٔ (*) محقق است. چون $r \geqslant k+1$، پس حداقل $k+1$ عدد اول وجود دارد. بالاخره با زیادکردن k و میل دادن k به بینهایت، نتیجه می‌شود که بینهایت عدد اول وجود دارد.

۷. برهان پروت (Perott)

برهان پروت بر همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متکی است. توجه‌کنیم که

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\ .$$

پس

$$\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{n^2} < 1-\frac{1}{m+1}$$

و لذا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < 1+1=2$$

پس سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگرا است.

فرض‌کنیم تنها r عدد اول $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ وجود داشته باشند. N را عددی صحیح می‌گیریم که $p_1p_2\cdots p_r < N$. تعداد اعداد صحیح m که $m \leqslant N$ و m خالی از مربع است، دقیقاً برابر است با 2^r(= تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ فرضی اعداد اول). از سوی دیگر،

تعداد صحیح m، $m \leqslant N$، که بر $p_i^{۲}$ بخشپذیر هستند حداکثر مساوی $\frac{N}{p_i^{۲}}$ است. بنابراین تعداد اعداد صحیح m، $m \leqslant N$، که برمربعی کامل بخشپذیرند حداکثر مساوی $\sum_{i=۱}^{r} \frac{N}{p_i^{۲}}$ است. بنابراین

$$N \leqslant ۲^r + \sum_{i=۱}^{r} \frac{N}{p_i^{۲}} < ۲^r + N\left[\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{۲}} - ۱\right] = ۲^r + N(۱-\delta),$$

که درآن

$$\delta = ۲ - \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{۲}}$$

اکنون با اختیار N به شرطی‌که $N\delta \geqslant ۲^r$، داریم

$$N < ۲^r + N(۱-\delta) \leqslant ۲^r + N - ۲^r = N,$$

که ممتنع است. پس مجموعهٔ اعداد اول نامتناهی است.

۸. برهان اوریك (Auric)

فرض‌کنیم تنها r عدد اول $p_۱ < p_۲ < \cdots < p_r$ وجود داشته باشد. فرض کنیم t عددی طبیعی باشد و اختیار می‌کنیم $N = p_r^t$. با توجه به قضیهٔ یکتایی تجزیه، هر عدد صحیح m (که $۱ \leqslant m \leqslant N$) تجزیه‌ای منحصربه‌فرد به شکل $m = p_۱^{f_۱} \cdots p_r^{f_r}$ دارد. لذا هر m،

$$۱ \leqslant m \leqslant N$$

متناظر با یك r ـ تایی منحصربه‌فرد مانند $(f_۱, \ldots, f_r)$ خواهد بود. اما دراین حالت

$$p_۱^{f_i} \leqslant p_i^{f_i} \leqslant m \leqslant N \leqslant p_r^t.$$

پس

$$f_i \log p_۱ \leqslant t \log p_r$$

لذا

$$f_i \leqslant t \frac{\log p_r}{\log p_۱}$$

اختیار $E = \frac{\log p_r}{\log p_۱}$، داریم $f_i \leqslant tE$. ازآنجایی‌که N، یعنی تعداد اعداد m، که $۱ \leqslant m \leqslant N$، حداکثر مساوی تعداد r ـ تائیهای $(f_۱, \ldots, f_r)$ است، پس

$$p_r^t = N \leqslant (۱+tE)^r \leqslant t^r(E+۱)^r.$$

اگر t را به‌اندازهٔ‌کافی بزرگ بگیریم، نامساوی فوق برقرار نخواهد بود. لذا تعداد اعداد اول باید بینهایت باشد.

۹. برهان مترود (Methred)

فرض‌کنیم تنها r عدد اول $p_۱ < p_۲ < \cdots < p_r$ وجود داشته باشد. فرض‌کنیم

$$N = p_۱ p_۲ \cdots p_r,$$

و به ازای هر $i = ۱, \ldots, r$، فرض می‌کنیم

$$Q_i = \frac{N}{p_i}$$

توجه‌کنیم‌که $p_i \mid Q_i$ ولی اگر $i \neq j$، $p_i | G_j$. اکنون عدد $N = \sum_{i=۱}^{r} Q_i$ را درنظر می‌گیریم. اگر q عددی اول باشد که N را عادکند، آنگاه q نمی‌تواند هیچیك از p_iها باشد. پس هنوز عدد اول دیگری وجود دارد!

برهان مترود، ایده‌ای مشابه با قضیهٔ اقلیدس را اساس کار قرار داده است. در همین راستا می‌توان از برهان استلیحس (۱۸۹۰) نام بردکه درآن فرض می‌کند $N = mn$، که هر p_i تنها یکی از m و n را عاد می‌کند. اکنون $m+n$ برهیچیك از اعداد اول موجود بخشپذیر نیست. این یك تناقض است‌زیرا $m+n > ۱$. توجه‌کنیم درصورتی‌دراین برهان قرار دهیم $n = ۱$، قضیهٔ اقلیدس به دست می‌آید.

۱۰. برهان واشنگتن (Washington ۱۹۸۰)

برای درك برهان واشنگتن باید حقایقی‌را ازجبرجابه‌جایی یادآور شویم:

الف. در هر میدان عددی (یعنی میدانی چون F که Q، میدان اعدادگویا، زیر میدانی ازآن باشد و بعد F روی Q متناهی باشد) حلقهٔ اعداد صحیح جبری‌آن یك حوزهٔ ددکیند است (یعنی‌هرایده‌آل‌آن مساوی حاصلضرب منحصربه‌فردی از ایده‌آلهای اول است).

ب. در هر میدان عددی (از بعد متناهی روی Q)، به‌ازای هر عدد اول p، تنها تعدادی متناهی ایده‌آل اول وجود دارد که هریك p را عاد می‌کند.

ج. هرحوزهٔ ددکیند با تنها تعدادی متناهی ایده‌آل اول، یك حوزهٔ ایده‌آل اصلی است؛ و درنتیجه یك حوزهٔ تجزیهٔ یکتا است، یعنی هر عضو ناصفر و نایکال آن، صرفنظر از ترتیب عوامل و ضریب قرارگرفتن یکالها، مساوی حاصلضربی منحصربه‌فرد از اعضای تجزیه ناپذیر است. با این مقدمات برهان واشنگتن چنین است:

$$Q[\sqrt{-۵}]=\{a+b\sqrt{-۵} \mid a\, , \, b\in Q\}$$

را درنظر می‌گیریم. حلقهٔ اعداد صحیح جبری این میدان اعدادی به شکل $a+b\sqrt{-۵}$ است که درآن a و b اعداد صحیح معمولی هستند. این حلقه را با $Z[\sqrt{-۵}]$ نشان می‌دهیم. به سهولت می‌توان ثابت کرد که عناصر

$$۲\, , \, ۳\, , \, ۱+\sqrt{-۵}\, , \, ۱-\sqrt{-۵}$$

اعضای تجزیه ناپذیر در $Z[\sqrt{-۵}]$ است. از سوی دیگر رابطهٔ

$$(۱+\sqrt{-۵})(۱-\sqrt{-۵})=۲\times ۳=۶$$

نشان می‌دهد که برای ۶ دو تجزیه وجود دارد. پس حلقهٔ $Z[\sqrt{-۵}]$ یك حوزهٔ ایده‌آل اصلی نیست. بنابراین، باتوجه به (ج)، $Z[\sqrt{-۵}]$ باید بینهایت ایده‌آل اول داشته باشد. اکنون، بنابر (ب)، تعداد اعداد اول باید بینهایت باشد.

۱۱. برهان فاستنبرگ (Furstenberg ۱۹۵۵)

این برهان براساس ایده‌های مقدماتی توپولوژی است. مجموعهٔ Z، مجموعهٔ اعداد صحیح، را درنظر گرفته وبرای Z یك پایه متشکل از مجموعهٔ تمام تصاعدهای حسابی

$$\{ak+b \mid k\in Z\} \qquad (a\, , \, b\in Z\, , \, a\neq ۰)$$

اختیار می‌کنیم. واضح است که هرعدد صحیح به حداقل به یك تصاعد حسابی تعلق دارد؛ و نیز اشتراك دو تصاعد حسابی یا مجموعه‌ای تهی است یا یك تصاعد حسابی است. زیر مجموعه‌ای از Z مانند S را یك مجموعهٔ بازنامیم درصورتی که به‌ازای هر $x\in S$، عضوی از پایه چون

$$B=\{ak+b \mid k\in Z\} \qquad (a\neq ۰)$$

وجود داشته باشد به طوری که $x\in B\subseteq S$. به یادآوریم که زیر مجموعهٔ A از Z بسته نامیده می‌شود، درصورتی که $Z-A$ باز باشد. ازآنجایی $\varnothing$، مجموعهٔ تهی، مجموعه‌ای باز است، پس Z بسته است؛ و چون Z خود نیز یك تصاعد حسابی است، پس Z هم باز است و هم بسته است. از سوی دیگر اگر

$$B=\{ak+b \mid k\in Z\} \qquad a\neq ۰$$

عضوی از پایه باشد، دراین صورت

$$Z-B=\bigcup_{\substack{i=۰\\ a\neq b}}^{a-۱} B_i \quad \text{و} \quad B_i=\{ak+i \mid k\in Z\}.$$

بنابراین $Z-B$ نیز باز است. درنتیجه B هم باز و هم بسته است. چون اشتراك هر تعداد متناهی مجموعهٔ باز، باز است؛ پس اجتماع هرتعداد متناهی تصاعد حسابی، مجموعه‌ای بسته است. اکنون فرض کنیم مجموعهٔ اعداد اول در Z مجموعه‌ای متناهی باشد. اگر p عددی اول باشد، A_p را تمام مضارب p می‌گیریم. فرض کنیم

$$A=\bigcup_{\text{اول } p} A_p$$

باتوجه به متناهی بودن مجموعهٔ اعداد اول، A مجموعه‌ای بسته است. اما

$$A=Z-\{-۱\, , \, ۱\}$$

در نتیجه $\{۱\, , \, -۱\}$ مجموعه‌ای باز خواهد بود، که ممتنع است. بنابراین A نمی‌تواند اجتماعی متناهی از تصاعدها باشد. درنتیجه بینهایت عدد اول وجود دارد.

۱۲. در همین راستا، نویسنده تمرینی به دانشجویان درس جبر ۲ (کارشناسی) می‌دهد، که ذکرآن خالی از فایده نیست. «حلقهٔ جابه‌جایی و یکدار R مفروض است. فرض کنیم M مساوی اشتراك کلیهٔ ایده‌آلهای ماگزیمال حلقهٔ R باشد.

الف. ثابت کنید شرط لازم وکافی برای آنکه $a\in M$ آن است که به ازای هر $x\in R$، $۱-xa$ یکال باشد.

ب. فرض کنیم R نیز نامتناهی و فاقد مقسوم‌علیه صفر باشد. ثابت کنید اگر تعداد یکالهای R متناهی باشد، آنگاه $M=(۰)$.

ج. با فرضیات فوق، ثابت کنید تعداد ایده‌آلهای ماگزیمال R نامتناهی است.

د. به‌کمك نتایج بالا ثابت کنید بینهایت عدد اول در Z هست.

