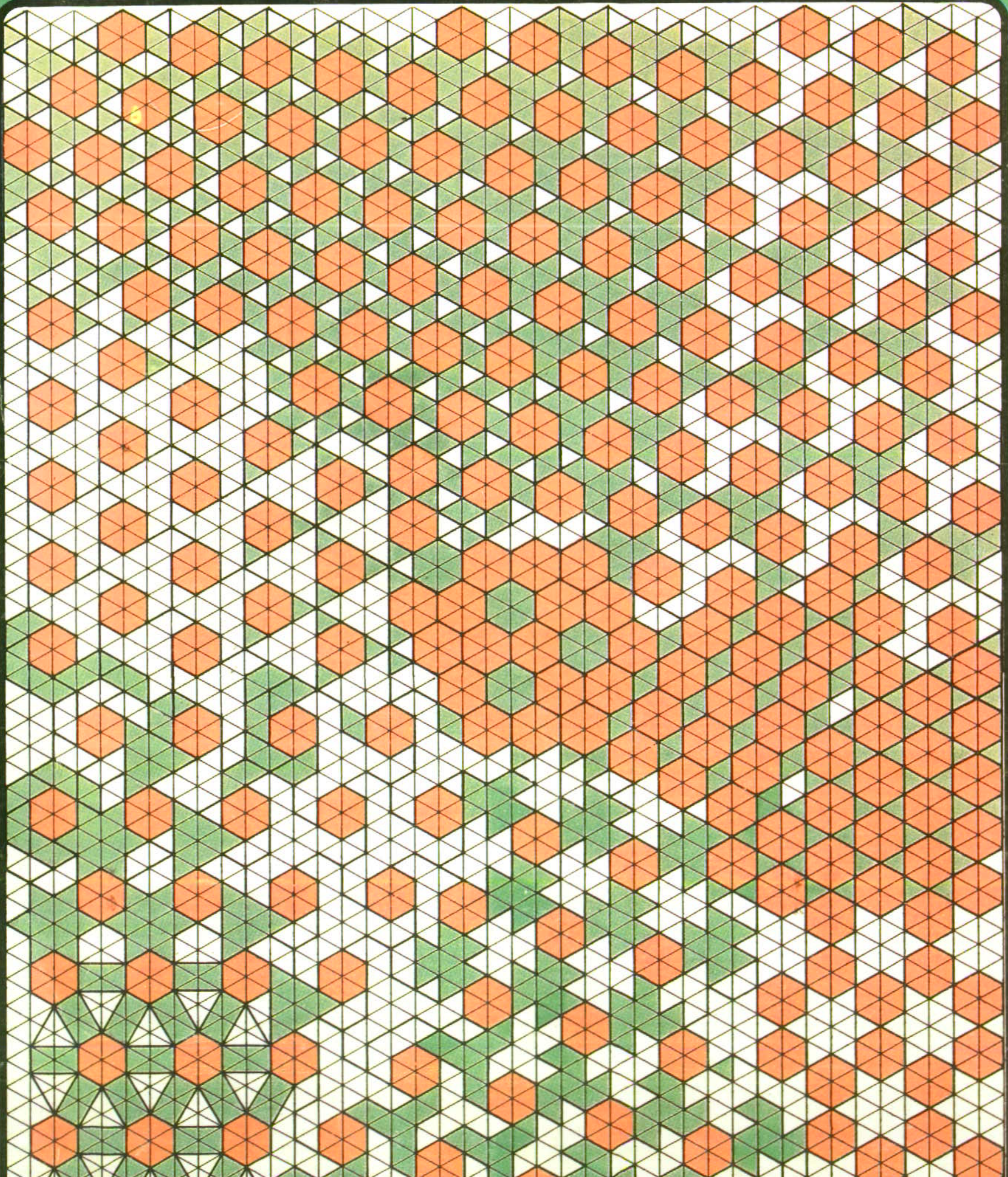
رشد آموزش ریاضی

سال هشتم ـ تابستان ۱۳۷۰ ـ شمارهٔ مسلسل ۳۰

بها: ۲۰۰ ریال



بسم‌الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یکبار از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی منتشر می‌شود هدف از انتشار این مجله اعتلای دانش ریاضی دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلّم است. علاوه بر این ایجاد ارتباط متقابل بین معلّمین ریاضی و دفتر تحقیقات، به منظور تبادل تجارب، ارائه روشهای جدید آموزش ریاضی، معرفی جنبه‌های تاریخی، فلسفی، کاربردی ریاضیات در سطح پیش دانشگاهی است. هیأت تحریریه از مشارکت و همکاری همهٔ علاقه‌مندان بویژه دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان در ارائه مقالاتی در زمینه‌های زیر استقبال می‌کند:

الف) آموزش ریاضی (طرح و بررسی آموزش ریاضی، بویژه آموزش ریاضی در دوره‌های پیش دانشگاهی).

ب) تاریخ ریاضی (مشتمل بر سیر تحول مفاهیم ریاضی، شرح و احوال ریاضیدانان و کارهای علمی آنها، بویژه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی).

ج) فلسفه ریاضی (تبیین مفاهیم ریاضی، ریاضیات چیست، بررسی مکاتب ریاضی، بررسی ارتباط تاریخ و فلسفه ریاضی).

ریاضی کاربردی (مشتمل بر مباحثی در زمینه‌های آنالیز عددی، کامپیوتر و برنامه‌ریزی، تحقیق در عملیات، آمار و احتمال).

د) سایر مباحث ریاضی (مشتمل بر مقالات مختلفی در زمینه‌های مختلف، ارائه راه‌حلهای مختلف برای مباحث ریاضی، ارائه مسائل نمونه).

رعایت نکات زیر در مورد مقالات ارسالی ضروری است:

۱) مقالات ارسالی باید در چهارچوب اهداف فوق و با سبکی مشابه با سبک مقالات چاپ شده در رشد ریاضی باشد و در سطحی عرضه شوند که ضمن داشتن محتوی مطلوب دارای کیفیت عرضه مطلوب هم باشند؛

۲) مقالات باید با خط خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) و به صورت یک سطر در میان و با در نظر گرفتن جای کافی در حاشیه تهیه شود و صفحات به طور دقیق شماره‌گذاری شود؛

۳) فهرست مراجع مقاله به طور کامل و در دو قسمت فارسی و خارجی و به ترتیب الفبایی و طبق استاندارد مقالات علمی درج شود؛

۴) مقالات ترجمه شده از زبانهای خارجی همراه با متن اصلی ارسال شود؛

۵) مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور به چاپ رسیده باشد؛

۶) رد یا قبول و حک و اصلاح و ویراستاری مقالات به عهدهٔ هیأت تحریریه است.

رشد آموزش ریاضی

سال هشتم ـ تابستان ۱۳۷۰ ـ شمارهٔ مسلسل ۳۰

نشریهٔ گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تلفن ۴ ـ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۵۰)

سردبیر: دکتر محمدحسن بیژن‌زاده

مدیر داخلی: میرزا جلیلی

مسوول هماهنگی و تولید: فتح‌ا... فروغی

صفحه‌آرا و رسام: محمدپریسای

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر دانش‌پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. جهت ارتقاء کیفی آن نظرات ارزنده خود را به صندوق پستی تهران ۳۶۳ ـ ۱۵۸۵۵ ارسال فرمائید.

فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

شکی نیست که یکی از شاخص‌های مهم درتشخیص فعالیت‌های آموزشی وتحقیقاتی درهر جامعه‌ای برگزاری گردهمایی، سمینارها وکنفرانس‌های آموزشی و علمی درسطوح مختلف می باشد. یکی از دلایل عمده بر این مدعی از بین رفتن مرزبندیهای سنتی بین دو نوع فعالیت است این دوفرایند عبارتند ازفراگیری و آموزش. فطرت آدمی به گونه‌ای است که چنانچه برای مدتی ولو نسبتاً کوتاه نتواند وجود خود را به فراگرفتن دانشها، مهارتها وتخصصهای بیشتری سرگرم نماید انجام وظایف عادی خود را چه بسا خسته کننده وملال‌آور خواهد یافت. ازسویی در روند تکامل اجتماعی، ارائه نوآوریها، سرعت پیشرفتهای تکنولوژیک وعلمی به گونه‌ای است که همهٔ تخصصها را نیازمند آموزشهای مستمر جهت دانش‌افزایی و تبادل نظرهای سازنده کرده است.

آموزش و پرورش که از اساسی‌ترین ومبرم‌ترین نیازهای جوامع امروزی به شمار می‌رود از این قاعده کلی مستثنی نبوده و درحیطه فعالیتهای فراگیر خود به‌امر دانش افزایی و رفع مشکلات آموزشی معلمان و دبیران و اطلاع از چند و چون برنامه‌های در دست اجرا نیاز فراوان دارد.

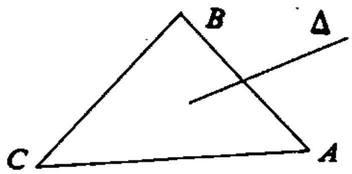
بقیه در صفحه ۱۱

درسهایی از هندسه‌های نا اقلیدسی

در شورای برنامه‌ریزی بحث بر سر این بود که دانش‌ـ آموزان دبیرستان با هندسهٔ نااقلیدسی که در دانشگاهها تدریس می‌شود آشنائی مختصر پیدا کنند بـدین خاطر تصمیم گرفته شد کـه در مجلهٔ رشد این هندسه مطرح شود تا خوانندگان عزیز مختصر آشنائی با آن پیدا کنند.

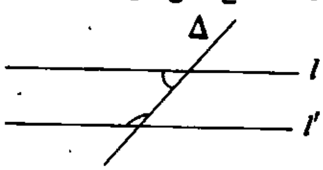
امیرخسروی
عضو هیئت علمی دانشگاه تربیت‌معلم

اصول اقلیدس حدود دو هزار سال به عنـوان یـك دستگاه اصول موضوعه پذیرفته شده بود و در راه آموزش علم هندسه و تفکر منطقی از آن استفاده می‌شد. البتـه گاهی عده‌ای از دانشمندان مطالبی را پیدا می‌کردند که اقلیدس بدون اثبات به‌کار برده بود و از آن جمله می‌ـ توان از اصل پاش «قضیهٔ پاش» نام برد:



اگر خطی مانند Δ یکی از اضلاع مثلث مثلا AB را در نقطه‌ای بین A و B ببرد لااقل یکی از دو ضلع دیگر را خواهد برید».

گرچه اقلیدس پنج اصل انتخاب کرد ولی اصل پنجم او مشهور به اصل توازی، اگر قاطعی دو خط l و l' را قطع کند بطوری که مجموع اندازه‌های زوایای داخلی در یك طرف آن از ۱۸۰ درجه کمتر باشد آنگاه l و l' همدیگر را در همان طرف قاطع قطع می‌کنند،



به اندازهٔ بقیهٔ اصول بدیهی نبود. زیرا این اصل را، که از دو نقطهٔ متمایز خط یکتایی می‌گذرد، می‌تـوان بـا قرار دادن خط‌کش غیر مدرجی که دو نقطه روی لبهٔ آن واقعند تحقیق کرد (البته ممکن است نیاز بـه‌خط‌کشی دراز باشد اما در هر صورت متناهی است). ولی در اصل توازی بایستی تمام خط l را برای اطمینان از عدم‌تقاطع با l' پیمود. لذا در صدد برآمدند که اصل توازی را از روی بقیهٔ اصول ثابت کنند و ظاهراً «پروکلوس» اولین کسی بود که به‌این اصل شك کرد و مسئلهٔ هذلولی و مجانب آن را مثال زد که اصل توازی مطابقت نمی‌کرد. «پلی‌فر» صورت معادلی برای اصل توازی به‌دست آورد که امروزه به اصل توازی مشهور است.

اگر P نقطه‌ای خارج خط l باشد آنگاه خط یکتایی مانند l' هست که از P می‌گذرد و l را قطع نمی‌کند.

دانشمندان دیگری روی اصل توازی تحقیقاتی انجام دادند اما معمولا از یك صورت معادل اصل توازی برای اثبات آن استفاده می‌کردند که می‌تـوان از لـژانـدر، فورکوش‌بویوئی، خیام، خواجه نصیر طوسی، ساکـری، والیس و لامبرت نام برد. خیام در زمره ریاضیدانانی بود که گفت اصل پنجم شباهتی به اصل ندارد و درصدد

اثبات آن برآمد اما از مطالب ثابت نشدهٔ زیادی استفاده کرد ولی چهار ضلعیهایی ساخت که امروزه به چهار ضلعی ساکری مشهور است. خواجه نصیر کارهای خیام را دنبال کرد و ظاهراً اولین کسی بود که به رابطهٔ بین اصل توازی و اینکه مجموع زوایای مثلث مساوی ۱۸۰ درجه است توجه کرد. والیس که مجذوب کارهای خواجه نصیر شده بود از او جلوتر رفت و اثباتی برای اصل توازی ارائه داد منتها از مطلبی ثابت نشده استفاده کرده بود که امروزه به اصل والیس مشهور است:

«به ازای هر خط EF و هر مثلث ABC مثلثی مانند DEF هست که با مثلث ABC متشابه است». ثابت می‌شود که اصل والیس با اصل توازی معادل است. ساکری کارهای والیس را دنبال کرد و چهارضلعی‌هایی مانند

در نظر گرفت که زوایای $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ قائمه‌اند و اضلاع AB و CD قابل انطباقند (مساویند) و ثابت کرد که زوایای $\widehat{A}$ و $\widehat{D}$ قابل انطباقند. این زاویه سه‌حالت دارد، منفرجه، قائمه‌یاحاده ولی‌توانست‌فرض‌منفرجه‌بودن‌را ردکند و از فرض‌زاویهٔ قائمه اصل‌توازی را ثابت‌کند، اما از فرض زاویهٔ‌حاده‌به‌تناقضی نرسید وگرچه موفق به‌کشف هندسهٔ نااقلیدسی شده بود ولی ناباورانه فریاد زد فرض‌زاویهٔ حاده با ذات خط مستقیم ناسازگار است. لامبرت‌کارهای ساکری را دنبال کرد و نتایج بهتری گرفت او چهار ضلعی‌هایی ساخت که سه زاویهٔ قائمه داشتند و امروزه به چهار ضلعی لامبرت مشهورند و با استفاده از کرهٔ به شعاع موهومی توابع هذلولوی را بسط داد ولی از آنها در بررسی خطوط موازی استفاده نکرد اما حدس زده بود که بتوان هندسهٔ نااقلیدسی را بر روی کرهٔ به‌شعاع موهومی تحقیق کرد. بعداً فورکوش‌بویوئی که همکلاسی گاوس بود مجذوب اصل توازی شد و تلاش زیادی برای اثبات اصل توازی کرد و مکاتباتی با گاوس‌داشت‌وگاهی گاوس اثباتهای او را تصحیح می‌کرد و صورتهای معادل مختلفی برای اصل توازی به‌دست آمده بود «واختر» دبیر دبیرستان درصدد برآمد که ثابت کند از هر چهار نقطهٔ فضایی غیرواقع در یک صفحه یک کره می‌گذرد و این منجر شد به اینکه از هر سه نقطه روی یک صفحه و غیر واقع بر یک خط دایره‌ای می‌گذرد و بنابرآنچه فورکوش بویوئی ثابت کرده بود اصل پنجم ثابت می‌شد واختر فقط ۲۵ سال زیست و شاگرد گاوس بود که گاوس در اثر بحثهایی که با او دربارهٔ هندسهٔ ضداقلیدسی داشت دیدگاهش در مورد هندسه عوض شد.

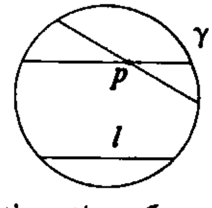
اشوایکارت دانشجوی حقوق ولی علاقمند به ریاضی بود و در کلاسهای هاوف شرکت می‌کرد. او نظریهٔ‌خطوط متوازی را از دیدگاه دیگری بررسی کرد و در کنارهندسهٔ اقلیدسی که مجموع زوایای مثلث در آن ۱۸۰ درجه‌است هندسه‌ای بنام هندسهٔ ستاره‌ای را در نظر گرفت که در آن مجموع زوایای مثلث از ۱۸۰ درجه کمتر بود و هرچه مجموع زوایا کوچکتر می‌شد مساحت مثلث بزرگتر می‌گردید و ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین با ضلع آن‌بزرگ‌تر می‌شد اما هیچگاه از طول معینی که ثابت خوانده می‌شد تجاوز نمی‌کرد و اگر این ثابت برابر ∞ گرفته می‌شد هندسه اقلیدسی نتیجه می‌شد این موضوع در ۱۸۱۶ به نظرش رسید و در ۱۸۱۸ آن را جهت نقد و بررسی به یکی از دوستان گاوس فرستاد و گاوس از او تمجید کرد و گفت اگر قرار بود من بنویسم تقریباً همین‌طور می‌نوشتم با وجودی که اشوایکارت نتیجهٔ پژوهشهایش را منتشر نکرد ولی خواهرزاده‌اش «تاورنیوس» راتشویق کرد که به‌بررسی خطوط موازی بپردازد و او مدت کوتاهی به‌تحصیل حقوق پرداخت تا بقیهٔ عمر خود را صرف مطالعهٔ علوم مورد علاقه‌اش نماید ولی در مورد خطوط موازی با دائیش هم‌عقیده نبود. او فرض‌زاویهٔ منفرجه را کنار گذاشت و گرچه از فرض زاویهٔ حاده به ثابت اشوایکارت برخورد و نتایجی بدست آورد که از نظر منطقی معتبر بودند ولی چون معتقد بود که فرض زاویهٔ قائمه تنها فرضی است که به هندسه‌ای قابل‌اعتبار منجر می‌شود، فرض زاویهٔ حاده را نیز کنار گذاشت. او برخی از فرمولهای توابع هذلولوی را بنام مثلثات نااقلیدسی از روی کرهٔ به‌شعاع موهومی به‌دست آورد و این‌فرمولها هندسهٔ حاصل از فرض زاویهٔ حاده را بخوبی توصیف می‌کنند. البته متوجه شد که ساکری و لامبرت بر او مقدم بوده‌اند لامبرت هم قبل از او توابع مثلثاتی با متغیر موهومی را در نظر گرفته و موفق به بسط توابع هذلولوی شده بود اما از آن برای موازیها استفاده نکرده بود.

در این زمان ثابت شده بود که اصل توازی با اینکه مجموع زوایای هر مثلث مساوی ۱۸۰ درجه است معادل می‌باشد. می‌گویند «گاوس» از یک قلهٔ کوه دو ستاره را رصد می‌کرد و متوجه شد که مجموع زوایای مثلث باتوجه به‌احتمال خطا همیشه ۱۸۰ درجه نیست بلکه تنها می‌توان نتیجه گرفت که مجموع زوایای مثلث از ۱۸۰ درجه بیشتر نیست و بعد مثلثهایی با سه رأس روی زمین در نظر گرفت و به همین نتیجه رسید. ولو «گاوس» چنین تحقیقی انجام نداده باشد اولین روش علمی است که در مورد اصول موضوعه انجام شد و در همین دوران «یانوش بویوئی» پسر «فورکوش بویوئی» که ریاضی را

نزد پدر آموخته بود به‌اصل توازی علاقمند شد و گرچه پدرش او را از کار کردن روی اصل توازی منع می‌کرد ولی او به‌کارش ادامه داد و در ۱۸۲۳ در نامه‌ای به پدرش نوشت که از هیچ دنیایی تازه ساخته است و این زمانی بود که موفق به‌کشف هندسهٔ نااقلیدسی شده بود و کارش را در ضمیمهٔ کتاب پدرش به‌سال ۱۸۳۱ منتشر کرد وقتی فورکوش بویوئی این کار تحقیقاتی پسرش را برای گاوس فرستاد، گاوس در جواب نامه‌اش نوشت که این دقیقاً همان کار من است و اگر می‌خواستم آن را بنویسم همین مطالب را می‌نوشتم ولی خوشحالم که پسر یك دوست قدیمی این‌چنین بر من پیشی گرفته است.

همزمان با یانوش بویوئی و مستقل از او «لوباچفسکی» هم موفق به کشف هندسهٔ نااقلیدسی شده بود و نتیجهٔ تحقیقاتش را در ۱۸۲۹ منتشر کرد که به زبان روسی بود و چندان مورد توجه قرار نگرفت ولی چندی بعد مقاله‌ای به‌زبان آلمانی نوشت که مورد توجهٔ گاوس قرار گرفت و گرچه گاوس خود را با آنها سهیم می‌دانست همه در این‌باره هم‌عقیده نیستند و طرفداران او می‌گویندکه به‌خاطر شهرتش و ترس از آنهایی که در برابر نوآوریها همیشه مقاومت می‌کنند تحقیقاتش را منتشر نکرد زیرا می‌ترسید شهرتش لکه‌دار شود اما یانوش‌بویوئی و لوباچفسکی جوان بودند و چیزی‌هم برای باختن نداشتند لذا نتیجهٔ تحقیقاتشان را منتشر کردند و هندسهٔ آنها امروزه به هندسهٔ لوباچفسکی یا هندسهٔ هذلولوی مشهور است. هندسه‌ای که در آن مجموع زوایای هر مثلث از ۱۸۰درجه‌کمتر است و از هرنقطه‌خارج‌هرخط‌می‌توان‌بیش ازیك‌خط‌به‌موازات‌آن‌رسم‌کرد. به‌این‌ترتیب‌هندسهٔ هذلولوی شناخته شد، اما در اینجا یك سؤال ماورای ریاضی مطرح بودکه آیا هندسهٔ هذلولوی‌سازگار است؟ «بلترامی» اولین کسی بود که سازگاری هندسهٔ هذلولوی را ثابت کرد. «بلترامی»،«کلاین»،«پوآنکاره»ازروی‌هندسهٔ‌اقلیدسی الگوهایی برای هندسهٔ هذلولوی ساختند و عملا نشان دادند که اگر هندسهٔ اقلیدسی سازگار است آنگاه هندسهٔ هذلولوی سازگار است.

الگوی بلترامی ــ کلاین. اگر دایرهٔ γ مفروض باشد و نقاط صفحهٔ هذلولوی را نقاط درون γ و خطوط هذلولوی را وترهای باز γ بگیریم و دو خط را موازی



گوئیم هر گاه نقطهٔ مشترکی نداشته باشند، در این‌صورت به‌ازای هر خط l و هر نقطهٔ P خارج خط l بیش از یك خط می‌توان از P رسم کرد که با l موازی باشند.

ولی اینشتاین معتقد بود که اشعه‌های نور در اثر جاذبهٔ ثقلی اجرام واقعاً خمیده می‌شوند و هندسه‌های اقلیدسی و لوباچفسکی برای مفهوم فضا کافی نیست. ریمان هندسه‌های بیضوی را معرفی کرد که خطوط را به جای نامتناهی بودن بی‌مرز می‌گرفت. اصل توازی‌بیضوی عبارت است از اینکه هر دو خط راست همیشه همدیگر را قطع می‌کنند و دیگر قضیهٔ زاویه بیرونی که در هر مثلث اگر ضلعی امتداد داده شود زاویهٔ خارجی بزرگتر از زاویهٔ داخلی غیر مجاور با آن است از ارزش می‌افتد و یك مدل آن هندسهٔ کروی است که خطوط را دوایر عظیمه می‌گیرند و مدلی از کلاین که در صفحه است. گاوس قبلا مفهومی به‌نام خمیدگی معرفی کرده بود و ریمان با استفاده از آن تانسور خمیدگی را تعریف کرد و بدین ترتیب بینهایت هندسهٔ تازه کشف کرد که امروز به چند گوناهای ریمانی مشهورند و می‌توان صفحهٔ هذلولوی را یك چند گونای دوبعدی کامل با خمیدگی ثابت منفی توصیف‌کرد و صفحهٔ‌بیضوی را یك چندگونای دو بعدی کامل ریمانی با خمیدگی ثابت مثبت تعریف کرد که در آن هر دو نقطه یك ژئودزیك (مسیرهایی با حداقل طول) یکتا را مشخص می‌سازد و لذا می‌توان هندسهٔ هذلولوی را جزئی از هندسه دیفرانسیل دانست. وقتی بینهایت هندسه کشف شد اولین سؤال این بود که آیا همهٔ اینها هندسه‌اند و مهمتر از همه هندسه چیست؟ کلاین در برنامهٔ ارلانگر خود تعریف کلی برای هندسه با استفاده از تبدیلات گفت و بعد از ریمان هیلبرت، پئانو، پیری، راسل، وایتهد، و بلن هندسه‌ها را به‌صورت اصل موضوع درآوردند تا جائی که هیلبرت گفت نقطه، خط، صفحه خاصیتی ندارد مگر آنچه ما به آنها می‌دهیم و باید بشر به جائی برسد که به جای آنها بگویند میز، صندلی، لیوان. امروزه تعریف نشده‌ها را می‌پذیریم و در بعضی‌کشورها با قبول اصول موضوعهٔ بیشتر و پذیرفتن برخی قضایا بدون اثبات در دبیرستانها هم به‌طور اصولی‌تر هندسه را تدریس می‌کنند.

باید دانست که اینشتاین در نظریهٔ نسبیت عام از هندسهٔ ریمانی و در نظریهٔ نسبیت خاص از هندسهٔ ساده‌تر فضا ــ زمان منیکوفسکی استفاده کرد.

منابع

۱ـ مقدمه‌ای بر فلسفهٔ علم، اثر ردلف کارناپ، ترجمهٔ یوسف عفیفی
۲ـ هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی، اثر گرینبرگ، ترجمهٔ شفیعیها
۳ـ هندسه‌های نااقلیدسی، اثر الف، ترجمهٔ بیرشك

آناصوفیا کریگوفسکا

دکتر محمدحسن بیژن‌زاده

آناصوفیا کریگوفسکا در سپتامبر ۱۹۰۴ در لفوف[1] لهستان به‌دنیا آمد. وی ریاضیات را در دانشگاه کراکو[2] تحصیل نمود و سپس به تدریس آن به‌مدت ۲۵ سال در دبیرستان همت گماشت. در دوران اشغال نازیها تدریس ریاضیات به‌گروههای‌مقاومت را در نواحی جنوبی کشور اداره می‌کرد.

خانم کریگوفسکا در سال ۱۹۵۰ رساله دکترای خود را نوشت. سپس به تشکیل اولین کالج تعلیم و تربیت در سطحی‌دانشگاهی‌کمك نمود. تشکیل چنین کالجی شروعی برای کوشش‌های موفقیت‌آمیز وی در آموزش‌ریاضیات بود بواسطهٔ این مطالعات و کوششها آموزش ریاضیات به عنوان رشته‌ای تخصصی و در سطحی علمی و تحقیقی از ریاضیات به‌طور رسمی پذیرفته شد. وی نظریه‌ای را در یادگیری و آموزش ریاضیات گسترش داد که بر تجزیه و تحلیل وجوه مختلف‌ریاضیات و بر تزهای آموزشی ریاضیات، بخصوص تزهای پیاژه، استوار بود. آناصوفیا کریگوفسکا در جامعه بین‌المللی آموزش[3] ریاضی، بخصوص در کشورهای فرانسوی زبان، فردی‌بسیار مشهور بوده و همیشه از وی تقدیر شده است.

از سال ۱۹۵۰ به بعد به‌کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی ملحق و در بسیاری از گردهمایی‌های آن شرکت می‌جست. دربین‌سالهای ۱۹۷۴ـ۱۹۷۰ ریاست این کمیسیون را نیز به‌عهده داشت. در ۳۹مین گردهمایی این کمیسیون در شهر بسروك[4] در سال ۱۹۸۷، دو سخنرانی ارائه داد. وی در بسیاری از گردهمایی‌های برگزار شده توسط یونسکو نیز شرکت می‌جست.

سهم کریگوفسکا در آموزش ریاضیات لهستان بسیار ارزشمند است. وی همواره عقیده داشت که ریاضیات دبیرستانی باید ریاضیاتی اصیل باشد. وی همچنین استدلال منطقی را مورد تقدیر قرار داده و در کتابهای هندسه استدلالی که خود نوشته است اهمیت آنرا ملحوظ می‌داشت.

خانم کریگوفسکا عاشق مدرسه و ریاضیات بود؛ او زندگی خود را بدان اختصاص داده بود. سرگرمی خصوصی او کوهستانهای تاترا بود.

خانم کریگوفسکا در شانزدهم ماه مه ۱۹۸۸ بدرود حیات گفت. برغم سن و سال او، مرگ وی ضایعهٔ‌قابل ملاحظه‌ای برای تحقیقات وکوششهای بین‌المللی بخصوص برای کشورمادری او لهستان در زمینه آموزش ریاضیات است.

وی درحالی بدرود حیات گفت که در نهایت قدرت خلاقیت بود، پروژه‌های چاپ نشده‌ای از خود برجای گذاشت.

در ۴۲مین گردهمایی کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی که در شهر اشتیرك لهستان در تابستان ۱۹۹۰ برگزار گردید جلسه یك ساعته‌ای را به‌شرح زندگانی مختصری از خانم کریگوفسکا اختصاص دادند که طی‌آن پروفسور استفن تورنیوا[5] ریاست کمیسیون مزبور نیزشمه‌ای اززندگانی وی و کارهای او ارائه داد. همچنین نمایشگاهی از کتب و مقالات نوشته شده توسط او برگزار کردند. غالب کتب به‌نمایش گذاشته شده کتبی‌درسی و مقالات چاپ شده در مجلات‌لهستانی در زمینه‌های مختلف آموزش ریاضیات بود.

1- Lvov
2- Cracow
3- Cieaem, Study and Improvement of Mathematics Teaching
4- Sher brooke
5- Stefan Turnau

آموزش مبانی کامپیوتر و انفورماتیک (۳)

گروه کامپیوتر
دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی
وزارت آموزش و پرورش

بدنبال مباحث الگوریتم‌نویسی، به‌ارائه چند الگوریتم جالب دیگر می‌پردازیم.

۱ـ الگوریتم تولید اعداد فیبوناتچی

همان‌طور که می‌دانید، دنباله اعداد فیبوناتچی به‌طریق زیر تولید می‌شود:

$F_1 = 1 \;,\; F_2 = 1$

$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \qquad (n \geqslant 2)$

(ازجمله سوم به‌بعد، هرجمله مساوی مجموع دوجمله قبلی‌است.)

یک‌الگوریتم برای تولید N جمله ازاین دنباله عبارت است‌از:

۱ـ شروع

۲ـ N را بگیر.

۳ـ آرایه[1] F را با N مؤلفه درنظر بگیر.

۴ـ $I \leftarrow 1$ و $F(1) \leftarrow 1$ و $F(2) \leftarrow 1$.

۵ـ $F(1)$ و $F(2)$ را بنویس.

۶ـ اگر $N \leqslant I+1$ به‌مرحله ۱۱ برو.

۷ـ $I \leftarrow I+1$.

۸ـ $F(I+1) \leftarrow F(I-1)+F(I)$.

۹ـ $F(I+1)$ را بنویس.

۱۰ـ به‌مرحله ۶ برگرد.

۱۱ـ پایان.

چنانچه ملاحظه می‌شود، درالگوریتم فوق، برای‌ذخیرهٔ اعداد دنباله، از N متغیر استفاده شده است، واگر N عدد خیلی بزرگی باشد، حافظه زیادی ازکامپیوتر اشغال خواهد شد، درصورتی‌که می‌توان با انتخاب چهار متغیر، N جمله دنباله را تولید کرد. به‌این ترتیب، می‌توان الگوریتم بهتر زیر را ارائه داد:

۱ـ شروع

۲ـ N را بگیر.

۳ـ $n \leftarrow 3$ و $F_1 \leftarrow 1$ و $F_2 \leftarrow 1$

۴ـ F_1 و F_2 را بنویس.

۵ـ اگر $N<n$ به‌مرحله ۱۱ برو.