مراجع:

I. Paulo Ribeboim; The Book of Prime Number Recrds, Second Edition 1939 Spirnger-Verlag.

II. غلامحسین مصاحب تئوری مقدماتی اعداد
انتشارات سروش

III. جیمز ر. مانکرز توپولوژی، نخستین درس
ترجمهٔ یحیی تابش، ابراهیم صالحی، جواد لالی، نادر وکیل
مرکز نشر دانشگاهی

نامساوی‌های مربوط به مساحتهای مقاطع مخروطی

تنظیم و ترجمه از: ابراهیم دارابی

روی سهمی $y^2=4ax$ سه نقطه $(x_1\,,\,y_1)$، $(x_2\,,\,y_2)$، $(x_3\,,\,y_3)$ را درنظر می‌گیریم. مساحت مثلثی که با این سه نقطه ساخته می‌شود، برابر است با

$$A=\frac{1}{2}\,|x_1(y_2-y_1)+x_2(y_3-y_1)$$
$$+x_3(y_1-y_2)|$$
$$=\frac{1}{8a}\,|(y_1^2(y_2-y_3)+y_2^2(y_3-y_1)$$
$$+y_3^2(y_1-y_2)|$$
$$=\frac{1}{8a}\,|(y_1-y_2)\,(y_2-y_3)\,(y_3-y_1)|$$

معادلات مماس بر سهمی در این سه نقطه عبارتند از:

$$2a(x+x_1)=y_1y$$

و

$$2a(x+x_2)=y_2y\quad\text{،}\quad 2a(x+x_3)=y_3y$$

که همدیگر را در نقاط زیر قطع می‌کنند:

$$\left(\frac{y_1y_2}{4a}\,,\,\frac{y_1+y_2}{2}\right)\quad\text{و}\quad\left(\frac{y_2y_3}{4a}\,,\,\frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

و

$$\left(\frac{y_3y_1}{4a}\,,\,\frac{y_3+y_1}{2}\right)$$

بنابراین مساحت مثلث حاصل از خطوط مماس برابر است با

$$A'=\frac{1}{16a}\,|y_1y_2(y_1-y_2)+y_2y_3(y_2-y_3)$$
$$+y_3y_1(y_3-y_1)|$$
$$=\frac{1}{16a}\,|(y_1-y_2)\,(y_2-y_3)\,(y_3-y_1)|$$
$$=\frac{1}{2}\,A$$

یا به طور خلاصه: مساحت مثلث حاصل از سه خط مماس برسهمی، برابر است با نصف مساحت مثلثی که از وصل کردن سه نقطه تماس به دست می‌آید.

این نتیجه از خیلی وقت پیش شناخته شده است. مثلاً در مقاطع مخروطی، سالمون [1] آمده است.

درجمع وجور کردن اثبات یك تمرین داده شده برای دورهٔ لیسانس بـه این نتیجه رسیدم کـه رابطه بین A و A' برای بیضی وهذلولی رابررسی بکنم منظورمن این است خاطرنشان

کنیم که مساحت مثلث حاصل از سه خط مماس بر یك بیضی، اکیداً بزرگتر از نصف مساحت مثلثی است که از به هم وصل کردن سهٔ نقطه تماس به دست می‌آید. و همچنین مساحت مثلث حاصل از سه خط مماس بر یك هذلولی، اکیداً کوچکتر از نصف مساحت مثلثی است که ا به هم وصل کردن سه نقطه تماس ساخته می‌شود، به شرطی که هر سه نقطه برخورد روی یك شاخه از هذلولی قرار گرفته باشد.

(به آسانی دیده می‌شود که اگر نقاط برخورد روی یك شاخه قرار نداشته باشد، در حالت کلی نتیجه اخیر درست نیست).

این نتایج را با اثبات تا اندازه‌ای بیشتر، یعنی، برای بیضی،

$$(1)\quad A' \geqslant \frac{A}{2\left(1-\left(\frac{A}{2ab}\right)^{2/3}\right)^{3/2}}$$

ثابت می‌کنیم.

درحالی که درباره هذلولی

$$(2)\quad A' \leqslant \frac{A}{2\left(1+\left(\frac{A}{2ab}\right)^{2/3}\right)^{3/2}}$$

که در آن a و b نصف طولهای اقطار درنظر گرفته شده‌اند.

برهان مسأله به دو مورد از نامساوی مقدماتی وابسته است که بیان می‌کند که اگر p، q، r، u، v و w اعداد نامنفی باشند، آنگاه

$$(3)\quad (pqr)^{1/3}+(uvw)^{1/3} \leqslant (p+u)^{1/3}(q+v)^{1/3}(r+w)^{1/3}$$

برای تحقیق (۳) ملاحظه می‌کنیم که

$$((pqr)^{1/3}+(uvw)^{1/3})^3 = pqr + 3(p^2q^2r^2uvw)^{1/3} + 3(pqru^2v^2w^2)^{1/3} + uvw.$$

از نامساویهای مربوط به واسطه عددی و هندسه نتیجه می‌شود

$$3(p^2q^2r^2uvw)^{1/3} \leqslant pqw+qru+rpv.$$

$$3[pqru^2v^2w^2)^{1/3} \leqslant pvw+qwu+ruv$$

از آنجا

$$((pqr)^{1/3}+(uvw)^{1/3})^3 \leqslant pqr+pqw+qru+rpv+pvw+qwu+ruv+uvw = (p+u)(q+v)(r+w)$$

و با ریشه سوم گرفتن از طرفین رابطه (۳) به دست می‌آید.

برای به‌دست‌آوردن اولین حالت خاص نامساوی (۳)، فرض کنید α، β و γ اعداد حقیقی باشند و قرار می‌دهیم

$$p=\cos^2\alpha ،\ q=\cos^2\beta ،\ r=\cos^2\gamma$$

$$u=\sin^2\alpha ،\ v=\sin^2\beta ،\ w=\sin^2\gamma$$

آنگاه از (۳) داریم

$$(4)\quad (\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma)^{1/3} + (\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma)^{1/3} \leqslant 1$$

از طرف دیگر، اگر قرار دهیم

$$p=q=r=1$$

$u=\sinh^2\alpha \qquad v=\sinh^2\beta$ و $w=\sinh^2\gamma$

به نامساوی زیر می‌رسیم

$$(5)\quad 1+(\sinh^2\alpha+\sinh^2\beta\sinh^2\gamma)^{1/3} \leqslant \cosh^2\alpha\cosh^2\beta\cosh^2\gamma)^{1/3}$$

که این دومین حالت خاص نامساوی (۳) است. (برای به دست‌آوردن (۲) از این نامساوی استفاده می‌کنیم. م)

اکنون در موقعیتی قرار داریم که می‌توانیم (۱) را بررسی

کنیم. برای این منظور، از تعریف پارامتری بیضی استفاده می‌کنیم

$$x=a\cos t \quad \text{و} \quad y=b\sin t \;،\; (t\in[0\,,\,2\pi])$$

مساحت مثلث حاصل از نقاط نظیر مقادیر t_1، t_2 و t_3 از پارامتر t برابر می‌شود با

$$(6)\quad A=\frac{1}{2}ab|\sin(t_1-t_2)+\sin(t_2-t_3)+\sin(t_3-t_1)|$$

$$=ab|\sin\frac{1}{2}(t_1-t_2)\cos\frac{1}{2}(t_1-t_2)-\sin\frac{1}{2}(t_1-t_2)\cos\frac{1}{2}(t_1+t_2-2t_3)|$$

$$=2ab|\sin\frac{1}{2}(t_1-t_2)\sin\frac{1}{2}(t_2-t_3)\sin\frac{1}{2}(t_3-t_1)|$$

مماسهای موسوم به بیضی درنقاط نظیر t_1، t_2 و t_3 خطوط

$$\frac{x\cos t_1}{a}+\frac{y\sin t_1}{b}=1$$

و نظایر آن می‌باشد. مساحت مثلث حاصل ازاین خطوط برابر است با

$$A'=\frac{ab|\sin(t_1-t_2)+\sin(t_2-t_3)+\sin(t_3-t_1)|^2}{2|\sin(t_1-t_2)\sin(t_2-t_3)\sin(t_3-t_1)|}$$

$$=\frac{8ab|\sin\frac{1}{2}(t_1-t_2)\sin\frac{1}{2}(t_2-t_3)\sin\frac{1}{2}(t_3-t_1)|^2}{|\sin(t_1-t_2)\sin(t_2-t_3)\sin(t_3-t_1)|}$$

$$=ab\left|\operatorname{tg}\frac{1}{2}(t_1-t_2)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(t_2-t_3)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(t_3-t_1)\right|$$

و بنابراین

$$(7)\quad A'=\frac{1}{2}A\left|\sec\frac{1}{2}(t_1-t_3)\sec\frac{1}{2}(t_2-t_3)\sec\frac{1}{2}(t_3-t_1)\right|$$

از ترکیب (۶) و (۷) و نامساوی (۴) دیده می‌شود که

$$\left(\frac{A}{2A'}\right)^{2/3}+\left(\frac{A}{2ab}\right)^{2/3}\leqslant 1$$

و این هم‌ارز است با (۱).

برای بررسی (۲) از معادله پارامتری هذلولی استفاده می‌کنیم. در این حالت مساحت مثلث حاصل از نقاط نظیر مقادیر t_1، t_2 و t_3 از پارامتر t به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$A=2ah\left|\sinh\frac{1}{2}(t_1-t_2)\sinh\frac{1}{2}(t_2-t_3)\sinh\frac{1}{2}(t_3-t_1)\right|$$

درحالی‌که (۷) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$A'=\frac{1}{2}A\left|\operatorname{sech}\frac{1}{2}(t_1-t_2)\operatorname{sech}\frac{1}{2}(t_2-t_3)\operatorname{sech}\frac{1}{2}(t_3-t_1)\right|$$

با به کار بردن (۵) نامساوی زیر را به دست می‌آوریم

$$1+\left(\frac{A}{2ab}\right)^{2/3}\leqslant\left(\frac{A}{2A'}\right)^{2/3}$$

که هم‌ارز با (۲) است.

این مقاله ترجمهٔ مقاله زیر است:

W. A. Day, Inequalities for Areas Associated with Conics, Mathemtical Monhly, Jan. 1991.

مرجع

I. G. Salmon, A. Treatise on Conic section, 6Th edition, Longman, & Co., London, 1879. P. 212..

مسایل ویژهٔ دانش آموزان شماره ۳۱

محمود نصیری

۱. اگر x و y مثبت و $x+y=1$، ماکسیمم عبارت

$$A=xy(x^2+y^2)$$

را پیدا کنید.

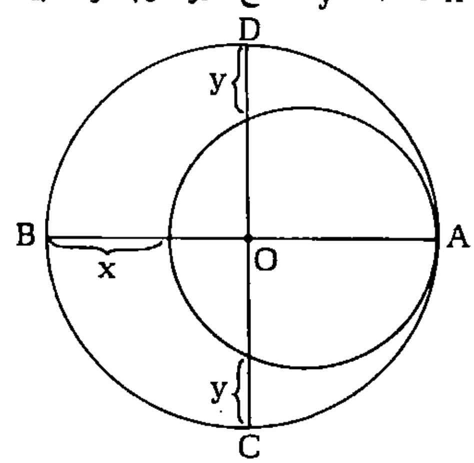
راهنمائی. ثابت کنید

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^4 \geqslant xy\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

در این صورت

$$Max A=\frac{1}{8}$$

۲. دو دایره مماس داخل مطابق شکل در نقطه A مماس‌اند اگر AB و CD دو قطر عمود برهم از دایرهٔ بزرگتر باشند و $x=16$ و $y=10$، شعاع دایره کوچکتر را پیدا کنید.



جواب. $r=17$

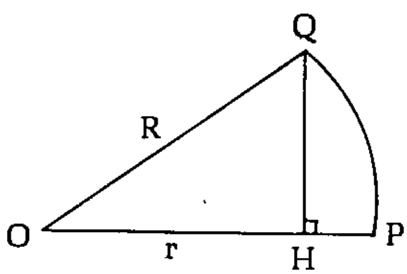
۳. الف ـ دایره به‌شعاع b بردو دایره به‌شعاعهای a و c مماس خارج است به طوری‌که مرکزهای سه دایره روی یك خط راست و b از هردوی a و c کوچکتر است. ثابت کنید r شعاع دایره‌ای‌که بر هر سه دایره مماس است برابر است با:

$$r=\frac{b(a+b)(b+c)}{ac-b^2}$$

ب ـ دو دایره به شعاعهای a و b و مرکزهای O و Q در نقطه P مماس خارج‌اند. مماس در نقطه P برهردودایره، RS مماس مشترك خارجی دو دایره را در T قطع می‌کند. PR، OT را در M و PS، QT را در N قطع می‌کند، ثابت کنید دو مثلث OTQ و PRS قائم‌الزاویه و متشابهند. همچنین چهارضلعی $MPNT$ یك مستطیل است که قطر MN ازآن با RS موازی است.

طول MN و مساحت این مستطیل را برحسب a و b پیدا کنید.

۴. مطابق شکل، OPQ قطاعی از دایره به شعاع R با زاویه کوچکتر از 90° است و H تصویر Q روی OP است، به طوری‌که $OH=r$.



این قطاع حول OP دوران می‌کند. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای‌آنکه حجم جسمی‌که از دوران سطح HPQ حول HP و حجم جسمی‌که از دوران سطح OHQ حول OH پدید می‌آیند برابر باشندآن است‌که H پاره خط OP را به نسبت عدد طلائی تقسیم‌کند. (عدد طلائی ریشهٔ معادله $x^2+x-1=0$ است).

راهنمائی: به‌کمك انتگرال یا به‌روش هندسی به سادگی ثابت می‌شود.

۵. می‌دانیم یك مولکول متان مانند یك چهاروجهی منتظم است‌که اتم کربن در مرکز چهاروجهی و چهار اتم هیدروژن در چهار رأس‌آن می‌باشند. ثابت‌کنید زاویه بین اتم کربن و

مسایل ویژه دانش‌آموزان شماره ۳۱

هر دو اتم هیدروژن برابر

$$\theta = \mathrm{Arc}\cos\left(-\frac{1}{3}\right)$$

است.

راهنمائی.

روش اول. به روش برداری، اگر O مبدأ را در مرکز چهاروجهی اختیار کرده و هر یك از رئوس را A و B و C و D بنامیم و $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ و $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ و $\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ فرض کنیم به طوری‌که طول هر یك از بردارها برابر واحد باشد. آنگاه

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\cos\theta$$

و

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$$

روش دوم. ارتفاع AH چهاروجهی را رسم کرده واز O عمود OK را بر AB رسم کنید، زاویه

$$\sin\theta=\frac{1}{a\sqrt{3}} \quad \text{و} \quad \widehat{AOB}=\theta$$

که $OA=a$.

۶. تابع حقیقی f بر R همواره پیوسته و مشتق پذیر است و به ازای هر x در رابطه

$$(f(x))^2=\int_0^x \Big((f(t))^2+(f'(t))^2\Big)dt+1370$$

صدق می‌کند. ثابت کنید

$$f'(x)=f(x).$$

سپس نتیجه بگیرید

$$f(x)=\pm\sqrt{1370}\,e^x$$

راهنمائی. از طرفین مشتق بگیرید. همچنین

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f(x)|+c.$$

۷. در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($A=90^\circ$)، ارتفاع AH وارد بر وتر را رسم می‌کنیم اگر O و O' به ترتیب مراکز دایره‌های محاطی داخلی دو مثلث ABH و ACH و I مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ABC باشند، ثابت کنید $AI=OO'$.

اگر امتداد OO' دو ضلع AB و AC را در B' و C' قطع کند ثابت کنید $B'C'=AH\sqrt{2}$.

۸. ثابت کنید مجموع اعداد یك جدول ضرب $n\times n$ از اعداد طبیعی برابر $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ است.

۹. حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف ـ

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{(x+a)(x+a^2)\cdots(x+a^n)}-x\right) \quad (n\in N)$$

ب ـ

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$$

۱۰. اگر اعداد مخالف صفر a_1، a_2، ...، a_n تشکیل تصاعد حسابی دهند ثابت کنید

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$$

۱۱. ثابت کنید هر عدد صحیح را می‌توان به صورت مجموع پنج مکعب کامل نوشت.

(فرستنده. پیمان برازنده دانشجو تهران)

راهنمائی. به ازای هر n، n^3-n بر ۶ بخش‌پذیر است.

$$n=n^3-6k$$

۱۲. ثابت کنید فقط دو مستطیل وجود دارند که اضلاعشان اعداد صحیح و عدد محیط آنها، با عدد مساحت آنها برابر است.

(فرستنده. مسعود طاهرخانی دانشجو قزوین)

جواب. ابعاد (۶ و ۳) یا (۴ و ۴) است.

۱۳. الف. اگر f تابعی انتگرال‌پذیر و k عددی حقیقی باشد ثابت کنید

$$\int_{ka}^{kb}f(x)dx=k\int_a^b f(kx)dx.$$

ب. با استفاده از (الف) و روش جزء به جزء اگر

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2}\, dx = A$$

آنگاه

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{x+1}\, dx$$

را حساب کنید.

(فرستنده. بهروز نفعی دانشجو تهران)

۱۴. مجموع‌های زیر را حساب کنید. $(n \in N)$

$$S_1 = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \cdots + \frac{2^n+1}{2^n}$$

$$S_2 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}$$

(فرستنده. مجید صادقی اصفهان)

۱۵. فرض کنیم D نقطه‌ای روی ضلع BC ازمثلث ABC باشد. اگر

$$AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC$$

ثابت کنید $AB = AC$ یا AD نیمساز زاویه A از مثلث است.

راهنمائی. قانون کسینوسهارا در دومثلث ABD و ACD نوشته وکسینوسها را حذف کنید.

۱۶. نامعادله‌های زیر را حل کنید.

الف ـ $(x^2+x+1)^x < 1$

ب ـ $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geqslant -2$

جواب.

الف ـ $x < -1$

ب ـ $(-\infty, 0] \cup [\log_6 5, 1)$

۱۷. فرض کنیم $x = \alpha$ یك ریشه صحیح چند جمله‌ای $f(x)$ با ضرایب صحیح باشد. دراین صورت ثابت کنید تنها ریشه‌های صحیح ممکن چند جمله‌ای‌های $f(x)+p$ و $f(x)-p$، که درآن p یك عدد اول است، عبارت‌اند از $\alpha - p$، $\alpha - 1$، $\alpha + 1$، $\alpha + p$.

راهنمائی. اگر β یك ریشه ممکن $f(x) \pm p = 0$ باشد ثابت کنید، $\beta - \alpha | p$.

۱۸. اگر f یك تابع چند جمله‌ای با ضرایب مثبت و تابعی زوج باشد، ثابت کنید بر R تقعرش به‌سمت yهای مثبت است و فقط دارای یك نقطه مینیمم است.

راهنمائی. به‌ازای هر x، $f''(x) \geqslant 0$ ومعادله $f'(x) = 0$ فقط یك ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۹. فرض کنیم p عددی اول باشد، و فرض کنیم M مجموعه‌ای شامل p عدد متوالی صحیح و مثبت باشد. آیا ممکن است مجموعه M را به دو مجموعه M_1 و M_2 افراز کرد

$$(M_1 \cap M_2 = \varnothing \text{ و } M_1 \cup M_2 = M)$$

به طوری‌که حاصلضرب عضوهای M_1 برابر حاصلضرب اعضای M_2 باشد؟

راهنمائی. واضح است‌که یکی از اعضای M بر P بخش‌پذیر است. بنابراین زیر مجموعه شامل این عضو حاصلضرب عضوهایش در P است. در حالی‌که عضوهای سایر زیر مجموعه‌های آن بر P بخش‌پذیر نیستند.

۲۰. در هرگروهی اگر

$$a^2 = (ab)^2 = e$$

آنگاه

$$a^{-1}ba = b^{-1}$$

(e عضو خنثی گروه است.)

حل مسائل آنالیز مسابقهٔ دانشجوئی کشور (دانشگاه اصفهان، ۱۳۶۸)

فرستنده: زاهد زاهدانی،
عضو هیأت علمی بخش ریاضی، دانشگاه شیراز

۱ـ فرض کنید تابع حقیقی f به ازای $x \neq x_\circ$ دارای مشتقات اول و دوم بوده و

$$f'(x) < \circ < f''(x) \quad \text{و} \quad x < x_\circ$$

$$f'(x) > \circ > f''(x) \quad \text{و} \quad x > x_\circ$$

ثابت کنید مشتق f در $x_\circ$ موجود نیست.

حل. فرض کنید f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد پس

$$f'(x_\circ) = \circ$$

اما f'' بر $(x_\circ\ ,\ +\infty)$ منفی و لذا f' در این بازه نزولی است پس

$$\lim_{x \to x_\circ^+} f'(x)$$

موجود است (متناهی یا نامتناهی).

اگر $x_\circ < t < S$ آنگاه

$$f'(t) \geqslant f'(S) > \circ$$

و درنتیجه

$$\lim_{x \to x_\circ^+} f'(t) \geqslant f'(S) > \circ$$

و از این‌رو، l ای هست که

$$\lim_{x \to x_\circ^+} f'(t) > l > \circ$$

بنابراین $\circ < \delta$ای هست که اگر

$$S \in (x_\circ\ ,\ x_\circ + \delta)$$

آنگاه $f'(S) > l$ درنتیجه l بین

$$f'\left(x_\circ + \frac{\delta}{۲}\right) \quad \text{و} \quad \circ = f'(x_\circ)$$

واقع است. درحالی‌که به ازای هر S از

$$\left(x_\circ\ ,\ x_\circ + \frac{\delta}{۲}\right)$$

داریم

$$f'(S) > l$$

و این با قضیه مقدار متوسط برای تابع مشتق تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و لذا f در $x_\circ$ مشتق ندارد.

۲ـ فرض کنید تابع حقیقی g بر R پیوسته است و به‌ازای هر $x \neq \circ$، $g(x) > \circ$ و $g(\circ) = \circ$. همچنین فرض کنید تابع حقیقی f روی R پیوسته یکنواخت و کراندار و $g \circ f$ روی R انتگرال‌پذیر است ثابت کنید

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \circ$$

حل. فرض کنید

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$$

پس وجود دارد $\varepsilon > 0$ ای و دنباله $\{x_n\}$ ای بطوری که

$$x_n \longrightarrow \infty \quad \text{و} \quad |f(x_n)| \geqslant \varepsilon$$

اما f پیوسته یکنواخت است، پس وجود دارد $\delta > 0$ ای بقسمی که

$$|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

و همچنین وجود دارد M بقسمی که

$$|f(x)| < M \quad \text{و} \quad (x \in R)$$

درنتیجه، به ازاء هر $y \in R$،

$$|y-x_n| < \delta \Longrightarrow \frac{\varepsilon}{2} \leqslant |f(y)| \leqslant M$$

از طرف دیگر اگر

$$\mu = \inf \left\{ g(u) : \frac{\varepsilon}{2} \leqslant |u| \leqslant M \right\}$$

آنگاه به ازاء هر $n \in N$،

$$\int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} g(f(x))dx \geqslant 2\delta\mu$$

اما

$$\lim \int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} (g \circ f)(x)dx = 0$$

که تناقض است.

۳ـ فرض کنید تابع‌حقیقی f روی R پیوسته و برای‌فواصل بسته $[a, b]$ و $[c, d]$ شرط $[a, b] \subset f([c, d])$ برقرار باشد. ثابت‌کنید فاصله‌ای مانند $[r, S]$ در $[c, d]$ وجود دارد بقسمی که

$$f([r, S]) = [a, b].$$

حل. فرض کنید

$$J = [c, d] \quad \text{و} \quad K = [a, b].$$

چون $K \subset f(J)$، دراین صورت نقاط x_1 و x_2 در J وجود دارند بطوری که

$$f(x_1) = a \quad \text{و} \quad f(x_2) = b.$$

حال

$$A = \{x \in J : f(x) = a\}$$

یك مجموعه غیر تهی وکراندار است پس $r = \sup A$ وجود دارد. چون f پیوسته و درنتیجه A بسته است نتیجه می‌شود که $f(r) = a$.

مجموعه B را به صورت زیر تعریف کنید

$$B = \{x \in J : x > r\ ,\ f(x) = b\}$$

و حالات زیر را درنظر بگیرید.

حالت اول. اگر $B \neq \varnothing$ در این صورت $S = \inf B$ موجود است و

$$f([r, S]) \subseteq [a, b] = K$$

اگر $x_0 \in [r, S]$ وجود داشته باشد که $f(x_0) \notin K$ دراین صورت

$$f(x_0) < a \quad \text{و یا} \quad f(x_0) > b$$

اگر $f(x_0) > b$ دراین صورت

$$f(x_0) > b > f(r) = a$$

و بنابه پیوستگی f، x_3ای وجود داردکه $r < x_3 < x_0$ و $f(x_3) = b$. بنابراین $x_3 \in B$ و $x_3 < S$ که غیرممکن است. به طور مشابه حالت $f(x_0) < a$ غیر ممکن خواهد بود.