۶ـ $F_3 \leftarrow F_2+F_1$

۷ـ F_3 را بنویس.

۸ـ $F_1 \leftarrow F_2$

۹ـ $F_2 \leftarrow F_3$

۱۰ـ $n \leftarrow n+1$ وبه مرحله ۵ برگرد.

۱۱ـ پایان.

ملاحظه می‌شود که تنها ازچهار متغیر n، F_1، F_2 و F_3 استفاده شده است وبه مجرد اینکه F_3 چاپ شود دیگر به F_1 نیازی نداریم (چون عدد بعدی مجموع F_2 و F_3 است). لذا، مقدار F_2 را در F_1 ومقدار F_3 را در F_2 و مقدار جمله جدید را در F_3 قرارمی‌دهیم.

این الگوریتم را برای $N=6$ به‌طور دستی اجرا می‌کنیم:

N	n	F_1	F_2	F_3
۶	۳	۱	۱	۲
	۴	۱	۲	۳
	۵	۲	۳	۵
	۶	۳	۵	۸
	۷	۵	۸	

ونهایتاً، اعداد ۱، ۱، ۲، ۳، ۵ و ۸ تولید ونوشته می‌شوند.

۲ـ تا به‌حال با مسائلی ازقبیل پیدا کردن بزرگترین عدد در لیستی از اعداد، یا مرتب کردن لیستی از اعداد نامرتب یا حتی مرتب کردن لیستی از اسامی و . . . . در موارد بسیاری روبرو شده‌اید.

اینک به‌نوشتن الگوریتم این‌گونه مسائل می‌پردازیم:

فرض کنید لیستی از اعداد نامرتب را در اختیار داریم، می‌خواهیم بزرگترین یا کوچکترین عدد را در این لیست بیابیم. الگوریتمی که ذیلاً ارائه می‌گردد، ماکسیمم این اعداد را تعیین

می‌کند.

الگوریتم MAX

۱ـ شروع

۲ـ تعداد اعداد واولین عدد را بگیر.

۳ـ تعداد اعداد ← N و ۱ ← I و عدد اول ← MAX
(یعنی تعداد اعداد را در N، ۱ را درI وعدد اول را در MAX قرار بده.)

۴ـ اگر $I \geqslant N$، به مرحله ۸ برو. (دقت کنید که در صورتی که $I<N$ اجرای عملیات ازمرحله ۵ ادامه می‌یابد.)

۵ـ عدد $I+1$ م را بگیر و در A قرار بده.

۶ـ اگر $MAX<A$، آنگاه $MAX \leftarrow A$

۷ـ $I \leftarrow I+1$ و به‌مرحله ۴ برگرد (یعنی به I یکی اضافه‌کن و در I قراربده).

۸ـ آنچه را در MAX قرار دارد، به‌عنوان بزرگترین عدد این لیست بنویس.

۹ـ پایان.

تمرینات

۱ـ الگوریتمی بنویسید (به‌نام الگوریتم MIN) که می‌نیمم اعداد یک لیست را تعیین کند.

۲ـ الگوریتم MAX و الگوریتم MIN را برای لیست ۷ و ۲۴ و ۲ و ۳ و ۸ و ۱۷ به‌طور دستی اجرا کنید.

حال لیستی از اعداد نامرتب را درنظر بگیرید. می‌خواهیم الگوریتمی بنویسیم که این لیست را بترتیب صعودی مرتب‌کند. برای این کار راههای مختلفی (با عنوان انواع *Sort*) وجود دارد، که ما به بررسی چند نوع آن می‌پردازیم.

برای این کار الگوریتم ساده‌ای درمرجع [۱] وجود داردکه مناسب اجرا بوسیلهٔ کامپیوتر نیست. ساده‌ترین روش قابل اجرا بوسیلهٔ کامپیوتر این است که لیستی از اعداد نامرتب داشته باشیم وبخواهیم آنها را به‌طور مرتب دریک لیست دیگر قرار دهیم. الگوریتم آن چنین است:

الگوریتم $SORT\ 1$

۱ـ شروع

۲ـ کوچکترین عدد درلیست اعداد نامرتب را پیدا کنید.

۳ـ جای‌آن را با عدد سرلیست اعداد نامرتب عوض کنید.

۴ـ عدد سرلیست اعداد نامرتب (همان کوچکترین عدد پیدا شده) را به‌انتهای لیست اعداد مرتب اضافه کنید (برای اولین عدد ابتدا وانتهای لیست اعداد مرتب شده، یکسان است!) وآن را ازلیست اعداد نامرتب پاك کنید (زیرا کوچکترین عدد پیدا شده است و درلیست اعداد مرتب قرار گرفته است و هدف ما باید پیدا کردن کوچکترین عدد بعدی باشد).

۵ـ اگرهمه اعداد مرتب‌شده‌اند، به‌مرحله ۶ بروید والا به‌مرحله ۲ برگردید. (اگرلیست اعداد نامرتب‌خالی باشد نتیجه می‌گیریم که همه اعداد مرتب شده‌اند.)

۶ـ لیست اعداد مرتب جواب مسأله است.

۷ـ پایان.

برای پیداکردن کوچکترین‌عدد درلیست می‌توان ازالگوریتم MIN که درتمرین ۱ نوشته‌اید، استفاده کرد. به‌این ترتیب می‌بینید که دراجرای یک‌الگوریتم، می‌توان ازالگوریتم‌دیگری استفاده کرد، که «زیرالگوریتم» نامیده می‌شود. (در مورد زیرالگوریتم درشمارهٔ آینده توضیح بیشتری خواهیم داد.)

حال اجرای دستی الگوریتم فوق را برای لیست زیر انجام می‌دهیم:

لیست: ۵، ۲، ۳، ۱، ۴، ۶

لیست اعداد نامرتب	لیست اعداد مرتب
۵، ۲، ۳، ۱، ۴، ۶	—
۵، ۲، ۳، ۶، ۴	۱
۵، ۴، ۳، ۶	۲، ۱
۵، ۴، ۶	۳، ۲، ۱
۵، ۶	۴، ۳، ۲، ۱
۶	۵، ۴، ۳، ۲، ۱
—	۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ [۲]

با استفاده از یک لیست نیز می‌توان مرتب‌سازی اعداد را انجام داد، که با توجه به‌اینکه تعداد خانه‌های حافظه کمتری اشغال می‌شود، الگوریتم مناسبتری خواهد بود. این الگوریتم چنین است:

الگوریتم $SORT\ 2$

۱ـ شروع

۲ـ تعداد اعداد نامرتب را N بگیر.

۳ـ $I \leftarrow 1$

۴ـ $J \leftarrow I$

۵ـ عدد I م را A وعدد $(I+J)$ م را B بگیر.

۶ـ اگر $B<A$، آنگاه جای A و B را عوض کن.

۷ـ اگر $J+1 \geqslant N$، به‌مرحله ۹ برو.

۸ـ $J \leftarrow J+1$ وبه‌مرحله ۵ برگرد.

۹ـ اگر $N \geqslant I+1$، به‌مرحله ۱۱ برو.

۱۰ـ $I \leftarrow I+1$ و به مرحله ۴ برگرد.

۱۱ـ پایان.

تمرین ۳. این الگوریتم را برای لیست ۵ و ۰ و ۲ و ۳ — و ۷ — به‌طور دستی اجرا کنید.

واما، الگوریتم دیگری نیز می‌توان نوشت که در آن تعداد عملیات مقایسه به‌مراتب کمتر می‌باشد. این الگوریتم چنین است:

الگوریتم $SORT3$

۱ـ شروع

۲ـ تعداد اعداد نامرتب را N بگیر.

۳ـ $I \leftarrow 1$ و $SW \leftarrow 0$

۴ـ عدد Iم را A وعدد $(I+1)$م را B بگیر.

۵ـ اگر $B<A$، آنگاه جای A و B را عوض‌کن و $SW \leftarrow 1$

۶ـ اگر $N \geqslant I+1$، به‌مرحله ۸ برو.

۷ـ $I \leftarrow I+1$ و به‌مرحله ۴ برگرد.

۸ـ اگر $SW=1$، به‌مرحله ۳ برگرد.

۹ـ پایان.

دراین الگوریتم از SW به‌عنوان‌یک سوئیچ استفاده می‌شود. درمرحله ۸ اگر $SW=0$ باشد یعنی در آخرین بار اجرای الگوریتم، هیچ جابجایی انجام نشده، و نتیجتاً آخرین لیست، لیست اعداد مرتب می‌باشد.

تمرینات

۴ـ این الگوریتم را برای لیست ۷ — و ۲ — و ۱ و ۳ و ۶ به‌طور دستی اجرا کنید.

دراین الگوریتم تعداد عملیات مقایسه تا $(n-1)^2$ می‌باشد. یعنی دربدترین حالت که لیست اعداد بترتیب نزولی باشد، باید $(n-1)^2$ بارعمل مقایسه انجام گیرد.

۵ـ الگوریتم $SORT3$ را طوری تغییر دهید که تعداد عملیات مقایسه تا $\frac{n(n-1)}{2}$ تقلیل یابد.

۶ـ الگوریتمی بنویسید که لیستی از اعداد نامرتب را بطور نزولی مرتب کند.

۷ـ فرض کنید در Nمین روز سال هستیم، الگوریتمی بنویسید که تاریخ روز را معین کند. (مثلاً اگر در روز ۶۴م سال باشیم تاریخ دوم خرداد ماه است یا ۳/۲. هدف تعیین شمارهٔ روز و شمارهٔ ماه مربوطه است.)

۸ـ فرض کنید در روز Rم ازماه شماره M هستیم، الگوریتمی بنویسیدکه‌معین‌کند در روزچند م سال‌هستیم. (مثلاً اگر $R=21$ و $M=8$ داریم $N=186+30+21$ یعنی در روز ۲۳۷ م سال هستیم.)

یادداشتها:

(۱) $F(1)$ یعنی مؤلفه اول آرایه F و . . . و $F(I)$ یعنی مولفهٔ Iم آرایه F. آرایه، جدولی است که ازمولفه‌های متعددی تشکیل شده و دارای یک‌اسم می‌باشد. همه مقادیر مولفه‌های یک آرایه باید از یک نوع باشد مثلاً همه عدد یا همه حرف باشند. شکل زیرآرایهٔ F را با ۱۰ مولفه نشان می‌دهد.

۱	۱	$F(1)=1$
۲	۱	$F(2)=1$
۳	۲	$F(3)=2$
۴	۳	$F(4)=3$
۵	۵	⋮
۶	۸	
۷	۱۳	
۸	۲۱	$F(9)=34$
۹	۳۴	$F(10)=55$
۱۰	۵۵	

آرایه‌ها را می‌توان درابعاد مختلف تعریف کرد وکاربردآنها در کارهای علمی ومحاسباتی فراوان است.

مراجع:

[۱]. نشر ریاضی، سال اول، شمارهٔ ۱، مقاله‌ای تحت عنوان «صورت‌بندی نظم عالم: نقش ریاضیات»، آرنورجفی، ترجمه بهرام معلمی

[۲]. آشنایی با مبانی کامپیوتر وانفورماتیک، تألیف دکتر اسماعیل بابلیان، دکتر سونیا صحت‌نیاکی، ۱۳۶۹

پاسخ تمرینات قسمت (۱)

جواب تمرین ۱

۱ـ شروع

۲ـ به‌سمت راست خیابان بروید.

۳ـ منتظر بمانید.

۴ـ آیا تاکسی می‌آید؟ اگربلی به‌مرحله ۵ واگرخیر به‌مرحله ۳ بروید.

۵ـ آیا تاکسی جای خالی دارد؟ اگر بلی به مرحله ۶ واگر خیر به‌مرحله ۳ بروید.

۶ـ مسیر خود را به‌راننده تاکسی بگویید.

۷ـ آیا تاکسی می‌ایستد؟ اگربلی به‌مرحله ۸ واگر خیر به‌مرحله ۳ بروید.

۸ـ سوارشوید.

۹ـ پایان.

جواب تمرین ۲

۱ـ شروع

۲ـ گوشی تلفن را بردارید.

۳ـ یك سكه ۲ ریالی یا ۵ ریالی سالم درتلفن بیندازید.

۴ـ حداکثر ۳۰ ثانیه صبرکنید تاصدای آزاد شدن خط رابشنوید. اگرخط آزاد شد به‌مرحله ۶ بروید والا به‌مرحله ۵ بروید.

۵ـ گوشی‌را سرجایش بگذارید. سکه پس‌داده شده را بردارید. اگر دفعه سومی است که این مرحله را اجرا می‌کنید (منطقی است که نتیجه بگیرید تلفن خراب است) به‌مرحله ۷ بروید والا به‌مرحله ۲ رفته الگوریتم را تکرارکنید.

۶ـ شمارهٔ موردنظرتان را بگیرید وبه‌مرحله ۸ بروید.

۷ـ تلفن عمومی دیگری پیداکنید واجرای الگوریتم را ازمرحله ۲ تکرار کنید.

۸ـ پایان.

(برای اینکه مراحل مختلف بدون ابهام باشند و الگوریتم در مرحله‌ای خاتمه یابد فرض می‌کنیم که تلفن پول نمی‌خورد! حداقل یك تلفن سالم یافت می‌شود وبا اولین شماره تماس حاصل می‌شود !!).

جواب تمرین ۳

۱ـ شروع

۲ـ اولین شمارهٔ تلفن درکتاب راهنما را به‌عنوان کوچکترین شماره روی تخته سیاه بنویسید.

۳ـ اگربه انتهای‌شماره‌های‌کتاب رسیده‌اید، شمارهٔ تلفنی‌که روی تخته سیاه دیده می‌شودکوچکترین شماره تلفن کتاب است. دراین صورت به اجرای الگوریتم خاتمه دهید. درغیر این صورت، شماره بعدی کتاب را بررسی کنید.

۴ـ اگر این شماره جدید کوچکتر از شماره‌ای باشد که روی تخته سیاه دیده می‌شود، شمارهٔ قبلی را پاك‌کرده، شماره جدید را به‌جای آن روی تخته سیاه بنویسید.

۵ـ حال اجرای الگوریتم را ازمرحله دوم مجدداً تکرارکنید.

۶ـ پایان.

بقیه از صفحهٔ ۳

دراین راستا، در دوران پس از انقلاب، بخصوص درسالهای اخیر شاهد برگزاری کنفرانس‌های‌آموزشی سراسری واستانی‌چندی بوده‌ایم آخرین کنفرانس علمی ـ آموزشی درفاصله ۱۰ تا ۱۹هم اردی‌بهشت ماه سال جاری بنا به دعوت اداره کل آموزش و پرورش استان مازندران و همکاری سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی در محمود آباد مازندران تشکیل شد. در این کنفرانس که در واقع دو کنفرانس همزمان ریاضی و فیزیك را شامل می‌شد اساتیدی از هر دو رشته از دانشگاههای تهران وتربیت ومعلم شرکت داشتند. تعداد دبیران ریاضی شرکت کننده نیز رقمی بالای ۶۰۰ نفراعلام شدکه باشرکت فعال ومتراکم خود در سالن کنفرانس به طرح سؤالات و مسائل علمی در زمینه‌های مختلف ریاضیات می‌پرداختند. استان مازندران با جمعیت دانش آموزی بالای ۱۱۰۰۰۰۰ نفر مقام مهمی در تربیت و آموزش فرزندان این مرز وبوم را دارا است. سخنرانیهای بسیار متنوع و به گونه‌ای انتخاب شده بود تا ضمن ارائه مطالب نو قابل‌استفاده برای دبیران ریاضی و درارتباط با مباحث ریاضیات متوسطه باشد. دو سخنرانی در شاخه آموزش ریاضیات، یک سخنرانی درباب آموزش کامپیوتر دردبیرستانها، یك سخنرانی در نظریه اعداد، یك سخنرانی در آنالیز، یك سخنرانی درمبادی هندسه‌های اقلیدسی وناقلیدسی ازجمله مهمترین سخنرانیهای ارائهٔ شده به‌شمار میرفت.

دراینجا لازم است از مساعی وکوششهای همه برگزارکنندگان کنفرانس به‌ویژه از برادران گرامی جناب آقای رهی معاونت محترم آموزش استان مازندران، آقای ولی‌زاده وآقای حسن‌زاده به‌خاطر حسن‌مدیریت دربرگزاری کنفرانس وتحمل زحمات فراوان تشکر وقدردانی شود.

همانند سایر کنفرانس‌های علمی، علاوه براجرای برنامه فشرده کنفرانس، درساعات فراغت نیز شاهد بحثهای آموزشی وجنبی‌که به‌نحوی با کاردبیران ریاضی مربوط می‌شد بودیم.

ضمناً باید اذعان نمود که برای کارشناسان و اساتیدی که دست اندرکار امر برنامه‌ریزی وتألیف کتب ریاضی هستند شرکت دراینگونه کنفرانسها و طرح مسائل مختلف آموزشی بسیار مفید و ارزشمند خواهد بود.

امید داریم که باتشویق و ترغیبی که مقامات محترم وزارتخانه دربرگزاری اینگونه کنفرانسها می‌کنند درآتیه شاهد برگزاری کنفرانسهای علمی‌ـآموزشی بیشتری با برنامه‌ریزیهای منظم‌تر در سطح استانهای مختلف باشیم.

سردبیر

ورزش فکر با عدد ۱۹۹۰

ترجمهٔ: احمد قرائی

۱ـ چهارعامل جمع
عدد ۱۹۹۰ را می‌توان به‌صورت مجموع چهارعدد طبیعی متوالی نوشت. این چهارعدد کدامند؟

۲ـ مربع جادویی
درمربع جادویی زیر باید مجموع عددهای هر سطر، هرستون و هرقطر برابربا ۱۹۹۰ شود. خانه‌های خالی را پرکنید درحالی که می‌دانیم این مربع با عددهای ۴۹۰ تا ۵۰۵ ساخته می‌شود.

۴۹۰		۴۹۳	
۵۰۱	۴۹۵		
			۴۹۱
		۴۹۴	۵۰۰

۳ـ ممیز جا افتاده
فقط یك ممیز لازم است تا تساوی زیر درست شود.

۴۴ · ۴۴ + ۴۴ + ۴۴ : ۴۴ = ۱۹۹۰

۴ـ یك برابر نه؟
درسال ۱۹۹۰ یافتن توانهایی که با آن تساوی ۹ = ۱ درست شود دشوار نخواهد بود.

۵ـ نودونه، صد
۹۹ = ۱ · ۹ + ۹۰   ۱۰۰ = ۱ + ۹ + ۹۰

هرگاه در این تساویها یـك علامت جمع را جابجا کنیم باز هم تساوی برقراراست.

۱ · ۹ + ۹ · ۰ = ۱.۹ + ۹.۰

۶ـ علامتهای ضرب
معلم ریاضی: «این محاسبه درست نیست.»

دانش‌آموز: «من فقـط دوتا عـلامت ضرب را فراموش کرده‌ام می‌توانید شما جای‌آنها را پیدا کنید؟»

۱ − ۲ + ۳۴۵۶ + ۷۸۹ = ۱۹۹۰

هینس‌زیگلر، مجلهٔ آموزش ریاضی، ۳۸، فوریه ۱۹۹۰

پاسخ سؤالهای ۱ تا ۸

---

۱) ۴۹۶ + ۴۹۷ + ۴۹۸ + ۴۹۹ = ۱۹۹۰

۲)

۴۹۰	۵۰۴	۴۹۳	۵۰۳
۵۰۱	۴۹۵	۴۹۸	۴۹۶
۵۰۲	۴۹۲	۵۰۵	۴۹۱
۴۹۷	۴۹۹	۴۹۴	۵۰۰

۳) ۴۴ · ۴۴ + ۴۴ + ۴۴ : ۴٫۴ = ۱۹۹۰

۴) $۱^{۹} = ۹^{۰}$

۵) ۹۹ = ۱ · ۹۹ + ۰   ۱۰۰ = ۱ + ۹۹ + ۰

۶) ۱ − ۲ + ۳ · ۴۵۶ + ۷ · ۸۹ = ۱۹۹۰

سال ۱۹۹۰

ترجمه از احمد قرائی

ابتدا ۱۹۹۰ را به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم و از آنجا همه مقسوم‌علیه‌های آن را به‌دست می‌آوریم.

۱۹۹۰ = ۲ · ۵ · ۱۹۹

$T_{۱۹۹۰}$ = {۱; ۲; ۵; ۱۰; ۱۹۹; ۳۹۸; ۹۹۵; ۱۹۹۰}

هرعدد با مقسوم‌علیـه‌های فرد را می‌تـوان به‌صـورت مجموع عددهای طبیعی متـوالی نوشت. برای ۱۹۹۰ دقیقـاً سه حالت

وجود دارد.

$$۱۹۹۰=۹۰+۹۱+۹۲ \ldots +۱۰۹ \quad (\text{۲۰ عامل جمع})$$
$$=۳۹۶+۳۹۷+۳۹۸+۳۹۹+۴۰۰ \quad (\text{» » ۵})$$
$$=۴۹۶+۴۹۷+۴۹۸+۴۹۹ \quad (\text{» » ۴})$$

یکی از بازیهای مورد علاقه از زمانهای قدیم این بوده است که عدد سال را با رقمهای آن نمایش دهند. در این جا چند مثال می‌آوریم:

$$۱۹۹۰=۱+۹۹۰+۱\cdot۹۹۰+۱\cdot۹+۹\cdot۰$$
$$=۱۹\cdot۹۰+۱۹+۹۰+۱۹\cdot۹+۰$$
$$=(۱+۹+۹\cdot۰)\cdot(۱۹۹+۰)$$
$$=۱\cdot۹۹۰+(۱+۹)^{\sqrt{۹}}+۰$$
$$=(۱/۹۹۰+۱۹/۹۰+۱۹۹/۰)\cdot(۱\cdot۹+۹\cdot۰)+۱/۹۹۰$$

هم‌چنین با رقمهای متوالی دستگاه عددشماری دهدهی یا رقم‌های یکسان امکان‌پذیر است.

$$۱۹۹۰=۱-۲+۳\cdot۴۵۶+۷\cdot۸۹$$
$$۱۹۹۰=۹۹۹+۹۹۹-۹+۹:۹$$
$$=۴۴\cdot۴۴+۴۴+(۴۴-۴):۴$$
$$=۲۲۲۲-۲۲۲-۲۲+۲\cdot۲\cdot۲+۲\cdot۲$$
$$=(۱۱۱۱-۱۱۱-۱۱)\cdot(۱+۱)+۱۱+۱$$

نمایش این عدد با رقم‌های دیگر به خواننده (یا به معلم و دانش‌آموزان کلاس) واگذار می‌شود. جوابهایی به‌ویژه زیبا تلقی می‌شوند که نشان‌دهندهٔ نوعی تقارن باشند.

هینس زیگلر
مجلهٔ «آموزش ریاضی»
شمارهٔ ۳۸- صفحهٔ ۳۶- فوریه ۱۹۹۰

۱۹۹۰

$$۲۰=۱+۹+۹+۰!$$
$$۲۱=۱۹+\sqrt{۹}-۰!$$
$$۲۲=۱۹+\sqrt{۹}+۰$$
$$۲۳=۱۹+\sqrt{۹}+۰!$$
$$۲۴=(۱+\sqrt{۹}+۹\cdot۰)!=(-۱+۹)\cdot\sqrt{۹}\cdot۰!$$
$$۲۵=(-۱+۹)\cdot\sqrt{۹}+۰!$$
$$۲۶=۱\cdot\sqrt{۹}\cdot۹-۰!$$
$$۲۷=۱\cdot\sqrt{۹}\cdot۹+۰$$
$$۲۸=۱۹+۹+۰=۱\cdot\sqrt{۹}\cdot۹+۰!=۱۹+۹\cdot۰!$$
$$=۱+\sqrt{۹}^{\sqrt{۹}}+۰$$
$$۲۹=۱۹+۹+۰!$$
$$۳۰=(۱+۹)\cdot\sqrt{۹}+۰$$
$$۳۱=(۱+۹)\cdot\sqrt{۹}+۰!$$

$$۹۸=-۱+۹۹+۰$$
$$۹۹=۱\cdot۹+۹۰=۱\cdot۹۹+۰$$
$$۱۰۰=۱+۹۹+۰=۱+۹+۹۰$$

پرکردن جای خالی به‌عهده خواننده!

مرجع

هینس زیگلر، مجلهٔ آموزش ریاضی، شمارهٔ ۳۹، آوریل ۱۹۹۰،

۱۹۹۰

فقط از رقم‌های ۰، ۹، ۹، ۱ با همین ترتیب (!) هم‌چنین چهار عمل اصلی، توان و رادیکال استفاده کنید.
آیا می‌توانید این را تا ۹ یا بیشتر ادامه دهید؟

$$۱\cdot(۹:۹)+۰=۱$$
$$۱+(۹:۹)+۰=۲$$
$$۱\cdot\sqrt{۹}+(۹\cdot۰)=۳$$
$$۱^{۹}+\sqrt{۹}+۰=۴$$

مجلهٔ «تدریس ریاضی» (DER MATHEMATIKUN TERRICHT)، سال ۳۶- شمارهٔ ۳- صفحهٔ ۷۶- م ۱۹۹۰

دربارهٔ کسرهای مصری

۱ . مقدمه

در این مقاله می‌خواهیم توجه خـود را معطوف کسرهای مصری نمائیم . جزأ - بدلیل آنکه این موضوعی است با قرنها زمینه تاریخی وکلاً به علت اینکه ما را باتعداد بیشماری از مسائل دشوار و جالب در نظریه اعداد مواجه می‌سازد، مسائلی که فهم و درك آنها بـر هـر پژوهندهٔ مبتدی ریاضی بسیار آسان است .

امـا پیش از آنکه بـه نظـریه کسرهای مصـری بپردازیم، می‌خواهیم خودمان را با تکنیك محاسبه مصریان، که در حقیقت اولین موضوع مورد بحث در پاپیروس ریند[1] است، آشنا کنیم. سیستم اعـداد مصریان قدیم بسادگی، و مقدماتی، سیستم رومیان می‌باشد، که سیستمی کاملاً اعشاری می‌باشد.

در خط هیروگلیفی[2]، داریم:

یك = I
ده = ∩
صد = 𓍢
هزار = 𓆼

کـلیه اعدادی را کـه رخ می‌دهند می‌توان با قراردادن این نمادها در یك سطر، نمایش داد.

برای مثال:

III = ۳   ∩∩∩∩ = ۴۰   III∩∩𓍢 = ۱۲۳

درجمع کردن این اعداد مشکلی وجود ندارد، تنها لازم است که تعداد یکها، دهها، صدها وغیـره شمرده شوند. دوبرابرسازی حالت خاصی ازجمع کردن است، لذا دراین حالت نیزاشکالی پیش نمی‌آید. ضرب با یك سلسله ازاعمال جمع و دوبرابرسازی انجام‌پذیر است. به‌عنوان مثال، از پاپیروس‌ریند (نسخهٔ پیت[3]) شمارهٔ ۳۲، ضرب ۱۲ در ۱۲ را ابتدا به‌صورت هیروگلیفی (که از راست به‌چپ خوانده می‌شود[4]) وسپس با نمادگذاری جدید نقل می‌کنیم.

۱۲	۱		I ۱			II∩ ۲۱
۲۴	۲		II ۲			∩ IIII∩ ۴۲/
۴۸	/۴		IIII/ ۴			IIII∩∩ IIII∩∩ ۸۴
۱۴۴ جمع ۹۶	/۸		IIII/ IIII ۸	III∩∩∩∩ III∩∩∩∩ ۶۹	بعلاوه	∩∩ IIII∩∩𓍢 ۴۴۱

نوشته: دکتر محمد حسین احمدی ـ استاد دانشگاه ویسکانسین وایت واتر آمریکا
ترجمه: طراوت مشتاق
دانشجوی کارشناسی ریاضی دانشگاه تربیت معلم تهران
ویرایش دکتر اسماعیل بابلیان

چهارضرب در دوازده وهشت ضرب در دوازده، جمع شده و حاصل دوازده در دوازده را به‌دست می‌دهد.
اعدادی که قراراست جمع شوند، به‌وسیلهٔ نماد درسمت راست (و در نمادگذاری جدید درسمت چپ) نشان داده شده‌اند. عدد ۱۴۴ حاصل با حرفی به شکل dmd همراه است که در خط هیروگلیفی نشاندهندهٔ یك طومار لوله شدهٔ مهردار[۶] می‌باشد.

۲. کسرهای مصری

کسر واحد $\frac{1}{x}$ که درآن x یك عدد صحیح و مثبت است، کسر مصری نامیده می‌شود. زیرا مصریان قدیم نماد مناسبی برای کسرهایی به‌شکل $\frac{a}{b}$ با شرط $a>1$، بجز $\frac{2}{3}$ به دست نیاورده بودند[۵]. برای مثال، علامت [× معرف $\frac{3}{4}$ (در نمادگذاری ما) است. چون اعمال حساب برروی اعداد کسری اگر غیرممکن نبود؛ کاری بس دشوار بود، آنها $\frac{a}{b}$ (درنمادگذاری جدید) را به‌صورت مجموعی ازکسرهای‌واحد متمایز ومثبت بیان‌می‌داشتند یعنی به‌صورت:

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{x_i}\ ;\ 0<x_1<x_2<\cdots<x_n$$

ازاینجا معلوم می‌گردد که چرا پاپیروس احمس (یا رایند) که سندی معتبر از ریاضیات مصراست، به مسألهٔ زیر توجه بسیار داشته است: عددگویایی داده شده است، مثلاً $\frac{3}{7}$ (درنمادگذاری جدید)، آنرا به‌صورت مجموعی‌ازکسرهای واحد متمایزبنویسید.
(به‌این صورت $\frac{3}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{28}$).

قرنها ریاضیدانان بسیاری در صدد برآمدند تا روشی بیابند که بتوانند چگونگی بسط کسر مثبت مفروضی را به صورت مجموعی ازکسرهای واحد متمایز بررسی نمایند. در ۱۲۰۲ فیبوناتچی [۱۲] اولین کسی بود که الگوریتمی بنام الگوریتم «حریص»، کشف نمود، الگوریتمی که می‌توان آن را دربیان هرعدد گویای مثبت $\frac{a}{b}$ به‌صورت مجموعی ازکسرهای واحد متمایز، مورداستفاده قرارداد. (در الگوریتم حریص، همواره بزرگترین کسر واحد $\frac{1}{k}$ را، که هنوز به‌کار برده نشده، انتخاب می‌کنیم که برای آن باقیمانده غیرمنفی است). این الگوریتم توسط سیلوستر نیزمستقلاً کشف شده بود [۱۶]. سیلوستر اولین کسی بودکه مطالعه‌ای اصولی برروی کسرهای مصری انجام داد ونشان داد که هرکسر واقعی $0<\frac{a}{b}<1$ می‌تواند به صورت حاصلجمع تعدادی متناهی ازکسرهای واحد (یا مصری) متمایز که درالگوریتم حریص استفاده شده، بیان شود. توجه کنید که ما فقط با کسرهای بین ۰ و ۱ سروکار داریم، هرچند که این نظریه قابل تعمیم نیز می‌باشد. مراحل الگوریتم حریص به‌قرار زیراست.

کسر واقعی $\frac{a}{b}$ داده شده است، $1<a<b$ و $(a,b)=1$ عدد طبیعی n را چنان بیابید که $\frac{1}{n}\leqslant\frac{a}{b}<\frac{1}{n-1}$.

از این نامساویها نتیجه می‌شود. $n-1<\frac{b}{a}\leqslant n$.

برای یافتن n قرارمی‌دهیم $n-1=\left[\frac{b}{a}\right]$، که در آن منظور از $\left[\frac{b}{a}\right]$ جزء صحیح $\frac{b}{a}$ است.

سپس این مراحل را دوباره برای $\left(\frac{a}{b}-\frac{1}{n}\right)$ تکرار می‌کنیم. (تا به‌یک کسر مصری برسیم).

مثال: فرض کنیم $\frac{a}{b}=\frac{21}{23}$، چون $n_1-1=\left[\frac{23}{21}\right]=1$
بنابراین، $n_1=2$ ولذا

$$\frac{21}{23}=\frac{1}{2}+\left(\frac{21}{23}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{19}{46} \qquad (1)$$

اکنون همین مراحل را برای $\frac{19}{46}$ تکرار می‌کنیم، یعنی $n_2-1=\left[\frac{46}{19}\right]=2$ وبنابراین $n_2=3$، لذا

$$\frac{21}{23}=\frac{1}{2}+\frac{19}{46}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(\frac{19}{46}-\frac{1}{3}\right) \qquad (2)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{11}{138}$$

مجدداً چون $n_3-1=\left[\frac{138}{11}\right]=12$، پس $n_3=13$ و بنابراین

$$\frac{21}{23}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{13}+\left(\frac{11}{138}-\frac{1}{13}\right) \qquad (3)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{13}+\frac{5}{1794}$$

اکنون به دلیل آنکه $n_4-1=\left[\frac{1794}{5}\right]=358$، پس $n_4=359$ وبنابراین

$$\frac{21}{23}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{13}+\frac{1}{359}+\left(\frac{5}{1794}-\frac{1}{359}\right)$$

$$=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۱۳}+\frac{۱}{۴۵۹}+\frac{۱}{۶۴۴۰۴۶}$$

بنابراین، این فرایند کامل شده است. ملاحظه کنید که درمرحلهٔ (۳) داشتیم،

$$\frac{۲۱}{۲۳}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۱۳}+\frac{۵}{۱۷۹۴}$$

الگوریتم تغییر یافتهٔ فیبوناتچی نشان می‌دهد که چـون ۲ و ۳ هردو ۱۷۹۴ را عاد می‌کنند و نیز ۳+۲ = ۵، لذا

$$\frac{۵}{۱۷۹۴}=\frac{۲}{۱۷۹۴}+\frac{۳}{۱۷۹۴}=\frac{۱}{۸۹۷}+\frac{۱}{۵۹۸}$$

بنابراین،

$$\frac{۲۱}{۲۳}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۱۳}+\frac{۱}{۵۹۸}+\frac{۱}{۸۹۷}$$

این بسط جدید دارای مخرجهای بسیار کوچکتر است. اما هنوز به‌طول ۵ میباشد. از آن زمان تاکنـون الگوریتم‌های گوناگونی توسط ریاضیدانانی چون اردش و بلیچـر به‌منظـور یافتن روشی بهتر برای بسط کسرهای مثبت $\frac{a}{b}$ که نمایش آنها با طول کوتاهتر ویا با مخرج کوچکتر باشد، کشف و تعمیم یافته است.

برای توضیحات بیشتر [۱] ملاحظه شود.

۳. حدس‌ها

توجه داریم که برای نوشتن کسر $\frac{a}{b}$ به‌صورت مجموعی از k کسر واحد متمایز، با مسأله‌ای به‌این صورت مواجهیم

$$\frac{a}{b}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i}$$

که یك معادلهٔ دیوفانتوسی با k مجهول میباشد.

۱.۳. حدس اردش ـ شتراوس

در ۱۹۵۰ اردش وشتراوس (به [۱۰] مراجعه شود) حدس زدند که برای هر عدد صحیح $n>1$، معادلهٔ دیوفانتوسی

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \qquad (۳.۱)$$

برای اعداد صحیح ومثبت x و y و z، دارای جواب است.

این حـدس برای $n<۵۰۰۰$ به‌وسیلـهٔ شتـراوس [۹]، برای $n<۸۰۰۰$ توسط برنشتاین [۲]، برای $n<۲۰۰۰۰$ به‌وسیله شاپیرو، بـرای $n<۱۰۶۱۲۸$ تـوسط ابلاس [۱۰]، بـرای $n<۱۷۱۶۴۹$ به‌وسیلـه رساتـی [۱۳]، برای $n<۴۰۰۰۰۰$ توسط چانکو و دیگران [۸]، برای $n<10^7$ به‌وسیله یاماموتو [۱۸] وبرای $n<101\times10^7$ تـوسط جولنشتاین [۱۷] تأیید شده است. وب [۱۷] ثابت کرد که عـدد $S(N)$ برای $n\leqslant N$ که به‌ازای آنها معادلهٔ (۳.۱) دارای جـواب نباشد، از یك عدد ثابت مثبت ضرب در $\frac{N}{(\log N)^{\frac{7}{4}}}$ کـوچکتـر است. همچنین ولانـگ [۵] نشان داد کـه به‌ازای هر N و kی صحیـح مثبت مفروض، $S(N)\leqslant\frac{CN}{(\log N)^k}$ که درآن C عددیست ثابت، مثبت و وابسته به k.

۲.۳ حدس سیرپنسکی

در ۱۹۵۶ سیرپنسکی [۱۴] حدس زدکه هرکسر بشکل $\frac{5}{n}$ که درآن $n\geqslant 2$، می‌تواند بصورت‌مجموعی ازسه‌کسر واحد نوشته شود. به‌عبارت دیگر معادلهٔ دیوفانتوسی

$$\frac{5}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \qquad (۳.۲)$$

به‌ازای هر $n\geqslant 2$، نسبت به x و y و z صحیح ومثبت‌دارای جواب است.

این حدس به‌ازای $n<۹۲۲۳۲۱$ تـوسط پالاما [۱۱] تأیید شده است.

در [۱۵] نشان داده شده است کـه اگـر nی، $n\geqslant 3$، باشد بقسمی‌که معادلهٔ (۳.۲) دارای جـواب نباشد، دراین صورت n باید به‌شکل $۲۷۸۴۶۰k+1$ باشد. بنابر این واقعیت حدس سیرپنسکـی بـرای هـر n کـه $3\leqslant n\leqslant ۱۱۰۵۷۴۳۸۸۰۱$ آزمایش شده است.

درکنفرانس سالانهٔ انجمن ریاضی وجامعه ریاضیدان آمریکا، ژانویه ۱۹۸۸، نگارنده حدسهای زیر را ارائه کرد.

۳.۳. برای‌هرعدد صحیح $a\geqslant 8$، عددی چون n $(n>a)$ وجود دارد بطـوری که $\frac{a}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ دراعداد صحیح مثبت دارای جواب نیست.

به عنـوان مثـال، برای $a=8$، $n=17$ و بـرای $a=9$، $n=19$ به‌دست می‌آید.

بخش ۵ همین مقاله را ملاحظه کنید.

۴.۳. به‌ازای هرعدد صحیح $k\geqslant 1$، حداقـل یک عدد گویای $\frac{a}{b}$ متعلق به $\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$ وجود دارد، بقسمی که معادلهٔ

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

برای اعداد صحیح ومثبت x و y و z دارای جواب نیست.

در بخش ۵، نشان می‌دهیم کـه این حدس برای ۲ و ۱ = k درست است، وتعدادی نامتناهی عدد گویای مثبت با این‌خاصیت

در بازه‌های $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ و $(\frac{1}{2}, 1)$ وجود دارد.

۴. نمایش $\frac{4}{n}$ به صورت مجموعی از دو کسر واحد متمایز

در این بخش شکل مصری $\frac{4}{n}$ را با طول ۲ و به‌ازای $n \geqslant 3$ و یا هم‌ارز آن یعنی جواب داشتن معادلهٔ دیوفانتوسی

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \qquad (4.1)$$

را برای x و y های صحیح و مثبت مورد توجه قرار می‌دهیم.

هدف ما یافتن الگوریتمی ساختنی برای بیان $\frac{4}{n}$ و $\frac{5}{n}$ به‌صورت مجموعی از دو کسر واحد متمایز است کـه n دارای شرایط خاصی باشد. در حقیقت، منظورمان ایـن است کـه از حدسیات اردش–شتراوس وسیرپنسکی نتایجی به دست آوریم.

مشاهده‌ای که توسط قد ما صورت پذیرفته و در کار کردن با کسرهای مصری بسیار مناسب است، اتحاد زیر است که **اتحاد طبیعی** نامیده می‌شود.

لم ۱. اگر x عدد صحیح و مثبتی باشد، آنگاه

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x(x+1)}$$

بعلاوه، به‌ازای هر $x>1$، مخرجها متمایز می‌باشند.

برهان. بدیهی است.

قضیه ۱. اگر $n\equiv 0$ و ۲ و $3 \pmod 4$ معادلهٔ (۴.۱) با شرط $n\geqslant 5$ برای اعداد صحیح مثبت ومتمایز x و y، حلپذیر است.

برهان. اگر $n\equiv 0 \pmod 4$ آنگاه به ازای عضوی مانند k از Z^+، $n=4k$ بنابر لم ۱ داریم

$$\frac{4}{n}=\frac{4}{4k}=\frac{1}{k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k(k+1)}$$

اگر $n\equiv 2 \pmod 4$ دراین صورت $n=4k+2$ و بنابه لم ۱ خواهیم داشت.

$$\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+2}=\frac{2}{2k+1}=\frac{2}{2k+2}+\frac{2}{(2k+1)(2k+2)}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(2k+1)(k+1)}$$

اگر $n\equiv 3 \pmod 4$ پس $n=4k+3$ ($k\in Z^+$). با بکاربردن لم ۱ داریم

$$\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+3}=\frac{4}{4k+4}+\frac{4}{(4k+3)(4k+4)}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(4k+3)(k+1)}$$

بنابراین قضیه ثابت شده است.

تذکر ۱. واضح است که اگرمعادلهٔ (۴.۱) برای $n=p$، که p عددیست اول، قابل‌حل باشد، به‌ازای هر $n=kp$ دارای‌جواب است. زیرا جوابی ازمعادلهٔ

$$\frac{4}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

منجر به‌جوابی ازمعادلهٔ

$$\frac{4}{n}=\frac{4}{kp}=\frac{1}{kx}+\frac{1}{ky}$$

می‌شود.

تذکر ۲. معادلهٔ (۴.۱) دارای یـک مجموعه جواب غیرمتمایز است، بشرط آن‌که n زوج باشد.

تذکر ۳. ازاین پس‌اصطلاح «جواب‌داشتن» را به‌معنی **«جواب داشتن دراعداد صحیح مثبت متمایز»** می‌گیریم.

قضیهٔ ۲. معادلهٔ (۴.۱) با شرط $n\geqslant 3$ قابل‌حل است، اگر وتنها اگرحداقل یک مقسوم‌علیه اول p از n وجود داشته باشد بقسمی که $p\equiv 2$ یا $3 \pmod 4$.

برای اثبات این قضیه به‌یک لم احتیاج داریم.

لم ۲. معادلهٔ دیوفانتوسی $\frac{a}{b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ کـه درآن a و b اعداد صحیح مثبت ونسبت به‌هم متباین هستند، برای اعداد صحیح و مثبت x و y دارای جواب است اگر و تنها اگر اعداد صحیح مثبت، متمایز ونسبت به هم اول r و s موجود باشند بقسمی که $r, s|b$، و $r+s\equiv 0 \pmod a$.

برهان. اثباتی ازاین لم را می‌توان در [۱۶] یافت.

برهان قضیه ۲. لزوم

اگرمعادلهٔ (۴.۱) قابل‌حل باشد دراین صورت حداقل یک مقسوم‌علیه اول p از n وجود دارد بقسمی که $p\equiv 2$ یا $3 \pmod 3$.

بعکس، فرض می‌کنیم معادلهٔ (۴.۱) برای برخی از مقادیر n قابل‌حل است و تمام مقسوم‌علیه‌های اول n بشکل $4k+1$ می‌باشد، یعنی

$$u=p_1^{a_1}\, p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$$

که اعداد اول $p_i \equiv 1 \pmod 4$. دراین صورت بنابرلم ۲ باید دوعدد صحیح مثبت ومتمایز r و s موجود باشند که، r و s عدد n را عاد می‌کننـد و $(r \text{ و } s)=1$ و نیز $r+s\equiv 0 \pmod 4$. اما مقسوم‌علیهِ n بودن r و s نتیجه می‌دهد که $r\equiv 1 \pmod 4$ و $s\equiv 1 \pmod 4$، بنابراین $r+s\equiv 2 \not\equiv 0 \pmod 4$، کـه یك تناقض است.

اثبات کفایت بنابرقضیه ۱ و تذکر ۱ واضح است.

نتایج زیرمستقیماً ازقضیهٔ ۲ به‌دست می‌آیند.

نتیجه ۱. $\frac{4}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ دارای جـواب است اگـر و تنهـا اگر $p\equiv 3 \pmod 4$.

نتیجه ۲. $\frac{4}{p^{\alpha}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ با شرط $\alpha \geqslant 1$ دارای جواب است‌اگر وتنها اگر $p\equiv 3 \pmod 4$.

نتیجه ۳. $\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ دارای‌حل است اگر وتنها اگرهر مقسوم‌علیه اول n به‌شکل $4k+1$ باشد.

ملاحظه می‌کنیم قضیه ۲ و هم از آن یعنی نتیجه ۳، ملاکهای خوبی بـرای تشخیـص داشتن جـوابهای متمایز بـرای معادلهٔ (۴.۱) می‌باشند، در واقع کافیست برای هر n صحیح ومثبت مفروض‌به عوامل اول n توجه کنیم. علاوه براین قضیه ۱ وتذکرا الگوریتمی برای یافتن جـوابهای معادلـه، در صورت وجود، بدست میدهند.

قضیـه ۳. حدس‌های اردش-شتراوس وسیرپنسکی معتبرند، بدین معنا کـه معـادلات (۳.۱)، (۳.۲) برای $n\geqslant 2$ قابل حلند، بشرط آنکه عدد اول p موجود باشد، بقسمیکه $p|n$ و $p\equiv 3 \pmod 4$.

برهان. اگـر $p|n$، $p=4k+3$ $(k\in Z^+)$، در این صـورت بنابرقضیهٔ ۲، $x_\circ$ و $y_\circ$ی وجود دارد بقسمی که

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{x_\circ}+\frac{1}{y_\circ}$$

بنابراتحاد طبیعی داریم

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{x_\circ}+\frac{1}{y_\circ+1}+\frac{1}{y_\circ(y_\circ+1)}$$

واین یك جواب ازمعادلـهٔ (۳.۱) به‌دست می‌دهد. یـك جواب معادلهٔ (۴.۲) می‌تواند ازمعادلهٔ زیر به‌دست‌آید:

$$\frac{5}{n}=\frac{1}{n}+\frac{4}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{x_\circ}+\frac{1}{y_\circ}$$

نتیجه ۴. معادلات (۳.۱) و (۳.۲) دارای جواب‌اند اگر $n\equiv 0$ و ۲ یا ۳ $\pmod 2$.

برهان. اگر $n\equiv 0$, ۲ یا ۳ $\pmod 4$، دراین صورت مقسوم‌علیه اولی مانـند p از n وجـــود دارد بقسمـی $p=2$ یا $p\equiv 3 \pmod 4$. بنابراین بنابرقضیهٔ ۳، نتیجه به‌دست می‌آید.

نتیجه ۵. معادلهٔ (۳.۱) دارای جواب است اگر $n\equiv l \pmod 8$ با شرط $l\neq 1$.

برهان. اگر $l=0$, ۳ یا ۳ طبق نتتجه ۴ معادلهٔ (۳.۱) به‌ازای مقادیر $n\equiv 0, 2, 3, 4, 6, 7 \pmod 8$ دارای جواب است. پس تنها حالتی که باقی می‌ماند و باید ثـــابت شود حالت $n\equiv 5 \pmod 8$. اکنون $n\equiv 5 \pmod 8$ مستلزم آن است‌که به‌ازای یك عدد صحیـح نامنفی مانـند k، $n=8k+5$. لذا $n+1$ دارای مقسوم‌علیهی به شکـل $s=4t-1$ می‌باشد. پس داریم.

$$\frac{4}{n}=\frac{4t}{nt}$$

$$=\frac{s+1}{nt}$$

$$=\frac{s}{nt}+\frac{1}{nt}$$

$$=\frac{1}{t}\left(\frac{s}{n+1}+\frac{s}{n(n+1)}\right)+\frac{1}{nt}$$

بنابرلم ۱)

$$=\frac{1}{tl}+\frac{1}{ntl}+\frac{1}{nt}$$

که درآن $l=\frac{n+1}{s}\in Z^+$.

توجه داشته باشید کـه $1<l$. زیرا درغیر این صـورت، $l=1$ ایجاب می‌کند کـه n زوج بـاشد واین با $n=8k+5$ که فرد است درتناقض میباشد. پس مخرجها دراین بسط متمایز می‌باشد.

نتیجه ۶. معادلهٔ (۳.۱) قابل‌حل است اگر $n\not\equiv 1 \pmod{24}$.

برهان. بنابرنتیجه ۵، معادلـهٔ (۳.۱) دارای جواب است اگر $n=8k+l$ و $l\neq 1$.

درنظرگرفتن k درهمنهشتی بهنگ ۳ مستلزم آن است که معادلهٔ (۳.۱) اگـر $n\equiv s \pmod{24}$ وبـا شرط $1<s<24$، بجز احتمالاً برای $s=9, 17$ حلپذیرباشد. اما جواب داشتن‌معادلهٔ (۳.۱) را برای $s=9$ و $s=17$ ثابـــت می‌کنیم. اگر $n=24k'+9$ در این صورت $n=3(8k'+3)$، یعنی $3|n$، ولذا بنابرقضیهٔ ۳ معادلهٔ (۳.۱) حلپذیراست.

اگر $n=24t+17$ دراینصورت $3|n+1$، و داریم:

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{n}+\frac{3}{n}$$

$$=\frac{1}{n}+\frac{3}{n+1}+\frac{3}{n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{24t+17}+\frac{1}{8t+6}+\frac{1}{(24t+17)(8t+6)}$$

وبنابراین نتیجه را به‌دست‌آوریم.

توجه داشته باشید که برای اثبات حدس اردش ـ شتراوس، هنوز باید نشان دهیم که معادلهٔ (۳.۱) وقتی که n به صورت $24k+1$ می‌باشد، دارای جواب است. هرچند که این‌کار برای برخی ازمقادیر k انجام پذیرفته، اما هیچ‌کس نتوانسته آن را برای هرمقدار صحیح ومثبت k انجام دهد.

طبیعی است که متناهی یا نامتناهی بودن تعداد جوابهای معادلات (۳.۱)، (۳.۲) ویا (۴.۱) را درصورتی که دارای جواب باشند، زیرسؤال بریم. کافی است که به‌طریق زیر نشان دهیم که این مطلب برای معادلهٔ (۴.۱) درست است.

قضیهٔ ۴. اگر معادلهٔ (۴.۱) دارای جواب باشد دراین صورت تعداد جوابها متناهی خواهد بود.

برهان. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم $1\leqslant x\leqslant y$.
با این فرض معادلهٔ (۴.۱) برای n داده شده‌ای داریم:

$$\frac{n}{4}\leqslant x\leqslant\frac{n}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{x}\leqslant\frac{4}{n}\leqslant\frac{2}{x}$$

این مستلزم آن است که برای هر n داده شده، تعدادی متناهی جواب‌برای x ولذا y وجود داشته باشد، بدین‌ترتیب‌مجموعه‌ای ازجوابهای ممکن ومناسب برای معادلهٔ (۴.۱) تشکیل میگردد.

این بخش را با بررسی کسر $\frac{5}{121}$ به‌پایان می‌رسانیم.

چون $p=11$، ۱۲۱ را عاد می‌کند و $p\equiv 3\ (mod\ 4)$، پس با استفاده از الگوریتمی که در این بحث ارائه شد، به دست می‌آوریم:

$$\frac{4}{11}=\frac{1}{3}+\frac{1}{33}$$

لذا،

$$\frac{4}{121}=\frac{1}{3\times 11}+\frac{1}{33\times 11}=\frac{1}{33}+\frac{1}{363}$$

و بنابراین؛

$$\frac{5}{121}=\frac{1}{121}+\frac{4}{121}$$
$$=\frac{1}{121}+\frac{1}{33}+\frac{1}{363}$$

که‌کوتاهترین بسط از $\frac{5}{121}$ می‌باشد و دارای‌مخرجهایی به‌مراتب کوچکتر ازمخرجهای هریك از الگوریتم‌هایی است که قبلاً در باره آنها صحبت کرده‌ایم.

به‌طور مشابه برای مثال عددی $\frac{4}{121}$ بسط زیر را داریم:

$$\frac{4}{121}=\frac{1}{34}+\frac{1}{363}+\frac{1}{1122}$$

توجه داشته باشید که برای $\frac{4}{121}$ بسطی با طول ۲ به‌صورت زیر به‌دست‌آورده بودیم؛

$$\frac{4}{121}=\frac{1}{33}+\frac{1}{363}$$

اما برای $\frac{5}{121}$ ممکن نیست که بتوان بسطی به‌طول ۲ به‌دست آورد (نگاه کنید به لم ۲).

۵. اعداد گویایی که نمی‌توان آنها را به‌صورت مجموعی از سه‌کسر واحد متمایز بیان نمود.

دراین بخش می‌خواهیم نشان دهیم که تعدادی نامتناهی عدد گویای صریح درهریك ازبازه‌های $\left(\frac{1}{2},1\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ وجود دارد به‌طوری که نمی‌توان آنها را به‌صورت مجموعی از سه کسر واحد متمایز بیان نمود، یعنی:

قضیهٔ ۵. معادلهٔ دیوفانتوسی

$$\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

که درآن $n\geqslant 8$ (بجز $n=11$) و با شرط اول بودن $2n+1$، برای اعداد صحیح مثبت ومتمایز x، y و z دارای جواب نیست.

برهان. بدون از دست دادن کلیت می‌توانیم فرض کنیم $1\leqslant x<y<z$. اکنون نمایش $\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ با درنظرگرفتن $1\leqslant x<y<z$ مستلزم آن است که

$$\frac{1}{x}<\frac{n}{2n+1}<\frac{3}{x}$$

بنابراین

$$2+\frac{1}{n}<x<6+\frac{3}{n} \quad \text{یا} \quad \frac{2n+1}{n}<x<\frac{6n+3}{n}$$

این نامعادلات مستلزم آن است که $3<x\leqslant 6$.

اگر $x=3$، آنگاه $\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{3}=\frac{n-1}{3(2n+1)}$، اما هیچیك از ترکیبات $3+1$، $(2n+1)+1$، $(2n+1)+3$، $3(2n+1)+1$ مضربی از $n-1$، نظیر آنچه درلم ۲ مورد نیازاست، نمی‌باشند. البته به‌غیر از $3(2n+1)+1$ آن هم زمانی که $n=11$ است. اگر $x=4$، داریم

$$\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{4}=\frac{2n-1}{4(2n+1)}$$

اما هیچ‌یك از $4+1$، $(2n+1)+1$، $4(2n+1)+1$، $2(2n+1)+1$، $(2n+1)+2$ و $(2n+1)+4$ ویژگی

دید هندسی در قاعدهٔ هوپیتال

جواد لآلی

مقدمه: در شماره ۲۹، مطالبی درباب قاعده هوپیتال بیان کردیم. دراینجا، جهت تکمیل آن مباحث، با دید هندسی و روشی جدا از آن، به بررسی قاعده هوپیتال می‌پردازیم. نظر به اینکه این قاعده موردنظر کوشی نیز بوده است، درسال ۱۸۲۳، تحت عنوان «دروسی در آنالیز»، برهانی برای آن ارائه داده است. برهان کوشی درمورد قاعدهٔ هوپیتال از دقت وظرافت خاصی برخورداراست واساس این برهان برقضیه مقدار میانگین‌کوشی، استوار است. اما، قضیه مقدارمیانگین به‌کمک قضیه رل ثابت می‌شود واثبات قضیه رل به قضیه‌ای درمبحث پیوستگی بستگی دارد. دراینجا، گردآوری قضایا به‌گونه‌ایست که بررسی دقیق قاعده هوپیتال را امکان‌پذیرمی‌سازد. دراین مسیر به‌اثبات‌احکام مفیدی نایل می‌شویم که نیاز اکثر معلمین و دانش‌آموزان را، در رسم منحنی، برآورده می‌کند. به‌عنوان مثال؛ در رسم منحنی یك تابع، به‌احکامی استناد می‌کنیم که پاسخی برای آن درسرتاسر کتابهای درسی نمی‌یابیم؛ اگرمشتق تابعی مثبت باشد، تابع صعودی است؛ واگرمشتق آن منفی باشد، تابع نزولی است؛ و بالاخره، اگرمشتق تابع صفرباشد، ممکن است تابع در آن نقطه دارای ماکزیموم ویا مینیموم ویا عطف باشد.

تبصره. برای اینکه توضیحات بعد از برهان قضیه تداخلی با برهان‌آن نداشته باشد پایان برهان هرقضیه را با نماد ▲ مشخص می‌کنیم.

۱ـ قضایای بنیادی در آنالیز.

۱.۱ قضیه. فرض‌کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$. دراین‌صورت، اگر $L>0$، عددی مانند δ موجود است که به‌ازای هر x، اگر $0<|x-a|<\delta$ آنگاه $f(x)>0$.

اگر $L<0$، همسایگی را بگونه‌ای می‌توان یافت که درآن همسایگی مقدار f منفی باشد.

برهان. اثبات این قضیه، درمجله رشد آموزش ریاضی، شماره ۲۹، درمقاله «قاعده هوپیتال» ارائه گردیده است ▲.

۲.۱ قضیه. فرض‌کنید تابع حقیقی f بر بازه $[a, b]$ پیوسته باشد. دراین صورت، f ماکزیموم ومینیموم خود را دراین بازه اختیار می‌کند؛ به‌عبارت دیگر، نقاطی مانند x_1 و x_2 از بازه $[a, b]$ موجود است که به‌ازای هر x ازاین بازه،

$$f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$$

برهان. اثبات‌این قضیه درمجله رشدآموزش ریاضی، سال‌چهارم، شماره ۱۳ و ۱۴، درمقاله‌ای تحت عنوان «کران بالا و پائین و سوپرموم»، از آقای محمود نصیری، آمده است ▲.

بین صفرهای معادله مشتق یك تابع و طول نقاط ماکزیموم و مینیموم آن رابطه نزدیکی وجود دارد. این رابطه درقضیه زیر بیان شده است.

۳.۱ قضیه. فرض کنید f تابعی باشد به‌طوری که:

(الف) بر $[a, b]$ پیوسته باشد.

ب) درنقطه $a<c<b$ دارای ماکزیموم ویا مینیموم باشد،

(ج) $f'(c)$ موجود باشد.

دراین صورت، $f'(c)=0$.

برهان. فرض کنید که f در نقطه c دارای ماکزیموم باشد، حالتی که دراین نقطه مینیموم داشته باشد، برهان با تغییرات جزئی، عیناً تکرارمی‌شود. اثبات این قضیه به برهان خلف‌است. اگر $f'(c)\neq 0$ آنگاه $f'(c)>0$ یا $f'(c)<0$.

فرض کنید $f'(c)>0$. دراین صورت، چون

(۱) $\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c)>0$

بنا برقضیه ۲.۱، عددی مانند δ_1 هست بطوریکه

$(c-\delta_1, c+\delta_1)\subseteq[a, b]$

و به‌ازای هر x، اگر $0<|x-c|<\delta_1$ آنگاه

(۲) $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0.$

حال اگر $x\in(c, c+\delta_1)$ آنگاه $x-c>0$، و از ۲ نتیجه می‌شود که $f(x)>f(c)$، و این، با این فرض که f درنقطه c دارای ماکزیموم است، تناقض دارد.

ولی، اگر $f'(c)<0$، به طریق مشابه، عددی مانند δ_2 هست که به‌ازای هر x، اگر $0<|x-c|<\delta_2$ آنگاه

(۳) $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}<0$

حال اگر $x\in(c-\delta_2, c)$ آنگاه $x-c<0$، و از (۳) نتیجه می‌شود که، $f(x)>f(c)$، واین نیز با این فرض که f در نقطه c دارای ماکزیموم است، تناقض دارد ▲.

معمولاً، اکثر دانش‌آموزان عکس این قضیه را، به عنوان کاربرد، به‌کارمی‌برند؛ یعنی، برای به‌دست‌آوردن ماکزیموم و یا مینیموم یك تابع همیشه سعی می‌کنند که ریشه‌های معادله مشتق را به‌دست‌آورند. درصورتی که اگرتابع بربازه بسته‌ای پیوسته و درنقطه داخلی‌آن مشتق‌پذیر و دارای ماکزیموم ویا مینیموم باشد آنگاه طول‌آن درمعادله مشتق صدق می‌کند. با حذف هر یك ازمفروضات فوق، می‌توان مثالی ارائه داد که حکم قضیه برقرارنباشد. مثلاً، تابع $f(x)=|x|$، تنها درشرط (ج) صدق نمی‌کند. بنابراین، حکم قضیه، برهربازه بازی که شامل مبدأ باشد، برقرارنیست. تابع $f(x)=x$، درهربازه $[a, b]$، درنقاط انتهایی، ماکزیموم ومینیموم خود را می‌گیرد و درشرایط قضیه، تنها درشرط (ب) صدق نمی‌کند. بنابراین،

$f'(b)=f'(a)=1\neq 0,$

پس حکم قضیه برای این تابع برقرارنمی‌باشد. همیشه ریشه‌های مشتق‌طول‌ماکزیموم ویا مینیموم تابع‌نیست. زیرا، $f(x)=x^3$، که $x=0$ ریشه مشتق است، در صورتی که دراین نقطه تابع ماکزیموم ویا مینیموم ندارد.

قضیه رل. ازنظرهندسی بیان حکم ذیل واضح است که: اگر منحنی به‌قدرکافی هموارباشد، و در دونقطه انتهایی بازه $[a, b]$ محور xها را قطع کند، آنگاه این منحنی نقطه برگشتی بین a و b دارد که مماس درآن نقطه خطی موازی محور xهاست. بیان دقیق این مطلب، نتیجه مهمی ازقضیهٔ ذیل است که به قضیه رل معروف است.

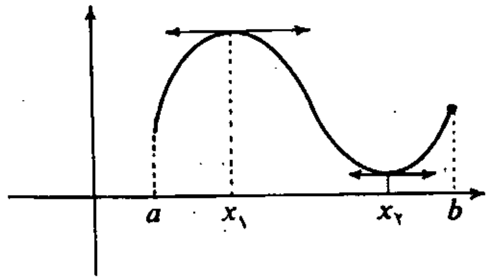
۴.۱ قضیه (رل). فرض کنید تابع f

(الف) بر $[a, b]$ پیوسته باشد؛

(ب) بر (a, b) مشتق‌پذیر باشد؛

(ج) $f(a)=f(b)$.

دراین صورت، حداقل نقطه‌ای مانند c بربازه (a, b) موجود است که $f'(c)=0$.



(شکل ۱)

برهان. چون f بر $[a, b]$ پیوسته است، بنابرقضیه ۲.۱، x_1 و x_2ای از بازه $[a, b]$ موجود است که به‌ازای هر x ازاین بازه،

$f(x_2)\leqslant f(x)\leqslant f(x_1)$

اگر x_1 و x_2 نقاط انتهایی بازه $[a, b]$ باشد آنگاه، به‌ازای هر x از $[a, b]$،

$f(x)=f(a)=f(b)$

درچنین حالتی، f تابعی ثابت است. بنابراین، به ازای هر x از (a, b)، $f'(x)=0$. ولی، اگر x_1 و x_2 نقاط انتهایی بازه نباشند آنگاه f ماکزیموم یا مینیموم خود را درنقطه‌ای مانند c، که $a<c<b$، اختیارمی‌کند. بنابرقضیه ۳.۱، $f'(c)=0$ ▲.