حالت دوم. اگر $B = \varnothing$ آنگاه

$$\forall x\ ,\ f(x) = b \Longrightarrow x < r$$

حال اگر

$$E = \{x \in J : f(x) = b\}$$

دراین صورت $E \neq \varnothing$ وکراندار است. فرض کنید

$$r' = \sup E \quad \text{پس} \quad r' \leqslant r$$

و اگر

$$F = \{x \in J : x > r'\ ,\ f(x) = a\}$$

و $S' = \inf F$ آنگاه مانند حالت اول می‌توان نشان دادکه $f([r', S']) = K$.

سؤالات جبر

۱ـ فرض کنید G یك گروه با مرتبه $p^a m$ باشد بطوری که p یك عدد اول، $0 < a \in Z^+$، $p \nmid m$ و G دقیقاً دارای $(p+1)$ سیلو p ـ زیرگروه باشد. نشان دهید که

$$\left|\bigcap_{i=1}^{p+1} P_i\right| = p^{a-1}$$

که در آن P_iها سیلو p ـ زیرگروههای G می‌باشند.

(راهنمایی: $|G: A \cap B| \leqslant |G: A|\,|G: B|$).

۲ـ فرض کنید R حلقه‌ای یکدار باشد بطوری که هر ایده‌آل چپ آن، یك ایده‌آل راست هم باشد آنگاه. ثابت کنید که اشتراك تمام ایده‌آلهای اول R با مجموعه عناصر پوچتوان R (nilpotent) مساوی است.

۳ـ نشان دهید که برای هر ماتریس $n \times n$، A ماتریس $n \times n$، مانند B وجود دارد بطوری که AB خود توان (idempotent) است.

بارم: مسأله اول ۴۰ امتیاز
» دوم ۳۰ »
» سوم ۳۰ »

مسابقه ریاضی دانشجویان کشور اسفند ۶۹ . دانشگاه فردوسی مشهد

سؤالات معلومات عمومی ریاضی

۱ــ شرط لازم و کافی برای اینکه حاصلضرب دو عدد صحیح بر مجموعشان بخش‌پذیر باشد را تعیین کنید.

۲ــ فرض‌کنید f بر $[0, 1]$ نامنفی و

$$\int_0^1 f(x)dx = 1$$

ثابت کنید

$$\int_0^1 \left(x - \int_0^1 uf(u)du\right)^2 f(x)dx \leqslant \frac{1}{4}.$$

۳ــ قطاری n واگن دارد. هریك از p مسافری‌که سوار قطار می‌شود (مستقل از دیگران) به تصادف واگنی را برای سوار شدن انتخاب می‌کند.

الف) احتمال اینکه حداقل یك مسافر در هر واگن سوار شود، چقدر است؟

ب) با استفاده از قسمت (الف)، مجموع زیر را حساب کنید

$$\binom{n}{1}1^p - \binom{n}{2}2^p + \binom{n}{3}3^p - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}n^p \quad \text{و} \quad 1 \leqslant p \leqslant n.$$

بارم: مساله اول ۱۵ امتیاز
» دوم ۱۵ »
» سوم ۲۰ »

سؤالات آنالیز

۱ــ تابع حقیقی f بر $[0, \infty)$ تعریف شده و صعودی است. تابع φ بر $[0, \infty)$ چنین تعریف شده است:

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt$$

الف) ثابت‌کنید به ازای هر x و $y \geqslant 0$،

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[\varphi(x)+\varphi(y)].$$

ب) نتیجه بگیرید که φ محدب است.

۲ــ تابع حقیقی g بر $[0, 1]$ پیوسته است و $g(0) = 0$.
دنبالهٔ توابع $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ چنین تعریف شده است:

$$f_n(x) = \frac{g(x)\,(\sin x)^n}{1+nx}$$

ثابت‌کنید دنبالهٔ $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ همگرای یکنواخت است.

۳ــ تابع f از $(0, \infty)$ به $(0, \infty)$ تعریف شده و دوسویی (تناظر یك‌بار یك) است و به ازای هر

$$x \text{ و } y \in (0, \infty)$$

داریم:

$$2xy \leqslant xf(x) + yf^{-1}(y).$$

الف) نشان دهید به ازای هر x و $y \in (0, \infty)$

$$\frac{y-x}{y} f(x) \leqslant f(y) - f(x) \leqslant \frac{y-x}{x} f(y)$$

ب) نتیجه بگیرید که $C \in \mathcal{R}$ای وجود دارد که به ازای هر $x \in (0, \infty)$،

$$f(x) = cx$$

(f^{-1} تابع وارون f است).

بارم: مسأله اول ۱۰+۲۰ امتیاز
» دوم ۳۰ »
» سوم ۲۰+۲۰ »

حل مسائل شماره ۲۷

۱. مجموعه $\{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ را به سه مجموعه ۵ عضوی جدا از هم طوری تقسیم کنید که حاصلجمع اعضای مجموعه‌ها باهم برابر باشند.

همچنین مجموعه $\{1, 2, 3, \ldots, 81\}$ را به نه مجموعه ۹ عضوی جدا ازهم به‌گونه‌ای تقسیم کنید که حاصلجمع اعضای همه مجموعه‌ها باهم برابر باشند.

حل. یك روش حل مسأله مانند روشی است که برای حل اولین مسأله سی‌امین المپیاد ریاضی در رشد شماره ۲۸ زمستان ۶۹ آمده است.

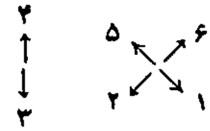
اما خانم **میترا طبالی** دانش‌آموز دبیرستان فرزانگان تهران روشی تجربی برای حل مسأله فرستاده‌اند که در اینجا می‌آوریم.
اعداد از ۱ تا ۱۵ را به‌صورت زیر درجدولی می‌نویسیم؛

۱۳	۱۴	۱۵
۱۲	۱۱	۱۰
۷ ←	۸	۹
۶ →	۵ →	۴
۱ ←	۲ ←	۳

حاصلجمع اعداد سطر اول تا سوم هر ستون از چپ به راست به ترتیب برابر ۳۴، ۳۳ و ۳۲ است.

تهیه و تنظیم: محمود نصیری

اکنون اگر اعضای سطرهای چهارم و پنجم را دو به‌دو چنان درنظر بگیریم که حاصلجمع دو به‌دوی آنها تشکیل یك سه‌تائی متوالی دهد نتیجه حاصل می‌شود.



۲+۶=۸ و ۳+۴=۷ ، ۱+۵=۶

لذا

A_1 = {۱۵ , ۱۰ , ۹ , ۵ , ۱}

A_2 = {۱۴ , ۱۱ , ۸ , ۴ , ۳}

A_3 = {۱۳ , ۱۲ , ۷ , ۶ , ۲}

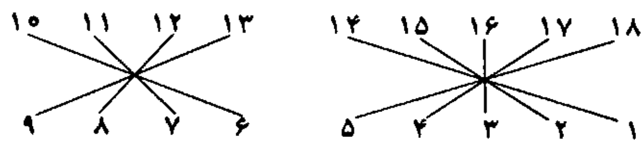
حال برای قسمت دوم نیز اعداد ۱ تا ۸۱ را در یك جدول ۹ × ۹ مانند قسمت قبل می‌نویسم.

۸۱ ۸۰ ۷۹ . . . . ۷۴ ۷۳

. . . . ۷۱ ۷۲

. . . .

۲۷ ۲۶ . . . . ۲۰ ۱۹



اکنون مانند حالت قبل باید اعضاء دو سطر آخر یعنی سطرهای ۸ و ۹ را چنان دو به‌دو باهم جمع کنیم که حاصلجمع عضوهای دوتائی، متوالی شوند. که به‌وسیله خطها این اعضا مشخص شده‌اند.

۱۸+۵=۲۳ ، ۱۳+۹=۲۲

۱۷+۴=۲۱ ، ۱۲+۸=۲۰

۱۶+۳=۱۹ ، ۱۱+۷=۱۸

۱۵+۲=۱۷ ، ۱۰+۶=۱۶

۱۴+۱=۱۵

آقای **علی‌اکبر جاوید مهر** دبیر ریاضی دبیرستانهای ساوه نیز راه‌حلی همراه با توضیحاتی فرستاده‌اند که در ذیل آنرا بیان می‌کنیم، از همکاری آقای جاوید مهر با مجله تشکر می‌کنیم.

{۱ , ۶ , ۸ , ۱۰ , ۱۵} و {۳ , ۵ , ۷ , ۱۰ , ۱۵}

{۱۴ , ۱۱ , ۸ , ۶ , ۱} و {۲ , ۴ , ۹ , ۱۰ , ۱۵}

:۱

{۳ , ۵ , ۷ , ۱۱ , ۱۴} و {۲ , ۴ , ۹ , ۱۱ , ۱۴}

{۱ , ۶ , ۸ , ۱۲ , ۱۳} و {۳ , ۵ , ۷ , ۱۲ , ۱۳}

{۲ , ۴ , ۹ , ۱۲ , ۱۳}

که سه مجموعه ۵ عضوی جدا از هم وجود دارد.

برای مجموعه

{۱ , ۲ , ۳ , ... , ۸۱}

داریم

	۴۸	۵۹	۷۰	۸۱	۲	۱۳	۲۴	۳۵	
۴۷	۵۸	۶۹	۸۰	۱	۱۲	۲۳	۳۴	۴۵	۴۷
۵۷	۶۸	۷۹	۹	۱۱	۲۲	۳۳	۴۴	۴۶	۵۷
۶۷	۷۸	۸	۱۰	۲۱	۳۲	۴۳	۵۴	۵۶	۶۷
۷۷	۷	۱۸	۲۰	۳۱	۴۲	۵۳	۵۵	۶۶	۷۷
۶	۱۷	۱۹	۳۰	۴۱	۵۲	۶۳	۶۵	۷۶	۶
۱۶	۲۷	۲۹	۴۰	۵۱	۶۲	۶۴	۷۵	۵	۱۶
۲۶	۲۸	۳۹	۵۰	۶۱	۷۲	۷۴	۴	۱۵	۲۶
۳۶	۳۸	۴۹	۶۰	۷۱	۷۳	۳	۱۴	۲۵	۳۶
۳۷	۴۸	۵۹	۷۰	۸۱	۲	۱۳	۲۴	۳۵	

۹ سطر افقی مربع ۹ × ۹ تشکیل ۹ مجموعه ۹ عضوی با مجموع ارقام ۳۶۹ را می‌دهند

۹ ستون عمودی مربع ۹ × ۹ تشکیل ۹ مجموعه ۹ عضوی با مجموع ارقام ۳۶۹ می‌دهند

اعضای دوقطر مربع نیز دو مجموعه ۹ عضوی با مجموع ارقام ۳۶۹ را می‌سازند.

این جدول یك مربع توافقی از مرتبه ۹ می‌باشد (آشنایی با تاریخ ریاضیات صفحه ۲۴۱ ترجمه دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل).

به‌طور کلی یك مربع توافقی از مرتبه n ماتریسی مربعی‌از n^2 عدد صحیح متمایز با چنان ترتیبی است که n عدد روی هرسطر یاستون یا قطر اصلی دارای مجموع یکسان باشند که

این مجموع ثابت جادویی مربع نامیده می‌شود.

مربع جادویی نرمال گفته می‌شود هرگاه n^2 عدد مزبور، اولین n^2 عدد صحیح مثبت باشند درمسأله فوق مربع جادویی نرمال می‌باشد و ثابت جادویی یك مربع جادویی نرمال از مرتبه n برابر است با $\frac{n(n^2+1)}{2}$ که در مسأله فوق ثابت جادویی $369=\frac{9(9^2+1)}{2}$ می‌باشد.

مجموع ارقام اعداد ۸۱ , ... , ۲ , ۱ عبارتست از

$$\frac{81(81+1)}{1}=3321$$

بنابراین

$$3321\div 9=369$$

یعنی مجموع ارقام مجموعه‌های ۹ عضوی حداکثر می‌تواند ۳۶۹ باشد.