۵.۱ مثال. ثابت کنید که اگر

$$\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\dots+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$$

آنگاه معادله

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n=0$$

حداقل دارای یك ریشه بین صفر و یك است. (حالت خاص) ثابت کنید که معادله

$$-5x^4+2x^3-3x^2-x+2=0$$

ریشه‌ای دربازه $[0, 1]$ دارد.

حل. فرض کنید که

$$f(x)=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\dots+\frac{a_{n-1}}{2}x^2+a_nx$$

دراین صورت، $f(0)=f(1)=0$. بنابرقضیه رل، xای در بازه $[0, 1]$ موجود است که $f'(x)=0$. بنابراین، حکم برقرار است. حالت خاص، نتیجه‌ای ازحالت کلی است، وقتی که $n=4$ ▲.

۶.۱ قضیه (مقدارمیانگین کوشی) فرض‌کنید توابع f و g بر $[a, b]$ تعریف شده‌اند و

(الف) بر $[a, b]$ پیوسته باشند؛

(ب) بر (a, b) مشتق‌پذیر باشند،

(ج) g' بر (a, b) مخالف صفر باشد.

در این صورت، عددی مانند c، موجود است بطوری که $a<c<b$،

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

تبصره. بدیهی است که $g(a)\neq g(b)$. زیرا، اگر چنین نباشد، بنابر قضیه رل، عددی مانند c موجود است بطوری‌که $a<c<b$ که $g'(c)=0$ و این یك تناقض است.

برهان. فرض‌کنید با بعضی ازخواص دترمینان سه درسه آشنا باشیم. تابع F را به‌وسیله دترمینان زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x)=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1\\ f(b) & g(b) & 1\\ f(a) & g(a) & 1\end{vmatrix}$$

ثابت می‌کنیم که F درشرایط قضیه رل صدق می‌کند. مقدار این تابع درنقاط $x=a$ و $x=b$ یکسان است. زیرا، دراین نقاط، دترمینان فوق دارای دوسطر یکسان است و مقدار آن صفر است، پس $F(a)=F(b)=0$. اینك، دترمینان را نسبت به اولین سطر بسط می‌دهیم.

$$F(x)=f(x)[g(b)-g(a)]-g(x)[f(b)-f(a)]+[f(b)\,g(a)-g(b)\,f(a)]$$

[اگر خواننده با مفاهیم دترمینان آشنایی نداشته باشد می‌تواند شروع برهان را با تعریف تابع F، مطابق دستور فوق، شروع کند.] بدیهی است‌که F بر $[a, b]$ پیوسته و بر (a, b) مشتق‌پذیر است. بالنتیجه، شرایط قضیه رل برای تابع F برقرار است.

بنابراین، نقطه‌ای مانند c موجود است بطوری‌که $a<c<b$

$F'(c)=0$

یا،

$$f'(c)[g(b)-g(a)]-g'(c)[f(b)-f(a)]=0$$

و یا،

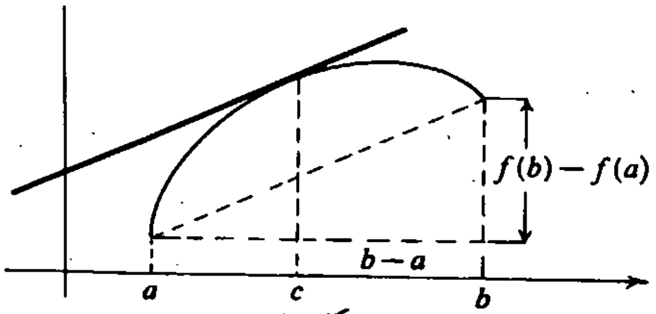
$$\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{g'(c)}{f'(c)}$$

که اثبات قضیه تمام می‌شود ▲.

نتیجه ۱. (قضیه مقدار میانگین) فرض کنید که f بر $[a, b]$ پیوسته و بر (a, b) مشتق‌پذیر باشد. دراین صورت، cای موجود است که $a<c<b$ و

$$f(b)-f(a)=(b-a)\,f'(c)$$

برهان. کافی است که درقضیه قبل، $g(x)=x$ (شکل ۲) ملاحظه شود) ▲.



(شکل ۲)

نتیجه ۲. اگر به‌ازای هر x از (a, b)، $f'(x)=0$ آنگاه f بر $[a, b]$ تابعی ثابت است.

برهان. فرض کنید x نقطه‌ای باشد که درشرط $a<x\leqslant b$ صدق کند. بنابر قضیه مقدار میانگین بر بازه $[a, x]$، عددی مانند x_1 موجود است که $a<x_1<x$

$$f(x)-f(a)=f'(x_1)(x-a)$$
$$=0$$

بنابراین، به‌ازای هر x از $[a, b]$،

$f(x)=f(a)$ ▲.

نتیجه ۳. اگر به‌ازای هر x از (a, b) $f'(x)>0$ [$f'(x)<0$] آنگاه f تابعی اکیداً صعودی [اکیداً نزولی] بر بازه $[a, b]$ است.

برهان. اثبات این حکم با توجه به قضیه مقدار میانگین بدیهی است. زیرا، اگر x_1 و x_2 نقاطی باشند که درشرط

$a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$

صدق کند آنگاه x_3ای موجود است‌که $x_1<x_3<x_2$، و

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(x_3)(x_2-x_1)$$

حال اگر $f'(x_3)>0$ آنگاه $f(x_2)>f(x_1)$؛ و اگر $f'(x_3)<0$ آنگاه $f(x_2)<f(x_1)$ ▲.

مقدمات لازم وقضایای مورد لزوم، جهت بیان دیگری برای قاعده هوپیتال، مهیا شده است؛ منتها، دربیان برهان آن دونکته اساسی است که یادآوری‌آنها بی‌فایده نخواهد بود. اول آنکه، دسته‌بندی که جهت تقلیل مراحل برهان، که درشماره ۲۹، انجام داده‌ایم بررسی حدود دراین قاعده را به‌تحقیق حدود راست و یا چپ محدود می‌کند. بنابراین، نقطه حدی در یکی از دوانتهای بازه درنظرگرفته می‌شود. دیگر آنکه؛ دراثبات حدود، در این قاعده، ازصورت دیگر بیان مفهوم حد که معادل آن است استفاده می‌شود؛ یعنی، وقتی که می‌گوئیم حد تابع، درنقطه x_0، برابر $\lambda\in R$ است؛ بدین معنی است که

به‌ازای ε دلخواه، همسایگی از x_0 موجود است که به‌ازای هر x در این همسایگی، $|f(x)-\lambda|<\varepsilon$؛ و این معادل این است که:

$$\lambda-\varepsilon<f(x)<\lambda+\varepsilon$$

حال اگر $u=\lambda+\varepsilon$ و $v=\lambda-\varepsilon$ آنگاه حکم فوق معادل این است که:

(خاصیت مشخصه حد) گوئیم $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lambda$ اگر وفقط اگر به‌ازای هر u و v که $v<\lambda<u$، همسایگی از x_0 موجود است که به‌ازای هر x دراین همسایگی، $v<f(x)<u$.

خواص مشخصه حد، وقتی که $\lambda=\pm\infty$، نیز برقرار است. صورت بیان، باتغییرات جزئی، همان صورت فوق است.

اینك، به بررسی قاعده هوپیتال می‌پردازیم.

۲. قضیه (قاعده هوپیتال)

فرض کنید $R^*=R\cup\{\infty, -\infty\}$ بطوری که

(الف) $x_0\in R^*$، J بازه ناتهی در R باشد که یکی از دو انتهای آن x_0 است،

(ب) $f, g: J\to R$ دو تابع مشتق‌پذیر باشند؛

(ج) به‌ازای هر x از J، $g'(x)\neq 0$ و g اکیداً یکنواست؛

(د) همچنین، یکی از دوشرط زیر برقرار باشد:

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$؛

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$ (هیچ فرضی برای f منظور نمی‌شود).

دراین‌صورت، حکم زیر برقرارمی‌شود:

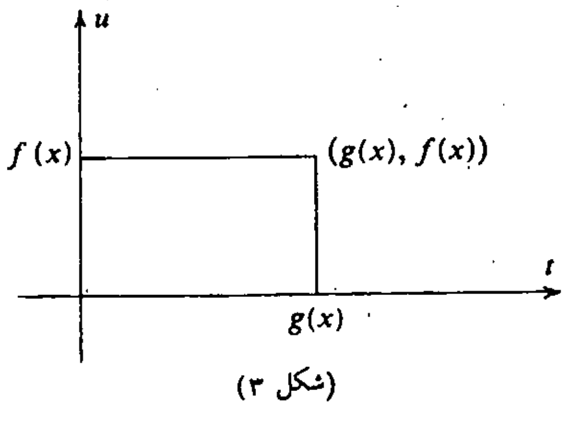
اگر $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'}{g'}(x)$ موجود و برابر $\lambda\in R^*$ باشد آنگاه

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x)$ موجود وبرابر λ است.

ابتدا، نگاهی به‌مفروضات این قاعده می‌اندازیم.

نگاهی جامع به مفروضات قاعده هوپیتال

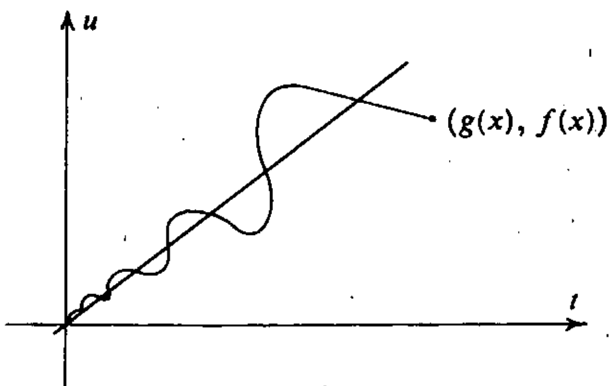
مختصات دکارتی t و u را، درصفحه، درنظرمی‌گیریم. متناظر هرمقدار x، نقطه‌ای درصفحه، مانند $(g(x), f(x))$ مشخص می‌کنیم (شکل ۳ ملاحظه شود).



(شکل ۳)

زمانی که $g(x)\neq 0$، نسبت $f(x)/g(x)$ شیب خط مستقیمی است که مبدأ مختصات را به نقطه $(g(x), f(x))$ وصل می‌کند. اگرتنها این را بدانیم‌که، وقتی x به x_0 میل‌می‌کند، $g(x), f(x)$ به‌صفر نزدیك می‌شوند آنگاه نقطه $(g(x), f(x))$ به همان حدی‌که درمبدأ اتفاق می‌افتد نزدیك می‌شود. اما، مقداراین حد، دقیقاً، مقدارشیب خط راستی را تعیین می‌کند که ازمبدأ می‌گذرد. هرتصور خیالی‌که از رفتار تابع خارج‌قسمتی $x\to f(x)/g(x)$ ارائه دهیم، بسادگی می‌توانیم تجسم هندسی برای چگونگی تعریف f و g، وقتی که هردو بینهایت کوچك وبا هردو بینهایت شوند، دقیقاً با رابطه f/g ارائه دهیم. درضمن، برای دانستن اینکه f/g دارای همان‌حد است، ممکن است مجموعه‌اطلاعات بیشتر ازمقدارحدود f و g موردنیاز ما باشد.

اما، چه نوع محدودیتی برای f و g باید قائل شویم تا مطمئن شویم که نسبت f/g به حد $\lambda\in R$ میل می‌کند؟ اجازه دهید که برای لحظه‌ای چنین تصوری را داشته باشیم که x متغیر زمان است وبررسی مسیر نقطه متحرك $(g(x), f(x))$ مورد نظر می‌باشد. درحالت $\frac{0}{0}$، همانطوری که درشکل ارائه گردیده، حد «$f/g\to\lambda$»، تقریباً، به‌این‌معنی است که خط مستقیم «$u=\lambda t$» درمبدأ مختصات، برمسیر متحرك مماس است. (شکل ۴). تعبیر حالت $\frac{\infty}{\infty}$ بسیار بدیهی است، وآن شیب خط مجانب منحنی مسیراست.



(شکل ۴)

اینك، مسئله ما به‌دست آوردن تصور دقیقی از خط مماس برمسیر منحنی است. اگر مسیرآن، خود به خود، نمودار تابعی برحسب $t\to u$ باشد، کار با آن ساده است. زیرا، برای آن تکنیکهای مأنوس ازمحاسبات معمولی به‌کار می‌رود. مثلاً، وقتی که g یك به‌یك باشد، چنین حالتی رخ می‌دهد. [در اینجا، ما، «شرط لازم کافی برای اینکه $f(x_1)=f(x_2)$ آنست‌که $g(x_1)=g(x_2)$» را به‌کارنخواهیم برد.] مسیرموردنظر نمودارساده تابع $h=fog^{-1}$ است. اما، یك به‌یك بودن g کفایت نمی‌کند. زیرا، اگر اجازه دهیم که نگاشت $x\to g(x)$ نسبت ترتیبی را به‌هم بزند آنگاه حالت اصلی (حالت $\frac{0}{0}$) دگرگون می‌شود وبه‌وسیله انبوهی از نقاط $(g(x), f(x))$، که از xهای به قدر کافی دور از x_0

به‌وجود می‌آیند، احاطه می‌گردد. اگر g یکنوا (صعودی و یا نزولی) باشد، تصویر هر بازه تحت‌آن یك بازه است. بنابراین، تابع حافظ نسبت ترتیبی است و حالت فوق رخ نخواهد داد [دراینجا تساوی $\lim_{t\to 0} g^{-1}(t) = x_0$ برای ماکفایت‌می‌کند].

نظریات ارائه شده دربالا را خلاصه می‌کنیم: درحالت $\frac{0}{0}$، اگر g یك به‌یك ویکنوا باشد آنگاه حد f/g برابرمقدار $h'(0)$ است، که درآن، تابع h به‌صورت $h = fog^{-1}$ تعریف‌می‌شود.

حالت $\frac{\infty}{\infty}$ ما را به‌عبارت $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ که معادل $\lim_{t\to 0}\frac{h(t)}{t}$ است هدایت می‌کند و مقدار این حد ضریب زاویه خط مجانب است؛ وهمین را می‌توان به عنوان مشتق دربینهایت تعریف‌کرد؛

$$h'(\infty) = \lim_{t\to\infty}\frac{h(t)}{t}$$

بررسی حالت $\frac{0}{0}$: ازهرجایی که شروع کنیم، می‌بایستی چنین فرض را داشته باشیم که اگر x به قدر کافی به x_0 نزدیك شود، $g(x)\neq 0$، تا دقیقاً شیب خطی که نقطه $(g(x), f(x))$ را به مبدأ وصل می‌کند بامعنی باشد.

اگربخواهیم بیان مطلب ما با دقت بیشتری همراه باشد، باید بدانیم که تابع h در $t = 0$ تعریف نشده است. با وجود این، هنگامی که $x \to x_0$، مقدار $f(x)$ به‌صفر نزدیک می‌شود. بنابراین، می‌توانیم چنین قرار دهیم که

$$h(0) = 0 = \lim_{t\to 0} h(t) = \lim_{t\to 0} f(g^{-1}(t)) =$$

$$\lim_{x\to x_0} f(g^{-1}(g(x))) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

قبل ازشروع قاعده هوپیتال، می‌پرسیم: چه شرایطی بهما این اطمینان را می‌دهد که به‌ازای هر $t\neq 0$، مقدار $h'(t)$ وجود دارد؟ چون $h = fog^{-1}$، این طبیعی است که فرض کنیم f و g^{-1} مشتق‌پذیر باشند و $(g^{-1})'$ وجود داشته باشد و g بربازه‌ای که تعریف می‌شود یکنوا و مشتق‌پذیر باشد و $g'(x)\neq 0$. اگر تمام شرایط فوق جمع شوند می‌توان محاسبات زیر را انجام داد:

$$g(g^{-1}(x)) = x,$$

$$(g'og^{-1})(g^{-1})' = 1$$

$$(g^{-1})' = \frac{1}{g'og^{-1}} = \frac{1}{g'}\, og^{-1}$$

ازطرفی $h = fog^{-1}$. بنابراین،

$$h' = (f'og^{-1})(g^{-1})' = (f'og^{-1}).\left(\frac{1}{g'}\, og^{-1}\right)$$

$$= \frac{f'}{g'}\, og^{-1}$$

ازاینجا، نتیجه می‌شود که $h'og = \frac{f'}{g'}$ واین به‌این معنی استکه

$$(1) \quad h'(g(x)) = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

اینک به‌اثبات قاعده هوپیتال می‌پردازیم.

برهان. با فرض $g(x) > 0$ هیچ محدودیتی درمفروضات قضیه حاصل نمی‌شود. زیرا در صورتی که لازم باشد، با تغییر علامت هردو تابع f و g می‌توان چنین نتیجه‌ای را به‌دست آورد. چون g تابعی پیوسته است، مجموعه $I = g(J)$ یک بازه است،[1] و همچنین، چون g یکنوا است‌پس یکی از دوانتها بازه I؛ برای حالت (i) صفر است؛ و براحالت (ii) برابر $+\infty$. حال، اگر x در J تغییرکند، نقطه $(g(x), f(x))$ مسیری را درصفحه دکارتی t و u طی می‌کند. فرض کنید، $u = h(t)$، معادله مسیر باشد.

با فرض $x\in J$، نقطه $(t, u) = (g(x), f(x))$ یک نقطه‌ای از مسیر است که

$$u = f(x) \quad , \quad t = g(x),$$

چون g اکیداً یکنوا است، $x = g^{-1}(t)$. بنابراین،

$$u = f(x) = f(g^{-1}(t))$$

بالنتیجه، تابع $h(t) = (fog^{-1})(t)$ بر I تعریف شده است. درضمن، براین بازه مشتق‌پذیر و با مشتق ذیل است:

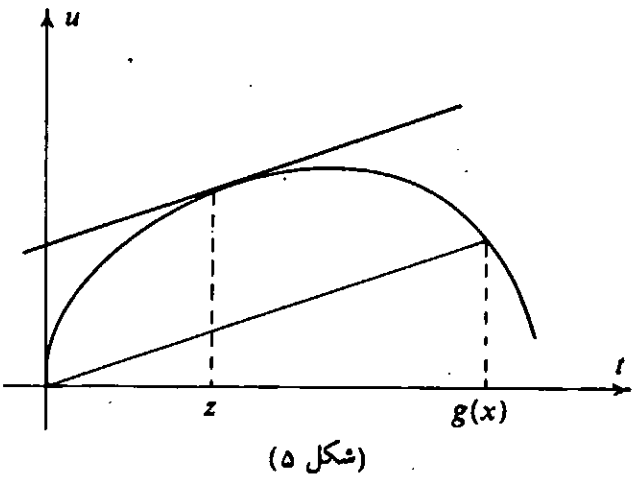
$$h' = (f'/g')\, og^{-1}.$$

اجازه دهید که ابتدا حالت ساده (i) را بررسی کنیم. همان طوری که قبلاً متذکرشدیم، می‌توانیم به‌وسیله پیوستگی، تعریف تابع h را به‌صورت $h(0) = 0$ توسیع دهیم. به‌ازای هر x از J، با به‌کارگیری قضیهٔ مقدار میانگین لاگرانژ (کوشی)، برای تابع h، بربازه $[0, g(x)]$،

$$(2) \quad \frac{h(g(x)) - h(0)}{g(x) - 0} = h'(z)$$

که درآن، $z\in(0, g(x))$. این معادل این است که

$$(3) \quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f'}{g'}(g^{-1}(z))$$



(شکل ۵)

مقدار $g^{-1}(z)$ عددی بین x_0 و x است. زیرا، g یکنوا است.

۷ــ به‌ازاء چه مقادیر $a \in R$ نقطه $(a, a^{۲})$ در داخل مثلثی قرار می‌گیرد که معادلات اضلاع آن عبارتند از: $y = -۲x$، $y = ۳ - x$ و $y = x + ۱$.

(جواب: $a \in [۰, ۲]$)

۸ــ سهمی $y = x^{۲} - ۲x + ۱$ را به‌اندازه بردار $\vec{v} = \vec{i} + ۳\vec{j}$ انتقال می‌دهیم معادله سهمی انتقال یافته را بنویسید.

(جواب: $y = x^{۲} - ۴x + ۷$)

۹ــ در یک تصاعد عددی، $a_{۷} = ۹$ به‌ازاء چه مقادیری از قدر نسبت d، $a_{۱}\, a_{۲}\, a_{۷}$ می‌نیمم می‌شود؟

(جواب: $d = \frac{۳۳}{۲۰}$).

۱۰ــ دامنه تابع $y = \sqrt{۳ - x} + \text{Arc}\sin\frac{۳ - ۲x}{۵}$ را پیدا کنید.

(جواب: $[-۱, ۳]$)

۱۱ــ نامعادله زیر را حل کنید

$$(۱/۲۵)^{۱-x} < (۰/۶۴)^{۲(۱+\sqrt{x})}$$

(جواب: $x \in]۲۵, +\infty[$)

۱۲ــ ثابت کنید به ازاء هر $x > y > ۰$ نامساوی زیر برقرار است.

$$\frac{۲\,(x-y)}{x+y} < \log x - \log y < (\sqrt{x} - \sqrt{y})\left(\frac{۱}{\sqrt{x}} + \frac{۱}{\sqrt{y}}\right)$$

(راهنمایی: $\frac{y}{x} = t$ فرض کنید)

(فرستنده: پدرام هاشمی‌زاده دانش‌آموز ازتهران)

۱۳ــ اگر a و b و c اضلاع و A و B و C زوایای مثلثی باشند، و داشته باشیم

$$(b-c)\,\text{cotg}^{۲}\frac{A}{۲} + (c-a)\,\text{cotg}^{۲}\frac{B}{۲} + (a-b)\,\text{ctog}^{۲}\frac{C}{۲} = ۰$$

نوع مثلث را تعیین کنید.

(جواب: $A = B = C$).

(فرستنده: عبدالحسین کلهری، دانشجو، ازتهران).

۱۴ــ معادله را حل کنید.

$$\underbrace{\sqrt{x + ۲\sqrt{x + ۲\sqrt{x + \cdots + ۲\sqrt{x + ۲\sqrt{۳x}}}}}}_{n\ \text{رادیکال}} = x$$

(راهنمایی: منظور از طرف اول، جمله nام یک دنبالهٔ تراجعی است)

(جواب $۰, ۳$).

۱۵ــ آیا می‌توان به‌کمک دوپیمانه ۹ و ۱۱ لیتری ازیک شیر آب، ۱۰ لیترآب برداشت؟

۱۶ــ اگر $x_{۱}$ و $x_{۲}$ و .... x_n، n عدد متعلق به بازه $\left[۰, \frac{\pi}{۲}\right]$ باشند. ثابت کنید.

$$(\sin x_{۱}\, \sin x_{۲} \cdots \sin x_n)^{\frac{۱}{n}} + (\cos x_{۱}\, \cos x_{۲} \cdots \cos x_n)^{\frac{۱}{n}} \leqslant \sqrt{۲}$$

(فرستنده: ارشك حمیدی ازتهران)

(راهنمایی: ازنامساوی کوشی استفاده کنید.)

۱۷ــ اگر به‌ازاء جمیع مقادیرصحیح ومثبت x داشته باشیم

$$f(x) = ۶^{۴n} + ۷۴n - ۱$$

آنگاه ثابت کنید، $f(x)$ بر ۱۳۶۹ بخشپذیراست.

(فرستنده: ارشك حمیدی ازتهران)

۱۸ــ مطلوبست

$$\int \cos\sqrt{۱-x}\, dx$$

(جواب: $-۲\sqrt{۱-x}\sin\sqrt{۱-x} - ۲\cos\sqrt{۱-x} + C$)

توسیع توابع پیوستهٔ حقیقی به R

علی آبکار دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی دانشگاه تهران

مقدمه یکی از مباحث آنالیز کلاسیك، مبحث توسیع یك تابع پیوسته به دامنهٔ بزرگتر است که دراین نوشتار ضمن بیان تعریف مفهوم توسیع و یادآوری چندگزارهٔ مربوط به‌آن، حالت نه‌چندان ساده‌ای ازمسئله را به‌تفصیل اثبات خواهیم کرد.

تعریف. فرض می‌کنیم X یک فضای متری $E \subseteq X$ و $f: E \to R$ پیوسته باشد. گوئیم تابع $g: X \to R$ یک توسیع پیوستهٔ f به X است هرگاه g تابعی پیوسته باشد و، $g \mid E = f$.

ازاین به‌بعد فرض خواهیم کرد که $X = R$.

گزارهٔ ۱. هرتابع پیوستهٔ $f: [a, b] \to R$ دارای توسیع پیوسته است.

برهان. قرارمی‌دهیم

$$g(x) = \begin{cases} f(a) & x \leq a \\ f(x) & a \leq x \leq b \\ f(b) & x \geq b \end{cases}$$

واضح است که g درشرایط تعریف صدق می‌کند.

تذکر شرط بسته بودن دامنهٔ تعریف در گزارهٔ ۱ ضروری است، زیرا $f(x) = \tan x$ بر $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ دارای‌هیچ توسیع پیوسته به R نیست.

گزارهٔ ۲. فرض می‌کنیم $f: (a, b) \to R$ پیوسته باشد، در این صورت f دارای توسیع پیوسته به R است اگر، وفقط اگر، $f(a^+)$ و $f(b^-)$ موجود ومتناهی باشند.

برهان. فرض می‌کنیم g توسیع f باشد، چون g بر R پیوسته است. پس $g(a^+)$ و $g(b^-)$ وجود دارند ومتناهی‌اند. بنابراین $f(a^+)$ و $f(b^-)$ موجود ومتناهی‌اند.

برای اثبات عکس گزاره کافی است قرار دهیم

$$g(x) = \begin{cases} f(a^+) \text{ ، } x \leqslant a \\ f(x) \text{ ، } a < x < b \\ f(b^-) \text{ ، } x \geqslant b. \end{cases}$$

گزارهٔ ۳. فرض می‌کنیم $f: (a, b) \to R$ پیوسته باشد. دراین صورت f روی (a, b) پیوسته یکنواخت است اگر، وفقط اگر، $f(a^+)$ و $f(b^-)$ موجود ومتناهی باشند.

برهان. به [1] رجوع شود.

از گزاره‌های (۲) و (۳) نتیجهٔ زیرحاصل می‌شود.

گزارهٔ ۴. فرض می‌کنیم $f: (a, b) \to R$ پیوسته باشد دراین صورت f دارای توسیع پیوسته به R است اگر، وفقط اگر، بر (a, b) پیوستهٔ یکنواخت باشد.

توجه. در گزارهٔ ۱ دامنهٔ تعریف f بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ می‌باشد، لیکن اگر به‌جای $[a, b]$، زیرمجموعهٔ بستهٔ دلخواهی از R مانند F داشته باشیم مسئله کمی بغرنج خواهد شد. دراین وضعیت می‌توان مسئله را به دوطریق حل کرد. حالت اول اینکه چون F بسته است. مکمل F مجموعه‌ای باز، ولذا به‌صورت اجتماع حداکثرشمارش‌پذیری از بازه‌های باز دوبه‌دو ازهم جدا است. برای تعریف g می‌توان نمودارآن را روی هریك ازبازه‌های سازندهٔ مکمل F بصورت خط راست تعریف کرد که خواننده می‌تواند جزئیات آن را برای خود تنظیم کند. ما دراین مقاله شیوهٔ دیگری را برمی‌گزینیم تا خوانندهٔ آشنا به‌احکام فضاهای متری بتواند با تقلید از برهانی که خواهدآمد حکم را برای فضاهای متری دلخواه استنتاج کند. ذیلاً نتیجهٔ اصلی این گفتار را بیان می‌کنیم.

قضیه. فرض می‌کنیم F زیرمجموعهٔ بستهٔ دلخواهی از R و $f: F \to R$ تابعی پیوسته وکراندارباشد. دراین صورت تابعی پیوسته وکراندار مانند $g: R \to R$ وجود دارد بطوری که $g|_F = f$.

قبل از اثبات قضیه به‌صورت ساده‌ای از لم اوریسون نیاز داریم که اثبات آن را به عنوان تمرین به خواننده واگذارمی‌کنیم.

لم. فرض می‌کنیم A و B دو زیرمجموعهٔ بسته جدا ازهم از R باشند. اگر

$$P(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} \text{ ، } (x \in R)$$

که در آن

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} |x - a|$$

دراین صورت P تابعی است پیوسته، $P|_A=0$، $P|_B=1$، و بعلاوه $0\leqslant P\leqslant 1$.

برهان قضیه.

قرارمی‌دهیم

$$M_1=\sup_{x\in F}|f(x)|$$

$$A_1=\left\{x\in F: f(x)\leqslant -\frac{M_1}{3}\right\}$$

و

$$B_1=\left\{x\in F: f(x)\geqslant \frac{M_1}{3}\right\}$$

چون f پیوسته است پس A_1 و B_1 بسته‌اند وچون f طبق‌فرض کراندار است، پس M_1 متناهی است.

اگر $M_1=0$، مطلب تمام است زیرا دراین صورت f روی F متحد با صفراست وتابع ثابت $g(x)=0$ جواب مسئله است.

فرض کنیم $M_1\neq 0$، پس خواهیم داشت $A_1\cap B_1=\varnothing$، بنابراین از لم فوق نتیجه می‌شود که تابعی پیوسته مانند $f_1: R\to R$ وجود دارد بطوری که،

$$f_1|_{A_1}=0,\ f_1|_{B_1}=1 \text{ و } 0\leqslant f_1\leqslant 1$$

قرار می‌دهیم

$$g_1(x)=\frac{M_1}{3}(2f_1(x)-1),\ (x\in R)$$

واضح است که g_1 روی R تابعی پیوسته،

$$g_1|_{A_1}=-\frac{M_1}{3},\ g_1|_{B_1}=\frac{M_1}{3},$$

بعلاوه چون $0\leqslant f_1(x)\leqslant 1$، پس

$$|2f_1(x)-1|\leqslant 1$$

بنابراین $|g_1(x)|\leqslant\frac{M_1}{3}$.

تابع f_2 را روی F با ضابطهٔ

$$(1)\quad f_2(x)=f(x)-g_1(x)$$

تعریف می‌کنیم که به‌وضوح پیوسته است.

اکنون‌قرارمی‌دهیم

$$M_2=\sup_{x\in F}|f_2(x)|$$

به‌دلیل کراندار بودن f و g_1، M_2 متناهی است. اگر $M_2=0$، روی F خواهیم داشت $f=g_1$ ولذا g_1 جواب مسئله است.

فرض می‌کنیم $M_2\neq 0$، و

$$A_2=\left\{x\in F: f_2(x)\leqslant -\frac{M_2}{3}\right\}$$

$$B_2=\left\{x\in F: f_2(x)\geqslant\frac{M_2}{3}\right\}$$

تعریف می‌کنیم. مانند قبل تابعی پیوستهٔ $h: R\to R$ با شرایط $h|_{A_2}=0$، $h|_{B_2}=1$، و $0\leqslant h\leqslant 1$ وجود دارد. می‌گیریم

$$g_2(x)=\frac{M_2}{3}(2h(x)-1),\ (x\in R)$$

که به‌وضوح پیوسته و

$$g_2|_{A_2}=\frac{-M_2}{3},\ g_2|_{B_2}=\frac{M_2}{3}$$

وبعلاوه

$$|g_2(x)|\leqslant\frac{M_2}{3}$$

اکنون تابع پیوستهٔ f_3 را روی F با ضابطهٔ زیر درنظرمی‌گیریم:

$$(2)\quad f_3(x)=f_2(x)-g_2(x)$$

اگر

$$M_3=\sup_{x\in F}|f_3(x)|$$

که متناهی است واگر صفرباشد، نتیجه می‌شود که روی F داریم $f_2=g_2$ و بالنتیجه $f=g_1+g_2$. پس $g=g_1+g_2$ جواب مسئله است.