می‌دانیم که یك مجموعه n عضوی دارای 2^n زیر مجموعه می‌باشد. و تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی یك مجموعه n عضوی $(k\leqslant n)$ برابر است با $\binom{n}{k}$ که ضرایب‌دوجمله‌ای نیوتن می‌باشند پس تعداد زیر مجموعه‌های ۹ عضوی یك مجموعه ۸۱ عضوی و یا مجموعه {۸۱ , ... , ۲ , ۱} برابر است با $\binom{81}{9}$ از طرف دیگر اگر مجموعه تهی را کنار بگذاریم درحالت کلی می‌توان گفت دراین تمرین بزرگترین عدد هر زیر مجموعه حداکثر ۸۱ و تعداد عضوها حداکثر ۸۱ تا می‌باشند بنابراین مجموع اعداد یك زیر مجموعه از زیر مجموعه‌های $2^{81}-1$ برابر است با 81×81 بنابراین بین $\binom{81}{9}$ زیر مجموعه، زیر مجموعه‌هایی با مجموع اعداد مساوی وجود دارد بخصوص ۹ زیر مجموعه ۹ عضوی مجزا نیز یافت می‌شود.

روش ساختن جدول جادویی نرمال فوق در صفحه ۲۴۱ آشنایی با تاریخ ریاضیات بیان شده از ذکر آن خودداری می‌کنیم.

ضمناً ۹ مجموعه ۹ عضوی دیگر غیراز مربع جادویی فوق نیز در زیر آمده است.

{۴۱ , ۱ , ۸۱ , ۲ , ۸۰ , ۳ , ۷۹ , ۴ , ۷۸}

{۴۰ , ۹ , ۷۴ , ۷ , ۷۵ , ۶ , ۷۶ , ۵ , ۷۷}

{۴۲ , ۸ , ۷۳ , ۱۲ , ۷۰ , ۱۱ , ۷۱ , ۱۰ , ۷۲}

{۳۹ , ۱۷ , ۶۷ , ۱۶ , ۶۶ , ۱۴ , ۶۸ , ۱۳ , ۶۹}

{۴۳ , ۱۵ , ۶۵ , ۲۰ , ۶۲ , ۱۹ , ۶۳ , ۱۸ , ۶۴}

{۳۸ , ۲۵ , ۶۰ , ۲۴ , ۵۸ , ۲۳ , ۵۹ , ۲۱ , ۶۱}

{۴۴ ، ۲۲ , ۵۷ , ۲۶ , ۵۶ , ۲۷ , ۵۵ , ۲۸ , ۵۴}

{۳۷ , ۳۳ , ۵۳ , ۳۰ , ۵۲ , ۳۱ , ۵۱ , ۳۲ , ۵۰}

{۴۵ , ۲۹ , ۴۹ , ۳۴ ; ۴۸ , ۳۵ , ۴۷ , ۳۶ , ۴۶}

۲. فرض‌کنیم $1\leqslant a$ ، m و n دو عدد صحیح مثبت متمایز باشند. ثابت‌کنید.

$$(a^{2^m}+1\ ,\ a^{2^n}+1)=\begin{cases}1\ , & 2\mid a\\ 2\ , & 2\nmid a\end{cases}$$

حل. چون $m\neq n$، پس یکی از دیگری بزرگتر است. بدون آنکه به‌کلیت برهان خللی وارد شود می‌توان فرض‌کرد که $m>n$. بنابراین عددی مثبت، مانند k، موجود است که $m=n+k$.

لذا $a^{2^m}=(a^{2^n})^{2^k}$، اگر $x=a^{2^n}$ آنگاه باید بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك اعداد $x+1$ و $x^{2^k}+1$ را تعیین کنیم. فرض‌کنیم بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك این دو عدد d باشد در این صورت،

$$(1)\quad d|x^{2^k}+1 \quad \text{و} \quad d|x+1$$

اما

$$(2)\quad x^{2^k}-1=(x^{2^{k-1}})^2-1$$
$$=(x^{2^{k-1}}-1)(x^{2^{k-1}}+1)$$
$$=(x+1)g(x)$$

چون $d|x+1$، بنابراین، با توجه به رابطه (۲)

$$(3)\quad d|x^{2^k}-1$$

از (۱) و (۳) نتیجه می‌شود که

$$d|(x^{2^k}+1)-(x^{2^k}-1)=2$$

یعنی $1\leqslant d\leqslant 2$. بنابراین، $d=1$ یا $d=2$ و به آسانی مشخص است که اگر a زوج باشد $d=1$ و اگر a فرد باشد، $d=2$.

۳ـ اگر n عدد صحیح مثبت بزرگتر از ۱ باشد، و فرض کنیم

$$M_n=\mathrm{Min}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

که a_1، a_2، $\cdots$، a_n اعداد حقیقی نامنفی می‌باشند که در شرط

$$\sum_{i=1}^{n} a_ia_{i+1}=1 \qquad (a_{n+1}=a_1)$$

صدق می‌کنند. آنگاه

$$M_2=\sqrt{2}\ ،\ M_3=\sqrt{3}$$

و به ازای هر $n\geqslant 4$، $M_n=2$.

حل. فرض کنیم

$$P=\sum_{i=1}^{n} a_ia_{i+1} \quad و \quad S=\sum_{i=1}^{n} a_i\,.$$

اگر $n=2$، داریم

$$S^2-2=S^2-2P=(a_1+a_2)^2-2(2a_1a_2)$$
$$=(a_1-a_2)^2\geqslant 0\,.$$

لذا $S\geqslant\sqrt{2}$، و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر

$$a_1=a_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین $M_2=\sqrt{2}$ اگر $n=3$، داریم

$$S^2-3=S^2-3P=(a_1+a_2+a_3)^2$$
$$-3(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)$$
$$=\frac{1}{2}\{(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2$$
$$+(a_3-a_1)^2\}\geqslant 0$$

لذا $S\geqslant\sqrt{3}$ و تساوی برقرار است، اگر و فقط اگر

$$a_1=a_2=a_3=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین $M_3=\sqrt{3}$ اگر $n=4$، داریم

$$S^2-4=S^2-4P=\{(a_1+a_3)+(a_2+a_4)\}^2$$
$$-4(a_1+a_3)(a_2+a_4)=(x+y)^2-4xy$$
$$=(x-y)^2\geqslant 0$$
$$(x=a_1+a_3\ ,\ y=a_2+a_4)$$

لذا $S\geqslant 2$ و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $a_1+a_3=a_2+a_4=1$.

حالا فرض کنیم $n\geqslant 5$.

بدون آنکه به کلیت برهان خللی وارد شود فرض مـی‌کنیم a_1 کوچکترین a_iها باشد. و فرض می‌کنیم

$$D=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$$
$$-(a_1-a_2+\cdots+(-1)^{n+1}a_n)^2$$

اگر n زوج باشد، آنگاه

$$D\geqslant 4(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1)=4$$

اگر n فرد باشد آنگاه

$$D\geqslant 4(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n+a_na_2)$$
$$\geqslant 4(a_1a_2+a_2a_3+\cdots$$
$$+a_{n-1}a_n+a_na_1)=4\,.$$

بنابراین در هر حالت $D\geqslant 4$، که از آنجا داریم

$$(1)\quad \Sigma a_i\geqslant 2$$

اکنون ادعا می‌کنیم در رابطه (۱) تساوی برقرار است اگر و فقط اگر عدد صحیح k، $1\leqslant k\leqslant n$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$a_{k-1}+a_{k+1}=1 \quad و \quad a_k=1$$

وتمام a_iهای دیگر برابر صفر باشند $(a_{n+1}=a_1\ ,\ a_0=a_n)$. کافی بودن شرایط به وضوح مشخص است. برای اثبات، لزوم فرض کنیم تساوی در رابطه (۱) برقرار باشد.

بنابراین به ازاء تمام $i\ ,\ j=1\ ,\ 2\ ,\ \cdots$ به‌طوری که $i+2j+1\leqslant n$، داریم

$$(2)\quad a_ia_{i+2j+1}=0\,.$$

به ویژه، $a_1a_4=1$ که نتیجه می‌دهد $a_1=0$.

علاوه بر آن، از

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=2$$

و

$$a_1-a_2+a_3-\cdots\pm a_n=0$$

به دست می‌آید:

$$(3)\quad a_2+a_4+a_6+\cdots=1$$
$$(4)\quad a_3+a_5+a_7+\cdots=1\,.$$

اگر $a_2\neq 0$، آنگاه از (۲) نتیجه می‌گیریم

$$a_5=a_7=\cdots=0$$

وبنابراین بنابر (۴)، $a_3=1$. همچنین، از(۲) نتیجه می‌شود

$$a_6=a_8=\cdots=0$$

و لذا بنابر(۳)، $a_2 + a_4 = 1$. اگر $a_2 = 0$، آنگاه به‌همین ترتیب a_4 را درنظر مـی‌گیریم. بـا به کار بردن این بحث مـی‌توانیم درحالت کلی نشان دهیم، عدد k، $1 \leqslant k \leqslant n$ وجود دارد به طوری‌که

$$a_k = 1 \quad ، \quad a_{k-1} + a_{k+1} = 1$$

و تمام دیگر a_iها برابر صفراند.

۴ـ گروه G را دوری گوئیم درصورتی که عضوی از G مانند a باشد به طوری‌که

$$G = \{a^n | n \in Z\}$$

الف. ثابت‌کنید Z یك گروه دوری است.

ب. اگر G متناهی باشد چند مولد می‌تواند داشته باشد؟

ج. اگـر G نامتناهـی باشد چند مولد می‌تواند داشته باشد؟

حل.

الف) درگـروه Z، بـا توجه به اینکه عمل جمع است، داریم

$$a^m = ma$$

بنابراین، می‌توان گفت‌که $Z = (1)$، یعنی Z به‌وسیله عضو ۱ تولید می‌شود.

ب) اگر a مولد G باشد و n تعداد اعضای G باشد و $0 < m < n$ آنگـاه مـرتبه a^m بـرابـر است بـا $\frac{n}{(m , n)}$ (‏(m , n) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك m و n است).

درنتیجه تعداد مولدهـای G برابر است بـا تعداد اعداد mهایی‌که $0 < m < n$ و $(m , n) = 1$ این تعداد m با $\varphi(n)$ (تابع φ اویلر) نمایش داده می‌شود.

ج) فرض‌کنید a مولد G باشد. چون G نامتناهـی است به ازاء هرعدد صحیح ناصفر n داریم $a^n \neq e$.

حال اگـر b نیز مـولد G باشد باید داشته باشیم، چون $b \in G(a)$،

$$b = a^k \qquad (k \in Z)$$

و چون $a \in G = (b)$، باید داشته باشیم

$$a = b^l \qquad (l \in Z)$$

در نتیجه باید داشته باشیم

$$a = b^l = (a^k)^l = a^{lk}$$

که نتیجه می‌دهد $lk = 1$. بنابراین

$$l = k = 1 \quad \text{یا} \quad l = k = -1$$

یعنی، $b = a$ یا $b = a^{-1}$. پس، G تنها دو مولد می‌تواند داشته باشد.

۵ـ اگـر تابع f در فـاصله بسته $[a , b]$ یك به یك و پیوسته بـاشد ثابت‌کنید دراین فاصله اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

حل. چون f یك‌به‌یك است و $a < b$ و لذا

$$f(a) \neq f(b)$$

درنتیجه

$$f(b) < f(a) \quad \text{یا} \quad f(b) > f(a)$$

یکـی از حالتها را بررسی مـی‌کنیم حالت دیگر شبیه‌آن است.

پس فـرض‌کنیم $f(b) > f(a)$، در این صورت ثـابت می‌کنیم تابع f اکیداً صعودی است.

اکنون‌گوئیم اگر $a < x < b$، آنگاه

$$f(a) < f(x) < f(b)$$

زیرا در غیر این صورت

$$f(a) < f(b) < f(x)$$

یا

$$f(x) < f(a) < f(b).$$

فرض‌کنیم

$$f(x) < f(a) < f(b)$$

در این صورت بنابـه قضیه مقدار میانـی، $x < x' < b$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(x') = f(a)$، که با توجه به‌یك‌به‌یك بودن تابع غیر ممکن است. به همین ترتیب

$$f(a) < f(b) < f(x)$$

نمی‌تواند برقرار باشد.

حال اگر $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ مانند فوق اگر $f(x)$ را درفاصله $[x_1 , b]$ درنظر بگیریم، آنگاه

$$f(x_1) < f(x_2) \leqslant f(b)$$

یعنی بـه ازاء هـر x_1 و x_2 از $[a , b]$ اگـر $x_1 < x_2$ آنگا $f(x_1) < f(x_2)$. یعنی تابع درفاصله $[a , b]$ اکیداً صعودی است.