چنانچه اگر $M_3\neq 0$، فرآیند استقرایی بالا را ادامه می‌دهیم. با قرارداد $g_0=0$، ثابت می‌شود که اگر بازای $n\in N$ داشته باشیم $M_n=0$، آنگاه $g=g_0+g_1+\dots+g_{n-1}$ جواب مسئله است درغیر این‌صورت‌این فرآیند به‌پایان می‌رسد. تعریف می‌کنیم

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x),\ (x\in R)$$

ادعا می‌کنیم که g جواب مسئله است.

فرض می‌کنیم $x\in F$، در این صورت یکی از ۳ حالت زیر اتفاق می‌افتد.

(الف) $x\in A_1$، پس $g_1(x)=-\frac{M_1}{3}$ ولذا

$$-\frac{2M_1}{3}=-M_1+\frac{M_1}{3}\leqslant f_2(x)=f(x)+\frac{M_1}{3}\leqslant 0$$

یعنی

$$|f_2(x)|\leqslant\frac{2M_1}{3}$$

(ب) $x\in B_1$، پس $g_1(x)=\frac{M_1}{3}$ ولذا

$$0\leqslant f_2(x)=f(x)-\frac{M_1}{3}\leqslant M_1-\frac{M_1}{3}=\frac{2M_1}{3}$$

درنتیجه $|f_2(x)|\leqslant\frac{2M_1}{3}$

(ج) حالتی که $-\frac{M_1}{3} < f(x) < \frac{M_1}{3}$، یعنی

$|f(x)|<\frac{M_1}{3}$، پس

$$|f_2(x)|=|f(x)-g_1(x)|\leqslant\frac{M_1}{3}+\frac{M_1}{3}=\frac{2M_1}{3}$$

بنابراین درهرسه حالت خواهیم داشت:

$$|f_2(x)|\leqslant\frac{2}{3}M_1,\ (x\in F).$$

پس با توجه به‌تعریف M_2 خواهیم داشت

$$M_2\leqslant\frac{2}{3}M_1$$

اما ازتعریف g_2 داشتیم؛

$$|g_2(x)|\leqslant\frac{M_2}{3},\ (x\in R)$$

پس

$$|g_2(x)|\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}M_1\right),\ (x\in R)$$

با بحث مشابهی برای اثبات اینکه

$$M_3\leqslant\frac{2}{3}M_2$$

فرض می‌کنیم که $x\in F$، پس یکی از ۳ حالت زیر اتفاق می‌افتد.

(الف) $x\in A_2$، پس

$$-\frac{2M_2}{3}\leqslant f_3(x)=f_2(x)+\frac{M_1}{3}\leqslant 0$$

واذا

$$|f_3(x)|\leqslant\frac{2}{3}M_2$$

(ب) $x\in B_2$، پس

$$0\leqslant f_3(x)=f_2(x)-\frac{M_2}{3}\leqslant\frac{2}{3}M_2$$

یعنی $|f_3(x)|\leqslant\frac{2}{3}M_2$.

(ج) حالتی که $|f_2(x)|<\frac{M_2}{3}$، پس

$$|f_3(x)|\leqslant|f_2(x)|+|g_2(x)|<\frac{2M_2}{3}$$

یعنی درهرسه حالت خواهیم داشت:

$$|f_3(x)|\leqslant\frac{2}{3}M_2,\ (x\in F)$$

پس ازتعریف M_3 خواهیم داشت؛

$$M_3\leqslant\frac{2}{3}M_2$$

اما ازتعریف g_3 داریم

$$|g_3(x)|\leqslant\frac{M_3}{3},\ (x\in R)$$

پس به‌ازای هر $x\in R$،

$$|g_3(x)|\leqslant\frac{M_3}{3}\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}M_2\right)\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2M_1$$

بنابراین به‌استقراء ریاضی خواهیم داشت:

$$|f_n(x)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}M_1,\ (n\geqslant 2,\ x\in F)$$

و

$$|g_n(x)|\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}M_1,\ (n\geqslant 1,\ x\in R)$$

که اولین نامساوی مبین این نکته است که

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0,\ (x\in F)$$

و دومین نامساوی همگرایی یکنواخت سری معرف g را روی R ایجاب می‌کند. زیرا،

$$|g(x)|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|g_n(x)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}M_1=\frac{M_1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=M_1<\infty.$$

پس g کراندار است. علاوه براین، چون هر g_n پیوسته است و همگرایی سری بر R یکنواخت است، پس g هم روی R پیوسته است. آخرین مطلبی که باید اثبات شود این است که $g|_F=f$. اما، ازتلفیق رابطه‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید:

$$f_3(x)=f(x)-(g_1(x)+g_2(x)),\ (x\in F)$$

و به‌استقراء،

$$f_{n+1}(x)=f(x)-\sum_{k=1}^{n}g_k(x),\ (x\in F)$$

و با حدگیری،

$$0=\lim_{n\to\infty}f_{n+1}(x)=f(x)-g(x)$$

پس

$$f(x)=g(x),\ (x\in F).$$

یعنی $g|_F=f$ ■.

مراجع

[1] W. R parzynskifpw. zipse: introduction to Mathematical Analysis MC_Grawhill. 1987.

[2] ME. Munroe, Introduction to measure and integration, Addison wesley PC, 1953.

بقیه از صفحهٔ ۱۹

لازم مضرب $2n-1$ بودن را دارا نیستند. اگر $x=5$ داریم، $\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{5}=\frac{3n-1}{5(2n+1)}$، اما هیچکدام از $5+1$، $(2n+1)+1$، $5(2n+1)+1$، $2(2n+1)+3$ مضربی از $3n-1$ نمی‌باشند. سرانجام اگر $x=6$ داریم،

$$\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{6}=\frac{4n-1}{6(2n+1)}$$

اما هیچ کدام از ترکیبات $2+1$، $3+1$، $6+1$، $3+2$، $(2n+1)+1$، $2(2n+1)+1$، $3(2n+1)+1$، $6(2n+1)+1$، $(2n+1)+2$، $3(2n+1)+2$، $(2n+1)+3$، $2(2n+1)+3$ و $(2n+1)+6$ مضربی از $4n-1$ نمی‌باشند. بنابراین معادلهٔ (۵.۱) به‌ازای اعداد صحیح مثبت ومتمایز x و y و z که $2n+1$ به‌ازای $n\geqslant 8$ و $n\neq 11$ عددیست اول، دارای جواب نمی‌باشد.

به‌طریق مشابه می‌توان نشان داد که تعدادی نامتناهی کسرگویا دربازهٔ $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ وجود دارد بطوری که نمی‌توان آنها را به‌صورت مجموعی از سه کسر واحد متمایز بیان داشت، بعبارت دیگر،

قضیهٔ ۶. معادلهٔ دیوفانتوسی $\frac{n}{n+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ با شرط اول بودن $n+1$ به‌ازای $n\geqslant 10$ وبرای هر x، y و z صحیح مثبت ومتمایز همواره دارای جواب نمی‌باشد. اثبات این قضیه را به خواننده واگذارمی‌کنیم.

زیر نویسها

۱ـ رسالهٔ پاپیروس‌ریند، براساس نام آقای ا. هـ. ریندنامگذاری شده است. وی کسی است که این متن را در لوکسر (Luxor) خریداری کرده و سپس آنرا به موزهٔ بریتانیا اهدا نموده است. این پاپیروس توسط احمس (Ahmas) در دوران سلطهٔ هیکسوس (Hyksos) بر مصر نوشته شده است. (بعد از ۱۸۰۰ قبل از میلاد، اما همان‌گونه که نویسنده ما را مطمئن می‌سازد، وی آن‌را از روی یك نمونهٔ قدیمی‌تر که مربوط به‌دورهٔ سلطنت میانی (۱۸۰۰ـ۲۰۰۰ ق. م) است، نسخه‌برداری نموده است.)

2- Hieroglyphics

3- Peet edition

۴ـ پاپیروس خود به‌زبان هیروگلیف نوشته نشده است، بلکه دستخط هیراتیك است که می‌توان آنرا به‌صورت هیروگلیفی تغییر داد.

۵ـ موضوع قابل توجه تعبیر کلامی $\frac{2}{3}$ است که در واقع مفهوم کلمه به کلمه آن عبارتست از: «دو قسمت». که مکمل لازم برای ساختن یك واحد با استفاده از «سومین قسمت» می‌باشد.

6- a scroll with a seal

مراجع

1. A. Beck, M. Bleicher, D. Crowe, Excursions into Mathematics. worth Publishers, Inc. (1969), 421-434.
2. L. Bernstein, Zur Losung der diophantischen Gleichung m/n = 1/x + 1/y + 1/z insbesondere in Fall m=4, J. Rein Angew. Math, 11 (1962), 1-10.
3. M. N. Bleicher, A New Algorithm for Egyptian Fractions. J. Number Theory 4 (1972), 342-382.
4. M. N. Bleicher and P. Erdos, Denominators of Egyptian Fractions. J. Number Theory. Vol. 8, No. 2, May 1976, 157-168.
5. L. Delang, On the Equation 4/n = 1/x + 1/y + 1/z. J. Number Theory 13 (1981), 485-494.
6. P. Erdos, The Solution in Whole Number of the Equation a/b = 1/x1 + . . . +1/xn. Mat. Lapok 1 (1950), 192-210 (in Hungarian).
7. R. M. Jollenstein, A Note on the Egyptian Problem. Proc. of the Seventh Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing. (1976) 351-364, Winnipeg Utilitas Math. Publ. Inc., Winnipeg.
8. Chan Ko, Chi Sun, and S. J. Chang, on equation 4/n = 1/x + 1/y + 1/z. Acta Sci. Natur. Szechuanensis 2 (1964), 21-35.
9. L. J. Mordell, Diophantine Equations. London and New York: Academic Press, 287-290.
10. R. Oblath, Suc l' Equation Diophantienne 4/n = 1/x1 + 1/x2 + 1/x3. Mathesis 59 (1950), 308-316.
11. G. Palama, Su di Una Congettura die Sierpinski relativa alla Possiblita in numeri della 5/n = 1x1 + 1/x2 + 1/x3. Boll Union Mat. Ital. (3), 13 (1958), 65-72.
12. Leonardo Pisano, Scritti, Vol. 1, B. Boncompagni, Rome, 1857, 77-83.
13. L. A. Rosati, Sull equazione diofanta 4/n =1/x1 + 1/x2 + 1/x3. Boll, Union Mat. Ital. (3), 9 (1954), 59-63.
14. W. Sierpinski, Sur les decompositions de nombers rationnels en fractions Primaries. Mathesis, 65 (1956), 16-32.
15. B. M. Stewart, Theory of Numbers. 2nd Edition. New York, 1964. The MacMillan Company, 198-207.
16. J. J. Sylvester, On a Point in the Theory of Vulgar Fractions. Amer. J. Math 3 (1880), 332-335, 388-389.
17. B. L. Van der Waerden, Science Awakening I. Noordhoff Ltd. Groningen, 4 th Ed., 1975.
18. B. L. Van der Waeéden. Science Awakening I, Noordhoff Ltd., Gromingen, 4 th Ed., 1974. Chapter 1.
18. W. A. Webb, On 4/n = 1/x + 1/y + 1/z. Proc. Amer. Math. Soc. 25, no. 3 (1970), 578-584.
19. K. Yamamoto, On the Diophantine Equation 4/n = 1/x + 1/y + 1/z, Mem. Fac. Sci. Kyuchu University Ser. A, 19 (1965), 37-47.

خانه‌بندی صفحه

دکتر علیرضا جمالی

طرحهای‌ریاضیدان، مانند طرحهای‌نقاش وشاعر باید زیبا باشند، ایده‌ها، مانند رنگها یا کلمات باید به‌صورتی موزون با هم ترکیب شوند، زیبایی نخستین معیاراست: جای‌ـی ابدی برای ریاضیات زشت درجهان وجود ندارد.

هاردی[۱]

چکیده. دراین مقاله راجع به پوشاندن صفحه (اقلیدسی) با چندضلعیهای منتظم نامتداخل بحث خواهیم‌کرد. چنین‌پوششهای صفحه را خانه‌بندیهای‌صفحه می‌نامیم[۲]. پس از ذکر چند تعریف اساسی و ذکر مقدمات لازم، عدهٔ طرق مختلف خانه‌بندی صفحه را معین می‌کنیم.

تعریف. یك خانه‌بندی صفحه عبارتست از پوششی از صفحه با چندضلعیهای منتظم نامتداخل که همدیگر را درامتداد کامل اضلاع یا رئوس قطع کنند. درصورتی که دریك خانه‌بندی همهٔ چندضلعیهای مشترك در یك رأس دارای تعداد اضلاع یکسان باشند آن را منتظم، و در غیر این صورت آن را متجانس می‌خوانیم. یک خانه‌بندی منتظم را که دارای m تا n-ضلعی درهر رأس‌باشد به $\{n, m\}$ نشان می‌دهیم[۳]. همچنین نماد $[a_1, a_2, \ldots, a_t]$ را برای خانه‌بندی متجانسی به‌کارمی‌بریم که درهر رأس آن بترتیب‌یك a_1-ضلعی، یك a_2-ضلعی، ... ، ویک a_t-ضلعی موجود باشد[۴].

تبصره. باید توجه داشت که در $[a_1, a_2, \ldots, a_t]$ باید حداقل دوتا از a_iها متمایز باشند. ضمناً ترتیب a_iها در نماد فوق اهمیت دارد و با تغییر نظم آنها ممکن است خانه‌بندی متجانس متمایزی به‌دست‌آید. همچنین واضح است‌که همواره $t \geqslant 3$.

لم. (آ) زاویهٔ یک n-ضلعی منتظم مساوی است با $\pi\left(1-\frac{2}{n}\right)$؛

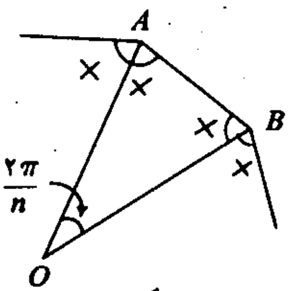
(ب) فرض کنیم در رأس یك خانه‌بندی یک n_1-ضلعی، یک n_2-ضلعی، ... ، و یك n_m ضلعی موجود باشد. دراین صورت

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\ldots+\frac{1}{n_m}=\frac{m}{2}-1.$$

برهان. (آ) درشکل ۱ قسمتی ازیك n-ضلعی را نشان داده‌ایم. AB ضلعی از آن و O مرکزش است. معلوم است‌که $A\widehat{O}B=\frac{2\pi}{n}$. بنابراین

$$\pi-\frac{2\pi}{n}=2O\hat{A}B,$$

و ازاینجا حکم ثابت می‌شود.



شکل ۱

(ب) با توجه به فرض، بر طبق (آ)، خواهیم داشت:

$$\pi\left(1-\frac{2}{n_1}\right)+\ldots+\pi\left(1-\frac{2}{n_m}\right)=2\pi,$$

و ازاینجا رابطهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۱. درست سه نوع خانه‌بندی منتظم (صفحه) وجود دارد. این‌خانه‌بندیها عبارتند از: $\{6, 3\}$، $\{4, 4\}$، و $\{3, 6\}$.

برهان. فرض کنیم $\{n, m\}$ یك خانه‌بندی منتظم دلخواه باشد. با توجه به لم فوق، چون زاویهٔ یک n-ضلعی منتظم $\pi\left(1-\frac{2}{n}\right)$ است، معلوم می‌شود که

$$m\left(1-\frac{2}{n}\right)\pi=2\pi.$$

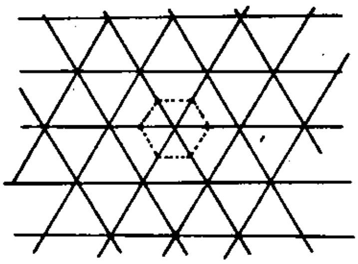
از آنجا، $\frac{2}{m}=1-\frac{2}{n}$. بنابراین،

$$(n-2)(m-2)=4.$$

یگانه جوابهای صحیح مثبت این معادله عبارتند از

$$n=3,\ m=6$$
$$n=4,\ m=4$$
$$n=6,\ m=3$$

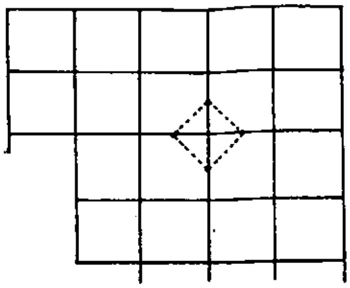
اینک بسادگی ملاحظه می‌شود که این‌جوابها منجر به‌خانه‌بندیهای‌منتظم $\{6, 3\}$، $\{4, 4\}$، و $\{3, 6\}$ می‌شوند. درشکلهای ۲، ۳، و ۴ این خانه‌بندیها نشان داده شده‌اند.



$\{3, 6\}$

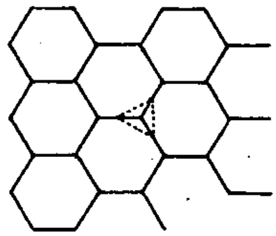
شکل ۲

تبصره. فرض کنیم $\{p, q\}$ یک خانه‌بندی منتظم باشد. دراین صورت هرگاه اواسط p-ضلعی منتظم مجاور را به یکدیگر وصل کنیم، خانه‌بندی $\{q, p\}$ حاصل خواهد شد (همان اشکال).



{۴, ۴}

شکل ۳



{۶, ۳}

شکل ۴

قضیهٔ ۴. درست هشت نوع خانه‌بندی متجانس (صفحه) وجود دارد[5].

برهان. فرض کنیم $[a_1, \dots, a_t]$ یک خانه‌بندی متجانس باشد. در این صورت مطابق لم (ب)

$$(1)\quad \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_t}=\frac{t}{2}-1$$

بنابراین a_iها درمعادلهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$(2)\quad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_t}=\frac{t}{2}-1.$$

این معادله را درمجموعهٔ اعداد صحیح ناکمتر از ۳ حل می‌کنیم و سپس جوابهایی را که منجر به یک خانه‌بندی متجانس می‌شوند تعیین می‌کنیم. واضح است‌که هرگاه $(a_1, a_2, \dots, a_t)$ جوابی از معادلهٔ (۲) باشد آنگاه هر n تایی که از تغییر نظم a_iها $(1 \leqslant i \leqslant t)$ به‌دست می‌آیند نیز جوابی از (۲) خواهد بود و بالعکس، هر جواب (۲) بصورت $(b_1, \dots, b_t)$ است که تغییر نظمی از a_i ها در $(a_1, \dots, a_t)$ است.

بنابراین کافی است‌که یک جواب از (۲) را تعیین کنیم.

ابتدا تذکرمی‌دهیم که $3 \leqslant t \leqslant 6$؛ زیرا با توجه به اینکه $a_i \geqslant 3$، از (۱) معلوم می‌شود که

$$\frac{t}{2}-1 \leqslant \frac{1}{3}t,$$

واین بدین معنی است که در یک خانه‌بندی متجانس، درهر رأس‌حداکثر شش چندضلعی موجود است.

اینک‌جوابهای (۲) را درهریک ازحالات زیرتعیین می‌کنیم:

حالت اول: $t = 6$.

دراین حالت معادلهٔ (۲) به‌معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_6}=2.$$

که به‌وضوح جواب

$$x_1=x_2=\dots=x_6=3$$

را به‌دست می‌دهد. این جواب متناظر با خانه‌بندی منتظم {۶, ۳} است. بنابراین در این‌حالت هیچ خانه‌بندی متجانس به دست نمی‌آید.

حالت دوم: $t = 5$.

دراین حالت معادلهٔ (۲) به‌معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$(3)\quad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_5}=\frac{3}{2}.$$

فرض کنیم در این معادله فقط k تا از x_iها ۳ باشد (ممکن‌است $k=0$). دراین‌صورت

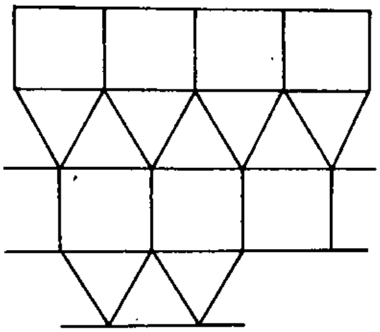
$$\frac{3}{2} \leqslant \frac{k}{3}+\frac{5-k}{4}.$$

ازاینجا $k \geqslant 3$. از طرفی می‌دانیم $k \leqslant 5$. بنابراین حالات زیر را بررسی می‌کنیم:

(۱) $k = 3$. دراین صورت از معادلهٔ (۳) معادلهٔ زیرحاصل می‌شود:

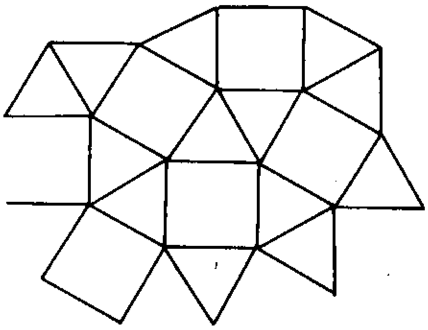
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2},$$

که درآن $x_1>3,\ x_2>3$. بسادگی دیده می‌شود که x_1, x_2 نمی‌توانند هردو از ۵ ناکمتر باشند. بنابراین حداقل یکی ازآنها باید ۴ باشد. با این فرض دیگری هم ۴ می‌شود. بنابراین‌جواب (۴, ۴, ۳, ۳, ۳) به‌دست می‌آید که پس از تغییر نظم، تنها خانه‌بندیهای متجانس [۴, ۴, ۳, ۳, ۳] و [۴, ۳, ۴, ۳, ۳] ازآن حاصل‌می‌شوند (شکلهای ۴ و ۵).



[۳, ۳, ۳, ۴, ۴]

شکل ۴



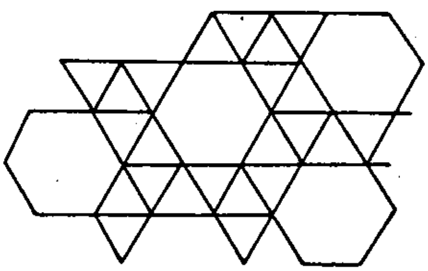
[۳, ۳, ۴, ۳, ۴]

شکل ۵

(۲) $k = 4$. دراین صورت از معادلهٔ (۳) معادلهٔ زیرحاصل می‌شود:

$$\frac{1}{x_1}=\frac{1}{6},$$

که جواب (۶, ۳, ۳, ۳, ۳) را به دست می‌دهد. این جواب تنها به خانه‌بندی متجانس [۶, ۳, ۳, ۳, ۳] منجرمی‌شودکه درشکل ۶ نشان داده شده است.



[۳, ۳, ۳, ۳, ۶]

شکل ۶

(۳) بسادگی‌معلوم می‌شود که حالت $k=5$ به‌جوابی منجر نمی‌شود.

حالت سوم: $l=4$

دراین حالت معادلهٔ (۲) به معادلهٔ

$$(4)\quad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_4}=1$$

تبدیل می‌شود. دراینجا نیزمانند حالت قبل، فرض می‌کنیم k تا از x_iها ۳ باشد. خواهیم داشت:

$$1\leqslant \frac{k}{3}+\frac{4-k}{4}.$$

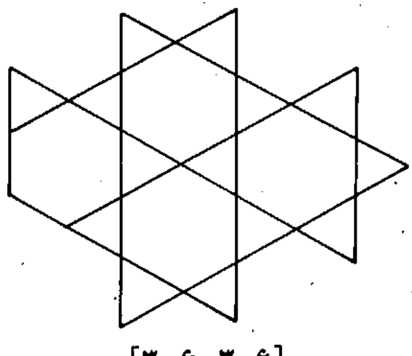
به‌عبارت دیگر $0\leqslant k$. چون $k\leqslant 4$، حالات زیر اتفاق می‌افتد:

(۱) $k=4$ یا $k=3$. این حالات‌منجر به جواب نمی‌شوند.

(۲) $k=2$. یعنی در معادلهٔ (۴) درست دو تا از x_iها ۳ است. بنابراین معادلهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{3}$$

که دارای جواب (۶ ,۶) است. بنابراین جواب (۶ ,۶ ,۳ ,۳) را برای‌معادلهٔ (۴) به‌دست خواهیم آورد که فقط خانه‌بندی متجانس [۶ ,۳ ,۶ ,۳] ازآن حاصل می‌شود (شکل ۷).



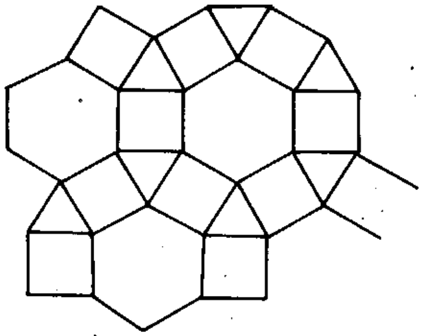
[۳, ۶, ۳, ۶]

شکل ۷

(۳) $k=1$ یعنی‌درمعادلهٔ (۴) درست‌یکی از x_iها ۳ است. بنابراین معادلهٔ

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{2}{3}$$

حاصل می‌شود. بسادگی محقق می‌شود که جوابی ازمعادلهٔ فوق (۶ ,۴ ,۴) است که فقط منجر به‌خانه‌بندی‌متجانس[۴ ,۶ ,۴ ,۳] می‌شود (شکل ۸).



[۳, ۴, ۶, ۴]

شکل ۸

(۴) $k=0$ یعنی‌هیچیک از x_iها ۳ نیست. بسهولت ملاحظه می‌شود که درمعادلهٔ (۴) هیچیک از x_iها نمی‌تواند ۵ باشد.

بنابراین تنها جواب معادلهٔ (۴)، عبارتست از (۴ ,۴ ,۴ ,۴) که ازآن خانه‌بندی‌منتظم {۴ ,۴} به‌دست می‌آید.

حالت چهارم $l=3$.

دراین حالت معادلهٔ (۲) به‌معادلهٔ ذیل تبدیل می‌شود:

$$(5)\quad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{2}$$

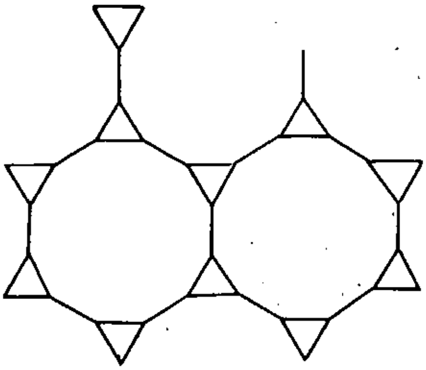
برای‌حل‌معادلهٔ (۵)، مطابق معمول، در تعداد x_iهایی که می‌توانند ۳ باشند بحث‌می‌کنیم. به‌تحقیق معلوم می‌شود معادله در حالاتی که دویا سه تا از x_iها ۳ باشند دارای جواب نیست. بنابراین دوحالت زیر را بررسی می‌کنیم:

(۱) تنها یکی از x_iها برابر ۳ است. در این صورت معادلهٔ (۵) به معادلهٔ

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{6}$$

تبدیل می‌شود که جواب آن (۱۲ ,۱۲) است. بنابراین جواب (۱۲ ,۱۲ ,۳) برای معادلهٔ (۵) به دست می‌آید که از آن خانه‌بندی متجانس [۱۲ ,۱۲ ,۳] حاصل می‌شود (شکل ۹)

(۲) هیچیک‌از x_iها برابر۳ نیست. بنابراین همهٔ x_iها از ۴ ناکمترند. ملاحظه می‌شود که معادلهٔ (۵) درحالاتی که دویا سه تا از x_iها برابر ۴ باشند، دارای جواب نیست.



[۳, ۱۲, ۱۲]

شکل ۹

بنابراین یا فقط یکی از x_iها برابر۴ است یا اینکه جملگی از ۵ ناکمترند. درحالت اول معادلهٔ

$$(6)\quad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{4}$$

حاصل می‌شود که باید آن را در مجموعهٔ اعداد صحیح ناکمتراز ۵ حل کرد. معادلهٔ فوق را می‌توان به‌صورت

$$4x_1=x_2(x_1-4)$$

نوشت. فرض کنیم (a_1, a_2) جوابی ازاین معادله باشد. دراین‌صورت

$$4a_1=a_2(a_1-4).$$

از اینجا معلوم می‌شود که حداقل یکی از a_1, a_2 باید مضربی از ۴ باشد. فرض کنیم $a_1=4n$. بنابراین، $4n=a_2(n-1)$. از اینجا، با توجه به اینکه $n, n-1$ متباینند، $n|a_2$.

فرض کنیم $a_2=nm$. بنابراین،

$$m(n-1)=4.$$

که جوابهای آن عبارتند از

$m=1$، $n=5$ و $m=2$، $n=3$ و $m=4$، $n=2$ که منجر به جوابهای (۲۰ ,۵)، (۱۲ ,۶)، و (۸ ,۸) برای معادلهٔ (۶) می‌شود. بنابراین برای معادلهٔ (۵) جوابهای (۲۰ ,۵ ,۴)، (۱۲ ,۶ ,۴)، و (۸ ,۸ ,۴) به‌دست می‌آید. جواب (۲۰ ,۵ ,۴) به خانه‌بندی منجر نمی‌شود. زیرا تداخل‌دو بیست‌ضلعی را در رأسی‌مانند P بوجود می‌آورد (شکل ۱۰). ولی دو جواب دیگر خانه‌بندیهای متجانس

$$d_2 = d_1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} d_1 = -\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} - 1\right) d_1$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} - 1\right)^2 p$$

$$d_3 = d_2 - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} d_2 = -\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} - 1\right) d_2$$

$$= -\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} - 1\right)^3 p$$

$\Rightarrow$ کبود nام $\quad d_n = \left[-\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} - 1\right)\right]^n p$

سهم شخص iام $\quad q_i = \frac{1}{k_i}\left[p + d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n\right]_{n \to \infty}$

$$= \frac{1}{k_i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} - 1\right)\right]^n p$$

$$q_i = \frac{p}{k_i} \sum_{\substack{n=0 \\ 2 | n}}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} - 1\right)^n - \frac{p}{k_i}$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ 2 \nmid n}}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} - 1\right)^n$$

چنانچه شرط $2 > \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i}$ را بپذیریم آنگاه روابط فوق با استفاده ازخواص تصاعد هندسی ساده می‌شوند وخواهیم داشت:

$$q_i = \frac{p}{k_i}\left[\frac{1}{1 - \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} - 1\right)^2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} - 1\right)}{1 - \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} - 1\right)^2}\right]$$

$$= \frac{p}{k_i}\left[\frac{1 - \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} - 1\right)}{1 - \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} - 1\right)^2}\right] \Rightarrow$$

$$q_i = \frac{p}{k_i\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i}\right)}$$

نتایج فوق نشان‌می‌دهند که دریك تسهیم به‌نسبت چنانچه مجموع نسبت‌ها الزاماً یك نباشد ولی از صفر بزرگتر و از ۲ کوچکتر باشد ـ تقریباً درتمام موارد ـ می‌توان سهم واقعی هرشخص را از فرمول $q_i = \frac{p}{k_i \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i}}$ به‌دست‌آورد.

به‌عنوان نمونه‌ای ازکاربرد موفق این روش مسئله منسوب به حضرت علی (ع) را بعنوان یک حالت بسیار خاص بحث فوق می‌توان حل کرد این مسئله به‌این صورت است که: سه نفر به نسبت‌های $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{9}$ روی هم بر ۱۷ شتر شریک هستند در تقسیم شترها بین خود دچار اشکال شده و به‌آن حضرت مراجعه می‌کنند وایشان یک شتر به ۱۷ شتر افزوده و سهم هرفرد را از ۱۸ شترمی‌دهند. درپایان با وجوداینکه هرکس ازسهمی‌که قبلاً به‌او تعلق می‌گرفته مقدار بیشتری دریافت می‌کند شترآن حضرت باقی می‌ماند.

$$17 + 1 = 18$$

$$18 \times \frac{1}{2} = 9 \qquad 18 \times \frac{1}{3} = 6 \qquad 18 \times \frac{1}{9} = 2$$

$$9 + 6 + 2 = 17$$

هرچند بیشتر افراد متوجه این نکته که مجموع نسبت‌ها یک نیست نمی‌شوند ولی‌اگرکسی به‌این نکته پی ببرد در درست‌بودن جوابهای این مسئله بصورت ۹، ۶ و ۲ شک خواهد کرد ضمن آنکه نخواهد توانست به‌صورت صد درصد مدعی غلط بودن جوابها شود. حال با استفاده ازنتایج بحث فوق صرفنظر از روش حل‌آن حضرت برای این مسئله درستی جوابها را به‌راحتی می‌توان اثبات کرد.

$$q_i = \frac{p}{k_i \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i}}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$$

$$q_1 = \frac{17}{2 \times \frac{17}{18}} = 9 \qquad q_2 = \frac{17}{3 \times \frac{17}{18}} = 6$$

$$q_3 = \frac{17}{9 \times \frac{17}{18}} = 2$$

چنین به‌نظر می‌رسد که درتمام مواردی که p یک عدد اول باشد و $p+1$ یا $p-1$ بصورت کوچکترین مضرب مشترک $k_1, k_2, \ldots, k_M$ باشد بتوان مسائلی به همین زیبائی طرح کرد مثلاً:

سه نفر با نسبت‌های $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$ بر ۱۳ شتر شریک هستند. بهترین تسهیم به‌نسبت را بین‌آنها انجام دهید.

$$13 - 1 = 12 \qquad 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$12 \times \frac{1}{3} = 4 \qquad 12 \times \frac{1}{4} = 3$$

$$4 + 3 + 6 = 13$$

ضمن‌آنکه می‌توان ازفرمول $q_i = \frac{p}{k_i \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i}}$ نیز درستی جوابها را ثابت کرد.

حل مسائل شماره ۲۶

محمود نصیری

۱. دنباله $a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , \ldots$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$a_0=3$ و، به ازاء $n \geqslant 1$، a_n ریشه حقیقی معادله

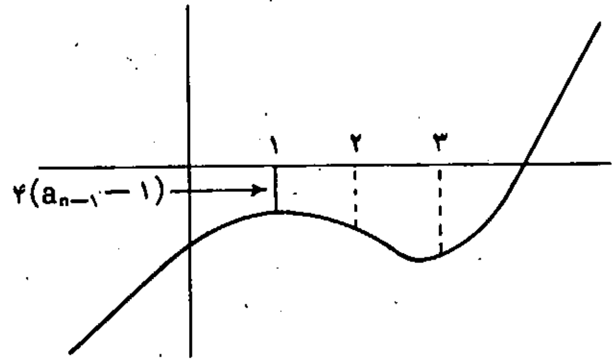
$$f(x)=x^3-6x^2+9x-4a_{n-1}=0$$

است.

ثابت کنید این دنباله به ۵ همگرا می‌باشد.

حل. چون ازمعادله $f(x)=0$ ریشه حقیقی منحصربه‌فردی به دست می‌آید لذا a_n به‌وسیلهٔ a_{n-1} به طور منحصربه‌فرد تعریف می‌شود.

نمودار f نشان می‌دهد که $a_{n-1}>1$.



توجه کنید که اگر $1<a_{n-1}<5$ آنگاه $f(1)<0$ و $f(5)>0$ و بنابراین $1<a_n<5$ می‌توان آن را به استقرا برای هر n اثبات کرد. حالا از رابطه $f(a_n)=0$ داریم

$$a_n^3-6a_n^2+9a_n-4a_{n-1}=0$$

که می‌توان آن را به صورت زیر مرتب کرد.

$$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{4}a_n(5-a_n)(a_n-1).$$

چون $1<a_n<5$ نتیجه می‌گیریم که طرف راست این رابطه مثبت است. بنابراین طرف چپ نیز مثبت بوده و $a_n>a_{n-1}$ لذا دنباله $a_0 ، a_1 ، a_2 ، \ldots$ صعودی و از بالا به ۵ محدود است. بنابراین دنباله فوق به عدد حقیقی L همگرا است به طوری که

$$L^3-6L^2+9L-4L=0=L(L-5)(L-1).$$

بنابراین $L=0$ ، ۱ یا ۵ است اما، جمله اول دنباله ۳ و دنباله صعودی است درنتیجه $L=5$.

۲. فرض کنیم

$$P_n(x)=x^{n+1}+(n-x)(x+1)^n$$

که n عددی طبیعی است.

ثابت کنید:

(الف) وقتی n فرد است، به ازاء هر x حقیقی $P_n(x)>0$؛

(ب) وقتی n زوج است، $P_n(x)$ درست یك ریشه حقیقی دارد.

حل. می‌توانیم $P_n(x)$ را به صورت زیر بنویسیم.

$$P_n(x)=x^{n+1}+(n+1)(x+1)^n-(x+1)^{n+1}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}P'_n(x)&=(n+1)x^n+n(n+1)(x+1)^{n-1}\\&\quad-(n+1)(x+1)^n\\&=(n+1)(x^n+n(x+1)^{n-1}-(x+1)^n)\end{aligned}$$

لذا

$$P'_n(x)=(n+1)P_{n-1}(x) \qquad (1)$$

از طرفی

$$\begin{aligned}(x+1)^{n+1}-x^{n+1}&=(x+1)^n+x(x+1)^{n-1}\\&\quad+x^2(x+1)^{n-2}+\cdots+x^n.\end{aligned}$$

مشاهده می‌کنیم که به ازاء

$$r=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \cdots\ ,\ n-1$$

$$(x+1)^{n-r}x^{r}-(x+1)^{n-r-1}x^{r+1} =(x+1)^{n-1}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{r}.$$

اگر n فرد باشد و $x>0$ یا $x<-1$، آنگاه $P_n(x)$ مثبت است، درنتیجه؛

$$(x+1)^{n}>(x+1)^{n-1}x >(x+1)^{n-2}x^{2}>\cdots>x^{n}.$$

بنابراین

$$(x+1)^{n+1}-x^{n+1}<(n+1)(x+1)^{n},$$

و لذا $P_n(x)>0$.

اگر n فرد و $-1\leqslant x<0$، آنگاه $x^{n+1}>0$ و $(n-x)(x+1)^{n}\geqslant 0$. بنابراین دوباره $P_n(x)>0$ و همچنین $P_n(0)=n>0$. لذا به ازاء هر x هرگاه n فرد باشد، $P_n(x)>0$.

برای اثبات قسمت (ب) اگر n زوج باشد، با توجه به قسمت (الف) چون $n-1$ فرد است، به ازاء هر x، $P_{n-1}(x)>0$ و از (۱) نتیجه می‌گیریم به ازاء هر x، $P'_n(x)>0$. چون $P_n(x)$ چند جمله‌ای از درجه $n-1$ و فرد است، حداقل یك ریشه حقیقی دارد وچون $P'_n(x)>0$ لذا $P_n(x)$ اکیداً صعودی و درنتیجه $P_n(x)=0$، دقیقاً یك ریشه دارد.

تذکر. هرگاه $f(x)$ یك چند جمله‌ای از درجه فرد باشد، آنگاه معادله $f(x)=0$ حداقل یك ریشه حقیقی دارد.

۳. مطلوبست $\int\sqrt{tgx}\,dx$

راهنمائی:

$$\int\frac{dt}{t^{2}-a^{2}}=\frac{1}{2a}\,ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|+C$$

حل. فرض کنیم $u=\sqrt{tgx}$. داریم

$$\int\sqrt{tgx}\,dx=\int u\,\frac{2u\,du}{u^{4}+1}=\int\frac{u^{2}-1}{u^{4}+1}\,du$$

$$+\int\frac{u^{2}+1}{u^{4}+1}\,du$$

$$=\int\frac{1-u^{-2}}{(u+u^{-1})^{2}-2}\,du$$

$$+\int\frac{1+u^{-2}}{(u-u^{-1})^{2}+2}\,du$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,ln\,\frac{u+u^{-1}-\sqrt{2}}{u+u^{-1}+\sqrt{2}}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\,Arctg\,\frac{u-u^{-1}}{\sqrt{2}}+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,ln\,\frac{tgx+\sqrt{2tgx}-1}{tgx+\sqrt{2tgx}+1}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\,Arctg\,\frac{tgx-1}{\sqrt{2tgx}}+C.$$

۴. هرگاه $a\ ,\ b\ ,\ c\geqslant 0$ و $a+b+c=1$، ماکزیمم

$$S=a^{2}b+b^{2}c+c^{2}a$$

را پیداکنید.

حل. بدون آنکه به‌کلیت مسأله خللی وارد شود فرض می‌کنیم $a\leqslant b\leqslant c$ در این صورت

$$(b-a)(b-c)\leqslant 0\leqslant ab$$

بنابراین

$$a^{2}b+(b-a)(b-c)c\leqslant a^{2}b+abc.$$

می‌توان نامساوی فوق را به صورت زیر مرتب کرد:

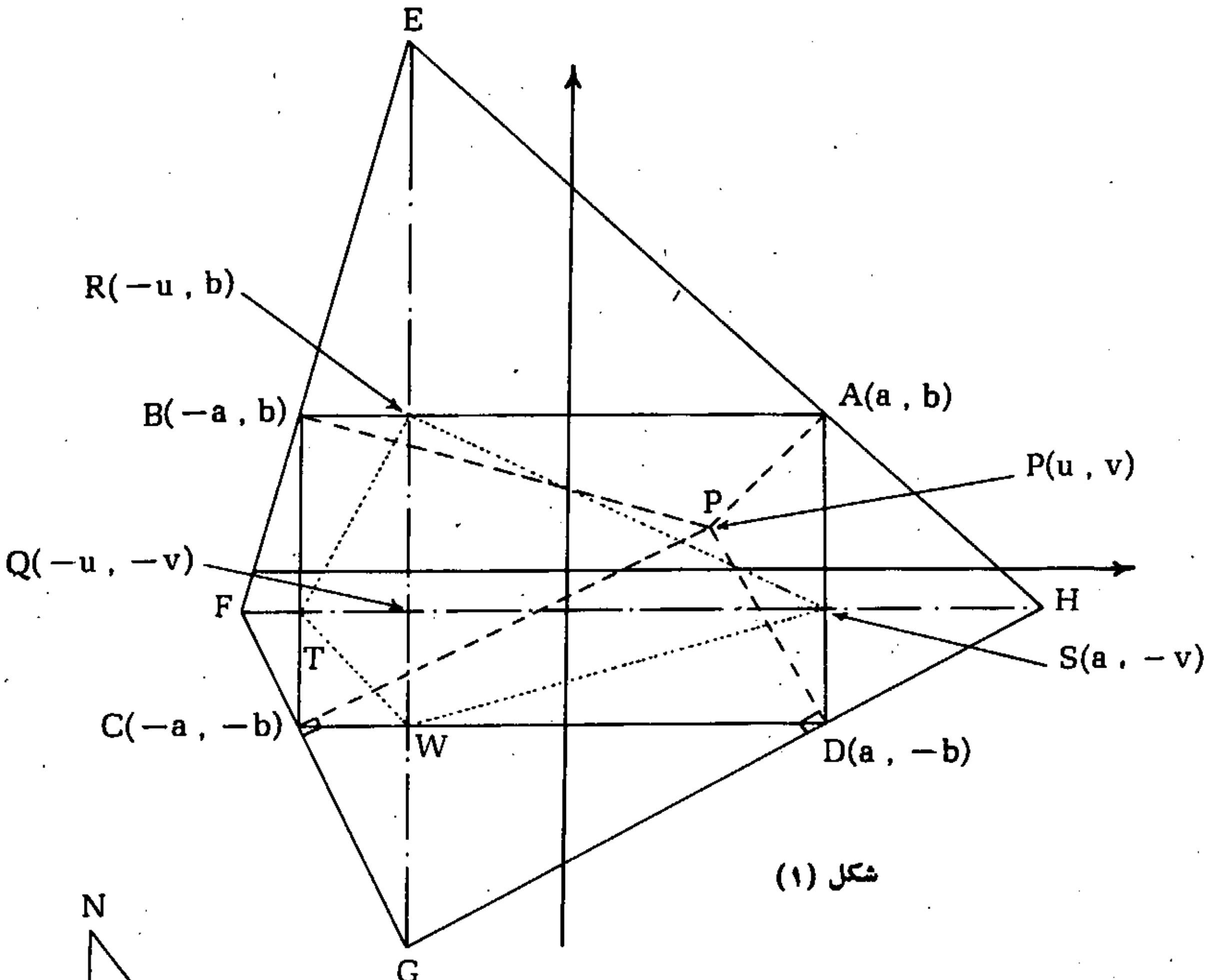
$$a^{2}b+b^{2}c+c^{2}a\leqslant(a+c)^{2}b=(1-b)^{2}b$$

بنابراین کافی است ماکزیمم $(1-b)^{2}b$ را تعیین کنیم که به کمك مشتق به ازاء $b=\frac{1}{3}$ این عبارت ماکزیمم بوده ومقدار ماکزیمم برابر $\frac{4}{27}$ است. لذا $S\leqslant\frac{4}{27}$ به کمك نامساوی واسطه هندسی و حسابی نیز می‌توان ماکزیمم را پیداکرد.

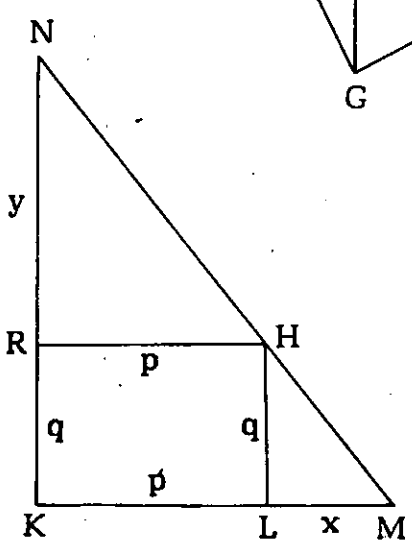
۵. فرض‌می‌کنیم P نقطه‌ای درون مستطیل $ABCD$ باشد. از رئوس A و B و C و D خطهائی به ترتیب عمود بر PA و PB و PC و PD رسم می‌کنیم. نشان دهید مساحت چهارضلعی محدبی‌که از تقاطع این چهار خط پدید می‌آید، بزرگتر یا مساوی از دو برابر مساحت مستطیل است.

حل. مستطیل را در صفحه محورهای مختصات عمود برهم درنظر می‌گیریم به طوری‌که اضلاع آن موازی محورهای مختصات و مرکز آن منطبق برمبدأ مختصات باشد.

مطابق شکل (۱) اگر $A(a\ ,\ b)$ و $P(u\ ,\ v)$ آنگاه $B(-a\ ,\ b)$ و $C(-a\ ,\ -b)$ و $D(a\ ,\ -b)$ و برای تعیین مختصات S و R و Q چنین داریم؛



شکل (۱)



شکل (۲)

دایرهٔ به قطر PH از A و D مـی‌گذرد، بنابراین مرکز آن روی عمود منصف AD قرار دارد یعنی روی محور xها است. درنتیجه عرض نقطه H برابر $-v$ است. بـه طور مشابه، عرض نقطه F نیز $-v$ وطولهای نقاط G و E برابر $-u$ است. لذا FH و EG با محورهـا مـوازی، و نقطه تلاقی آنها یعنی Q به مختصات $(-u\ ,\ -v)$ است. همچنین مختصات R و T و S نیز مشخص می‌شوند. حال شکل (۲) را درنظر می‌گیریم که درآن مستطیلی دریك مثلث قائم‌الزاویه مطابق شکل محاط شده است.

اگـر ابعاد مستطیل $p\ ,\ q$ و $RN=y$ و $LM=x$ فرض‌کنیم، داریم $\frac{y}{q}=\frac{p}{x}$ ، و

$$\frac{1}{2}(p+x)(q+y)=\frac{1}{2}(p+x)\left(q+\frac{pq}{x}\right)$$

$$=\frac{q}{2x}(p+x)^2=\frac{q}{2x}\left((p-x)^2+4px\right)$$

$$\geqslant 2pq$$

و تساوی برقرار است اگـر و فقط اگـر $x=p$ و $y=q$

حال اگر به شکل (۱) برگردیم چهار مثلث قائم‌الزاویه و یك مستطیل مطابق فوق داریم.

$$S_{EQH}\geqslant 2S_{ARQS}$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $EH\|RS$ و به‌طور مشابه برای سه مثلث قائم‌الزاویه دیگـر نیز روابط فـوق را

داریم. در نتیجه،

$$S_{EFGH} \geqslant 2S_{ABCD}$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که

$$EH\|RS \text{ و } EF\|RT \text{ و } FG\|TW \text{ و } GH\|WS \quad (۱)$$

زیرا $EH\|RS$ لذا $ER=RQ$ و در نتیجه $EF\|RT$ و بقیه به همین ترتیب ثابت می‌شوند.

بنابراین $EH\|RS$ لازم و کافی است که تساوی برقرار باشد و این نیز لازم و کافی است که $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{RS}$ یعنی

$$(a-u)(a+u)+(b-v)(-v-b)=0$$

یا

$$u^2-v^2=a^2-b^2.$$

و این بدان معنی است که تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که P روی منحنی

$$x^2-y^2=a^2-b^2$$

قرار داشته باشد.

$$|x|\leqslant a \quad \text{و} \quad |y|\leqslant b$$

۶. می‌دانیم مساحت یك مثلث را می‌توان برحسب اضلاع آن بیان کرد (رابطه هرون). آیا می‌توان فرمولی پیدا کرد که حجم یك چهاروجهی را برحسب مساحت وجه‌های آن بیان کند؟

حل. جواب منفی است. فرض‌کنیم S یك مثلث متساوی‌الاضلاع و T یك مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین باشند، که هردو معادل و مساحت هریك برابر ۴ باشد. هرگاه وسطهای اضلاع هریك ازاین مثلثها را بهم وصل‌کنیم، هرکدام به چهار مثلث تقسیم می‌شوندکه مساحت هریك برابر ۱ است. هریك از دو مثلث را حول این خطها تا می‌کنیم. S به یك چهاروجهی منتظم با حجم $V>0$ تبدیل می‌شود، اما T به یك چهاروجهی فروریختنی (در حقیقت یك مربع) بـه حجم صفر تبدیل می‌شود.

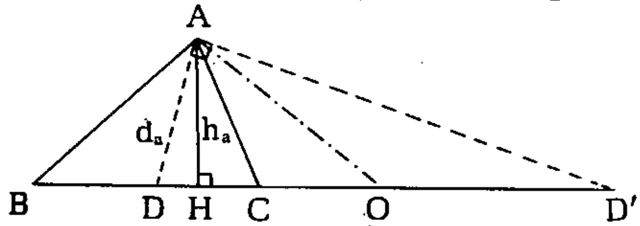
هر دو چهاروجهی دارای وجه‌های به مساحت ۱ می‌باشند. لذا اگر فرمولی برحسب مساحت وجه‌ها وجود داشته باشد برای یکی حجم صفرو برای دیگری حجم مقداری مثبت است که یك تناقض است.

۷. از مثلثی یك ضلع و ارتفاع و نیمساز وارد برآن ضلع معلوم است مثلث را رسم‌کنید.

حل. اگر AD و AD' به ترتیب نیمسازهای داخلی و خارجی رأس A باشند، آنگاه دستگاه A−BCDD' توافقی و لذا، $OD^2=OB\cdot OC$. اما مثلث قائم‌الزاویه ADD' قابل رسم است زیرا اگرمثلث قائم‌الزاویه ADH را رسم‌کنیم، مثلث ADD' نیز رسم می‌شود و لذا OD معلوم است. (O وسط DD' است). چون،

$$OB-OC=a \quad \text{و} \quad OB\cdot OC=OD^2،$$

لذا طول حاصل‌ضرب و تفاضل دو پاره‌خط معلوم‌اند در نتیجه طول این دو پاره‌خط معلوم‌اند.



بنابراین ابتدا مثلث ADD' را رسم می‌کنیم و نقطه O وسط DD' را مشخص می‌کنیم، سپس نقاط B و C مشخص می‌شوند.

۸. اگر $0<x\leqslant \frac{\pi}{2}$ و $n>m$ ثابت‌کنید تابع

$$f(x)=\frac{\int_0^x \sin^m t\,dt}{\int_0^x \sin^n t\,dt}$$

اکیداً نزولی است.

حل.

$$f'(x)=\frac{1}{\left(\int_0^x \sin^n t\,dt\right)^2}\left(\sin^m x\int_0^x \sin^n t\,dt-\sin^n x\int_0^x \sin^m t\,dt\right)$$

$$=\frac{\sin^m x}{\left(\int_0^x \sin^n t\,dt\right)^2}\left(\int_0^x \sin^n t\,dt-\sin^{n-m} x\int_0^x \sin^m t\,dt\right)$$

$$=\frac{\sin^m x}{\left(\int_0^x \sin^n t\,dt\right)^2}\int_0^x \sin^m t(\sin^{n-m} t-\sin^{n-m} x)dt$$

برای $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$ ؛ $0<t<x$ ، $\sin t<\sin x$ و لذا تابع تحت انتگرال درصورت منفی و بقیه جملات و مخرج مثبت می‌باشند درنتیجه برای $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$ ، $f'(x)<0$ و تابع در این فاصله اکیداً نزولی است.

بقیه در صفحه ۵۷

ریز مواد ریاضی کاربردی

مقدمه ـ ریاضیات کاربردی

یکی ازضرورت‌های تحصیل وتدریس مطالبی در ریاضیات روشن ساختن کاربردهائی است‌که این شاخه ازعلوم در سایر علوم و در پیشبرد زندگی انسان و درك بهتر و شناخت عمیق از جهان اطراف دارد. در ریاضیات کاربردی مطالبی از ریاضی‌که بدون مقدمات‌زیاد می‌تواند مورد استفاده قرار بگیرد مطرح شده است تا دانش‌آموزان با نقش‌های مختلفی که ریاضی در جامعه ایفا می‌کند آشنا شوند.

فهرست مطالب

مباحث ریاضیات کاربردی

۱ـ آمار و احتمال

آمار توصیفی

۱ـ داده‌ها و دسته‌بندی‌کردن‌آنها
۲ـ شاخص‌های عددی ازقبیل میانگین و واریانس
۳ـ شاخص‌های هندسی: نمودارها
۴ـ تعبیر نمودارها و شاخص‌های عددی

ـ احتمال

۱ـ آزمایش تصادفی
۲ـ فضای نمونه‌ای
۳ـ پیشامدها و اعمال برآنها
۴ـ پیشامدهای ناسازگار
۵ـ پیشامدهای همتراز و احتمال یك پیشامد
۶ـ قوانین مقدماتی احتمال $P(A \cup B)$ و $P(A')$ و $P(A-B)$
۷ـ پیشامدهای مستقل
۸ـ احتمال مشروط
۹ـ نمودار درختی
۱۰ـ دستور بیز

۲ـ ریز موادآنالیز ترکیبی

۱ـ اصول شمارش (اصل جمع و اصل ضرب)
۲ـ جایگشت و ترتیب (نماد و خواص‌آنها)
۳ـ ترکیب و تعمیم‌آن
۴ـ معرفی Σ (تعداد متناهی) و خواص مقدماتی‌آن
۵ـ تابع فاکتوریل و خواص‌آن
۶ـ بسط دو جمله‌ای، مثلث خیام

۷ـ بسط چند جمله‌ای

۸ـ تابع مولد دنبالهٔ از اعداد و موارد استعمال آن

۳ـ مجموعه‌ها

۱ـ توصیف مجموعه‌ها

ـ معرفی مجموعه‌های اعداد طبیعی N و Z و Q و بازه‌های عددی

۲ـ نمادهای عضویت و جزئیت، مجموعهٔ تهی

۳ـ اعمال برمجموعه‌ها (اجتماع، اشتراک، متمم، تفاضل، ضرب دکارتی)

۴ـ قوانین دمورگان

۵ـ دیاگرام ون و معرفی سایر دیاگرام‌ها که اعمال برمجموعه‌ها را نمایش می‌دهند.

۶ـ معرفی مجموعه‌های متناهی، نامتناهی وکراندار

۷ـ تعداد اعضای یك مجموعهٔ متناهی و قوانین آن و (درصورت امکان استدلال آنها)

و $n(A \cup B)=n(A)+(B)n-n(A \cap B)$

$n(\varnothing)=0$

۸ـ رابطه،رابطه ترتیبی ورابطه هم ارزی وتعریف M_{ax} و M_{in} یك مجموعه از اعداد.

۴ـ ماتریس‌ها و حل معادلات خطی

۱ـ معرفی ماتریس و انواع آن جمع و ضرب ماتریس‌ها و ضرب اسکالر در ماتریس‌ها و خواص آنها.

۲ـ فرم ماتریسی دستگاه معادلات خطی و ماتریس‌های مقدماتی و حل دستگاه به روش حذفی گاوس

۵ـ برنامه‌ریزی خطی

۱ـ تشریح مسأله با مثالهای ملموس (فقط فرم استاندارد ناتبهگن مطرح شود)

۲ـ حل چند مسأله مقدماتی با الهام از روش سیمپلکس (سادك)

۳ـ روش سیمپلکس.

۶ـ آلگوریتم‌سازی

۱ـ معرفی فلوچارت

۲ـ تشریح آلگوریتم (مشخصات یك آلگوریتم)

۳ـ ارائه آلگوریتم بعضی‌از مسایل ریاضی از قبیل: بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك تشخیص اول بودن یك عدد و بررسی مسایلی د مینهٔ نظریه مجموعه‌ها و ...

۷ـ آنالیز عددی

۱ـ خطاها

الف ـ منابع خطا

ب ـ خطای نمایش اعداد (هر عددی دارای یك بسط اعشاری است)

پ ـ انواع خطاها (خطای مطلق ـ خطای نسبی ـ خطای برشی)

ت ـ انتشار خطا (مسائل ملموس از فیزیك)

۲ـ تعیین ریشه‌ها

الف ـ تعیین حدود و تعداد ریشه‌های معادله

ب ـ تعیین حدود و تعداد ریشه‌های معادله چند جمله‌ای

ج ـ روش دو بخشی و روش نیوتن جهت تعیین ریشه‌ها با دقت مطلوب

د ـ روش نیوتن برای تعیین ریشه‌های چند جمله‌ایها

۳ـ درونیابی

الف ـ معرفی تفاضلات پیشرو

ب ـ اثبات‌وجود و روش محاسبهٔ چند جمله‌ای درونیاب

ج ـ کاربرد چند جمله‌ای درونیاب در تقریب توابع و مشتقات آنها (به اختصار)

۴ـ انتگرال گیری عددی

روش ذوزنقه (و احتمالاً سیمسون) جهت تعیین تقریبی از انتگرال معین

۸ـ گراف

مطالب ومفاهیم مقدماتی‌درگراف ازقبیل گراف‌های اولری‌ـ هامیلتونی، عدد رنگی ـ گراف مسطح، درختی وعنوان مطالبی در مباحث مناسب از الگوریتم‌سازی

۹ـ رمزنگاری

معرفی چند مفهوم ساده ازقبیل رمزهای سزاری ـ جابجایی و استفاده مطالبی از خواص اعداد در رمزنگاری

* دو قسمت ۸ و ۹ به صورت پراکنده و بازی ریاضی در سطح مناسب و کتابهای مختلف و مباحث مختلف مطرح می‌شود.

آنالیز

ریزمواد

آنالیز دورهٔ متوسطه

۱ـ معرفی N، Z و Q بصورت زیر:

$N=\{۱, ۲, ۳, \cdots\} \qquad Z=\{۰, \pm ۱, \cdots\}$

معرفی‌مجموعهٔ روبه‌رو، نامگذاری‌آن به Q واعضای آن به‌اعداد گویا:

$$Q=\left\{\frac{p}{q}\ |p\in Z،\ q\in Z, q\neq ۰\right\}$$

۲ـ دوعدد گویا $\frac{p}{q}$ و $\frac{p'}{q'}$ مساویند هرگاه $p'q=q'p$ وچنین می‌نویسیم

$$\frac{p'}{q'}=\frac{p}{q}$$

بیان تساوی

$$\left\{\frac{p}{q}|p\in Z, q\in N\right\}=\left\{\frac{p}{q}\,|p\in Z, q\in Z,\ p\neq ۰\right\}$$

لذا ازاین به‌بعد مخرج اعداد گویا را مثبت می‌گیریم.

هرگاه در $\frac{p}{q}$، $q=۱$ آنگاه عدد گویای $\frac{p}{۱}$ را با عدد صحیح p یکی می‌گیریم وبدین‌طریق $Z\subseteq Q$.

۳ـ اشاره به‌معادلاتی بصورت‌های زیرکه انگیزه‌ای برای‌توسیع N به Z و Z به Q هستند.

معادلهٔ $x-۲=۰$ در N جواب دارد و $x+۲=۰$ در N جواب‌ندارد ولی درZ دارای جواب است ومعادلهٔ $۲x+۱=۰$ در Z جواب ندارد ولی در Q جواب دارد.

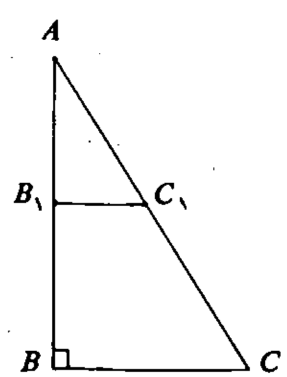
۴ـ خواص اعمال جمع وضرب در Q و ترتیب در Q (خاصیت انعکاسی، تعدی وقناس)

$x\leqslant x, (x\leqslant y, y\leqslant x \Rightarrow x=y)\ , (x\leqslant y,$

$y\leqslant Z \Rightarrow x\leqslant Z)$

۵ـ معرفی محور به‌صورت یك خط مستقیم با جهتی از چپ به راست و دارا بودن مبدأ و واحد اندازه‌گیری.

۶ـ تناظر اعداد گویا با نقاطی از محور مثلاً تعیین نقطه نظیر $\frac{۲}{۳}$، یافتن نقاط نظیر $\frac{p}{q}$ با ساختن اشکال زیر درحالت:



(نقاط متناظر با اعداد گویا را نقاط گویا می‌نامیم).

$I)\ p<q\quad AB_1=p,\ AB=q,\ B_1C_1=x,\ BC=1$

$\frac{AB_1}{AB}=\frac{x}{BC}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{x}{1}\Rightarrow x=\frac{2}{3}=B_1C_1$

$II)\ p>q،\ \frac{AB}{AB_1}=\frac{BC}{B_1C_1}\Rightarrow\frac{p}{q}=\frac{3}{2}\Rightarrow$

$x=\frac{3}{2}=B_1C_1$

۷- با فرض $q, q'>0$ و $\frac{p}{q}>\frac{p'}{q'}$ درصورتیکه $pq'>p'q$

۸- قضیه: بین هردو عددگویا، یك عدد گویاست.

۹- اگر $\frac{c}{d}<\frac{a}{b}$ آنگاه $\frac{c}{d}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{a}{b}$ (خواص)

۱۰- بین هردوعدد گویا بیشمارعدد گویا موجود است.

سوالی بصورت زیر مطرح گردد

آیا فکرمی‌کنید که می‌توان بدین ترتیب تمام نقاط بین دونقطه گویا را با اعداد نامگذاری کرد یا نقاط دیگری باقی می‌ماند که با اعداد گویا نمی‌توان نامگذاری کرد؟ معادلهٔ $x^2=2$ دارای جواب است. این جواب طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای به‌اضلاع قائم واحد است که آن را به $\sqrt{2}$ نمایش می‌دهیم.

۱۱- قضیه: $\sqrt{2}$ گویا نیست می‌پذیریم که 2π گویا نیست و رسم 2π با غلطاندن دایرهٔ مثلثاتی (بازکردن آن).

۱۲- رسم $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ وغیره.

۱۳- تمریناتی اراعداد غیرگویا بصورت $\sqrt{2}-1$ و $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ و $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ و $\sqrt[3]{2}$.

۱۴- تعریف عدد اصم ـ اعداد غیرگویا را اعداد اصم می‌نامیم بعبارت دیگر اعدادی راکه نتوان بصورت $\frac{p}{q}$ نوشت‌اصم گوئیم.

۱۵- مجموعهٔ نقاط محور به‌غیر ازنقاط گویا را نقاط اصم می‌گوئیم. طول متناظر با یک نقطه اصم را یک عدد اصم می‌نامیم.

۱۶- بین هردو عدد اصم بیشمار اعداد اصم وتقریبات آنها و گویا وجود دارد وبین هردوعدد گویا یک عدد اصم وجود دارد.

۱۷- اجتماع مجموعه اعداد گویا ومجموعهٔ اعداد اصم را مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌نامیم وبا R نمایش می‌دهیم.

۱۸- بیان تناظر یک به‌یک بین مجموعهٔ اعداد حقیقی و نقاط روی یک محور.

۱۹- اعمال برمجموعهٔ اعداد حقیقی (خواص میدان مرتب گفته شود).

۲۰- خاصیت ارشمیدسی اعداد.

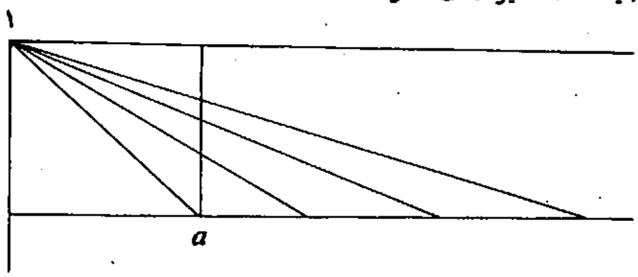
۲۱- تعریف‌فاصلهٔ $[a,b]$ و(a,b) و$(a,+\infty)$ و$(-\infty,a)$ و $(-\infty,a]$ و $[a,+\infty)$ که درآنها $a,b\in R$ بصورتهای زیرمی‌باشند: توجه کنید که $-\infty$ و $+\infty$ عدد نیستند بلکه دو نماد می‌باشند.

$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}=[a,b]\qquad \{x|a<x<b\}=(a,b)$

$\{x|x>a\}=(a,+\infty)\qquad \{x|x\geqslant a\}=[a,+\infty)$

$\{x|x<a\}=(-\infty,a)\qquad \{x|x\leqslant a\}=(-\infty,a]$

بیان فاصلهٔ بسته $[a,+\infty)$ با مثال‌هایی نظیرشکل مقابل و بیان بقیه نمادها نیز روی محور.



۲۲- تعریف ماکزیمم ومی‌نیمم زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی‌در صورت وجود.

۲۳- با ارائه مثال‌های شهودی دانش‌آموزان را با مفاهیم کوچکترین کران بالا (سوپریمم) وبزرگترین کران پائین (اینفیمم) آشنا کنیم. (درصورتیکه حجم کتاب اجازه دهد و ضمناً موجود بودن زمینه‌های کافی این قسمت پیاده گردد.)

۲۴- قضیه: بازای هر a

$R=(-\infty,a]\cup(a,+\infty)=(-\infty,+\infty)$

نتیجه: با تعمیم ترتیب دراعداد حقیقی نتیجه بگیریم:

$R=\{x|-\infty<x<+\infty\}$

۲۵- آوردن مثال‌های ملموس‌جهت معرفی حوزه تعریف، حوزهٔ مقادیر، ضابطه وبرد تابع بطوریکه دانش‌آموز به‌تعریف تابع بصورت زیر رهنمون شود.

۲۶- تعریف زوج مرتب با زمینه‌های قبلی و زمینه‌سازی که در بند ۲۳ بعمل‌آمده است.

۲۷- تعریف تابع بصورت $f=\{(x,y)|\ldots\}$ که اگر $(x',y')\in f$ و (x,y) و $x=x'$ آنگاه $y=y'$

$A=\{x\,|\,\exists y\cdot S\cdot T\ (x,y)\in f\}$

حوزه تعریف و

$B=\{y\,|\,\exists x\cdot s\cdot t\cdot(x,y)\in f\}$

حوزهٔ مقادیر تابع می‌نامیم و $y=f(x)$ را ضابطه تابع معرفی می‌کنیم.

۲۸ــ رسم توابع خطی، قدرمطلق وچند ضابطه‌ای مانند: $|x|$، $\sin x$، $\cos x$، x^n، a^x، $E(x)$، $sgn\, x$ به‌طریق نقطه‌یابی و با تأکید بیشتر روی قدرمطلق، رسم توابع گسسته از نوع $y=n$، $y=\frac{1}{n}$، $y=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n\in N)$.

۲۹ــ بیان قضایای قدرمطلق وقضایای مربوط به a^x.

۳۰ــ بیان قضایا وخواص مربوط به $E(x)$.

۳۱ــ تعیین ناحیه‌ای ازصفحه محورهای مختصات متعامد بطوریکه $ax+by>c$ یا $ax+by\leqslant c$.

۳۲ــ بحثی دربارهٔ نامساویهای شامل قدرمطلق که بعداً درمعرفی مفهوم حد مورداستفاده قرارمی‌گیرند مثلاً تعیین حدود x برای مثال‌هایی ازنوع

$$|x|<1\ ,\ |x+2|<1,\ |x-1|+|x+1|<4$$
$$|x^2-2x+5|>2$$

۳۳ــ توابع زوج، توابع فرد، متناوب (تعریف)

۳۴ــ جبر توابع (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم توابع)

۳۵ــ ترکیب توابع (توابع مرکب) خواص شرکتپذیری واشاره به‌تعویض‌ناپذیری ترکیب توابع توابعی نیز ارائه شوند که ترکیب آنها همانی باشد تا زمینه‌ای برای معرفی توابع معکوس باشد.

۳۶ــ توابع معکوس وخواص مربوط به‌آنها

۳۷ــ توابع کراندار

۳۸ــ توابع پارامتری

۳۹ــ رسم نمودارتابع $y-b=f(x-\alpha)$،

$$y=f(\lambda x)\ ،y=c\ f(x)\ ،y=\frac{1}{f(x)}$$

از روی نمودارتابع $y=f(x)$.

۴۰ــ دنباله‌های‌متناهی و دنباله‌های نامتناهی، بارسم نمودارهایی ازآنها.

ــ بعنوان مثال ـ دنبالهٔ حسابی (تصاعد حسابی) و دنبالهٔ هندسی (تصاعد هندسی)

ــ جملهٔ nام، دنبالهٔ حسابی وهندسی

ــ مثالهایی از زندگی روزمرهٔ نظیر تصادف اتومبیل و افزایش به میزان ۱۰٪

ــ با مثالهایی از دانش‌آموزان خواسته شود که جمله nام دنباله را حدس بزنند.

ــ محدود بودن ونامحدود بودن دنباله‌ها.

ــ برای آمادگی ذهن دانش‌آموزان برای سریهای حسابی و هندسی، مجموعه‌های متناهی، $1+2+3+\ldots+n$ و $a+a^2+\ldots+a^n$ خواسته شود.

ــ سریهای حسابی وهندسی

ــ تعیین مجموع n جملهٔ اول

ــ سری متناهی وخواص سیگماها

$$\sum_1^n (a_k+b_k)=\sum_1^n a_k+\sum_1^n b_k$$
$$\sum_1^n (\lambda a_k)=\lambda \sum_1^n a_k$$
$$\sum_2^n (a_k-a_{k-1})=a_n-a_1$$

حد

ــ برای زمینه‌سازی جهت تعریف حد دنباله، از دانش‌آموزان خواسته شود که n_0 ای بیابند بطوریکه اگر $n>n_0$ آنگاه $\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$ ویا n_0 ای بیابندکه اگر $n>n_0$ آنگاه $\frac{1}{n}<\frac{1}{1000}$.

ــ **تعریف هیچ دنباله:** گویند $\{a_n\}$ (یک هیچ دنباله است) دارای حدی برابر صفر است هرگاه $|a_n|$ را بتوان به دلخواه کوچک نمود بشرطی که n بقدرکافی بزرگ شود.

ــ **قضیه:** (بدون اثبات). اگر دنباله $\{a_n\}$ دارای حد صفر باشد و دنبالهٔ $\{b_n\}$ محدود آنگاه حد $\{a_nb_n\}$ صفراست.

قضیه (بدون اثبات): اگرحد دنبالهٔ $\{a_n\}$ وحد دنبالهٔ $\{b_n\}$ صفر باشد آنگاه

آ) ــ حد $\{a_n+b_n\}$ صفراست.

ب)ــ حد $\{a_n-b_n\}$ صفراست.

ج)ــ حد $\{a_n\ b_n\}$ صفراست.

چند قضیه درمورد هیچ دنباله‌ها گفته شود.

ــ زمینه‌سازی برای اینکه حد هر دنباله صفرنمی‌باشد مثلاً

$$a_n=\frac{n+1}{n}$$
$$\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}\to 1$$

تعریف: $a_n\to l$: حد دنبالهٔ $\{a_n\}$ مساوی l است هرگاه حد دنبالهٔ $\{a_n-l\}$ صفرباشد. دراینصورت‌می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=l$

و $\{a_n\}$ را یک دنبالهٔ همگرا می‌نامند. اگر دنباله‌ای همگرا نباشد، واگرا گویند.

مثالـ دنباله $a_n = C$ همگرا به C است.

مثالـ دنبالهٔ $a_n = (-1)^n$ همگرا نیست.

لم ـ حد دنبالهٔ $\{a_n\}$ درصورت وجود منحصر بفرد است.

قضیهٔ (*) اگر $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ ، $\lim_{n\to+\infty} b_n = l'$ آنگاه

آ) ـ $\lim_{n\to+\infty} (a_n+b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n$

ب) ـ $\lim_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = l - l'$

ج) ـ $\lim_{n\to+\infty} (a_n\cdot b_n) = l\cdot l'$

د) ـ اگر $l'\neq 0$ آنگاه

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l}{l'}$$

یک مورد ثابت شود وبقیه درتمرینات خواسته شود.

نتیجه ـ اگر $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ و C عددی حقیقی باشد آنگاه

$$\lim_{n\to+\infty} (ca_n) = cl$$

ـ محاسبهٔ حدودی نظیر $\frac{n^2+2n+1}{n^2+1}$، سری نامتناهی تصاعد هندسی وصورت کلی سری نامتناهی.

ـ دنباله‌های یکنواخت وکراندار وتراجعی (بازگشتی)

کاربرد حد

ـ نمایش اعشاری اعداد گویا:

$\frac{1}{2} = 0/5$

$\frac{1}{3} \cong 0/333 \,,\, \frac{1}{3} \cong 0/33 \,,\, \frac{1}{3} \cong 0/3$

$\frac{4}{3} = 1/33\ldots\ldots = 1/\overline{3}$

ـ هرعدد گویای مثبت را می‌توان بصورت زیر نمایش داد.

$\frac{p}{q} = a_0 \cdot a_1a_2a_3 \ldots a_s a_{s+1} \ldots a_t$

$(a_0\in N\cup\{0\},\ 0\leqslant a_i \leqslant 9)$

که نمایش اعشاری عدد گویای $\frac{p}{q}$ نامیده می‌شود.

ـ هرعدد حقیقی دارای یک‌نمایش اعشاری است وبالعکس.

ـ تعاریف دوره تناوب وکسور اعشاری‌متناوب ساده ومرکب.

ـ نشان دادن اینکه ۰.۴۳۸۹ و ۰.۴۳۹ نمایش یک عدد گویا هستند وما آنها را یکی می‌گیریم وهر دونمایش یک نقطه روی محورهستند.

ـ نشان دادن برابری اعداد اعشاری مختوم با یک عدد گویا بصورت $\frac{p}{q}$ (مولد اعداد اعشاری تحقیقی یا اعشاری متناوب‌ساده یا اعشاری متناوب مرکب)

ـ بیان برابری اعداد اعشاری متناوب با عدد گویائی بصورت $\frac{p}{q}$، بیان شود که اثبات آن ذیلاً مطرح می‌گردد.

ـ قضیه: هرعدد اعشاری متناوب یک عدد گویا است و بالعکس (حکم عکس بدون اثبات)

ـ نتیجه: نمایش اعشاری هرعدد اصم مثبت یک عدد اعشاری غیرمتناوب است.

ـ بسط دوجمله‌ای نیوتن بطور کامل بعد از دنباله‌ها گفته شود (یا آنکه گروه جبرآنرا در ریزمواد جبربیآورند).

ـ تعریف دنباله‌های واگرا به $+\infty$ و واگرا به $-\infty$.

ـ هر دنبالهٔ یکنواخت دارای حد است.

ـ قضیه: اگر $a_n\to+\infty$ یا $a_n\to-\infty$ آنگاه $\frac{1}{a_n}\to 0$

ـ قضیه: اگر $a_n>0$ و $a_n\to 0$ آنگاه $\frac{1}{a_n}\to+\infty$

ـ قضیه: اگر $a_n<0$ و $a_n\to 0$ آنگاه $\frac{1}{a_n}\to-\infty$

ـ مثالی آورده شود که $a_n\to 0$ ولی $\frac{1}{a_n}$ دارای حد $+\infty$ یا $-\infty$ نباشد.

ـ معرفی عدد e بعنوان حد دنباله $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ با رسم شکل و اشاره به‌اینکه $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ صعودی وکراندار. است.

ـ با استفاده از دوجمله‌ای نیوتن مقادیر تقریبی برای e گفته شود واینکه $2<e<3$.

ـ قضیه (درصورت نیاز)

$$\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=e$$

تعریف ـ اگر به‌ازای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ که $x_n\neq c$ و $x_n\to c$ دنبالهٔ نظیر آن یعنی $\{f(x_n)\}$ متقارب به l باشد گویند حد f در c موجود ومساوی l است ومی‌نویسند، $\lim_{x\to c} f(x)=l$.

نتیجه ــ حد تابع f درنقطه c درصورت وجود منحصر بفرد است.
تعریف حد چپ و تعریف حد راست و قضیه مربوط به آن بیان می‌شود.

مثال ۱ــ حد توابع زیر را درنقطه $\frac{1}{2}$ بدست آورید.

$g=\{(x, y)|y=x^2, x\in R\}$
$f=\{(x, y)|y=[x], x\in R\}$

مثال ۲ــ تابع $f=\{(x, y) \mid y=[x]\}$ در نقطهٔ $x=1$ حد ندارد.

حل ــ $x_n=1+\frac{1}{2n}$ و $y_n=1-\frac{1}{2n}$ واضح است‌که $x_n\neq 1$ و $y_n\neq 1$، $x_n\to 1$ و $y_n\to 1$ درحالیکه،

$$f(x_n)=\left[1+\frac{1}{2n}\right]=1+\left[\frac{1}{2n}\right]\to 1$$

ولی

$$f(y_n)=\left[1-\frac{1}{2n}\right]=0\to 0$$

پس تابع f در $x=1$ حد ندارد.

قضیه (مقایسه): فـرض کنید دنبالـهٔ $\{b_n\}$ همگـرا به ۰ باشد و $M>0$ ای باشد که $|a_n|\leqslant M|b_n|$ دراین صـورت $a_n\to 0$
(بدون اثبات)

قضیه (فشردگی): اگـر $b_n\to l$ و $c_n\to l$ و $c_n\leqslant a_n\leqslant b_n$ آنگاه $a_n\to l$
(اثبات بنابرقضیه قبل است).

$$\begin{array}{ccc} 0\leqslant & a_n-c_n\leqslant & b_n-c_n \\ & \downarrow & \downarrow \\ & 0 & 0 \end{array}$$

$$a_n-c_n\to 0 \qquad \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n=l$$

تمرینات مناسب آورده شود تا دانش‌آموزان عمـلاً از قضایای فوق استفاده کنند. مثلاً

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}), \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n}$$

واگر $a_n\to l$ آنگاه $a_n^p\to l^p$.

ــ بنابرقضیه (*) می‌توان قضیه زیر را ثابت کرد

(قضیه **): اگر $\lim_{x\to c} f(x)=l$ و $\lim_{x\to c} g(x)=l'$
آنگاه

آ)ــ $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))=l+l'$

ب)ــ $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x))=l-l'$

ج)ــ $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x))=l\cdot l'$

د)ــ اگر $l'\neq 0$ آنگاه

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l}{l'}$$

ــ زمینه‌سازی برای تعریف پیوستگی: با ارائه توابعی که در c تعریف نشده‌اند ولی‌حد دارند وتوابعی‌که در c تعریف شده‌اند ولی حد ندارند وتوابعی که در c تعریف شده‌اند وحد دارد ولی مقـدار حد با $f(c)$ برابرنیست. و توابعـی که در c تعریف شده‌اند و در c حد دارند وحد آن با $f(c)$ برابراست.

ــ تعریف پیوستگی: اگرتابع f در $x=c$ تعریف شده باشد و در c دارای حد باشد وحدتـابـع f در c با $f(c)$ برابرباشد گویند تابع f در $x=c$ پیوسته است. (پیوستگی چپ و راست آورده شود).

تمرین ــ تابع f در $x=c$ پیوسته است اگر و فقط اگر به‌ازای هردنباله $\{x_n\}$ که $x_n\to c$ دنبالهٔ نظیرآن‌یعنی $\{f(x_n)\}$ همگرا به $f(c)$ باشد.

ــ قضیه (تابع مرکب): اگر $\lim_{x\to c} f(x)=b$ وتابع g در b پیوسته باشند آنگاه

$$\lim_{x\to c}[gof(x)]=g(b).$$

ــ نظیرقضیه (**) برای توابع پیوسته هم برقراراست.

ــ مثالهای زیادی‌ازتوابع پیوسته‌وناپیوسته، منجمله چندجمله‌ایها آورده شود وتوابعی مثال بزنیم که خودشان ناپیوسته باشند ولی حاصل‌جمع آنها پیوسته باشد.

ــ تعریف پیوستگی تابع f بریک فاصله وقضایای پیوستگـی (جمع ـ تفریق، ضرب وخارج قسمت وترکیب توابع).

ــ اشاره به‌ریشه‌های معادله درجه ۲ و ۳ وحدس تقریبی ریشه‌ها

ــ قضیه بولتسانو

ــ با رسم شکلهائی نشان دهید که پیوستگی f درقضیهٔ بولتسانو لازم است.

ــ قضیه مقدارمتوسط

ــ قضیه: اگر f بر $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه ماکزیمم و مینیمم خود بر $[a, b]$ را می‌گیرد. (بدون اثبات)

ــ قضیه: اگر f بر $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه $f([a, b])$ یک

بازهٔ بسته است.

اثبات: $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)=A,\ \operatorname{Max}\limits_{x\in[a,b]} f(x)=B$

$\Rightarrow f([a,b])=[A,B]$

ـ پیدا کردن حدود ریشه‌های معادلات $f(x)=0$ با استفاده از قضیهٔ بولتسانو و روش تکراری و بعنوان کاربرد دیگر قضیه بولتسانو ثابت می‌شود که معادلهٔ $x^n=a$ $(a\geqslant 0)$ دارای ریشه است و $\sqrt[n]{a}$ بدین‌وسیله معنی پیدا می‌کند.

$f(x)=x^n-a \Rightarrow f(0)\leqslant 0,\ f(a+1)>0 \Rightarrow$
$\exists x_0 \in [a, a+1]$
$S.T.\ f(x_0)=0 \Rightarrow x_0^n=a.$

ـ نظیر اولین قضیه دنباله‌ها برای توابع بیان و از روی آن قضیه ثابت شود همینطور برای قضیه فشردگی عمل شود و نتیجه‌گیری شود که $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

ـ بیان $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)$ وقضایای موجود برای چندجمله‌ایها و توابع گویا. (بخاطر اینکه تنها راه رفع ابهام مشتق نباشد).

ـ صورت مبهم $\div$ و $\dfrac{\infty}{\infty}$، $0\times\infty$، $\infty-\infty$ و 1^∞.

مشتق

۱ـ معرفی مشتق بـه کمک ضریب زاویه خـط مماس و سرعت لحظه‌ای درایجاد انگیزه برای تعریف مشتق (مثالهایی از نوع $f(x)=x^2$، $f(x)=|x|$، $f(x)=\sqrt{|x|}$، $g(x)=\sqrt[3]{x}$).

۲ـ تعریف مشتق درنقطهٔ x_0 بصورت

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$f'(x_0)$ درصـورت وجود بایـد یک عدد حقیقـی بـاشد بیان صورتهای معادل آن ومشتق‌پذیری دریک فاصله.

ـ محاسبه مشتق چند تابع ساده مثل $f(x)=c$، $f(x)=x$، $f(x)=x^2$ و $f(x)=\sqrt{x}$، $f(x)=\sin x$، $f(x)=|x|$ و مثالهایی از مشتق توابـع چند ضابطه‌ای (با استفاده ازتعریف).

ـ قضیهـ هرتابع مشتق‌پذیر پیوسته است ولی عکس آن برقرار نیست (بـا اثبـات) مثالهایی از نـوع $f(x)=|x|$ و اگر $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\geqslant 0)\\ x & (x<0)\end{cases}$، بیان شودکه تابعی پیوسته است ولی مشتقپذیر نیست.

ـ قضایای مشتق (جمع وضرب، تقسیم وتفریق) (یک مورداثبات شود وبقیه اثباتها درتمرینات خواسته شود).

ـ برخی ازفرمولهای مشتقگیری

ـ مشتقات مراتب بالاتر ازیک

ـ مشتق توابع مثلثاتی وتوابع‌نمایی (بدون اثبات تابع‌نمایی)

ـ مشتق مرتبهٔ n ام برخی ازتوابع مثل $\cos x$ و $\dfrac{x\pm a}{x\pm b}$، ...

ـ زمینه‌سازی برای مشتق توابع مرکب نظیر $y=f(3x)$.

ـ مشتق تابع تابع (تابع مرکب)

ـ قضیه: اگرتابعی دریک فاصلهٔ بسته پیوسته باشد ومشتقپذیر و $f'(x)>0$ بجز تعدادی متناهی نقطه کـه درآنها، $f'(x)=0$، آنگاه، تابع f اکیداً صعودی و دارای تـابـع معکوس است و f^{-1} هم پیوسته است.

ـ مشتق تابع معکوس ومشتق توابع مثلثاتی معکوس.

ـ مشتق توابع لگاریتمی‌وکاربرد آن درمحاسبهٔ مشتق حاصلضرب چند تابع، خارج‌قسمت دوتابع.

ـ کاربرد مشتق

۱)ـ جهت تغییرات تابع

۲)ـ رسم خط مماس وقائم برمنحنـی از نقطه‌ای واقع درخارج منحنی وتعمیم مفهوم مشتق بـرای $f'(x_0)=\infty$ و تعبیر هندسی آن بعنوان ضریب زاویه خط مماس موازی محور y ها.

۳)ـ تعریف نقاط بحرانی و تعریف ماکزیمم ومی‌نیموم نسبی و مطلق وتعیین آن با استفاده از مشتق و بدون استفـاده ازمشتق به کمک قضایائی نظیر قضیه زیر: «اگر مجموع دومتغیر مثبت x و y مقدارثابتی باشد xy وقتی ماکزیمم است که $x=y$ گردد.»

ـ مثالهایی ازنوع تعیین ماکزیمم مطلق که در واقع با استفاده از $f(a)$ و $f(b)$ و $f(x_0)$ که x_0 نقطه بحرانـی است، بدست می‌آید.

ـ مسائلی در رابطه با ماکزیمم و می‌نیمـوم مطلق $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ بدون استفاده ازمشتق.

۴)ـ تقعر وتحدب وتعریف وتعیین نقطه عطف.

۵)ـ کاربرد فیزیکی ومکانیکی مشتق

۶)ـ محاسبهٔ ریشه‌های مکرر چند جمله‌ایها با استفاده از مشتق و بسط تیلور چندجمله‌ایها.

ـ دستور هوپیتال (بدون اثبات)

– صورمبهم $\div$، $\frac{\infty}{\infty}$، $0\times\infty$، 1^{∞}، $\infty-\infty$، 0^{0}، ∞^{0}،
(وصورتهای غیرمبهم $\frac{\pm}{0}$)

– تعیین محور ومرکزتقارن منحنی بخصوص مرکز ومحور تقارن مقاطع مخروطی (غیرمایل)

– مجانب‌های قائم وافقی ومایل (با تمرین کم)

– رسم توابع کسری و اصم و مثلثاتـی و e^x ولگاریتمی (بطور مختصر و رسم توابع با استفاده ازانتقال).

– دیفرانسیل: اگر $y=f(x)$ آنگاه

– $\Delta y \cong f'(x)\cdot\Delta x$ وبا توجه به‌آن اگر $f(x_0)$ مفروض باشد، $f(x_0+\Delta x)$ را تخمین بزنید.

– تعریف $dy=f'(x)\cdot\Delta x$ کـه درآن $y=f(x)$ و به‌ازای $f(x)=x$ نتیجه می‌شود.

$\Delta x=dx$ پس $dy=f'(x)\,dx$ وهـــمچنیـن بیـان $f'(x)=\frac{dy}{dx}$، مشتق توابع پارامتری.

– قضایای دیفرانسیل

$$d(k)=0$$
$$d(f\cdot g)=g\,df+f\,dg$$
$$d(f\pm g)=df\pm dg$$
$$d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\,df-f\,dg}{g^2}\ (g(x_0)\neq 0)$$

(یک مورد اثبات وبقیه درتمرینها آورده شود)

– دیفرانسیل مراتب بالاتر دوم وسوم.

انتگرال

– تعریف انتگرال معین با استفاده ازتعیین مساحت زیریك‌منحنی $y=f(x)$ که درآن f پیوسته استو $f(x)\geqslant 0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$.

– مثال: مساحت زیرمنحنی توابـع $y=x$، $y=x^2$ درفاصلـهٔ $[0,2]$ با تقسیم کـردن $[0,2]$ به n قسمت مساوی و استفاده از حد دنباله‌ها محاسبه شود. (بیان این مطلـب که ادامهٔ این روش با مشکلاتی مواجه است ولی با استفاده از تابـع اولیه مرتفع می‌شود).

– تعریف تابع اولیه وانتگرال نامعین

– فرمول لایبنتیز

– قضایای انتگرالگیری، فرمول‌انتگرالگیری نامعین.

– انتگرالگیری به روش تغییر متغیر، انتگرالگیری به روش جز به جز.

– انتگرالگیری برخـی توابـع کسری و مختصری از معادلات دیفرانسیل ساده با مثالهای کاربردی.

– * *

– خواص انتگرال معین وکاربردآن شامل

$$m\leqslant\frac{\int_a^b f(t)\,dt}{b-a}\leqslant M$$

که درمحاسبه شدت جریان مؤثر بکارمی‌رود.

– محاسبه مساحت وحجم (با اثبات) وطول قوس (بدون اثبات)

– حجم اجسام دوار به‌طریق لایه‌های استوانه‌ای

$$V=\int_a^b \pi y^2 dx=\int_a^b 2\pi x\,y\,dx$$

– محاسبه محیط دایره وبیضی

– * توضیح اگرخواص مساحت درهندسه گفته نشود در ابتدای انتگرال معین ذکر گردد.

* * در این مبحث ارائه تابـع لگاریتمی بصورت تابعی مانند f دارای مشتق بر R^+ که درشرط $f(xy)=f(x)+f(y)$ صدق می‌کند ونتیجه می‌گیریم که $f(1)=0$ و

$$f'(x)=\frac{f'(1)}{x}$$

وبدین ترتیب تابع لگاریتمی نپری تابـع منحصربفردی تعریف می‌شود که تابـع اولیه $h(x)=\frac{1}{x}$ است. و مقـدار آن در ۱ مساوی صفراست.

۱)– نمودار، خواص،کلیه قضایای مربوط به‌لگاریتم (بخصوص اکیداً صعودی بودن وحد آن در ۰ و ∞)

۲)– تابع $ln: R^+\to R^+$ برو است وتابع‌نمایی معکوس آن است پس $exp: R\to R$ وضمناً نتیجه می‌گیریم که

$$(exp(x))'=exp(x)$$
$$exp(x+y)=exp(x)\cdot exp(y)$$

۳)– با این روش می‌تـوان عـدد e را مساوی $exp(1)$ معرفی کرد ومقدار تقریبی برآن بدست‌آورد. وثابت کرد

$$e^n=exp(n),\ e^{\frac{p}{q}}=exp\left(\frac{p}{q}\right)$$

وبالاخره

$$e^x=exp(x).$$

معرفی کتب و مجلات ریاضی

۱. آمادگی برای‌کنکورها والمپیادها؛ ترجمه و تنظیم‌از ابراهیم‌دارابی، انتشارات نوپا، ۱۳۶۹.

۲. تبدیلهای هندسی، جلد اول؛ آی. ام. یا گلم، ترجمهٔ اسدالله کارشناس و عمید رسولیان؛ مرکز نشر دانشگاهی،از سری‌کتب ریاضیات پیش دانشگاهی، ۱۳۶۹.

۳. تبدیلهای هندسی؛ جلد دوم؛ آی. ام. یاگلم، ترجمهٔ محمد باقری؛ مرکز نشر دانشگاهی، از سری کتب ریاضیات پیش دانشگاهی، ۱۳۶۹.

۴. گزیده‌ای از نظریهٔ اعداد؛ اویستن اور، ترجمهٔ منوچهر وصال؛ مرکز نشر دانشگاهی، از سری ریاضیات پیش‌دانشگاهی، ۱۳۶۹.

۵. تبدیلهای هندسی؛ جلد سوم؛ آی. ام. یاگلم، ترجمهٔ محمد هادی شفیعیها؛ مرکز نشر دانشگاهی، از سری کتب ریاضیات پیش دانشگاهی، ۱۳۶۹.

۶. تابع گاما؛ امیل آرتین، ترجمهٔ سعید ذاکری، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۹.

۷. زودآموزی Basic؛ ترجمه‌وتالیف عبدالحسین مصحفی، از انتشارات شرکت آموزشی فرهنگی انتشاراتی اندیشه، ۱۳۶۹.

اخبار گروه کامپیوتر

در پی اجرای‌طرح آموزش‌کامپیوتر در کلاسهای سوم ریاضی فیزیک در دبیرستانها، گروه کامپیوتر، دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، سازمان پژوهش، اقداماتی به این قرار نموده است:

- بازدید کارشناسان ذیربط دفتر، از کارگاههای کامپیوتر در مراکز استانها بمنظور بررسی‌وضعیت اجرای طرح و گفتگو با دبیران و دانش‌آموزان تحت پوشش طرح
- برگزاری‌دوره بازآموزی برای آموزش‌دبیران‌ریاضی‌درتابستان ۷۰،در مراکز استانهای آذربایجان شرقی، اصفهان باختران، گیلان، مازندران و همدان از طریق اداره‌کل آموزشهای ضمن خدمت.
- بازنگری و تصحیح نهایی‌کتاب مبانی کامپیوتر و انفورماتیك، سال سوم ریاضی فیزیك توسط افراد صاحبنظر

جواب نامه‌های رسیده

سربازوظیفه، محمودمؤمنی‌پور، تهران.

مسائل ارسالی شما همراه با نارسائی‌هایی است که بررسی آن مشکل است. بهتر است مسائلی که خود طرح می‌نمائید با چندین مثال در درستی و یا نادرستی آن تحقیق کنید. در مورد حکم دوم شما متذکر می‌شویم که اگر تابعی مشتق‌پذیر باشد و در نقطه‌ای دارای ماکزیمــوم و مینیمــوم شود مشتق در آن نقطه صفــر است پس مماس در آن نقطه موازی محور X ها است و در ضمن، قائم بر آن از مرکز انحنای منحنی می‌گذرد

خانم مژگان آریائــی‌نژاد، دانشجــوی تربیت معلم الزهرا (س) سیرجان.

علت اینکه تعریف عدد اول را برای اعداد طبیعی نایك بیان می‌کنندبخاطر قضایای بعدی و کاربــرد آن است. مثلا، «هر عدد طبیعی تجزیه یکتا به حاصلضرب اعداد اول دارد» که اگر عدد یك و یا قرینه اعداد اول را جزء اعداد اول بدانیم بیان این قضیه، و بسیاری از قضایای دیگر، مبهم می‌شود. در مورد پیشنهادهای شما و بیان مسائل معماگونه اقدام خواهیم کرد، همچنین، در آتیه مقالاتی در زمینــه کامپیوتر چاپ خواهد شد ومصاحبــه‌هایی با معلمین خوب ریاضی انجــام خواهیم داد. اما در مورد مطالب ادبی در زمینه ریاضی و یا اشعار ریاضی منتظرنامه ازطرف خوانندگان هستیم، برای اینکه زمینه برای ارسال نامه از طرف‌خوانندگان مهیاشود، برداشت شما را از ریاضیات ذیلا درج می‌کنیم:

«زندگی به معنی ریــاضی وقتــی شیرین می‌شود که خوبیها را مجذور کنیم؛ از کینه‌ها جذر بگیریم؛دوستیها را دو برابر کنیم؛ و محبت را به حــد بینهایت میل دهیم».

آقای ابوالقاسم طباثیان، دبیرریاضی، شهرضا.

در مورد اعداد متناوب یا دوره‌ای، که در شماره ۲۶، تذکــری داده‌ایــم مقالات زیادی به دفتر مجله ارسال شده است، و در شماره ۲۸ به سئوال‌مطرح شده در شماره ۲۶ پــاسخ داده شده است. از آنجائیکه اکثر مقالات‌ارسالی فصل مشترك با یکدیگر دارند، امکان درج همه آنها برایمان میسر نیست، اما، اگر مقاله‌ای در زمینــه اعــداد متناوب به دستمان برسد کــه دارای مطالب جالب و نکات جدیدی بــاشد، مطمئناً نسبت به درج آن اقدام‌خواهیم کرد.

آقای حمیدرضا غفاریان، دانش‌آمــوز سال سوم، مشهد.

توابعی که بر مجموعه اعدادطبیعی تعریف می‌شود مشتق‌پذیر نیستند.زیرا پیوسته نیستند.بنابراین، تعریف‌مشتق برای اینگونه توابع بی‌معنی است.

آقای حمید بهشتــی، آذربایجان شرقی (عجبشیر).

مسئله ارسالــی شمــا در مــورد همنهشتی، بعلت‌سادگی آن، از درج‌آن در مجله معذوریم. پیشنهاد ما این‌است که با مطالعات بیشتر می‌توانید بــه نتایج مهمتری برسید.

آقای محمدرضا محمدی، دانش‌آموز سال چهارم، مشهد.

شما مسئله خود را می‌توانید بــا مثال نقص باطل کنید.

مسئله: آیا حکم ذیل درست است؟

اگر $a \equiv b \pmod m$ و

$c \equiv d \pmod n$ و $(m, n) = P$

آنگاه $a^c \equiv b^d \pmod p$.

جواب، این مسئله منفی است. زیرا،

$9 \equiv 4 \pmod 5$ و $5 \equiv 0 \pmod 5$

$9^5 \equiv 9 \not\equiv 4^0 \pmod 5$

مسئله شما، با مفروضات ارائــه شده و با حکم $a+c \equiv b+d \pmod p$ درست است، برای اطلاعات بیشتر در زمینه نظریه اعداد می‌توانید به کتاب تئوری مقدماتی اعداد، تألیف دکتــر غلامحسین مصاحب مراجعه نمائیــد. همچنین، می‌توانید با استادان دانشگاه مشهد مکاتبه کنید.

خانم زهرا نجفی، اصفهان.

ما، از اینکه محتوای مجله بــرای شما مفید بوده است، خوشحال هستیم و دلیل برقراری $0! = 1$ بخاطر تعریف آن است و در حالت کلی به ازای عدد «هر عدد اول به‌صورت $4n + 1$ را چنین تعریف می‌شود.

$0! = 1$

$(n+1)! = n!(n+1)\ (n \geqslant 0)$

آقای پیمان برازنده، دانشجوی فنی، تهران.

از اظهارنظر شما، در موردمحتوای مطالب مجله، کمال تشکر را داریم. در ضمن، مسائل ارسالی شما را، در بخش مسائل، مورد استفاده قرار خواهیم داد.

آقای نظام اکبری، تهران.

بهتر است،قبل از ارسال‌کارهایتان در زمینه نظریه اعداد، با فردآشنایی در این مورد مشورت نمائید. تعبیر هندسی شما، در مورد حکم‌فرما، که «هر عدد اول به صورت ۱ + 4n را می‌توان به صورت مربعات دو عدد طبیعی نوشت»، برایمان نامفهوم است. توفیق شما را در کارهای علمی آرزومندیم.

ندای یزدان‌پناه، دانش‌آموز سال‌سوم تهران.

بدیهی است که اگر $a=b+1$

آنگاه $b^2-a^2=b+a$.

بنابراین، تفاضل مربعات دو عدد متوالی برابر مجموع آنها است.

آقای ظهورنیا، دانش‌آموز سال سوم، تهران.

ما نیز سال نو را به شما تبریك گفته و از اظهار لطف شما به مجله تشکر می‌کنیم، در ضمن، جمع اعداد در هر مبنایی، ممکن است حاصل عددی با ارقام بیش از یك رقم‌داشته باشد در صورتی‌که در سیستم جبر بولی حاصل یا صفر و یا یك است، البته سعی می‌کنیم مقاله‌ای در زمینه جبر بولی در مجله درج نمائیم.

آقای سید مرتضی ناصری، تهرانی.

مسائل ارسالی در بخش مسائل‌مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در مورد مقاله‌ای برای مجموعه‌های شما را و ناشما را، قبلا مطالبی درج شده در آتیه سعی می‌شود در این‌زمینه نیز مطالبی درج گردد.

آقای محمد. م. ف. تهران.

۱ـ آثار ریاضیدانان‌بزرگ معمولا تحت عنوان مجموعه مقالات جمع‌آوری می‌شود که بعضی از این آثار در کتابخانه‌های دانشگاهها مثلا کتابخانه مؤسسه ریاضیات (تهران، خیابان آیتا... طالقانی شماره ۵۹۹) موجود است.

۲ـ امیدواریم بتوانیم اغلاط‌چاپی و غیر چاپی مجله را کاهش دهیم.

۳ـ مسلماً اداره امور پست‌مربوط به خود آن اداره است.

۴ـ متأسفانه شماره‌های قبلی مجله فعلا نایاب است.

خانم ریتا شکوری، دانشجو، رشت.

لطفاً حل مسایل خود را از اساتید دانشگاه گیلان بخواهید. هیأت‌تحریریه مجله فرصت نوشتن حل مسایلی را که بعضاً به صورت پروژه به آنها داده می‌شود ندارد.

آقای مهدی توکلی افشاری.

مطالب ارسالی شما درباره نگاهی نو بر خطوط مثلثاتی زاویه‌های ترکیبی به مجله رسید. ضمن تشکر از شما امیدواریم که با کوشش وفعالیت مستمر مطالب بهتری را بیابید.

آقای محمد علیپوراسکندانی، دانشجو، تبریز.

از ابرازعلاقه‌شما به مجله‌صمیمانه تشکر می‌کنیم. از مسایل ارسالی که توسط کامپیوتر حل‌شده‌اند، درصورت لزوم استفاده خواهیم کرد.

آقای شایان مختاریان دهکردی، دانش‌آموز، شهرکرد.

اگر شکل را درست رسم کنید تناقض مسئله برطرف می‌شود.

آقای علی‌اصغر هلالی، دانش‌آموز، تهران.

با تشکراز شما،مسئله ارسالی شما را دریافت کردیم. به‌موقع باتغییراتی در صورت آن، مسئله را بنام خودتان درج خواهیم کرد.

آقای رهی موسوی، تهران.

از مسایل ارسالی شما متشکریم. از این پس مسایل‌را همراه باحل‌بفرستید و مأخذ را هم ذکر کنید.

آقای سعید برادر یادی، دانش‌آموز، سلماس.

مسایل مندرج در مجله بیشتر از مجلات و کتب‌خارجی ترجمه می‌شوند. مسئله ۱۲ هم از کتاب توماس برداشته شده است که احتمالا این مسئله در کتابهای دیگران هم وجود دارد. سعی مجله برآن است که مسایل مندرج در آن در جای دیگر درج نشده باشد. اما گاهی این امر ناگزیر پیش می‌آید.

آقای سعید بهنیا، دانش‌آموز، تبریز.

از مسایل ارسالی شما صمیمانه

تشکر می‌کنیم. به‌موقع از آنهااستفاده خواهیم کرد.

آقای علیرضا شبنم، دانش‌آموز، تهران.

با تشکر از مسایل ارسالی‌تان، یادآور می‌شویم که درج مأخذ برای مسایل ضرورت دارد.

آقای ناصر طیوب، دانش‌آموز شیراز.

با تشکر ازشما، ازمسئله ارسالی‌تان استفاده خواهیم کرد.

آقای پارسا زرعیان، تهران.

شما در شکل صفحه ۱۲ از مجله رشد ریاضی شماره ۱۸، EC را که کمانی از دایره به مرکز A و شعاع AC است (نظیر کمان FC از دایره‌ای به مرکز A و شعاع AF) پاره خط موازی با AB انگاشته‌اید و تساوی

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AE}{AB}$$

را نوشته‌اید. این تساوی که مبنای کار شما قرار گرفته، صحیح نیست.

آقای کاظم قنبری، دانشجو، تهران.

از مسایل ارسالی شما متشکریم. ذکر مأخذ مسایل برای درج مجله ضروری است.

آقای رضا نصر، دانش‌آموز، تهران.

با تشکر از شما، از مسایل ارسالی‌تان در صورت لزوم استفاده خواهیم کرد.

آقای هاشم سازگار، مشهد.

اگر چه حدس کاتلان را با شرایط اضافی (رابطه بین x و y و به صورت سنجیده و استفاده از نامساویهای لگاریتمی و توابع نهایی) بیان نموده‌اید، برهان آن خالی از اشکال نیست و درج آن در مجله مفید نمی‌باشد.

آقای محمود حیدرپور میدانی، دانش‌آموز، تبریز.

با تشکر از مسایل ارسالی شما، در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای امید ظهوانیسا، دانش‌آموز، تهران.

بلی، نامساوی کوشی‌اثبات می‌شود. می‌توانید به کتابهای دانشگاهها و یا مجله رشد شماره ۲۱ مراجعه‌کنید که در آنجا این نامساوی از ۹ طریق متمایز به اثبات رسیده است.

آقای احمدجعفری، دانش‌آموز، اهر.

روش ارائه شده به خاطر پیچیدگی دستور آن کاربرد عملی ندارد. اصولا جمع m عدد متوالی یك تصاعد عددی با قدر نسبت یك است که محاسبات دراین‌باره، آنقدر ساده است‌که نیازی به دستورالعمل ندارد.

آقای ابوالحسن آقاجانی، دانش‌آموز، کنگاور.

از ارسال مسایل شما متشکریم. اما درج آنها در مجله بدون ذکر مأخذ مقدور نیست. در ضمن مسایل‌ارسالی خود را همراه حل بفرستید.

آقای سیروس زمانی، دانش‌آموز شیراز.

ضمن تشکر از ارسال مسایل، از آنها در بخش مربوط به مسایل ویژه دانش‌آموزان استفاده خواهیم کرد.

آقای شاهین موسوی میرکلائی، دانش‌موز، مشهد.

با تشکر از شما، حل مسایل شماره‌های مختلف مجله رشد ریاضی‌را دریافت کردیم.

آقای روان‌بخش امیری، دانش‌آموز، سوادکوه.

مسئله‌ای که عنوان کرده‌اید قبلا در مجله رشد چاپ شده است. و تعمیم آن بیمورد است.

مسائل شماره ۳۰

تهیه و تنظیم: محود نصیری

۱ـ تابع درجه سوم $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ با شرط $(a, b, c\in R)\ a^2-3b>3\sqrt{3}$ مفروض است.
ثابت کنید دقیقاً دو خط وجود دارد که هر یك در دو نقطه نقاطع بر منحنی فوق عمود است (خط قائم) و این دو خط در نقطه عطف تابع متقاطع‌اند.

۲ـ اگر $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$، ثابت کنید،

$$\sin 2\alpha \geqslant (\operatorname{tg}\alpha)^{\cos 2\alpha}$$

۳ـ فرض می‌کنیم N مجموعه اعداد طبیعی باشد.
ثابت کنید فقط یك نگاشت f از $N\times N$ به N وجود دارد که به ازای هر $n\,,m\in N$ در سه شرط زیر صدق می‌کند:

$(i)\ f(n\,,m)=f(m\,,n)$

$(ii)\ f(n\,,n)=n$

$(iii)\ (n-m)\,f(n\,,m)=nf(m\,,n-m)\ ,\ n>m$

۴ـ اگر A یك بردار و B و C بردارهای یکانی باشند. نشان دهید

$$[(A+B)\times(A+C)]\times(B\times C)\cdot(B+C)=0$$

($\cdot$ ضرب داخلی و $\times$ ضرب خارجی است)

۵ـ اگر $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}>0$، ثابت کنید

$$a_1 a_2 \cdots a_{n+1}\left(\frac{1}{a_1^n}+\frac{1}{a_2^n}+\cdots+\frac{1}{a_{n+1}^n}\right)\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}.$$

۶ـ ثابت کنید مساحت مثلث فیثاغورثی (مثلث قائم‌الزاویه‌ای‌که اضلاع آن اعداد صحیح‌اند) هرگز نمی‌تواند مربع کامل باشد.

۷ـ الف) ثابت کنید هیچ عدد صحیح ومثبت x وجود ندارد بطوری که $2x^4+1$ مربع کامل باشد.

ب) ثابت کنید فقط به‌ازای $x=1$، $8x^4+1$ مربع‌کامل است.

۸ـ مثلث ABC مفروض است. نقاط D و E و F بترتیب روی اضلاع BC و CA و AB چنان قرار دارند که هرکدام محیط مثلث را نصف می‌کنند، مثلاً $AB+BD=DC+CA$.
ثابت کنید AD، BE و CF همرس‌اند.

۹ـ فرض کنیم A، B و C سه نقطه روی یك دایره باشند. فرض کنیم A_1 (به‌همین ترتیب، B_1 و C_1) نقطه تقاطع مماس درنقطه A (به‌همین ترتیب، B و C) با خطی باشد که از BC (به همین ترتیب، CA و AB) می‌گذرد. ثابت کنید دایره‌های ABB_1، BCC_1 و CAA_1 وخط $A_1B_1C_1$ ازیك نقطه می‌گذرند.

۱۰ـ مثلث ABC که هریك از زوایای‌آن کمتر از 120° است مفروض‌است. روی‌اضلاع مثلث و درخارج آن سه مثلث‌متساوی‌الاضلاع ABF و ACE و BCD را می‌سازیم و AD، BE و CF را وصل می‌کنیم. ثابت کنید: سه پاره‌خط AD و BE و CF مساوی و دریك نقطه P همرس‌اند، و P نقطه‌ای استکه در بین تمام نقاط درون مثلث مجموع فواصلش ازسه رأس مثلث مینیمم است.

اسامی خوانندگانی
که حل مسایل شماره ۲۵ را فرستاده‌اند

تنظیم ابراهیم دارابی

رها زندیفر، دانش‌آموز، از تهران.
۴ ـ ۳ ـ ۱
علیرضا تیزهوش، دانش‌آموز، از خرم‌آباد.
۹
امید ظهوانیا، دانش‌موز، از تهران.
۱۷ ـ ۱۲ ـ ۱۰ ـ ۴
سیروس زمانی، دانش‌آموز، از شیراز.
۱۶ ـ ۱۵ ـ ۱۴ ـ ۱۲ ـ ۱۰ ـ ۸ ـ ۴ ـ ۱
نوشین جهانی، دانشجو، از تهران.
۱۳ ـ ۱۲ ـ ۱۰ ـ ۸ ـ ۶ ـ ۵ ـ ۳ ـ ۴ ـ ۱
هادی بخشایش، از مشهد.
۴ ـ ۳ ـ ۲ ـ ۱
مهدی اسدی، دانشجو، از زنجان.
۱۴ ـ ۱۳ ـ ۱۲ ـ ۱۰ ـ ۸ ـ ۴ ـ ۲ ـ ۱
محمد مهرپویا، دانشجو از شیراز.
۹ ـ ۸ ـ ۷ ـ ۵ ـ ۴
محسن قشلاقی، دانش‌آموز، از اقلید فارس.
۱۱ ـ ۱۰ ـ ۷ ـ ۴
سعید علامه‌نژاد، دانش‌آموز، از شوش.
۱۴ ـ ۱۰ ـ ۵ ـ ۴
مهمد مهدی مقدادی، دانش‌موز، از تهران.
۱۴ ـ ۱۰ ـ ۸ ـ ۴ ـ ۱
اردوان عوض دوانی، دانش‌آموز، از شیراز.
۱۳ ـ ۱۲ ـ ۱۱ ـ ۱۰ ـ ۹ ـ ۸ ـ ۶ ـ ۴ ـ ۳ ـ ۱
المیرا مظلومیان، دانش‌آموز، از شیراز.
۱۱ ـ ۸ ـ ۴
اکبر اصفهانی‌پور، دانش‌آموز، از قم.
۱۳ ـ ۱۲ ـ ۱۱ ـ ۱۰ ـ ۸ ـ ۴
پژمان سوداگری، دیپلمه، از تهران.
۱۲ ـ ۱۰ ـ ۹ ـ ۸ ـ ۴ ـ ۱
مهدی رحیمی دانش‌آموز، از تهران.
۱۶ ـ ۱۳ ـ ۱۰ ـ ۹ ـ ۸ ـ ۴ ـ ۲ ـ ۱
شهروز وجدی دانش‌آموز از زنجان.
۱۴ ـ ۱۳ ـ ۱۲ ـ ۹ ـ ۴ ـ ۱
بهنام قلیچ‌خانی.
۱۲ ـ ۱۰ ـ ۹ ـ ۸ ـ ۴ ـ ۳ ـ ۱

مرتضی طبیانی، دانش‌آموز، از زنجان.
۴
نازنین زمانی، دانش‌آموز.
۴
محمدرضا خدادادی، دانش‌آموز، از فولادشهر.
۱۴ ـ ۱۲ ـ ۸ ـ ۱
رضا حسین‌نژاد، دانشجو، از تهران.
۱۱ ـ ۱۰ ـ ۹ ـ ۸ ـ ۷ ـ ۵ ـ ۴ ـ ۳ ـ ۲ ـ ۱
۱۲ ـ ۱۳ ـ ۱۴ ـ ۱۵
محمد علیپور اسکندانی، از تبریز.
۱۶ ـ ۱۵ ـ ۱۴ ـ ۱۳ ـ ۱۲ ـ ۱۰ ـ ۸ ـ ۴ ـ ۱
۱۷ ـ ۱۸
محمد مهدی امینی، از تهران.
۱۵ ـ ۱۴ ـ ۱۰ ـ ۸ ـ ۶ ـ ۴
داریوش کیا، و احمدرضا شیرزاد، از تهران.
۱۵ ـ ۱۴ ـ ۱۳ ـ ۱۲ ـ ۱۰ ـ ۸ ـ ۵ ـ ۴ ـ ۳ ـ ۱
حسین رنجبر، دانشجو، و سیدجلال طباطبایی از اهواز.
۱۴ ـ ۱۳ ـ ۱۲ ـ ۱۰ ـ ۴ ـ ۳
داود خجسته سالکویه، دانشجو، از لنگرود ـ کومله.
۱۳ ـ ۱۲ ـ ۱۰ ـ ۸ ـ ۴ ـ ۳ ـ ۱
حسن و محمدباقر کفاش امیری، از بابلسر.
۱۴ ـ ۱۲ ـ ۱۰ ـ ۹ ـ ۸ ـ ۶ ـ ۴ ـ ۳ ـ ۲ ـ ۱
آقای رهی موسوی، از تهران.
۱۰ ـ ۸ ـ ۴
آقای صمد جابری، دانش‌آموز، از میانه.
۱۴ ـ ۱۲ ـ ۹ ـ ۸ ـ ۶ ـ ۵ ـ ۴
آقای وفا جبارپور، دانش‌آموز، از ارومیه.
۱۶ ـ ۱۱ ـ ۱۰ ـ ۹ ـ ۸ ـ ۵ ـ ۴ ـ ۳
آقای مسعود کریمی، دانش‌آموز، از اراک.
۸ ـ ۶ ـ ۴
آقای عوض نقی‌پور، دانش‌موز، از تهران.
۱۲ ـ ۱۰ ـ ۸ ـ ۴
آقای‌سعید برادریادی، دانش‌موز، از سماس.
۹ ـ ۸ ـ ۴ ـ ۳
آقای سعید بهنیا، دانش‌آموز، از تبریز.
۴
آقای علیرضا تیزهوش، دانش‌موز، از خرم‌آباد لرستان.
۱۰ ـ ۴
آقای علی ثابت‌القدم، دانشجو، از گچساران.
۱۶ ـ ۱۴ ـ ۹ ـ ۸ ـ ۴ ـ ۳
خانم آزاده بهپور، دانش‌آموز. از شیراز.
ـ ۱۳ ـ ۱۲ ـ ۱۱ ـ ۱۰ ـ ۹ ـ ۸ ـ ۴ ـ ۳ ـ ـ ۲
۱۴ ـ ۱۶
آقای مسعود غفاری، دانشجو، از اصفهان.
۱۲ ـ ۸ ـ ۴ ـ ۳ ـ ۱
آقای حسین پیرهادی، دانش‌آموز ، از تهران.
۱۲ ـ ۱۱ ـ ۱۰ ـ ۸ ـ ۶ ـ ۴ ـ ۱
آقای پیمان برازنده، دانشجو، از تهران.
۱۳ ـ ۱۲ ـ ۱۱ ـ ۱۰ ـ ۹ ـ ۸ ـ ۷ ـ ۴ ـ ۳ ـ ۱
۱۵

بقیه از صفحه ۴۱

۹. فرض کنید G یک گروه باشد، $a \in G$ و $n \in Z$، a^n چنین تعریف می‌شود:

$$a^n = \begin{cases} e & (n=0) \\ a \cdot a^{n-1} & (n \in N) \\ (a^{-1})^{-n} & (-n \in N) \end{cases}$$

(e عضو بی‌اثر G، N مجموعهٔ اعداد طبیعی و Z مجموعهٔ اعداد صحیح است.)

اگر $n \in Z$ و m، ثابت کنید:

(الف) $a \cdot a^m = a^m \cdot a$

(ب) $(a^{-1})^m = (a^m)^{-1}$

(پ) $a^n \cdot a^m = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(ت) $(a^m)^n = a^{mn}$

برهان. اثبات این روابط برای اعداد صحیح نامنفی به استقراء است و برای اعداد صحیح منفی با استفاده از حالتی که اعداد طبیعی هستند. برای نمونه (الف) و (ب) را ثابت می‌کنیم و اثبات (پ) و (ت) را به خوانندگان محول می‌نمائیم.

اثبات (الف). ابتدا گوئیم که (الف) برای ۱ و $m = 0$ برقرار است حال فرض می‌کنیم (الف) به ازاء $m = k \in N$ برقرار باشد یعنی، $a \cdot a^k = a^k \cdot a$. داریم

$a \cdot a^{k+1} =$ [بنابر تعریف توان]

$a \cdot (a \cdot a^k) =$ [بنابر فرض استقراء]

$a \cdot (a^k \cdot a) =$ [شرکت‌پذیری و تعریف توان] $a^{k+1} \cdot a$

بنابراین، (الف) به ازاء هر a و m نامنفی برقرار است. حال فرض می‌کنیم m عدد صحیح نامنفی باشد پس $-m \in N$ و (الف) به ازاء a^{-1} و $-m$ برقرار است یعنی،

$a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-m} = (a^{-1})^{-m} \cdot a^{-1}$،

در نتیجه، بنابر تعریف توان،

$a^{-1} \cdot a^m = a^m \cdot a^{-1}$

با ضرب طرفین با a، یکبار از چپ و بار دیگر از راست، نتیجه حاصل می‌شود.

اثبات (ب). بازهم گوئیم (ب) برای ۱ و $m = 0$ برقرار است. حال فرض می‌کنیم $(a^{-1})^k = (a^k)^{-1}$ (فرض استقراء). داریم

$(a^{-1})^{k+1} =$ [بنابر تعریف توان]

$a^{-1} \cdot (a^{-1})^k =$ [بنابر فرض استقراء]

$a^{-1} \cdot (a^k)^{-1} = (a^k \cdot a)^{-1} =$ [بنابر (الف)]

$(a \cdot a^k)^{-1} =$ [بنابر تعریف توان] $(a^{k+1})^{-1}$.

لذا، (ب) به ازای هر a و به ازای هر عدد صحیح نامنفی برقرار است. حال فرض می‌کنیم m عدد صحیح منفی باشد پس $-m \in N$ و (ب) به ازای a^{-1} و $-m$ به صورت زیر درمی‌آید

$$\left((a^{-1})^{-1}\right)^{-m} = \left((a^{-1})^{-m}\right)^{-1}$$

که از آن، بنابر تعریف توان، نتیجه می‌شود

$(a^{-1})^m = (a^m)^{-1}$.

۱۰. فرض کنید $f(n)$ حاصلجمع n جمله اول دنباله زیر باشد

۰, ۱, ۱, ۲, ۲, ۳, ۳, ۴, ۴, ...

ثابت کنید اگر x و y دو عدد صحیح باشند به طوری که $x > y$، آنگاه به ازای هر عدد اول P، اگر

$$f(x+y) - f(x-y) = P$$

چه شرطی برای x و y به دست می‌آید.

حل. با محاسبات مستقیم به استقراء ثابت می‌شود که

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{4} & n \text{ زوج} \\ \frac{n^2-1}{4} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

از طرفی $x+y$ و $x-y$ از حیث زوجیت یکسانند؛ یعنی اگر یکی فرد (یا زوج) باشد دیگری نیزفرد (یا زوج) است. پس برحسب اینکه $x+y$ (یا $x-y$) فرد یا زوج باشد،

$$f(x+y) - f(x-y) = xy$$

بنابراین $xy = P$ اگر و فقط اگر

$x = 1$ و $y = P$ یا $x = P$ و $y = 1$

اطلاعیه

دربارهٔ نشریات رشد آموزش تخصصی

مجلات رشد آموزش مواد درسی مدارس کشور که بمنظور ارتقاء سطح دانش معلمان و ایجاد ارتباط متقابل میان صاحبنظران، معلمان و دانشجویان با برنامه‌ریزان امور درسی از سوی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش هر سه ماه یکبار ــ چهار شماره در سال ــ منتشر می‌شود در حال حاضر عبارتند از:

۱ ــ آموزش ریاضی ۲۹
۲ ــ آموزش شیمی ۲۶
۳ ــ آموزش جغرافیای ۲۵
۴ ــ آموزش ادب فارسی ۲۵
۵ ــ آموزش زیست‌شناسی ۲۳
۶ ــ آموزش زبان ۲۸
۷ ــ آموزش زمین‌شناسی ۲۰
۸ ــ آموزش فیزیک ۲۵
۹ ــ آموزش معارف اسلامی ۱۲
۱۰ ــ آموزش علوم اجتماعی ۷

دبیران، دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر علاقمندان به اشتراک این مجلاّت می‌توانند جهت دریافت چهار مجلّه درسال مبلغ ۸۰۰ ریال به‌حساب ۹۰۰۵۷ نزدبانک ملّی شعبه‌خردمند جنوبی ـ قابل‌پرداخت‌درکلیهٔ شعب‌بانک ملّی ـ واریز و فیش آن را همراه با فرم تکمیل شده زیر به نشانی تهران، جادّه آبعلی، خیابان سازمان آب بیست‌متری خورشید مرکز توزیع انتشارات کمک آموزشی کدپستی ۱۶۵۹۸ ــ تلفن ۷۷۵۱۱۰ ــ ارسال دارنـد. ضمناً؛ معلمان، کارشناسان، مدیران، پژوهشگران و سایر علاقمندان به امور تعلیم و تربیت جهت آگاهی بیشتر از یافته‌های صاحبنظران می‌توانند با پرداخت مبلغ ۸۰۰ ریال در هر سال ۴ جلد **فصلنامه تعلیم و تربیت** دریافت نمایند.

مجلات‌رشدتخصصی‌در مراکز استان در کتابفروشیهای زیر و سایر شهرستانها در فروشگاههای معتبرمطبوعات‌بصورت فروش‌آزادعرضه‌می‌شود

تهران: انتشارات مدرسه ــ اوّل خیابان ایرانشهر شمالی
اهواز: کتابفروشی ایرانپور زیتون کارمندی خیابان کمیل بین زاویه و زهره پلاک ۲۰
اصفهان: کتابفروشی مهرگان چهار باغ ابتدای سید علی خان
ارومیه: کتابفروشی زینالپور نمایندگی و خبرنگاری روزنامه
اراک: کتابفروشی گنج دانش بازارچه امیرکبیر
بندرعباس: کتابفروشی مالوک خیابان سید جمال الدین اسدآبادی
باختران: کتابفروشی دانشمند خیابان مدرس مقابل پارکینگ شهرداری
خرم‌آباد: کتابفروشی آسیا خیابان شهدا شرقی
رشت: کتابفروشی فرهنگستان خیابان نامجو جنب دانشگاه
زنجان: کتابفروشی شهید بهشتی خیابان آیت‌ا... طالقانی
سنندج: کتابفروشی شهریار خیابان فردوسی
ساری: شرکت ملزومات و معارف خیابان انقلاب روبروی اداره برق داخل کوچه
شیراز: پیام قرآن میدان شهدا جنب اداره آموزش و پرورش مرکز فرهنگی
کرمان: فرهنگ‌سرای زمین پارک مطهری
مشهد: انتشارات آستان قدس رضوی خیابان امام خمینی روبروی باغ ملی
یاسوج: کتابفروشی فرهنگ جنب سینما دنا خیابان شهید هرمزپور.

*** دانشجویان مرکز تربیت معلم می‌توانند با ارسال فتوکپی کارت تحصیلی خود از ۵۰٪ تخفیف برخوردار شوند.**

فرم اشتراک مجلات رشد تخصصی

اینجانب با ارسال فیش واریز مبلغ ۸۰۰ ریال. متقاضی اشتراک یکسالهٔ مجلهٔ رشد آموزش هستم.

نشانی دقیق متقاضی: استان شهرستان خیابان

کوچهٔ پلاک کُدپستی تلفن

Contents

Roshd, Magazine of Mathematical Education, Vol IIX No.30, Summer 1991 Mathematics Section, 274 BLDG – No. 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave., Tehran – Iran.

A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.


قابل توجه
دبیران و
دانشجویان
رشد آموزش زمین شناسی
رشد آموزش جغرافیا
رشد آموزش زیست شناسی
رشد آموزش فیزیک
رشد آموزش شیمی
رشد آموزش ادب فارسی
رشد آموزش ریاضی
رشد آموزش معارف اسلامی
فصلنامه
تعلیم و تربیت
نشریه
علمی کاربردی
مرکز تحقیقات آموزشی
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش
سال هفتم ـ شماره ۱ ـ بهار ۱۳۷۰ ـ شماره مسلسل ۲۵
رشد
رشد آموزش زبان
FLT
آیا شما
مجلات
رشد تخصصی
مخصوص دبیران و دانشجویان را که هر
سه ماه یکبار در زمینه آموزش دروس
دبیرستانی منتشر می شود می خوانید؟