۶ـ اگر تابع f به ازاء هر x از R پیوسته و متناوب با کوچکترین دورهٔ تناوب T باشد ثابت‌کنید

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx=\int_{0}^{T} f(x)dx$$

که درآن a عدد حقیقی دلخواهی است.

حل.

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx=\int_{a}^{0} f(x)dx$$

$$+\int_{0}^{T} f(x)dx+\int_{T}^{a+T} f(x)dx$$

اکنون کافی است ثابت کنیم

$$\int_{0}^{a} f(x)dx=\int_{T}^{a+T} f(x)dx$$

اگر فرض کنیم $x-T=u$ آنگاه $dx=du$ و

$$\begin{cases} x=T \quad , u=0 \\ x=a+T \quad , u=a \end{cases}$$

بنابراین

$$\int_{T}^{a+T} f(x)dx=\int_{0}^{a} f(u+T)du$$

$$=\int_{0}^{a} f(u)du=\int_{0}^{a} f(x)dx$$

۷ــ اگر n عددی طبیعی باشد عدد $\frac{n(n+1)}{2}$ را عدد مثلثی می‌نامند. ثابت کنید؛ عدد

$$A=\left(\frac{1}{8}\right)n(n+1)(n+2)(n+3)$$

یک عدد مثلثی است.

حل. A یک عدد مثلثی است، اگر عدد صحیح و مثبت k وجود داشته باشد به طوری که

$$\left(\frac{1}{8}\right)n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)k(k+1).$$

با درنظر گرفتن تساوی و با توجه به اینکه

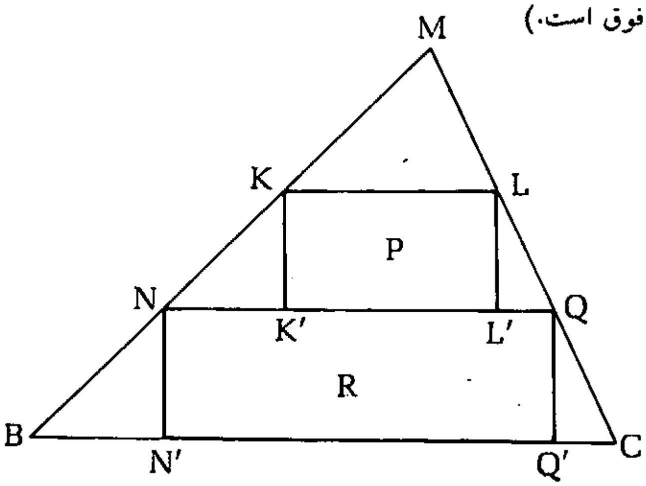
$$n(n+3)<(n+1)(n+2)$$

اگر k را برابر $\frac{n(n+3)}{2}$ اختیار کنیم آنگاه

$$k+1=\frac{n(n+3)}{2}+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

و نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

۸ــ فرض کنیم T یك مثلث با زوایای حاده باشد. دو مستطیل R و P را مطابق شکل درآن محاط کرده‌ایم. فرض کنیم مساحت هر چند ضلعی X را با A(X) نشان دهیم. دراین صورت ماکسیمم $\frac{A(R)+A(P)}{A(T)}$ را پیدا کنید. (T روی دامنه همه مثلثها و R و P روی‌دامنه تمام مستطیل‌های فوق است.)



حل. ناحیه V داخل مثلث اما خارج $R \cup P$، شامل پنج مثلث است. مثلث MKL با مثلث MBC متشابه و اگر دو مثلث NKK′ و LL′Q را مجاور هم قرار دهیم تا KK′ بر LL′ منطبق شود مثلث حاصل نیز با MBC متشابه است و به همین ترتیب اگر BNN′ و QQ′C را مجاور هم قرار دهیم تا NN′ بر QQ′ منطبق شود مثلثی که پدید می‌آید نیز با مثلث MBC متشابه است.

لذا ناحیه V شامل سه مثلث متشابه با مثلث MBC می‌باشد. اگر a و b و c را ارتفاعهای این سه مثلث درنظر بگیریم، a+b+c برابر ارتفاع مثلث MBC است.

بنابراین مسأله به این منجر می‌شود که $\frac{A(V)}{A(T)}$ مینیمم باشد. لذا

$$\frac{A(V)}{A(T)}=\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}\geqslant\frac{1}{3}$$

زیرا،

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$$

یعنی

$$(a+b+c)^2\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$$

و تساوی وقتی برقرار است که $a=b=c$.

درنتیجه، ماکسیمم $\frac{A(R)+A(P)}{A(T)}$ برابر $\frac{2}{3}$ است و این ماکسیمم وقتی به دست می‌آید که $a=b=c$.

۹- اگر a و b و c اضلاع و S مساحت مثلث ABC و p، q و r اعداد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید؛

$$\frac{p}{q+r}a^2+\frac{q}{r+p}b^2+\frac{r}{p+q}c^2\geqslant 2S\sqrt{3}$$

حل. فرض می‌کنیم $p+q+r=k$ در این صورت؛ طرف چپ را به صورت زیر نوشته و از نامساوی کوشی استفاده می‌کنیم.

$$\frac{p}{k-p}a^2+\frac{q}{k-q}b^2+\frac{r}{k-r}c^2$$
$$=k\left(\frac{a^2}{k-p}+\frac{b^2}{k-q}+\frac{c^2}{k-r}\right)-(a^2+b^2+c^2)$$
$$=\frac{1}{2}(k-p+k-q+k-r)\left(\frac{a^2}{k-p}+\frac{b^2}{k-q}+\frac{c^2}{k-r}\right)-(a^2+b^2+c^2)$$
$$\geqslant\frac{1}{2}(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$$
$$=ab+ac+bc-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$$
$$=ab+ac+bc-(ab\cos C+ac\cos B+bc\cos A)=2\left(ab\sin^2\frac{C}{2}+ac\sin^2\frac{B}{2}+bc\sin^2\frac{A}{2}\right)$$
$$=4S\left(\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{\sin C}+\frac{\sin^2\frac{B}{2}}{\sin B}+\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\sin A}\right)=2S\left(tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\right)\geqslant 2S\sqrt{3}$$

زیرا با توجه به محدب بودن تابع tg درفاصلهٔ $\left(0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$

$$tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\geqslant 3\,tg\,\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{3}=\sqrt{3}$$

تذکر ۱. نامساوی فوق نتیجه‌ای از نامساوی معروف ینسن می‌باشد. این نامساوی به صورت زیر است.

اگر تابع f در بازهٔ $(a\,,\,b)$ دوبار مشتق‌پذیر و تقعرآن به پائین باشد و $a<x_i<b$ $(i=1,2,\cdots,n)$ آنگاه

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\leqslant f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)$$

واگر تقعرآن به‌بالا باشدآنگاه جهت نامساوی برعکس است. تساوی در هرحالت وقتی برقرار است که

$$x_1=x_2=\cdots=x_n.$$

لذا در تابع $f(x)=tgx$ در بازه $\left(0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$ داریم

$$f''(x)=\frac{2tgx}{\cos^2x}>0$$

در نتیجه به ازاء هر x_i از بازه $\left(0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$

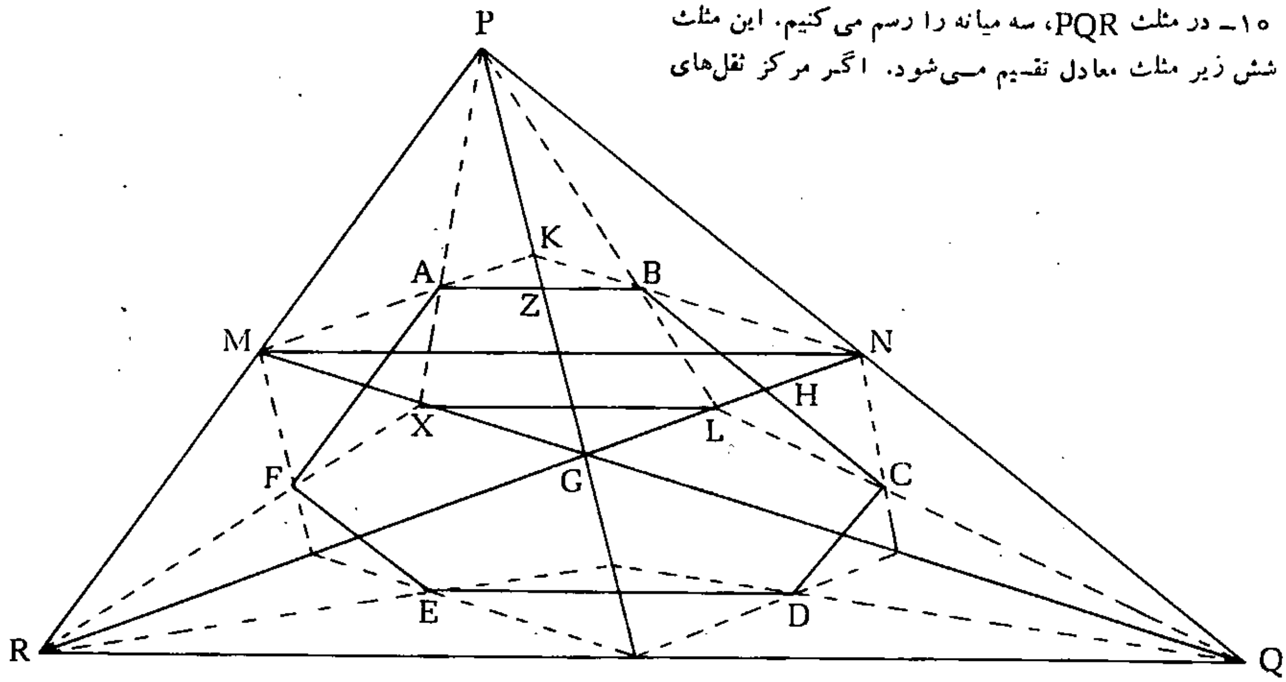
$$\sum_{i=1}^{n}tgx_i\geqslant n\,tg\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)$$
$$(i=1,2,\cdots,n)$$

و تساوی وقتی برقرار است که $x_1=x_2\cdots=x_n$.

تذکر ۲. اگر در نامساوی مسأله $p=q=r$ قرار دهیم به نامساوی زیر می‌رسیم که حالت خاص نامساوی مسأله است.

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4S\sqrt{3}$$

۱۰ـ در مثلث PQR، سه میانه را رسم می‌کنیم. این مثلث به شش زیر مثلث معادل تقسیم می‌شود. اگر مرکز ثقل‌های



این مثلث‌ها را به ترتیب A، B، C، D، E و F بنامیم، ثابت کنید مساحت شش ضلعی ABCDEF برابر $\frac{۱۳}{۳۶}$ مساحت مثلث PRQ و محیط آن نصف محیط مثلث PQR است.

حل. مساحت چهارضلعی GZBH را پیدا کرده شش برابر آن را حساب می‌کنیم مساحت مطلوب است.

$$S_{BLH}=\frac{۱}{۲}S_{BLC}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۹}S_{PLQ}\right)$$

$$=\frac{۱}{۱۸}\left(\frac{۱}{۲}S_{PGQ}\right)=\frac{۱}{۳۶}\left(\frac{۱}{۳}S_{PRQ}\right)$$

$$=\frac{۱}{۱۰۸}S_{PRQ}.$$

همچنین

$$S_{BKZ}=\frac{۱}{۲}S_{AKB}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۹}S_{MKN}\right)$$

$$=\frac{۱}{۱۸}\left(\frac{۱}{۳}S_{MNP}\right)=\frac{۱}{۵۴}S_{MNP}$$

$$=\frac{۱}{۵۴}\left(\frac{۱}{۴}S_{PRQ}\right)=\frac{۱}{۲۱۶}S_{PRQ}.$$

از طرفی

$$S_{KGLB}=\frac{۱}{۳}S_{PGN}=\frac{۱}{۱۸}S_{PRQ}$$

در نتیجه

$$S_{ABCDEF}=۶S_{GZBH}$$

$$=۶\left(\frac{۱}{۱۸}+\frac{۱}{۱۰۸}-\frac{۱}{۲۱۶}\right)S_{PRQ}$$

$$=\left(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۱۸}-\frac{۱}{۳۶}\right)S_{PRQ}=\frac{۱۲}{۳۶}S_{PRQ}$$

برای محاسبه محیط شش ضلعی چنین داریم؛

$$AF+BC+ED=\frac{۱}{۳}(PR+PQ+QR)$$

$$AB+CD+FE=\frac{۱}{۶}(PR+PQ+QR)$$

بنابراین

$$\text{محیط}\,(ABCDEF)=\frac{۱}{۲}\,\text{محیط}\,(PRQ)$$

مسائل سی و دومین المپیاد ریاضی در سوئد

روز اول

۲۶ تیرماه ۱۳۷۰

۱ـ در مثلث ABC فرض می‌کنیم I مرکز دایره محاطی باشد و نیمسازهای داخلی زوایای A و B و C اضلاع مقابل را به ترتیب در A' و B' و C' قطع کنند ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۲} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leqslant \frac{۸}{۲۷}$$

۲ـ فرض می‌کنیم $n > ۶$ یك عدد صحیح باشد و «$a_۱, a_۲, \cdots, a_k$» تمام اعداد طبیعی باشند که از n کوچکترند و نسبت به n اولند. اگر

$$a_۲ - a_۱ = a_۳ - a_۲ = \cdots = a_k - a_{k-۱} > ۰$$

ثابت کنید n یا اول است و یا به صورت توان صحیحی از ۲ می‌باشد.

۳ـ فرض می‌کنیم

$$S = \{۱, ۲, \cdots, ۲۸۰\}$$

کوچکترین عدد طبیعی n را بیابید به طوری‌که در هر زیر مجموعه n عضوی از S پنج عدد وجود داشته باشد که دو به دو نسبت اول باشند.

مدت: $۴\frac{۱}{۲}$ ساعت

بارم: هر مسأله ۷ نمره

روز دوم

۲۷ تیرماه ۱۳۷۰

۴ـ فرض می‌کنیم G یك شکل متصل باشد که دارای k پاره‌خط است. ثابت کنید می‌توان پاره‌خطهای G را با اعداد $۱, ۲, ۳, \cdots, k$ طوری نام‌گذاری کرد به‌طوری که در هر رأس که از آن دو یا بیشتر پاره‌خط می‌گذرد بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك تمام اعداد وابسته به‌این پاره‌خطها برابر ۱ باشد.

[یك شکل G از مجموعه‌ای از نقاط بنام رئوس و مجموعه‌ای از پاره‌خطها که برخی از رئوس متمایز را به هم وصل می‌کند تشکیل شده است و از هر دو رأس u و v حداکثر یك پاره‌خط می‌گذرد. G یك شکل متصل است اگر برای هر دو رأس متمایز $\{x, y\}$ دنباله‌ای از رئوس مانند

$$x = v_۰, v_۱, \cdots, v_m = y$$

وجود داشته باشد به طوری‌که از هر دو رأس v_i و $v_{i+۱}$، $(۰ \leqslant i < m)$ یك پاره‌خط در G بگذرد].

۵ـ فرض می‌کنیم P یك نقطه در درون مثلث ABC باشد. ثابت کنید حداقل یکی از زوایای $P\hat{A}B$ و $P\hat{B}C$ و $P\hat{C}A$ کوچکتر یا مساوی ۳۰° است.

۶ـ گوئیم دنباله نامتناهی $x_۰, x_۱, x_۲, \cdots$ ازاعداد حقیقی کراندار است اگر عدد ثابتی مانند u وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $i \geqslant ۰$ داشته باشیم $|x_i| \leqslant u$، عدد حقیقی $a > ۱$ داده شده است. یك دنباله نامتناهی کراندار ازاعداد حقیقی مانند $x_۰, x_۱, x_۲, \cdots$ بسازید به‌طوری‌که برای هر دو عدد صحیح و نامنفی i و j که $i \neq j$ داشته باشیم

$$|x_i - x_j| \, |i - j|^a \geqslant ۱$$

مدت: $۴\frac{۱}{۲}$ ساعت

بارم: هر سؤال ۷ نمره

مسایل
شماره ۳۱

تهیه و تنظیم از: ابراهیم دارابی

۱ــ فرض کنید ABCD چهارضلعی سطحی است که اضلاع روبه‌روی آن موازی نیستند. اگر E محل برخورد AB، CD و F محل برخورد AD، BC و M و N و P به‌ترتیب اوساط AC و BD و EF باشد و داشته باشیم

$$\overrightarrow{AE}=a\,\overrightarrow{AB}\ ،\ \overrightarrow{AF}=b\,\overrightarrow{AD}$$

ثابت کنید

$$\overrightarrow{MP}=ab\,\overrightarrow{MN}$$

(a و b اعداد حقیقی و مخالف صفر هستند).

۲ــ مساحت ذوزنقه را برحسب طول دو قطر و پاره خطی که اوساط دو قاعده را به هم وصل می‌کند حساب کنید.

(فرستنده: کافیه کیومرثی، دانش‌آموز، شهر کرد).

۳ــ فرض کنید $k \geqslant 2$ عددی صحیح است و به ازای هر عددی طبیعی n داریم

$$f(n)=[(m+n^{1/k})^{1/k}]+n$$

برد تابع f را بیابید. ([ ] تابع جزء صحیح است).

۴ــ اگر $0<\theta<\pi$ ثابت کنید

$$\arcsin\frac{\theta}{6}+\arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\frac{\theta}{4}\right)<\frac{\theta}{3}$$

۵ــ مقادیری از x و y را پیدا کنید که در معادله

$$x^2+4x\cos(xy)+4=0$$

صدق کند.

۶ــ فرض کنید که m یك عدد طبیعی فرد باشد.

(الف) ثابت کنید در میان m عدد فرد متوالی یکی از آنها بر m بخش پذیر است.

(ب) طولانی‌ترین تصاعد عددی در اعداد اول را که قدر نسبت آن ۲ است به دست آورید (منظور تصاعد عددی یا بیشترین جمله است).

۷ــ ثابت کنید درهر $2n$ ضلعی محدب قطری یافت می‌شود که با هیچ یك از اضلاع آن موازی نیست.

۸ــ ده مرد در مسابقه تنیس روی میز شرکت کرده‌اند. هر دو نفر از آنها بین خودشان یك‌بار بازی را به انجام رسانده‌اند. اولین بازیکن در طول مسابقات x_1 برد و y_1 باخت، دومین بازیکن x_2 برد و y_2 باخت و... داشته‌اند. ثابت کنید

$$x_1^2+\cdots+x_{10}^2=y_1^2+\cdots+y_{10}^2$$

۹ــ ثابت کنید

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(n^2+3n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{2}{3}$$

۱۰ــ مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$\int\frac{dx}{2\cos^2x+\sin x\cos x+\sin^2x}$$

پاسخ به نامه‌ها

آقای شهروز وجدی، دانش‌آموز، زنجان

با تشکر از شما، مسایل ارسالی شما را دریافت کردیم. سعی مجله بر آن است که حتی‌المقدور از چاپ مسایل کتابهای منتشر شده در ایران خود داری کند.

آقای اسدا... خاکپور، دانش‌آموز، بروجن

در اثبات نامساویها در مثلث، برخلاف تصور شما، از قضایای کتاب (مربوط به نامساویها) استفاده شده است.

آقای ابوالقاسم شکری، دانش‌آموز، زنجان

رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن دو قطر و یك ضلع به طریق ابتدایی، یعنی با معلوم بودن سه ضلع مثلث قابل رسم است. شما مسأله‌را مشکل کرده‌اید. موفقیت شما را آرزومندیم.

خانم هما اعلمی‌میلانی، دانش‌آموز، تهران

منظور از $\alpha \to \infty$ یعنی یك ضلع زاویه α را ثابت نگهداریم وضلع دیگر را دریك جهت به تعداد بیشمار دوران دهیم.

آقای ابراهیم نصرآبادی، دانش‌آموز، مشهد

ضمن تشکر از ابراز لطف شما نسبت به مجله، متأسفانه شماره‌های اول مجله رشد ریاضی کمیاب است.

آقای علی‌اکبر جاوید مهر، دبیر، ساوه

ضمن تشکر از همکاری پیگیر و صمیمانه شما با مجله، حل همه مسایلی که برای ما فرستاده‌اید دریافت کرده‌ایم و می‌دانیم که شما تقریباً حل همه مسایل را در هر شماره، برای ما می‌فرستید. علت اینکه این بار نام شما را در مجله درج نکردیم این بود که فکر کردیم بهتر است نام همکاران دبیر را از دانش‌آموزان دانشجویان جدا بکنیم و آنها را جزو کسانی که در حل مسأله ما را یاری داده‌اند اعلام نکنیم. متأسفانه در این مدت که هنوز نتوانسته‌ایم سبك درج آن را در مجله به درستی تعیین کنیم، امیدواریم همکاری‌تان را از ما دریغ نکنید.

آقای امیر صادقی، تهران

با تشکر، مسایل شما را دریافت کردیم، درصورت نیاز در بخش مسایل ویژه دانش‌آموزان درج خواهد شد.

آقای محسن قشلاقی، دانش‌آموز، اقلید

از تساوی $x^3 = 2a^3$ نتیجه می‌شود $x = a\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[3]{2}$ در هندسه با اصول اقلیدس قابل رسم نیست. این مسأله همان‌طور که اطلاع دارید، مسأله تضعیف مکعب است و از مسایل لاینحل در هندسه می‌باشد و کوششی برای اثبات آن به‌جایی نمی‌رسد. به سایر سؤالات شما، به طریق دیگر جواب خواهیم داد.

آقای امیر حمیدی، دانش‌آموز، تهران

ضمن تشکر از شما از مسایل ارسالی شما بازهم استفاده خواهیم کرد. موفقیت شما را آرزومندیم.

خانم صدیقه طاهری، دانشجو، تهران

اثبات قضیه فرما، برای n برابر ۳، ۴، ... از تکنیکهای خاص و دقت ریاضی قابل ملاحظه‌ای برخوردار است. ولی به ازای هر عدد طبیعی n حل نشده است، و شما نیز از اثبات آن صرفنظر کنید.

آقای آرام خلیل‌پور، دانش‌آموز سوم ریاضی، آستارا

تعدادکثیری ازخوانندگان سعی در اثبات قضیه بزرگ فرما داشته‌اند که موفق نشده‌اند، و همه براهین ارائه شده نادرست بوده است. برهان شما نیز از این قاعده مستثنی نیست. در ضمن، مسایل ارسالی شما در بخش مسایل مورد استفاده قرار می‌گیرد.

آقای عبدالرضا صادقی، دانش‌آموز، تهران

قاعده تفریق شما برای اعداد خاص است که کاربرد آن چندان وسیع نیست. صورت قاعده شما چنین است:

$$ab - ba = (a - b) \times ۹$$

$$۸۲ - ۲۸ = ۶ \times ۹ = ۵۴$$

آقای محمدرضا شباب، دانش‌آموز دوم تجربی، بیرجند

قاعده ضرب شما، در مورد اعدادی که به ۵ ختم می‌شوند، طولانی است. بنابراین، کاربرد عملی آن مشکل است. اما، قاعدهٔ ذیل، برای مربع اعداد دو رقمی که به ۵ ختم می‌شوند،

مفید است:

دو رقم اول ۲۵ و بقیه ارقام از حاصلضرب رقم دهگان در تالی آن به دست می‌آید؛ یعنی:

$$(۲۵)^{۲}=۶۲۵$$

$$(۳۵)^{۲}=۱۲۲۵$$

آقای آرتین کاتبی‌دانش، دانش‌آموز

متأسفانه نام شما خوانا نبوده است. ما از خوانندگان تقاضا داریم که مشخصات خود را، جهت مکاتبات بعدی، واضح وخوانا بنویسند. مسأله ارسالی هندسه شمادرکتاب بازآموزی هندسی تألیف آقای مصحفی آمده است. در ضمن، قاعده‌ای که برای بخشپذیری یك عدد بر ۷ نوشته‌اید پیچیده است وکاربرد عملی آن مشکل است. صورت قاعده شما چنین است:

«عددی بر ۷ بخشپذیر است که ۲ برابر رقم یکان آن منهای ارقام باقیمانده بر ۷ بخشپذیر باشد».

ملاحظه می‌کنید که عدد مورد نظر بیش‌از ۲ رقم داشته باشد، قاعده شما کاربرد ضعیفی دارد. اما قاعده‌ای که معمولاً به کار برده می‌شود چنین است:

اولین رقم سمت چپ را سه برابر کرده با رقم بعدی جمع می‌کنیم؛ مضارب ۷ آن را کنار گذاشته حاصل را سه برابر کرده با رقم بعدی جمع می‌کنیم. عمل را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم اگر حاصل صفر شود آن عدد بر ۷ بخشپذیر است. مثال عددی، عدد ۲۳۸ بر ۷ بخشپذیر است. زیرا، سه برابر رقم صدگان به اضافه رقم یکان برابر ۹ است که اگر مضرب ۷ آن را کنار بگذاریم و حاصل را سه برابر کرده با رقم بعدی جمع کنیم عدد ۱۴ حاصل می‌شود که بر ۷ بخشپذیر است.

آقای رحیم صفاری، دانش‌آموز، خمینی شهر

از ارسال مقاله برای درج در مجله تشکر می‌کنیم. اما، درج مقاله شما تکرار مطالب است. زیرا، در زمینه اعداد مثلثی و مربعی مقالات متنوعی در مجله چاپ شده است. امید آن داریم که مطالعه، در زمینه ریاضی را، در دانشگاه ادامه دهید.

خانم نسترن مؤذن، دانش معلم، شیراز

با تشکر از یادآوری شما درمورد حل مسأله دوم، یادآور می‌شویم که با وارد شدن y در پرانتز اول صورت مسأله تغییر کرده. اما همان طوری که نوشته‌اید، راه حل مسأله همان است.

آقای محمدرضا رحمانیان، سمنان

با تشکر از شما، مسایل ارسالی‌تان را دریافت کردیم، درصورت لزوم، از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای علی ثابت‌قدم، دانشجو، گچساران

رشته بیو ماتیماتیك (bio mathematic) رشته‌ای است نسبتاً جدید در مورد کاربرد ریاضیات در بیولوژی؛ و مجله مخصوص به خود دارد که در سطح دنیا منتشر می‌شود. این رشته نیاز به اطلاع بیشتری در زمینه ریاضیات دارد و ممکن است برای یك دانشجوی پزشکی چندان قابل استفاده نباشد.

آقای رضا ناصر، دانش‌آموز، تبریز

در مورد پخش سریع مجله رشد ریاضی در شهرستانها، اقداماتی شروع شده است. امید داریم به نتیجه برسد. سؤالات امتحانات کشورهای خارج در آن حد که به دست ما می‌رسد، در مجله مطرح می‌شود.

آقای فرزام حاج‌ابراهیمی، دانش‌آموز، تبریز

با تشکر از شما حل مسایل ارسالی را دریافت کردیم. درمورد حل معادله درجه سوم از راه انتگرال، نه‌خیر، از این طریق نمی‌توان معادله را حل کرد. برای مثال، شما معادله

$$x^{۳}+x^{۲}-x-۱=۰$$

را از همان راه حل کنید.

درمورد حل معادله

$$x^{۲}+۲^{x}-۸=۰ \qquad (x\in R)$$

راه منطقی شاید طریق گراف باشد.

آقای عیسی عباسی، دانش‌آموز، تبریز

ضمن تشکر یادآوری می‌کنیم که مسایل ارسالی را با حل بفرستید. در ضمن بهتر است مسایل تکراری نباشد.

اسامی خوانندگانی که حل مسایل شماره ۲۵ را فرستاده‌اند

آقای آرمین کاضمیان، دانش‌آموز، کرج. ۴-۸-۱۴

« صمد جابری، دانش‌آموز، میانه. ۴-۸-۹-۱۱-

« سید محمد صادق موسوی‌فرد، دیپلمه، شیراز. ۴-۱۰

« حسین رستمی، دانش‌آموز، آشتیان. ۲-۴-۸-۱۱-۱۲

« آرش جعفری باستانی، دانش‌آموز، کرج.
۱-۴-۸-۱۴-۱۶

« علیرضا محی‌الدین کرمانی، دانش‌آموز، تهران.
۱-۴-۸-۱۲

« رامین، م. معطری، دانش‌آموز، بروجرد.
۴-۱۲-۱۳-۱۴-

« آدم نقی‌پور، دانشجو، تبریز. ۱۷-۱۸

خانم طاهره نباهت، دانش‌آموز، تبریز. ۸-

آقای سید مهدی حسینی، دانش‌آموز، اصفهان.
۱-۲-۸-۱۰

« حسین رحمانی، دانش‌آموز، اراک. ۱-۶-

« محمد علیاری، تهران.
۱-۲-۴-۵-۸-۹-۱۱-۱۲-۱۶

خانم نسترن مجاهد، دانش‌آموز، بجنورد.
۴-۵-۹-۱۰-۱۴

آقای حمید احمدی، دانش‌آموز، کنگان. ۱-۴-

« آرش یاوری و محمدرضا تجلی، دانش‌آموز، سمنان.
۳-۴-۸-۱۰

اطلاعیه

مجلات رشد آموزش مواد درسی مدارس کشور که به منظور ارتقاء سطح دانش معلمان و ایجاد ارتباط متقابل میان صاحبنظران، معلمان و دانشجویان با برنامه‌ریزان امور درسی از سوی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کُتب درسی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش هر سه ماه یکبار ــ چهار شماره در سال ــ منتشر می‌شود و در حال حاضر عبارتند از:

۱ ــ آموزش ریاضی ۳۱
۲ ــ آموزش شیمی ۲۷
۳ ــ آموزش جغرافیای ۲۶
۴ ــ آموزش ادب فارسی ۲۵
۵ ــ آموزش زیست‌شناسی ۲۴
۶ ــ آموزش زبان ۲۸
۷ ــ آموزش زمین‌شناسی ۲۲
۸ ــ آموزش فیزیک ۲۵
۹ ــ آموزش معارف اسلامی ۱۲
۱۰ ــ آموزش علوم اجتماعی ۸

دبیران، دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر علاقه‌مندان به اشتراک این مجلات می‌توانند جهت دریافت چهار مجله در سال مبلغ ۸۰۰ ریال به حساب ۹۰۰۵۷ نزد بانک ملی شعبه خردمند جنوبی ـ قابل پرداخت در کلیهٔ شعب بانک ملی ـ واریز و فیش آن را همراه با فرم تکمیل شده زیر به نشانی تهران، جاده آبعلی، خیابان سازمان آب، بیست‌متری خورشید، مرکز توزیع انتشارات کمک آموزشی کد پستی ۱۶۵۹۸ ــ تلفن ۷۷۵۱۱۰ ــ ارسال دارند. ضمناً؛ معلمان، کارشناسان، مدیران، پژوهشگران و سایر علاقه‌مندان به امور تعلیم و تربیت جهت آگاهی بیشتر از یافته‌های صاحبنظران می‌توانند با پرداخت مبلغ ۸۰۰ ریال در هر سال ۴ جلد فصلنامه تعلیم و تربیت دریافت نمایند.

*** دانشجویان مرکز تربیت معلم می‌توانند با ارسال فتوکپی کارت تحصیلی خود از ۵۰٪ تخفیف برخوردار شوند.**

فرم اشتراک مجلات رشد تخصصی

اینجانب .... با ارسال فیش واریز مبلغ ۸۰۰ ریال، متقاضی اشتراک یکسالهٔ مجلهٔ رشد آموزش .... هستم.

نشانی دقیق متقاضی: استان .... شهرستان .... خیابان ....

کوچهٔ .... پلاک .... کُد پستی .... تلفن ....

Contents

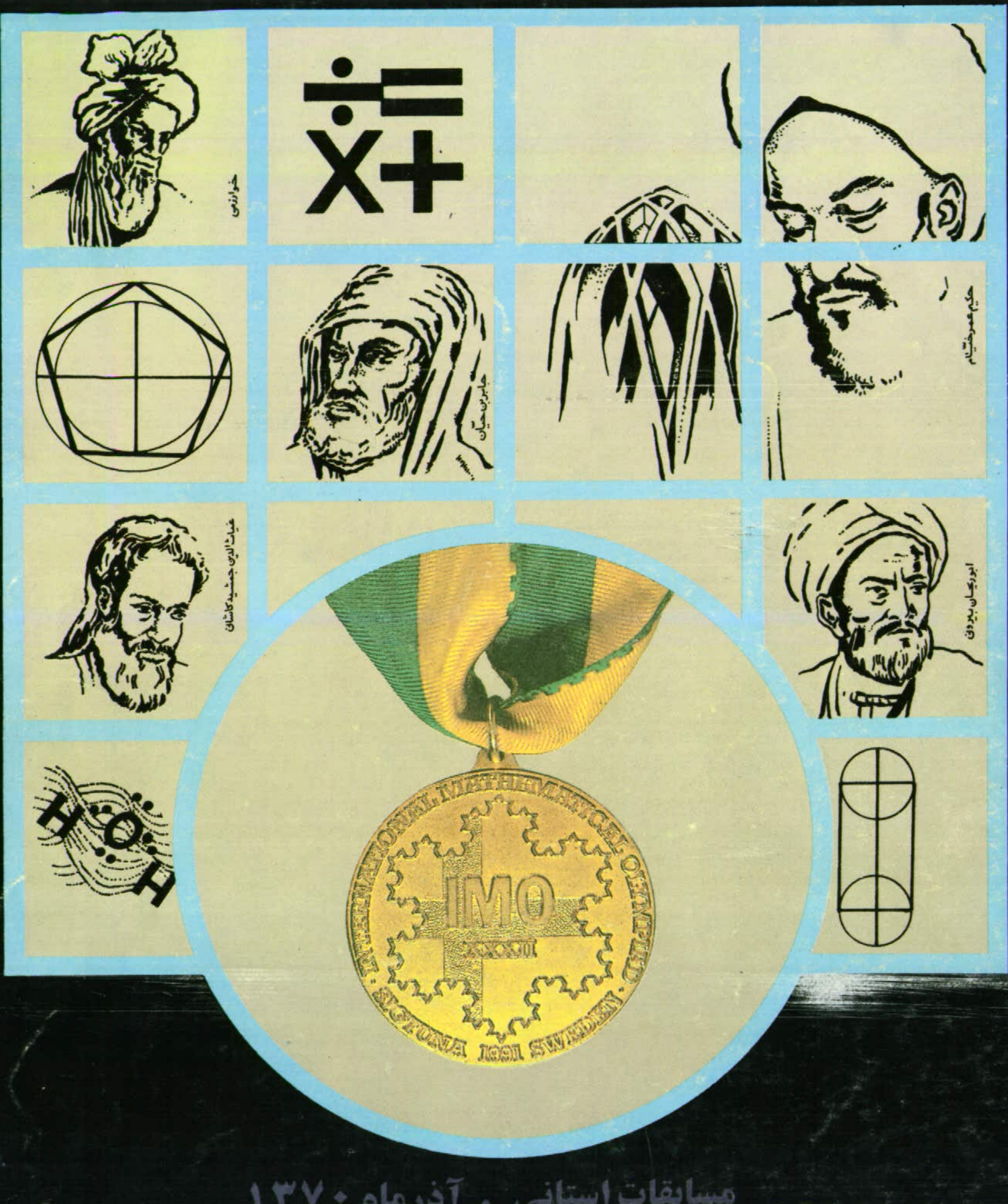
Roshd, Magazine of Mathematical Education,Vol IIX No.31, Autumn 1991 Mathematics Section, 274 BLDG – No. 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave., Tehran – Iran.

A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.

جمهوری اسلامی ایران

المپیاد علمی دانش آموزان ایران

ریاضی ـ کامپیوتر ـ شیمی



مسابقات استانی . آذرماه ۱۳۷۰

مسابقات کشوری . دههٔ مبارک فجر ۱۳۷۰

المپیاد جهانی تابستان ۱۹۹۲

ریاضی ـ شوروی، شیمی ـ آمریکا، کامپیوتر ـ آلمان

وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی