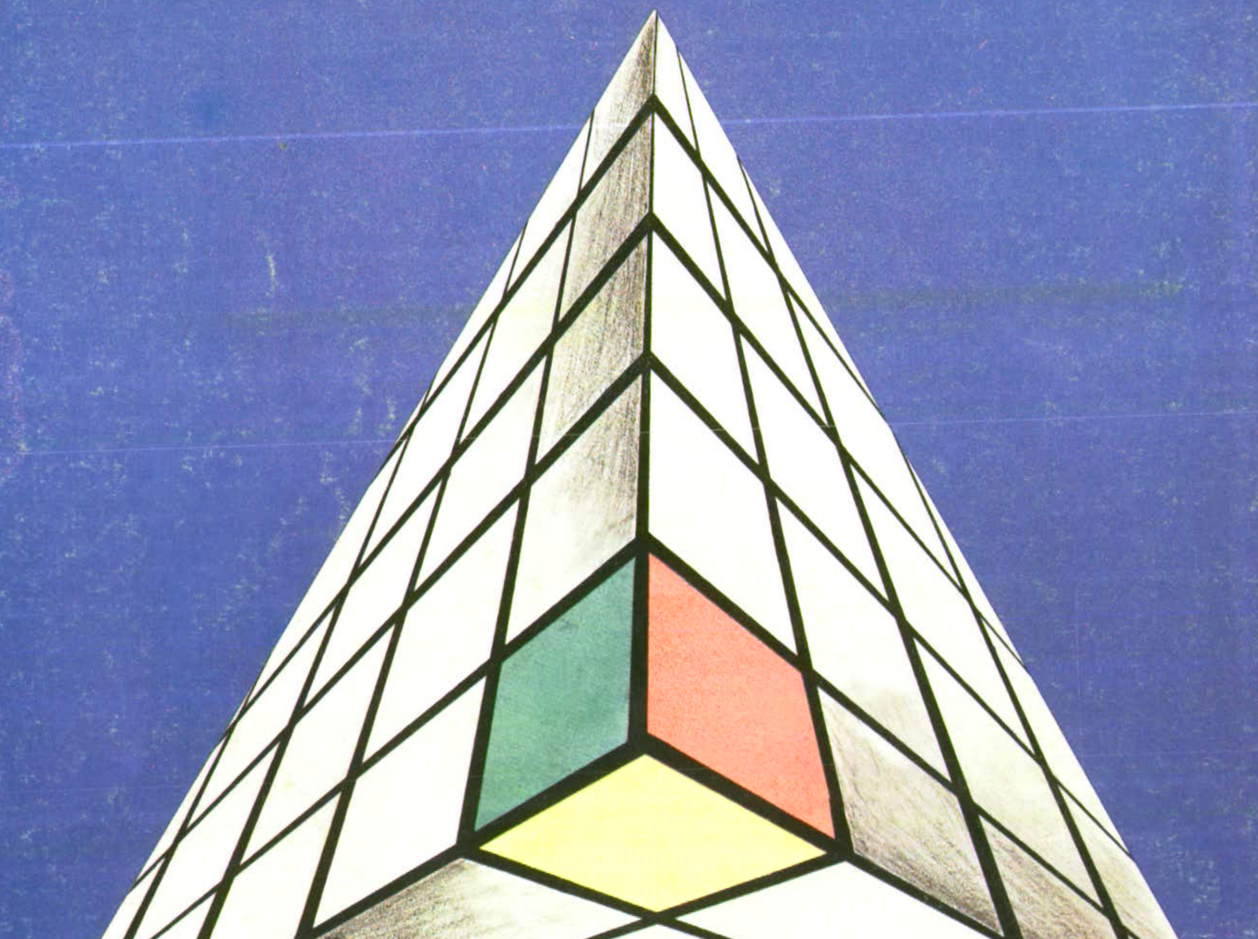
رشد آموزش ریاضی

سال هشتم ـ بهار ۱۳۷۰ ـ شماره مسلسل ۲۹

بها: ۲۰۰ ریال



بسم‌الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یکبار از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی منتشر می‌شود هدف از انتشار این مجله اعتلای دانش ریاضی دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلّم است. علاوه بر این ایجاد ارتباط متقابل بین معلّمین ریاضی و دفتر تحقیقات، به منظور تبادل تجارب، ارائه روشهای جدید آموزش ریاضی، معرفی جنبه‌های تاریخی، فلسفی، کاربردی ریاضیات در سطح پیش دانشگاهی است. هیأت تحریریه از مشارکت و همکاری همهٔ علاقه‌مندان بویژه دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان در ارائه مقالاتی در زمینه‌های زیر استقبال می‌کند:

الف) آموزش ریاضی (طرح و بررسی آموزش ریاضی، بویژه آموزش ریاضی در دوره‌های پیش دانشگاهی).

ب) تاریخ ریاضی (مشتمل بر سیر تحول مفاهیم ریاضی، شرح و احوال ریاضیدانان و کارهای علمی آنها، بویژه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی).

ج) فلسفه ریاضی (تبیین مفاهیم ریاضی، ریاضیات چیست، بررسی مکاتب ریاضی، بررسی ارتباط تاریخ و فلسفه ریاضی).

ریاضی کاربردی (مشتمل بر مباحثی در زمینه‌های آنالیز عددی، کامپیوتر و برنامه‌ریزی، تحقیق در عملیات، آمار و احتمال).

د) سایر مباحث ریاضی (مشتمل بر مقالات مختلفی در زمینه‌های مختلف، ارائه راه‌حلهای مختلف برای مباحث ریاضی، ارائه مسائل نمونه).

رعایت نکات زیر در مورد مقالات ارسالی ضروری است:

۱) مقالات ارسالی باید در چهارچوب اهداف فوق و با سبکی مشابه با سبک مقالات چاپ شده در رشد ریاضی باشد و در سطحی عرضه شوند که ضمن داشتن محتوی مطلوب دارای کیفیت عرضه مطلوب هم باشند؛

۲) مقالات باید با خط خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) و به صورت یک سطر در میان و با در نظر گرفتن جای کافی در حاشیه تهیه شود و صفحات به طور دقیق شماره‌گذاری شود؛

۳) فهرست مراجع مقاله به طور کامل و در دو قسمت فارسی و خارجی و به ترتیب الفبایی و طبق استاندارد مقالات علمی درج شود؛

۴) مقالات ترجمه شده از زبانهای خارجی همراه با متن اصلی ارسال شود؛

۵) مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور به چاپ رسیده باشد؛

۶) رد یا قبول و حک و اصلاح و ویراستاری مقالات به عهدهٔ هیأت تحریریه است.

رشد آموزش ریاضی

سال هشتم ـ بهار ۱۳۷۰ ـ شماره مسلسل ۲۹

نشریهٔ گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تلفن ۴ ـ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۵۰)

سردبیر: دکتر محمدحسن بیژن‌زاده

مدیر داخلی: میرزا جلیلی

مسوول هماهنگی و تولید: فتحا... فروغی

صفحه‌آرا و رسام: محمد پریسای

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر دانش‌پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. جهت ارتقاء کیفی آن نظرات ارزنده خود را به صندوق پستی تهران ۳۶۳ ـ ۱۵۸۵۵ ارسال فرمائید.

فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

همانگونه که به اطلاع عموم رسیده است کلیات طرح نظام جدید آموزش متوسطه توسط شورای عالی انقلاب فرهنگی به تصویب رسیده‌است. نسخه‌ای ازآن نیز در تاریخ ۱۳۶۹/۱۰/۳۰ به کلیه دانشگاهها ابلاغ شده است.

شکی نیست که نظام آموزش متوسطه فعلی از نارسائیهای فراوانی رنج می‌برد. آخرین تغییر نظام آموزش متوسطه در سالهای ۱۳۵۳ به‌بعد صورت گرفت. تا پیش از آن، نظام آموزش متوسطه به دو دورهٔ سه‌ساله تقسیم می‌شد که در پایان دوره سه‌ساله اول گواهی پایان تحصیلات‌سیکل اول و در پایان تحصیلات دوره سه‌ساله دوم گواهی پایان تحصیلات متوسطه به‌قبول‌شدگان اعطا می‌شد.

تغییرات انجام‌گرفته در سالهای دههٔ پنجاه هم ازحیث شکل و هم ازجهت‌محتوا تغییرات‌عمده‌ای به‌حساب می‌آمد در اینجا قصدمان این نیست که به نقد و بررسی شیوهٔ تغییر نظام، نحوهٔ اجرای آن و محتوای برنامه‌های تحصیلی آن بپردازیم. معهذا باید اذعان داشت که گرچه محتوای برنامه‌های‌قبلی کارآیی چندانی نداشت و لزوماً می‌بایست تغییر می‌نمود، به‌اعتراف بسیاری از دست‌اندرکاران آن زمان، محتوای آموزشی جایگزین شده چندان هم حساب شده نبوده است.

غالب صاحبنظران نظام آموزش فعلی متوسطه را نیز فاقد محتوای متناسب با نیازهای کشور و آموزش عالی می‌دانند. مهمترین ضعف نظام آموزش فعلی ضعف کیفی آنست. عوامل تقویت و رشد استعدادها در دانش‌آموزان، که از اهم اهداف آموزشی است، آنگونه که شایسته است

مورد توجه عملی واقع نشده است. رشد و گسترش استعدادهای فطری دانش‌آموزان هم ازآغاز ورود به‌مدرسه و سالهای قبل از آن، پیش از آنکه تابع نظام و الگوی ظاهری نظام تحصیلی باشد به **محتوای برنامه تحصیلی** بستگی بیشتری دارد. منظور از برنامه تحصیلی نه‌فقط محتوای‌درسی، بلکه‌نحوهٔ ارزشیابی‌دانش‌آموزان، ارزشیابی معلمین و مدیران، برخوردها و سئوالات‌کلاسی، روش‌های تدریس، فضای آموزشی و شکل‌کلاسی، مشارکت وهمکاری والدین با مدرسه، بازرسی آموزشی، ارزیابی کتب و منابع درسی، و تربیت معلمان و دبیران را شامل می‌شود.

در نظام‌های آموزشی کشورهای پیشرفته نه‌تنها تربیت نیروهای متخصص و ماهر مدنظر است بلکه بالاتر از آن تربیت نیروهای محقق بیشتر شایان توجه می‌باشد. روش‌های آموزشی و **یادگیری تحقیق‌گونه** در همهٔ سطوح مقاطع تحصیلی جوهره همه فعالیت‌های آموزشی را تشکیل می‌دهد.

مهمترین وجه تمایز نظام آموزشی جدید متوسطه در شکل‌گیری آن و نظام واحدی دروس تحصیلی است. البته باید پذیرفت که نظام آموزشی واحدی از قابلیت و انعطاف‌پذیری خاصی برخوردار است که نظام فعلی فاقد آنست. دورهٔ پیش‌بینی شده پیش‌دانشگاهی نیز چنانچه با هماهنگی و همگامی وزارتین آموزش و پرورش و فرهنگ و آموزش عالی به‌نحو حساب‌شده‌ای برنامه‌ریزی و اجرا گردد مزیت دیگری بر نظام فعلی به‌شمار می‌آید.

معهذا چنانچه در محتوای آموزشی قابل ارائه، شیوه‌های آموزشی و یادگیری، شکل فضای آموزشی وشکل کلاسی، تربیت معلمین و دبیران مجرب و محقق تجدید نظر اساسی به‌عمل نیاید ارتقاء کیفی آموزش متوسطه نظری و فنی همانگونه که در مادهٔ ۱ این طرح بیان شده است به منصهٔ ظهور نخواهد رسید.

امیدواریم همانگونه که در اهداف این طرح اساسی و بنیادین ذکر شده است باپی‌گیری همهٔ مسئولین امر جزئیات اجرایی آن به‌نحوی تنظیم گردد تا موفقیت طرح را در رسیدن به اهداف آن تضمین نماید.

برهمهٔ متخصصین تعلیم و تربیت، معلمین و دانشگاهیان دلسوز فرض است که تا ضمن اظهارنظر و ارائه پیشنهادهای سازنده خود، مسئولین امر را در انجام این مهم یاری کنند.

سردبیر

گزارش شرکت تیم المپیاد ریاضی جمهوری اسلامی ایران در مسابقات جهانی المپیاد ریاضی سال ۱۳۶۹

دکتر اسدا... رضوی

مسابقات جهانی المپیاد ریاضی در سال ۶۹ در پکن پایتخت کشور چین از ۶۹/۴/۱۷ لغایت ۶۹/۴/۲۸ برگزار شد. اعضاء تیم جمهوری اسلامی ایران در این مسابقات عبارت بودند از:

وحید توسلی، حمیدرضا داودی، علی‌رجائی، آرش رستگار، پیمان کسائی و بهرنگ نوحی. ساعت ۱۹ روز یکشنبه ۶۹/۴/۱۷ به‌اتفاق سرپرستان تیم عازم پکن محل برگزاری مسابقات شده و در ساعت ۷ صبح روز دوشنبه ۶۹/۴/۱۸ به فرودگاه پکن وارد شدیم. فرودگاه کاملا خلوت بود، در گمرک فرودگاه مورد استقبال برادر ملکوتیان از طرف سفارت جمهوری اسلامی ایران در پکن قرار گرفتیم. راهنماهائی از طرف کمیته برگزارکننده نیز در فرودگاه حضور داشتند که موجب تسهیلات درامر تشریفات گمرکی شدند. آقای جامائو راهنمای دانش‌آموزان به‌استقبال تیم آمده بودند، ایشان دانشجوی زبان فارسی در دانشگاه پکن بودند و قبلا به‌ایران نیز سفر کرده و مدتی در تهران بوده‌اند. با راهنمائی ایشان به هتل جیمن (Jimen Hotel) محل اقامت موقت دانش‌آموزان و سرپرست دوم هدایت نمودند. لازم به توضیح است که دانش‌آموزان از ۶۹/۴/۲۰ در خوابگاه مؤسسه زبان پکن اسکان داده شدند این خوابگاه دارای امکانات معمول در

حد متوسط بود و جنبه مثبت و خوب آن اختصاص دادن چند میز در یک طبقه سلف سرویس آن به دانش‌آموزان مسلمان بود که در غذاهای آن رعایت شرع مقدس اسلام شده بود پس از استقرار آنان به هتل فراگرانت هیل (Fragrant Hill) محل اقامت سرپرستان تیم‌ها و تشکیل جلسات هیأت داوران رفتم. این هتل در تپه‌ای از گیاهان خوشبو قرار دارد که بیش از ۵۰ کیلومتر با پکن فاصله داشت. پس از استقرار در دومین جلسه هیأت داوران شرکت نمودم، اولین جلسه آن صبح روز قبل تشکیل شده بود و ۳۲ سؤال که از بین سؤال‌های رسیده انتخاب‌نموده بودند در اختیار سرپرست تیم‌ها گذارده بودند، هیأت داوران از سرپرست تیم‌ها و هیأت رئیسه تشکیل شده‌است.

در این مسابقات ۵۴ کشور از سراسر دنیا شرکت کرده بودند که اسامی آنها به ترتیب الفبا بشرح ذیل است.

۱ـ آرژانتین	۱۹ـ تایلند	۳۷ـ کلمبیا
۲ـ آمریکا	۲۰ـ ترکیه	۳۸ـ کوبا
۳ـ آلمان‌شرقی	۲۱ـ تونس	۳۹ـ کویت
۴ـ آلمان‌غربی	۲۲ـ چک‌واسلواکی	۴۰ـ لهستان
۵ـ اسپانیا	۲۳ـ چین	۴۱ـ لوکزامبورگ
۶ـ استرالیا	۲۴ـ رژیم‌اشغالگرقدس	۴۲ـ ماکائو
۷ـ اطریش	۲۵ـ رومانی	۴۳ـ مجارستان
۸ـ الجزایر	۲۶ـ ژاپن	۴۴ـ مغرب
۹ـ اندونزی	۲۷ـ سنگاپور	۴۵ـ مغولستان
۱۰ـ انگلستان	۲۸ـ سوئد	۴۶ـ مکزیک
۱۱ـ ایتالیا	۲۹ـ شوروی	۴۷ـ نروژ
۱۲ـ ایران	۳۰ـ فرانسه	۴۸ـ نیوزلند
۱۳ـ ایرلند	۳۱ـ فنلاند	۴۹ـ ویتنام
۱۴ـ ایسلند	۳۲ـ فیلیپین	۵۰ـ هلند
۱۵ـ بحرین	۳۳ـ قبرس	۵۱ـ هندوستان
۱۶ـ برزیل	۳۴ـ کانادا	۵۲ـ هنگ‌کنگ
۱۷ـ بلغارستان	۳۵ـ کره‌جنوبی	۵۳ـ یوگسلاوی
۱۸ـ پرتغال	۳۶ـ کره‌شمالی	۵۴ـ یونان

هیأت داوران برای انتخاب شش سؤال نهائی مسابقات پنج جلسه در سه روز متوالی تشکیل داد که طی آنها بعضی از سؤالات داده شده حذف و برخی مورد تائید قرار گرفتند علت حذف سؤال‌ها عموماً نو نبودن، فوق‌العاده ساده یا مشکل بودن و در مجموع متنوع نبودن می‌باشد. ضمناً سعی بر این است که در همه زمینه‌ها سؤال داده شود بدین معنی یک یا دو سؤال از هندسه، نظریه اعداد، ترکیبات، آنالیز و همچنین اخیراً سؤال‌های الگوریتمی انتخاب شوند. در سال جاری مدیریت هیأت داوران از مدیریت جامع وقاطعی برخوردار نبود به‌همین علت علیرغم اینکه در جلسه ماقبل آخر (چهارم) ده‌سؤال انتخاب شده بود که از میان آنها شش سؤال نهائی انتخاب شود در جلسه آخر نسبت به شش سؤال دیگر رأی‌گیری به‌عمل آمد و رأی آورد و سپس با تغییر جزئی در دو سؤال سؤال‌های نهائی انتخاب شد. لازم به توضیح است که از آنجائی که کشورهای غربی در هندسه نسبتاً‌ضعیف هستند مسائل هندسه نسبتاً ساده رأی بیشتری می‌آورد. بالاخره شش سؤال نهائی به پنج زبان رسمی المپیاد ریاضی‌یعنی‌انگلیسی، فرانسه، آلمانی، روسی واسپانیولی ترجمه و تنقیح شد و با توجه به این نسخه‌ها سؤالات توسط سرپرست تیم‌ها به زبان مادری کشورهای شرکت‌کننده ترجمه و در اختیار کمیته برگزارکننده جهت‌تکثیر قرار گرفت.

جلسه افتتاحیه درساعت ۱۵روز دوشنبه ۶۹/۴/۲۰ مصادف با عید سعید غدیر خم با شرکت کلیه دانش‌آموزان، سرپرستان، ناظران تشکیل شد. در این جلسه لیوبین معاون وزارت آموزش و پرورش از طرف کمیته برگزارکننده به‌شرکت‌کنندگان خیرمقدم گفت.

روزهای سه‌شنبه ۶۹/۴/۲۱ و چهارشنبه ۶۹/۴/۲۲ اختصاص به امتحانات داشت که هر روز دانش‌آموزان ظرف ۴/۵ ساعت به ۳ سؤال پاسخ گفتند طبق معمول همه‌ساله دانش‌آموزان در صورتی که اشکالی درباره صورت مسائل داشتند حق داشتند ظرف نیم‌ساعت اول جلسه امتحان کتباً سؤال نمایند و این سؤال پس ازطرح در هیأت داوران و تعیین جواب به اطلاع دانش‌آموز می‌رسید. موضوعی که در رابطه با امتحانات با سالهای گذشته تفاوت داشت این بود که کمیته برگزارکننده مسابقات تصمیم گرفته بود که چرکنویس دانش‌آموزان‌را در اختیار سرپرستان تیم‌ها قرار ندهد و آنها را از بین ببرد که این تصمیم مورد اعتراض شدید سرپرستان قرار گرفت و با توجه به‌اینکه در مسابقات المپیادسالهای قبل رسم بر این بوده است که کلیه اوراق امتحانی در اختیار سرپرستان قرار گیرد و حتی مورد قضاوت قرار گیرد و مضافاً اینکه از برخی اوراق امتحانی مشخص بود که فقط قسمت دوم برخی از سؤالات نوشته شده است لهذا کمیته برگزارکننده در تصمیم خود تجدیدنظر کرده و چرکنویس‌ها را نیز دراختیار سرپرستان قرار داد.

روزهای پنجشنبه ۶۹/۴/۲۳ و جمعه ۶۹/۴/۲۴ به تصحیح اوراق و توافق روی نمرات سؤالات‌اختصاص داشت و سؤالات ابتدا توسط سرپرستان تصحیح می‌شد و سپس با مصححین که از طرف کمیته برگزارکننده تعیین شده بودند طبق یک برنامه تنظیم شده درباره نمره هر سؤال به توافق می‌رسیدند و در صورتی که نمی‌توانستند به‌توافق برسند هیأت داوران تصمیم می‌گرفت. مصححین

غالباً از اساتید دانشگاه‌ها انتخاب شده بودند ولی سرعت انتقال کافی در فهم راه‌حل‌های جدید نداشتند.

نتیجه دانش‌آموزان تیم جمهوری اسلامی ایران بشرح ذیل است.

بهرنگ نوحی	۲۶ نمره
علی رجائی	۲۶ نمره
پیمان لکسائی	۲۵ نمره
آرش رستگار	۲۴ نمره
وحید توسلی	۱۲ نمره
حمیدرضا داودی	۹ نمره

رتبه	۵۰	مدال نقره
رتبه	۵۳	مدال نقره
رتبه	۵۸	مدال نقره
رتبه	۶۶	مدال نقره
رتبه	۲۰۵	---
رتبه	۲۴۴	---

در جلسه هیأت داوران که روز شنبه ۶۹/۴/۲۵ تشکیل شد در مورد توزیع مدالهای طلا و نقره و برنز بحث شد و قرار شد که دانش‌آموزانی که نمره ۳۴ یا بالاتر آورده‌اند مدال طلا و آنان که ۲۳ تا ۳۳ آورده‌اند مدال نقره و دانش‌آموزانی که ۱۶ تا۲۲ آورده‌اند مدال برنز بگیرند. به این ترتیب تیم جمهوری اسلامی‌ایران با لطف پروردگار و تلاش دانش‌آموزان با به دست آوردن ۱۲۲ نمره و ۴ مدال نقره رتبه چهاردهم را بین ۵۴ کشور به‌دست آورد.

در جلسه پایانی هیأت داوران درخواست شد که اطلاعاتی درباره موقعیت و وضعیت شغلی دانش‌آموزان شرکت‌کننده درالمپیادهای سالهای قبل برای هیأت‌اجرائی المپیاد ریاضی ارسال شود. همچنین مطرح شد که آلمان در سال گذشته برای برگزاری المپیاد ریاضی ۱/۳ میلیون مارك هزینه کرده است و کشورهائی که مایلند مسابقات المپیاد ریاضی جهانی‌را برگزار کنند لازم‌است چهارسال قبل رسماً اعلام آمادگی نمایند. کشورهائی که تا کنون اعلام آمادگی نموده‌اند به شرح ذیل است.

۱۳۷۰	سوئد
۱۳۷۱	شوروی
۱۳۷۲	ترکیه
۱۳۷۳	مغولستان
۱۳۷۴	کانادا
۱۳۷۵	برزیل
۱۳۷۶	انگلستان
۱۳۷۷	—
۱۳۷۸	رومانی
۱۳۷۹	کره‌جنوبی
۱۳۸۰	آمریکا

در این جلسه سرپرست تیم سوئد رسماً از کشورهای شرکت‌کننده برای سال ۱۳۷۰ (۱۹۹۱) دعوت نمود و اعلام کرد که سی و دومین المپیاد ریاضی جهانی از ۷۰/۴/۲۱ لغایت ۷۰/۵/۱ در سیگتونا در کشور سوئد برگزار خواهد شد.

درحاشیه‌مسابقات با کلود دشام (Claude Deschamps) سرپرست تیم فرانسه در رابطه با برنامه‌های آموزش ریاضی در کشور فرانسه و کارهای انجام شده در این مورد مذاکره شده و ایشان اعلام آمادگی نمودند که هرگونه اطلاعی در این مورد را در اختیار برنامه‌ریزان آموزش ریاضی در جمهوری اسلامی ایران قرار دهند. ضمناً هدایائی که توسط دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش تهیه شده بود تقدیم سرپرستان تیم‌ها شد و مورد توجه آنان قرار گرفت.

در این دوره از مسابقات کشورهای چین، شوروی، آمریکا، رومانی و فرانسه مقامهای اول تا پنجم را به دست آوردند. رتبه ۵۴ کشور شرکت‌کننده و تعداد مدالهای کسب‌شده و نمرات دانش‌آموزان تیم‌ها که‌توسط برادر آقای خانبان (از دانش‌آموزان المپیاد ریاضی ۱۳۶۷) تهیه شده ضمیمه است.

در طول مسابقات دانش‌آموزان و سرپرستان تیم‌ها از اماکن تاریخی و مذهبی و همچنین دیوار بزرگ چین دیدن کردند.

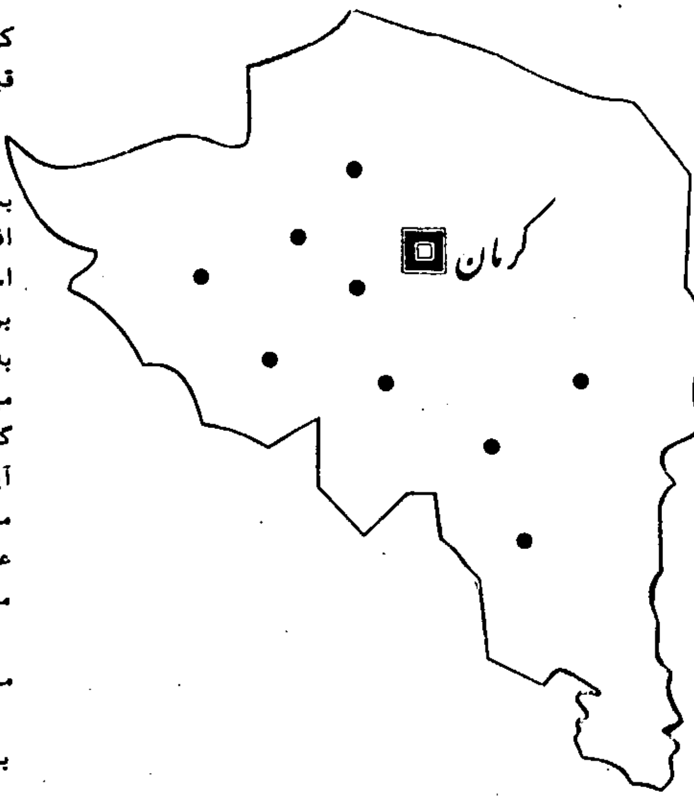
در آخرین روز مسابقات آقای لی‌تای‌یینگ وزیر آموزش و پرورش خلق چین با سرپرست تیم‌ها ملاقات خصوصی داشتند و در این دیدار در رابطه با مسابقات المپیاد ریاضی و آینده آن صحبت شد و ایشان ضمن ابراز خیرمقدم برگزاری چنین مسابقاتی را در پیشبرد علوم و تبادل افکار کشورها مفید دانستند.

در آخرین روز اقامت ما جناب آقای‌بختیاری کاردار محترم سفارت جمهوری اسلامی ایران در پکن تیم را به محل سفارت دعوت نمودند و موفقیت دانش‌آموزان را به آنان تبریك گفتند و تیم را تا فرودگاه بدرقه نمودند. در اینجا شایسته است از اعضاء سفارت جمهوری اسلامی ایران در پکن به‌سبب همکاری و بذل توجه آنان در طول اقامت تیم در پکن صمیمانه قدردانی و سپاسگزاری‌شود.

بالاخره در نیمه‌شب ۶۹/۴/۲۸ وارد فرودگاه مهرآباد تهران شده و مورد استقبال صمیمانه برادران مسئول دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش و خانواده محترم دانش‌آموزان قرار گرفتیم.

جدول امتیازات و مدالها

1	CHN	6	5	1	0	230	42	42	41	36	36	33
2	USS	6	3	2	1	193	42	40	40	27	25	19
3	USA	6	2	3	0	174	39	35	33	32	23	12
4	ROM	6	2	2	2	171	36	34	32	29	22	18
5	FRA	6	3	1	0	168	42	36	34	28	15	13
6	HUN	6	1	3	2	162	34	33	29	24	22	20
7	GDR	6	0	4	2	158	33	30	27	25	22	21
8	CZE	6	0	5	1	153	33	30	26	24	24	16
9	BUL	6	1	4	1	152	38	29	23	23	23	16
10	UNK	6	2	0	2	141	40	39	19	18	13	12
11	CAN	6	0	3	1	139	32	29	28	20	15	15
12	FRG	6	0	2	4	138	31	26	21	21	21	18
13	ITA	6	1	1	4	131	36	23	22	17	17	16
14	IRA	6	0	4	0	122	26	26	25	24	12	9
15	AUS	6	0	2	4	121	26	23	20	18	18	16
16	AUT	6	0	1	4	121	29	22	20	18	17	15
17	IND	6	1	1	2	116	38	25	20	17	12	4
18	NOR	6	0	3	1	112	27	25	24	16	13	7
19	PRK	6	0	1	3	109	26	22	22	18	11	10
20	JAP	6	0	2	1	107	27	25	22	14	10	9
21	POL	6	0	2	1	106	31	29	16	13	10	7
22	HKG	6	0	0	4	105	22	19	19	18	14	13
23	VIE	6	0	1	3	104	24	19	19	16	15	11
24	BRA	6	1	0	2	102	37	20	18	13	7	7
25	YUG	6	0	1	2	98	23	20	18	14	13	10
26	ISA	6	0	1	3	95	31	19	18	16	8	3
27	SIN	6	0	0	2	93	18	17	15	15	14	14
28	SWE	6	0	1	2	91	23	19	17	12	10	10
29	NET	6	0	1	2	90	24	18	16	13	10	9
30	COL	6	0	1	2	88	23	21	21	9	9	5
31	NZL	6	0	0	2	83	20	16	15	12	11	9
32	ROK	6	0	1	1	79	24	17	15	12	7	4
33	THA	6	0	0	2	75	20	16	11	11	9	8
34	TUR	6	0	0	1	75	16	15	13	12	10	9
35	SPA	6	0	0	0	72	15	14	14	13	12	4
36	MOR	5	0	1	0	71	29	15	10	9	8	
37	MEX	6	0	0	1	69	19	14	12	9	9	6
38	ARG	6	0	0	1	67	16	14	13	12	7	5
39	CUB	6	0	0	1	67	16	13	11	10	10	7
40	BAH	6	0	0	0	65	14	14	13	12	9	3
41	IRE	6	0	0	1	65	16	15	13	11	9	1
42	HEL	6	0	0	1	62	16	15	12	9	5	5
43	FIN	6	0	0	1	59	18	13	12	9	5	2
44	LUX	2	1	0	1	58	36	22				
45	TUN	4	0	1	1	55	25	18	7	5		
46	MON	6	0	0	0	54	14	13	11	8	6	2
47	KUW	4	0	0	1	53	17	15	13	8		
48	CYP	4	0	0	1	46	19	10	9	8		
49	PHI	6	0	0	1	46	16	8	7	5	5	5
50	POR	6	0	0	0	44	12	10	8	7	5	2
51	INA	6	0	0	0	40	10	9	8	6	5	2
52	MAC	6	0	0	0	32	11	9	5	3	2	2
53	ICE	3	0	0	1	30	20	5	5			
54	ALG	4	0	0	0	29	14	6	5	4		



هشتمین المپیاد ریاضی کشور ۲۱-۱۹ بهمن‌ماه ۱۳۶۹ کرمان

تنظیم از: میرزا جلیلی

امسال نیز به حول و قوهٔ الهی، مسابقات ریاضی کشوری را با استفاده از تجارب گسترده و فراوان سالهای قبل و با شرکت ۲۰۰ نفر از دانش‌آموزان ممتاز رشته ریاضی و حضور اعضاء کمیته مسابقات، اساتید، کارشناسان و مسئولین در کرمان برگزار کردیم. جای بسی خوشوقتی است که اولا این مسابقات در کشور جا افتاده است و به صورت یك جنبش علمی میهنی درآمده است، که هم دانش‌آموزان به آن توجه خاص دارند و برای برگزاری آن روزشماری می‌کنند و هم مسئولین ودبیران به آن بها داده و در مراحل برگزاری آن علاقه نشان می‌دهند و روی آن سرمایه‌گذاری می‌کنند. چه سرمایه‌گذاری از این بهتر، «توجه به تربیت نوابغ و دانشمندان آیندهٔ کشور»، ارزش و احترامی که مسئولین برای این مسابقات قائل می‌شوند، ارزش و احترامی است که به علم و عالم گذاشته می‌شود که این خود مورد توجه خاص مقامات بلندپایه جمهوری اسلامی است.

همانطور که خوانندگان محترم مستحضر هستند، مسابقات ریاضی کشور در سه مرحله انجام می‌پذیرد.

مرحله اول: انتخاب دانش‌آموزان‌ممتاز هردبیرستان با توجه به معدل نمرات ریاضی که برای دانش‌آموزان سال سوم ۱۹ و برای کلاس چهارم ۱۷ است. شناسایی این دانش‌آموزان به‌وسیله هر منطقه و معرفی آنها به استان جهت شرکت در مرحله دوم.

مرحلهٔ دوم: مرحلهٔ دوم مسابقات، همه ساله در اوائل آذرماه در مراکز استانها و تهران برگزار می‌گردد و امسال این مسابقات با شرکت قریب ۳۰۰۰ نفر دانش‌آموز در روز جمعه ۲ آذر برگزار گردید.

سئوالات مرحله دوم سراسری است و به وسیلهٔ کمیته مسابقات ریاضی دانش‌آموزی طرح می‌شود و از طریق دفتر تحقیقات یك هفته قبل از برگزاری امتحانات تحویل مسئولین امتحانات استانها می‌گردد. اداره‌جلسات استان و تصحیح اوراق این مرحله به عهدهٔ استانها می‌باشد به جز تهران که اوراق دانش‌آموزان در ستادی که در دفتر تحقیقات تشکیل می‌شود با استفاده از دبیران تهران تصحیح می‌گردد. در ضمن ۱۰٪ اوراق دانش‌آموزان استانها نیز که سطح نمرات آنها بالاست برای تصحیح مجدد به تهران ارسال می‌شود و این اوراق به وسیلهٔ همان ستاد تجدیدنظر می‌گردد. و از بین داوطلبان ۲۰۰ نفر برای مرحله سوم انتخاب می‌شوند.

مرحله سوم: برگزاری این مرحله از مسابقات همه ساله در دههٔ مبارکهٔ فجر انجام می‌گیرد و دانش‌آموزان مسابقات را با جشن و شادی و سرور شهر و مردم برگزار می‌کنند.

مسابقات کرمان: همان‌طور که در مقدمه آمد،

امسال مرحله سوم یا مرحله نهایی مسابقات کشوری در کرمان برگزارشد، دانش‌آموزان استانهای شمالی و تهران به‌جز استان خراسان با هواپیما به کرمان اعزام شدند. دانش‌آموزان استانهای جنوبی نیز با وسائل نقلیه اداره کل آموزش و پرورش استانهای خود در مسابقات شرکت کردند.

محل اسکان برگزاری مسابقات: از طرف ادارهٔ کل آموزش و پرورش کرمان آموزشکده فنی شهیدچمران برای اسکان دانش‌آموزان، اساتید و برگزاری مسابقات تعیین شده بود باید اذعان کرد که این انتخاب محل واقعاً حسن انتخاب بود. این آموزشکده در حاشیه شهر بسیار وسیع و مصفا و دارای اطاقها و خوابگاههای متعدد بود که برای این مراسم بسیار مناسب بود. در نظافت محل، نظم و ترتیب کارها و پذیرایی بسیار زحمت کشیده شده بود و واقعاً حسن برگزاری مسابقات ناشی از توجه خاص مسئولین آموزش و پرورش کرمان مخصوصاًشخص مدیرکل جناب آقای غندالی به این مراسم بود که جا دارد در این‌جا از طرف دانش‌آموزان و اساتید و دفتر تحقیقات از ایشان تشکر به‌عمل آید.

طرح سئوالات: کمیته مسابقات ریاضی دانش‌آموزی کشور ۲۴ ساعت قبل از برگزاری امتحانات، سؤالات را با صرف وقت و دقت کامل طرح کرد. سؤالات امسال طوری بود که دانش‌آموزان در پایان مسابقات اظهار می‌داشتند که سؤالات نیز مثل خود مسابقه جاافتاده و بسیار خوب طرح شده بود. پس از طرح سؤالات، صبح روز پنجشنبه ۶۹/۱۱/۱۸ در حالی که مراسم افتتاحیه مسابقه در جریان بود سؤالات تکثیر و برای امتحان بعد از ظهر آماده گردید.

مراسم افتتاحیه: مراسم افتتاحیه با حضور دانش‌آموزان، اساتید، مقامات استان و دو نفر از نمایندگان مردم کرمان درمجلس در سالن سخنرانی آموزشکده برگزار گردید. ابتدا سرود جمهوری اسلامی و سرود یاد امام به‌وسیلهٔ دستهٔ کر سیرجان خوانده شد. سپس آقای غندالی مدیرکل دهۀ فجر را به حاضرین تبریک وتهنیت گفتند و مقدم مهمانان را گرامی داشتند. آقای غندالی اشارهٔ بسیار مختصری راجع به آموزش و پرورش کرمان داشتند که تحصیلات رسمی و مدرسه‌ای از سال ۱۳۰۰ به‌وسیلهٔ دو کشیش انگلیسی در کرمان شروع شد که هدف اصلی آنها قبل از تعلیم و تربیت، دزدی فرهنگ ما بود. در حال حاضر کرمان ۵۶۰،۰۰۰ دانش‌آموز، ۲۲ منطقه آموزش و پرورش با ۳۴۰۰۰ پرسنل دارد از نظر توان تحصیلی دانش‌آموزان در سطح کشور، استان‌کرمان در مقطع ابتدایی مقام پنجم در راهنمایی سوم و در متوسطه دوم را دارد.

سخنرانی برادر دکتر حداد عادل: آقای دکتر حداد عادل در شروع سخنرانی آغاز دهۀ مبارکهٔ فجر را تبریک و به‌شرکت‌کنندگان در هشتمین دورهٔ المپیاد ریاضی کشور که از راههای دور و نزدیک آمده بودند خوش‌آمد و خیرمقدم گفتند:

خوشحالیم که این مسابقات همه ساله مصادف با جشن و شادی و سرور و شادمانی مردم است. و باز خوشحالیم که این مسابقات امسال در کرمان برگزار می‌شود و برای جوانان ما فرصتی پیش‌آمده است تا یك خطهٔ زرخیز کشور را بشناسند و سفری پربار و پر ثمر داشته باشند استان کرمان تاریخی طولانی و عبرت‌آموز دارد. استان کرمان، استان عارفان، صوفیان،دانشمندان و فقهای عالیقدر است. استانی است که بر چهرهٔ خود داغ تازیانه آقامحمدخانها دارد. شما با این مطلب آشنا می‌شوید که درگذشته از ظلم و ستم شاهان بر مردم‌کرمان چه گذشته است. خاطرات تلخ سرهای بریده، چشمهای‌از حدقه درآمده و... امروز به‌لطف‌خداوندو از برکت‌انقلاب، روستازاده دانشمندی ازاین‌خطه عهده‌دار ریاست جمهوری کشور است.

حضور شما در این استان موجب شناخت بیشتر شما از فرهنگ مردم و محرومیتهای استان خواهد شد. روزی که ما برنامهٔ مسابقات ریاضی کشوری را شروع کردیم، شما در کلاسهای سوم یا چهارم ابتدایی درس می‌خواندید و خوشحالم که این مسابقات ۸ ساله میوه‌های شیرین داده است. فرصت مناسبی است که مطالبی در فلسفه المپیاد ریاضی ذکر کنم هدف المپیاد کشوری نفس مسابقه نهایی بین‌المللی، مدالها و سکوی افتخار نیست البته آن‌هم مورد نظر است و جای تعجب‌هم نیست آن مراسم گل این درخت است. اما همه چیز یك درخت فقط گل نیست درخت قسمتهای دیگر نیز دارد که در نفس خود مفید و ارزنده است که ما به آنها نیز اهمیت می‌دهیم.

البته ما همهٔ تلاشمان را می‌کنیم که بچه‌ها در صحنه‌های بین‌المللی نیز بدرخشند و همه ساله موفق و موفقتر باشند. پیروزی ما درصحنه‌های‌جهانی باعث‌افتخار کشور و ملت ماست. مردم ما ازاستعداد سرشار برخوردار هستند و ما قرنها پرچمدار علم و فرهنگ در جهان بوده‌ایم. سرزمین ما، سرزمین بیرونی‌ها، خیام‌ها، خواجه‌نصیرها، خوارزمی‌ها، غیاث‌الدین جمشیدکاشانی‌هاست گناه عقب‌افتادگی ما از قافله تمدن بر گردن سلاطین است که زمانی که اروپا در راه علم و صنعت‌گام برمی‌داشت، آنها در میهن ما چشم مردم را به وزن تلقی می‌کردند و به‌مأمورین‌خود دستور می‌دادندکه‌مثلا یك‌من چشم

بیاورید؟ امروز به‌لطف‌الهی و همت‌شهیدان ریشهٔ ظلم‌وستم ازکشور ما کنده شده وآرامش ایجاد شده و زمانی است‌که استعدادهای درخشان بچه‌های ما ظهور و بروز نماید و قدر و منزلت خود را به جهانیان اعلام داریم. در طول سه یا چهار سال شرکت ما در المپیادهای بین‌المللی، برخلاف همه تبلیغاتی که دربارهٔ جمهوری اسلامی می‌کردند ما به نتایجی دست یافتیم که موجب بهت و حیرت آنها شد.

در حال حاضر، ما از نظر ریاضی، مقام ۱۴ را در بین ۵۴ کشور داریم، در مسابقات جهانی چین، با توجه به‌سوابق کشورها در المپیاد، کسب این مقام برای ما با ارزش و ارزنده بود. جای ریاضیدانان جوان ما در بالای ٪۳۰ کشورهای جهان است و این باعث افتخار ماست. امید است که این ۶ نفر که امسال در مسابقات سوئد شرکت می‌کنند این رتبه را حفظ کنند و بر آن بیفزایند.

در دو سال پیش که به اتفاق دانش‌آموزان خدمت آقای رئیس‌جمهور رسیدیم و هنوز در آن موقع تبلیغات علیه ایران بالا بود، ایشان خطاب به دانش‌آموزان، فرمودند که کسب یک مدال در المپیاد جهانی ریاضی همهٔ تبلیغات دشمنان علیه ما را خنثی می‌کند از این جهت شما باید آماده شوید که با تلاش خود افتخاراتی برای ما کسب کنید.

سایر قسمتهای درخت: ما از کوشش و تلاشهای خود در برگزاری المپیاد ریاضی، غیر از گل درخت، (مدالهای المپیاد جهانی) فوائد بیشمار دیگر نیز می‌بریم که از مدالها کم‌اهمیت‌تر نیستند المپیاد ریاضی کشوری نتایج زیر را دربرداشته است:

ـ فعالیت ریاضی و آموزش آن در کشور گسترش یافته است شور و نشاط یادگیری ریاضی، جنب و جوش برای یادگیری مسائل گزیده جهانی سراسر کشور را فراگرفته است ذهن‌ها و مغزها به‌فعالیت پرداخته و با مبارزهٔ با یکدیگر رشد و تکامل پیدا می‌کنند.

ـ درست است ۶ نفر به‌خارج اعزام می‌شوند ولی بقیه نیز از ثمرات مطالعه خود بهره‌مند می‌شوند و نتیجهٔ حاصل از این کوششها در طول زندگی برای آنها باقی می‌ماند. این تجربهٔ علمی که از رهگذر مسابقه به دست آورده‌اید راهگشای زندگی شما خواهد بود.

ـ تحرک بیشتری در بین دبیران ریاضی کشور به وجود آمده است و معلمین ما امروز در کلاسها، مسائلی در سطح بین‌المللی برای بچه‌ها حل می‌کنند که آثار آن در آموزش ریاضی‌کشور قابل مشاهده است، در بیست و یکمین کنفرانس ریاضی کشور، رسماً اعلام شد که مسابقات المپیاد ریاضی در ارتقاء سطح ریاضی در کشور مؤثر بوده است، نسل جدید با استعداد و چهره‌های درخشانی از دانشجویان به تحصیل در رشته ریاضی پرداخته‌اند که استادان برجسته ریاضی دانشگاهها در آینده خواهند بود.

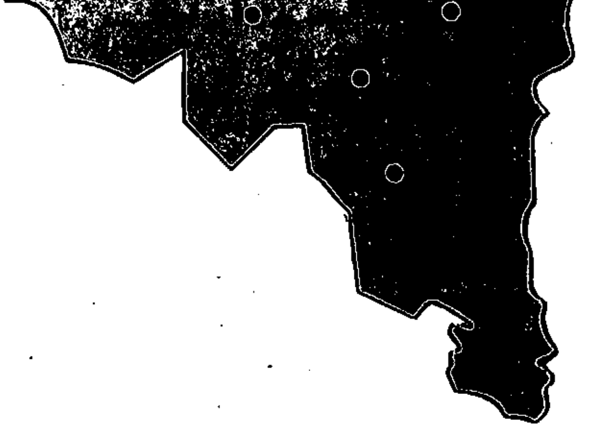
ـ کتابهای ریاضی جدیدی در زمینه مسائل المپیاد ریاضی ترجمه و به بازار عرضه شده است که در رشد ریاضی در کشور بسیار مفید خواهد بود.

تذکر چند نکتهـ من در چهرهٔ یکایک شمادانشمندان بالقوه ایران موفقیت و پیروزی علمی می‌بینم و می‌خواهم چند نکته برادرانه یا پدرانه نیز عرض کنم:

ـ شما اگر جزء شش نفر اول مسابقه‌نشدید مأیوس نشوید. در این انتخاب، با توجه به اینکه شما حساب احتمالات می‌دانید، چقدرشانس برای‌گزینش ۶ نفرشایسته از بین ۲۰۰ نفر شایسته وجود دارد؟ نه تنها شما شایسته‌اید بلکه آن ۳۰۰۰ نفری که در مرحلهٔ دوم نیز شرکت کرده‌اند شایسته بودند ولی به مرحله سوم راه پیدا نکردند باید بخود امیدوار باشید و مصمم‌تر از گذشته مبارزهٔ علمی خود را ادامه دهید و عدم انتخاب را به هیچوجه شکست ندانید لذا از هم‌اکنون خود را آماده برای برخورد با نتایج کنید.

ـ شما نسل با استعداد این مملکت هستید وآخرین هم نیستید. شما با این استعداد در هر مقامی که قرار بگیرید باید خدمت‌به‌کشور و مردم‌خود را فراموش نکنید، در حال حاضر خیلی از با استعدادهای ما از کشور ومردم خود بریده‌اند و در دانشگاههای اروپا وآمریکامشغولند، در صورتی که در این خاک رشد پیدا کردند و تغذیه شدند و با مالیات مردم این خاک به دانشگاه رفتند و مدارج علمی پیمودند ولی متأسفانه پشت به مردم خود کردند. ما در کانادا برای عده‌ای از دانشجویان ایرانی کلاس تشکیل دادیم که استاد آن از آمریکا بردیم و آن استاد یک ایرانی یزدی‌الاصلی بودکه هنوز لهجهٔ‌خود را نیز حفظ کرده بود. ایشان تخصص در I.B.M و کامپیوتر داشت از این استادها متأسفانه دانشگاههایی که دشمن‌ما هستند استفاده می‌کنند ونتیجه‌تحقیق آنها را علیه ما بکار می‌برند البته برای استادان کار در آمریکا یا اروپا آسانتر است، امکانات بیشتر فراهم است. اما وطن‌انسان چیز دیگری است که باید فداکاری کرد و همه چیز را ساخت و آماده کرد و بعد درس داد.

ـ شما باید درسازندگی‌کشورشرکت‌کنید ما درنتیجه جنگ ۱۰ تا ۱۲ سال آرامش نداشتیم با فداکاری‌شهدای دلیر ما بودکه ما امروز فرصت پیدا کردیم المپیاد ریاضی برگزار کنیم و شما با فراغ خیال مطالعه کنید و امتحان بدهید ملت ما در طول جنگ فداکاری و ایثار کرد و خون داد تا درخت انقلاب تناور گردد. شما باید در حفظ



ره‌آوردهای انقلاب کوشا باشید و خدمت به مردم و کشور خود را در سرلوحهٔ برنامه زندگی خود قرار دهید.

مشارکت دانش‌آموزان در نماز جمعه هفته کرمانـ دانش‌آموزان همراه با سرپرستان خود در نمازجمعه هفته کرمان شرکت کردند و آقای دکتر حداد عادل در بین‌نماز و خطبه‌ها سخنرانی نمودند.

امتحان و تصحیح اوراق ـ امتحانات در بعد ازظهر روز پنجشنبه ۶۹/۱۱/۱۸ وصبح روزجمعه ۶۹/۱۱/۱۹ برگزار گردید و مراقب و کارگردان جلسات امتحان دانش‌آموزان المپیاد دوره‌های قبل بودند که با کوشش فراوان در بهتر برگزارکردن امتحان می‌کوشیدند.

پس از برگزاری هر امتحان اوراق جمع‌آوری، سربرگها جدا و به ورقه‌ها رمز زده شده و سپس در پاکت تحویل اساتید گردید. اوراق بلافاصله مورد تصحیح قرار گرفت و پس از تصحیح با **مشاوره وبررسی** کامل و توجه به امتحان آذرماه تصمیم گرفته شد ملاك نمره $m_1 + 4m_2$ (نمرهٔ اول به اضافهٔ ۴ برابر نمرهٔ دوم) باشد و با این حساب نفرات اول تا ششم به شرح زیر انتخاب شدند.

۱ـ حسین طلوع شریفی
۲ـ مهدی عسگری
۳ـ آیت‌ا... کریم‌زاده
۴ـ پیمان کسائی
۵ـ شهرام محسنی‌پور
۶ـ بهرنگ نوحی

سؤالات وحل آنها و اسامی دانش‌آموزان در صفحات آخر این گزارش آمده است.

در حاشیه مسابقه ـ با همت و برنامه‌ریزی‌مسئولین آموزش و پرورش کرمان دانش‌آموزان از مس سرچشمه بازدید به عمل آوردند و نهار نیز مهمان کارخانه بودند. تجربه مشاهدهٔ کارخانه برای دانش‌آموزان بسیار مفید بود.

ـ از مقبره شاه‌نعمت‌اله ولی عارف و صوفی معروف و باغ معروف به باغ شاهزاده در ماهان بازدید به عمل آمد.

ـ از آثار تاریخی کرمان مسجد میرزا ابراهیم و حمام گنج‌علیخان و گلزار شهدای کرمان نیز بازدید به عمل آمد و سورهٔ فاتحه‌الکتاب قرائت گردید.

ـ کمیته ریاضی به اتفاق مدیرکل محترم دفتر تحقیقات و آموزش و پرورش کرمان وسرپرستان دانش‌آموزان جلسه‌ای داشتند که راجع به نحوهٔ برگزاری امتحان، اعلام نتایج، آماده‌سازی بچه‌ها برای مسابقه مطالبی ایراد گردید.

ـ جلسه‌ای به‌همت دانش‌آموزان سابق المپیادکشور با حضور سرپرستان، دانش‌آموزان و اساتید تشکیل شد و تجربهٔ بچه‌های سابق المپیاد در اختیار دانش‌آموزان شرکت‌کننده قرار گرفت.

ـ دانش‌آموزان در روز اول ورود و بعد ازمراسم افتتاحیه از دانشگاه کرمان بازدید بعمل آوردند و نهار مهمان دانشگاه بودند.

ـ دانش‌آموزان در روز یکشنبه در ضیافت ناهار آقای مرعشی استاندار محترم کرمان شرکت کردند. آقای استاندار ضمن خوش‌آمدگوئی، یك مسابقه خاطره‌نویسی از این مسافرت نیز پیشنهاد و اظهار داشتند که به‌نفرات اول تا دهم مسابقه سکهٔ بهار آزادی جایزه داده خواهد شد ما نفرات برنده را در شماره بعد معرفی خواهیم‌کرد.

مراسم اختتامیه. در بعد از ظهر روز یکشنبه ۶۹/۱۱/۲۱ مراسم اختتامیه مسابقه در سالن سخنرانی آموزشکده شهید چمران برگزار گردید. آقای مهندس پورسیف مدیرکل محترم دفتر تحقیقات از طرف سازمان پژوهش و وزارتخانه از زحمات مسئولین کرمان سپاسگزاری کردند و آقای دلاورنژاد از طرف‌سرپرستان مراتب تشکر خود را اعلام داشتند آنگاه آقای غندالی مدیرکل محترم آموزش و پرورش کرمان ضمن تشکر از سخنرانان قبلی سفر خوشی را برای دانش‌آموزان آرزو کردند و با هدیه یك بسته پسته به‌هر دانش‌آموز با آنها خداحافظی کردند.

ـ پیشنهاد شد که چقدر خوب بود که در همین مراسم اسامی ۶ نفر نیز اعلام و به ۳۰ نفر اول‌مسابقه سکه بهار آزادی جایزه داده می‌شد و همانطور که‌المپیاد بین‌المللی درجلسهٔ اختتامیه کار خود را به‌پایان می‌رساند ما نیز باید در همین جلسه کار مسابقه را با اعلام نتایج به‌پایان برسانیم.

اضافه نماید که جلسه‌ای در ساعت ۵ـ۳ بعد از ظهر ۶۹/۱۲/۱۸ در ساختمان سی تیر وزارت آموزش و پرورش با حضور جناب آقای دکتر محمدعلی نجفی وزیر محترم آموزش و پرورش و دانش‌آموزان ممتاز ریاضی و فیزیك با حضور والدین آنها تشکیل گردید و جوائز توزیع گردید.

مرحلهٔ نهایی هشتمین دورهٔ مسابقات

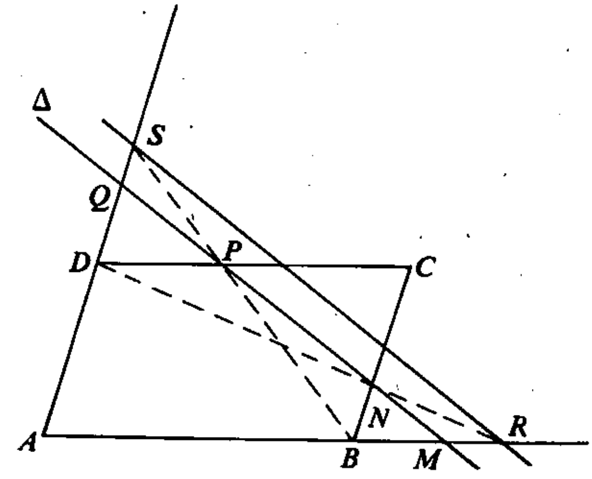
ریاضی دانش‌آموزی کشور

تاریخ برگزاری: ۶۹/۱۱/۱۸
مدت: ۴ ساعت

مبارزهٔ علمی برای جوانان زنده کردن جستجو و کشف واقعیتها و حقیقتهاست.
«امام خمینی قدس‌سره»

۱- متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داده شده است، خط Δ خطوط AB و BC و CD و DA را به‌ترتیب درنقاط M و N و P و Q قطع می‌کند. اگر نقاط برخورد AB و DN را R و AD و BP را S بنامیم. ثابت کنید:

$RS \parallel \Delta$



۲- جوابهای صحیح معادلهٔ سیالهٔ زیر را به‌دست‌آورید

$$(x^2-x)(x^2-2x+2)=y^2-1$$

۳- (الف) ثابت کنید به‌ازاء هر $n\geqslant 1$ داریم

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}<2$$

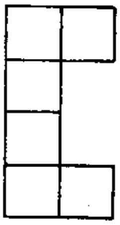
(ب) برای مجموعهٔ $X=\{1, 2, 3, \dots, n\}$ که درآن $n\geqslant 1$، زیرمجموعه‌های ناتهی X را A_k، $(K=1, 2, 3, \dots, m)$ می‌نامیم. (بدیهی است که $m=2^n-1$). اگرحاصلضرب تمام عضوهای مجموعهٔ A_k را با a_k نشان دهیم، ثابت کنید:

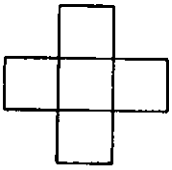
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{a_i(j^2)}<2n+1$$

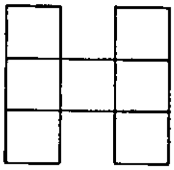
۴- مجموعهٔ مثلث‌های ABC را درنظرمی‌گیریم که در دایره‌ای به‌شعاع R محاط‌اند، درچه صورت $AB^2+AC^2+BC^2$ ماگزیمم است؟ این ماگزیمم را حساب کنید. هم‌چنین مجموعهٔ چهاروجهی‌های $ABCD$ را که درکره‌ای به‌شعاع R محاط می‌باشند، درنظرمی‌گیریم درچه صورت مجموع مربعات ۶ یال آنها ماگزیمم است؟ این ماگزیمم را نیز محاسبه کنید و ثابت کنید دراین حالت وجوه با هم برابرند.

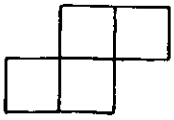
۵- اگر α ریشه معادلهٔ $x^3-5x+3=0$ و $f(x)$ یك چندجمله‌ای با ضرایب گویا باشد؛ نشان دهید که هرگاه $f(\alpha)$ ریشهٔ معادله درجه سوم بالا باشد، آنگاه $f(f(\alpha))$ نیز ریشه معادله خواهد بود.

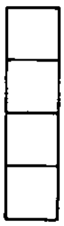
۶- می‌خواهیم زمینی مستطیل‌شکل به ابعاد ۱۳۷ × ۵ را با موزائیك‌هائی به‌اشکال زیر مفروش کنیم؛ نشان دهید که این‌عمل امکان‌پذیر نیست.


شکل (۱)


شکل (۲)

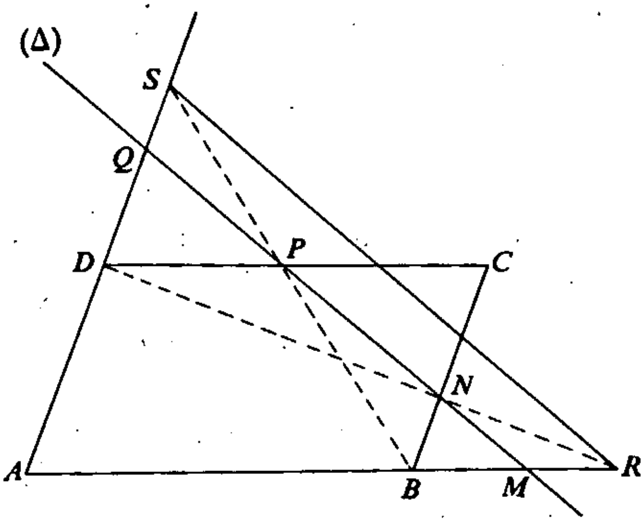

شکل (۳)


شکل (۴)


شکل (۵)

«درپنج شکل فوق هریک ازمربعها بهضلع واحد است »

حل مسأله ۱



مثلث AMQ را با موربهای DNR و BPS قطع می‌دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{RA}{RM}\times\frac{NM}{NQ}\times\frac{DQ}{DA}=1 \quad \text{و} \quad \frac{SA}{SQ}\times\frac{PQ}{PM}\times\frac{BM}{BA}=1$$

و از مساوی هم قرار دادن آنها نتیجه می‌شود:

$$(1)\quad \frac{RA}{RM}\times\frac{NM}{NQ}\times\frac{DQ}{DA}=\frac{SA}{SQ}\times\frac{PQ}{PM}\times\frac{BM}{BA}$$

چون $BN\|AQ$ است پس، و $DP\|AB$ پس،

$$(2)\quad \begin{cases}\dfrac{NM}{NQ}=\dfrac{BM}{BA}\\[2mm] \dfrac{DQ}{DA}=\dfrac{PQ}{PM}\end{cases}$$

ازمقایسه (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$\frac{RA}{RM}=\frac{SA}{SQ}$ یعنی $RS\|(\Delta)$ است.

حل مسأله ۲

$$(x^2-x)(x^2-2x+2)=y^2-1$$

بدون اینکه ازکلیت مساله کاسته شود $y\geqslant 0$ می‌گیریم.
حال اگر قرار دهیم $x=X+1$ خواهیم داشت

$$(X^2+X)(X^2+1)=y^2-1$$

$$\left(X^2+\frac{X}{2}+\frac{X}{2}\right)\left(X^2+\frac{X}{2}+1-\frac{X}{2}\right)=y^2-1$$

$$\left(X^2+\frac{X}{2}\right)^2=y^2-\left(\frac{3}{4}X^2+X+1\right)$$

با توجه به اینکه $\frac{3}{4}X^2+X+1>0$ پس $X^2+\frac{X}{2}<y$ در نتیجه $y\geqslant X^2+\frac{X}{2}+\frac{1}{2}>0$ (y عدد صحیح است) ازآنجا،

$$y^2\geqslant X^4+\frac{X^2}{4}+\frac{1}{4}+X^3+X^2+\frac{X}{2}$$
$$=y^2+\frac{1}{4}(X^2-2X-3)$$

درنتیجه $X^2-2X-3\leqslant 0$ پس $-1\leqslant X\leqslant 3$ بالنتیجه فقط $X=0,\ -1,\ 3$ درمعادلهٔ سیاله فوق صدق می‌کند پس.

$$x=0,\ 1,\ 4$$
$$y=\pm 1,\ \pm 1,\ \pm 11$$

حل مسأله ۳

ابتدا ثابت می‌کنیم،

$1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2$، داریم:

$$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}\quad(k>1)$$

$$\sum_2^n\frac{1}{k^2}<\sum_2^n\frac{1}{k(k-1)}$$

$$1+\sum_2^n\frac{1}{k^2}<1+\sum_2^n\frac{1}{k(k-1)}$$

پس

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}<1+\sum_2^n\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

پس

$$\sum_1^n\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{n}$$

بنابراین،

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}<2$$

داریم:

$$\sum_{i=1}^m\frac{1}{a_i}=\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)-1$$
$$=n$$

چون $\sum_{j=1}^m\frac{1}{j^2}<2$ و $\sum_{i=1}^m\frac{1}{a_i}=n$ پس،

$$\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m\frac{1}{a_i\,j^2}<2n$$

بنابراین:

$$\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m\frac{1}{a_i\,j^2}<2n+1$$

حل مسأله ۴

اگر P نقطهٔ دلخواهی درصفحهٔ مثلث باشد آنگاه

$$PA^2+PB^2+PC^2=\frac{AB^2+AC^2+BC^2}{3}+3PG^2$$

که G محل تلاقی میانه‌ها است.

حال اگر مرکز دایره O باشد پس

$$OA^2+OB^2+OC^2-3OG^2=\frac{1}{3}(AB^2+AC^2+BC^2)$$

بدیهی است که $\sum AB^2$ وقتی ماکزیمم است‌که $OG=0$ یعنی مرکز دایره برمحل تلاقی میانه منطبق است.

پس $\sum AB^2=9R^2$. $(OA^2+OB^2+OC^2=3R^2)$

همچنین اگر P نقطه‌ای دلخواه درفضا و $ABCD$ یك‌چهاروجهی دلخواه باشد آنگاه،

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=4PG^2+\frac{1}{4}(AB^2+AC^2+AD^2+BD^2+BC^2+CD^2)$$

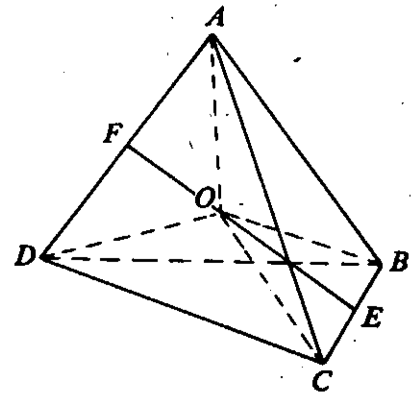
درنتیجه اگر P مرکز کره اختیارشود

$$\sum OA^2=4OG^2+\frac{1}{4}\sum AB^2$$

یا

$$4R^2-4OG^2=\frac{1}{4}\sum AB^2$$

$\sum AB^2$ وقتی ماکزیمم است کــه OG^2 می‌نیموم باشد یعنی G بر O منطبق است. پس باید مرکــز ثقل چهاروجهی برمرکز کره منطبق گردد. در این صــورت ماکزیمــم $\sum AB^2$ برابر $16R^2$ خواهد بود.



گوئیــم اگر E و F وسطهای BC و AD باشند می‌دانیم که O وسط EF است. چون‌مثلثهای BOC وAOD متساوی‌الساقین‌اند پس OE و OF که ارتفاعهای نظیــر قاعده‌های‌آنها هستند نیز برابرند درنتیجه دومثلث قائم‌الــزاویه OEC و OFD برابرند پس $CE=DF$ یعنی $BC=DA$ پس یالهای روبرو برابرند وبه عبارت دیگر وجوه با هم برابرند.

حل مسأله ۵

معادله $x^3-5x+3=0$ ریشهٔ گــویا ندارد پس قابل‌تجـزیه نیست درنتیجه α درهیچ معادله با ضرایب گویا از درجهٔ کمتراز ۳ صادق نخواهد بود حال اگرمعادلهٔ

$$(f(x))^3-5f(x)+3=0$$

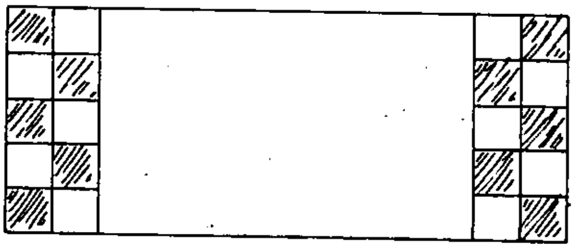
را در نظر بگیــریم، طبق فرض α ریشه این معــادله نیز می‌باشد درنتیجه

$$(f(x))^3-5f(x)+3$$

بر x^3-5x+3 بخش‌پذیر است. یعنــی تمام ریشه‌های معادلهٔ $x^3-5x+3=0$ ریشه‌های‌معادلهٔ $(f(x))^3-5f(x)+3=0$ نیز خواهد بود. پس $f(\alpha)$ نیز ریشه معــادله اخیر است یعنی $(f(f(\alpha)))^3-5f(f(\alpha))+3=0$. درنتیجه $f(f(\alpha))$ ریشه معادلهٔ $x^3-5x+3=0$ خواهد بود.

حل مسأله ۶

فرض می‌کنیم که مستطیــل موردنظر با شکلهای ۱ تا ۵ پوشانده شده باشد. خانه‌های مستطیل را یك‌درمیان سیاه وسفید می‌کنیم:



ازآنجائی که تعداد مربع‌ها فرد است پس تفاضل سیاه وسفیدها برابر ۱ می‌باشد. شکلهــای ۱، ۴، و ۵ دارای رنگهــای سیاه و سفید مساوی هستند. درمورد شکــل ۲، یــا چهارسفید ویك سیاه داریم ویا بالعکس، درمورد شکل۳، یاپنج سیاه و دوسفید داریم یا بالعکس. حال فرض کنیم:

تعداد شکل ۲ با چهارخانه سفید ویك خانه سیاه $=x_1$

تعداد شکل ۲ با چهارخانه سیاه ویك خانه سفید $=x_2$

تعداد شکل ۳ با پنج خانه سفید و دوخانه سیاه $=x_3$

تعداد شکل ۳ با پنج خانه سیاه و دوخانه سفید $=x_4$

با توجه به‌اینکه:

(تعداد مربعهای سفید) − (تعداد مربعهای سیاه) = ۱

واینکــه اشکال ۱، ۴، و ۵ درطــرف دوم حذف می‌شوند. باید داشته باشیم:

$$1=(4x_2+x_1)+(2x_3+5x_4)-(4x_1+x_2)-(5x_3+2x_4)$$

$$1=-3x_1+3x_2-3x_3+3x_4$$

با توجه به اینکــه طرف دوم برسه بخش‌پذیر است، به تناقض رسیده‌ایم.

نتایج اولین مرحله هشتمین المپیاد ریاضی ایران

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی اسامی دانش‌آموزان ممتاز شرکت کننده در مرحله اول مسابقات المپیاد ریاضی را که در آذرماه ۶۹ در استانها برگزار گردید اعلام نمود. مرحله نهائی هشتمین دوره المپیاد ریاضی در دهه مبارک فجر و در روزهای ۱۸ و ۱۹ بهمن ماه در شهرستان کرمان برگزار خواهد شد.

جزئیات مربوط به برگزاری مسابقه نهایی و چگونگی اعزام دانش‌آموزان قبلاً به اطلاع ادارات کل آموزش و پرورش استانها رسیده است.

(استان تهران)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	فرشاد امامی	۸	کمال
۲	شهرام توکلی	۱۱	علامه حلی
۳	پیام ایمانی	۸	شهید باهنر
۴	امیر افشار	۱۱	علامه حلی
۵	علی ابراهیمی	۲	رازی
۶	امیرحسین امین‌آبادی	۱۲	شهید چیت‌چیان
۷	عبدا... الحسنی	۱۱	علامه حلی
۸	رامین الوسینا	۶	سجاد
۹	ایرج ارسلان	۱۱	علامه حلی
۱۰	شهرداد انتظارزاده بیلی	۲	نیکان
۱۱	علی آگاه	۲	شهید دانش
۱۲	امیرحسین اخشیان	۲	شهید دانش
۱۳	نیما... ابوالقاسمی	۹	شهدای هفتم تیر
۱۴	یاسین اردشیرپور زرهکشی	۹	شهدای هفتم تیر
۱۵	اسفندیار بامداد	—	المپیاد فیزیک (شیراز)
۱۶	ثمینه برادران رحیمی	۶	فرزانگان
۱۷	نوید باژدانزاده	—	المپیاد فیزیک (شیراز)
۱۸	غلامرضا باقری جعفرکلائی	۱۲	دو شهید
۱۹	محمدرضا باقرزاده	—	المپیاد فیزیک
۲۰	پیام باقرزاده	۲	شهید مطهری
۲۱	نیما پور زاهد گیلانی	۱۱	علامه حلی
۲۲	جواد پرستاری	۱۴	بابا طاهر عریان
۲۳	بهرام پیری	۹	نمونه
۲۴	علی اصغر ترکیان	۲	نیکان
۲۵	مهدی تیموری کرکانی	۱۴	قلمچی
۲۶	حمید تلوانی	۱۶	رشد
۲۷	دلیر تاجیر ریاحی	۱۲	روشنگر
۲۸	بهنام تقی‌بیک	۱۶	رشد
۲۹	لیلا تربی	۶	فرزانگان
۳۰	رضا چمن‌آرا	۱۱	علامه حلی
۳۱	محمداسماعیل جعفری	—	المپیاد فیزیک (زنجان)
۳۲	پیمان حراری مقدم	—	المپیاد فیزیک (مشهد)
۳۳	پوریا حبیب	۱۱	علامه حلی
۳۴	مهدی حیدری تقی	۶	البرز
۳۵	افشین حشمت‌پور	۹	امام صادق (ع)
۳۶	آرش خدادادی	۱۲	فیروز بهرام
۳۷	سینا خراسانی	۶	البرز
۳۸	کسری رفیع	۱۱	علامه حلی
۳۹	مهدی رحیمی مراغه	۸	کمال
۴۰	محمدرضا رهبر	۸	کمال
۴۱	غلامرضا رضایی	۱۲	المپیاد فیزیک (تهران)
۴۲	شیوا رستم‌زاده	۶	فرزانگان
۴۳	رضا رحیمی	۶	البرز
۴۴	پویا رحیمی مراغه	۶	فرزانگان
۴۵	محمدرضا رحمتی	۱۰	شهید قدسی
۴۶	فرید رئیس‌زاده	۱۱	مدرس
۴۷	افشین سپهری	۱۲	فیروز بهرام
۴۸	روزبه سپهرنوا	۲	نیکان
۴۹	میثم سلطانی کوپا	۲	مفید
۵۰	سید محمد سادات حسینی	۱۱	علامه حلی
۵۱	فرشید سلیمان‌پور	۱۲	شهید باهنر
۵۲	صادق شاهمهری	۱۱	علامه حلی
۵۳	شبنم شفیعی حاجی‌آبادی	۶	فرزانگان
۵۴	صمد شجاعی	۲	مفید
۵۵	سید امیرحسین شایگان‌نیک	—	المپیاد فیزیک (تهران)
۵۶	نوید صالحی حافظی	۲	مطهری
۵۷	محمدحسن صالحی‌نیا	۶	البرز
۵۸	امیر صادقی	۱۲	علوی
۵۹	حسین طلوع شریفی	۱۱	علامه حلی
۶۰	علی طباطبایی باروقی	۲	مفید
۶۱	مریم طباطبایی ایرانی	۶	فرزانگان
۶۲	مهدی عسگری	۱۱	المپیاد فیزیک (تهران)
۶۳	عاطفه عابدی	۵	سمیه

(استان تهران)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۶۴	لیلا عزیزی	۶	فرزانگان
۶۵	فرزاد فرهیدی	۱۱	علامه حلی
۶۶	علی فقیهی محمدی	۱۱	اسدآبادی
۶۷	فرهاد فشیله	—	المپیاد فیزیک (اصفهان)
۶۸	مهدی قدسی زرگر	۱۱	المپیاد فیزیک (تهران)
۶۹	حمیدرضا قهاتی	۹	امام صادق (ع)
۷۰	رضا قربانی‌زاده	۱۲	المپیاد فیزیک (تهران)
۷۱	مجید قدسی	۱۶	المپیاد فیزیک (تهران)
۷۲	مهدی قندی	۱۲	علوی
۷۳	اینا... کریم‌زاده	—	المپیاد فیزیک (چهارمحال بختیاری)
۷۴	پیمان کسایی	۱۱	علامه حلی
۷۵	ابراهیم کرمی	۱۲	دو شهید
۷۶	عباس کمیجانی	۲	دانشمند
۷۷	کیومرث کاوسیان	۱۱	علامه حلی
۷۸	حمیدرضا محبی	۱۲	علوی
۷۹	محمدحسن محمدی‌وردبخالی	۱۲	علوی
۸۰	شهرام محسنی‌پور	۱۱	علامه حلی
۸۱	فرشاد مشایخی	۲	مفید
۸۲	علی مهجور	۱۲	دو شهید
۸۳	ساسان ملیسی عراقی	۱۱	علامه حلی
۸۴	محمدرضا منوری‌همدانی	۱۱	علامه حلی
۸۵	علیرضا میرزایی	۱۴	قلمچی
۸۶	بهرنگ نوحی	۱۱	علامه حلی
۸۷	کیارش نریمانی	۲	سروش آزادی
۸۸	علیرضا نصیری لواسانی	—	المپیاد فیزیک (تهران)
۸۹	عباس نصرالهی مقدم	۱	نیکان
۹۰	فریدون نوری	۲	نمونه
۹۱	محمدحسین نکویی	۱۱	علامه حلی
۹۲	رحیم ناصری	۱۴	رشد
۹۳	رضا نوید	۲	دانش
۹۴	سیدعلی هاشمی	۱	نیکان

(استان تهران)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	نوید شهروزی	کرج	رجایی
۲	فریبرز میرزایی	کرج	رجایی
۳	سیدمجتبی میرعبداللهی	کرج	صدر
۴	علیرضا وریانی	کرج	رجایی

(آذربایجان غربی)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	کسری قدسی	خوی	مدرس
۲	مسعود الیاسی معاصر	ارومیه	چمران
۳	مهام موسلی	ارومیه	چمران

(چهارمحال بختیاری)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	صبورا یزدانی	شهرکرد	نرجس
۲	اسماعیل... قنبلی	شهرکرد	علامه طباطبایی

(سمنان)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	شهباز دخانیان	سمنان	معتدا
۲	مرضیه قلیانی	سمنان	۱۷ شهریور

(کردستان)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	نورعلی‌الدین سیدابراهیمی	سنندج	رنج‌آوری
۲	جمال صوفیه	سنندج	رنج‌آوری

(لرستان)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	محمداسمعیل خسروی	بروجرد	دکتر شریعتی
۲	علی دیلرونگ	بروجرد	بحرالعلوم

(سیستان و بلوچستان)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	بهزاد دلویند	زاهدان	نمونه

(فارس)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	داریوش ابجدیان	شیراز(۲)	توحید ۱
۲	حمیدرضا امیریان	شیراز(۲)	توحید ۱
۳	علی اصغر انتظار	شیراز(۲)	توحید ۱
۴	علی بهبودیان	شیراز(۲)	توحید ۱
۵	شایان رحیمی	شیراز(۲)	شرافتیان
۶	صادق سعدی	شیراز(۲)	شرافتیان
۷	شهاب‌الدین طوبایی	شیراز(۲)	توحید ۱
۸	حسن عباسپور	شیراز(۱)	ملاصدرا
۹	مهدی میکائیلی	شیراز(۲)	اندیشه
۱۰	مازیار توابی	شیراز(۲)	شرافتیان

(گیلان)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	مرتضی جعفری بیجاربنه	بندرانزلی	فردوسی
۲	اسمعیل سامی گیلانی	رشت	دکتر بهشتی
۳	احمد سالاری	رشت	دکتر بهشتی
۴	محمد قلی‌پور طالمی	رشت	دکتر بهشتی
۵	کاوه محامد	رشت	دکتر بهشتی
۶	آرش یوسف‌زاده نقدی	رشت	دکتر بهشتی

(مازندران)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	کاوش تسلیمی بابلی	بابلسر	شهدای امینی
۲	علی‌اکبر داوودیه	بهشهر	نوشطیرون جلیلیان
۳	تقی رضایی جرانی	بابلسر	شهدای امینی
۴	حسن ۷ قری فیروزجائی	بهشهر	امام صادق (ع)
۵	مجید نریمان نژاد	آمل	امام خمینی

(کهکیلویه و بویراحمد)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	بیژن عباس آزند	چرام	دکتر بهشتی

(استان اصفهان)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	وحید امامیان	گلپایگان	آیت... گلپایگانی
۲	غلامرضا ابراهیم‌دوست	خمینی‌شهر	شهدا
۳	شهرام اویس قرنی	اصفهان	شهدای ادب
۴	محمد هادی بلیغ	اصفهان	ملتج
۵	بهرام پرتا	زرین‌شهر	طالقانی
۶	مجید رجا	اصفهان	شهید رجایی
۷	مجید زنجانی	اصفهان	شهدای ادب
۸	محسن شاه محمدی	اصفهان	هاشمی رفسنجانی
۹	عباس خلاکتی	نائین	چمران
۱۰	روزبه علوی	اصفهان	عدل
۱۱	محمدرضا مرتضی ساماتی	اصفهان	شهدای ادب
۱۲	مهران صادقی	اصفهان	شهید نیلفروشزاده
۱۳	پوریا علوی	اصفهان	عدل
۱۴	افشانه فاطمی	اصفهان	شهید محبوب بهبهانی
۱۵	فاطمه کاوزی	گلپایگان	فاطمه‌الزهرا
۱۶	علی مرادی	اصفهان	شهدای ادب
۱۷	هومان نصیبی	اصفهان	شهید بهشتی

(استان خراسان)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	داود جعفری	مشهد	فردوسی
۲	هادی حاجی‌زاده سلطان‌آبادی	مشهد	مالک اشتر
۳	بی‌بی فاطمه حسینی جان‌آبادی	مشهد	علامه طباطبایی
۴	سید علیرضا رضوی	بیرجند	نمونه تربیت
۵	مهدی شریف‌زاده	بیرجند	نمونه تربیت
۶	رضا شعبانیان	مشهد	حکمت
۷	محمد شامین	مشهد	آینده‌سازان
۸	حمیدرضا ظفریان جم	مشهد	آینده‌سازان
۹	مجتبی فرجاد	سبزوار	نمونه باقرالعلوم
۱۰	عباس گلستانی	مشهد	آینده‌سازان
۱۱	ابوالفضل مالکی	بیرجند	نمونه تربیت
۱۲	مجید محمدی قانی	مشهد	نمونه آینده‌سازان
۱۳	رامین یادگار آذری	مشهد	حکمت

(استان ایلام)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
	حسین بلوری	ایلام	شهید رجایی

(خوزستان)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	رامین تکاوپیش	بندر امام	مالک اشتر
۲	تکلو شهنی گرمزاده	اهواز	الزهرا
۳	احسان حسینی	اهواز	شریعتی

(زنجان)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	هاله حق‌شناس	قزوین	توحید
۲	حسین تیموری قبال	زنجان	امیرکبیر
۳	محمد خسروی فرد	قزوین	پاسداران

(هرمزگان)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	منوچهر عسکری	بندرعباس	جامعه‌الصادق
۲	علی ستارزاده	بندرعباس	جامعه‌الصادق
۳	فرهاد اکبری	بندرعباس	جامعه‌الصادق

(همدان)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	علیرضا توکلی	کبودرآهنگ	دکتر بهشتی
۲	رضا رافع	ملایر	نمونه
۳	نوید ولائی	همدان	شهید پیرو

(یزد)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	حمیدرضا حسینی ابوطالبی رفسنجانی	یزد	باقرالعلوم
۲	کمال پوررضایی	میبد	طالقانی
۳	محسن دلدارنیا	یزد	باقرالعلوم

(کرمان)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	سید شهاب‌الدین حسینی‌زاده	کرمان	شهداء
۲	علیرضا حسینخانی	کرمان	شهداء
۳	مهدی کلانتری	کرمان	شریعتی

(استان باختران)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	فریدون عباسی غزایی	باختران	نمونه
۲	مجتبی لطفی	باختران	نمونه
۳	محمد کدیور	باختران	نمونه

(استان بوشهر)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	محمدحسین خوانساری	بوشهر	نمونه امام خمینی
۲	مزدک مرختیان	بوشهر	سعادت
۳	محمود طبرزاده	بوشهر	سعادت
۴	حسین نیکو پوردیلمی	بوشهر	سعادت

(آذربایجان شرقی)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	محمد جمول‌القلمی لطری	تبریز	ولیعصر
۲	فرشاد رضوان	تبریز	طالقانی
۳	منیره صدقی	تبریز	الزهراء
۴	حمیدرضا قبادی	تبریز	ولیعصر
۵	مسعود ملکپور	اردبیل	شهدای تبریز

(مرکزی)

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان یا منطقه	دبیرستان
۱	امیر محمد اصغری	اراک	صمصامی
۲	رسول درخشان	اراک	نمونه
۳	فرزین صمدی	محلات	دکتر بهشتی
۴	امیرعباس معصومی	ساوه	انقلاب اسلامی
۵	لشکان نیک آیین	اراک	نمونه

نقش ریاضیات در زندگی بشر و شناخت طبیعت

قسمت دوم

دکتر غلامرضا دانش‌نارولی

بشر در تلاش خستگی‌ناپذیرش برای شناخت محیط زیست ودستیابی به هدفهای یاد شده در قسمت اول ناچار بوده (و هست) که دانش خود را در بارهٔ جهان خارجی (هستی) گسترش دهد. اولین سؤالی که مطرح می‌شود این است که چگونه دانش خود را درباره جهان خارجی به‌دست می‌آوریم. روشن است که برای دستیابی به این هدف حداکثراستفاده را از حواس پنجگانه می‌کنیم وبرای انجام کارهای روزانه و بهره‌گیری از نعمتهای زندگی همه متکی به ادراکات هستیم. گرچه این ادراکات اطلاعات زیادی درباره جهان خارجی به ما می‌دهند ولی متأسفانه صرفنظر از اینکه این اطلاعات غالباً خام و نارسا هستند در بسیاری از موارد دسترسی به آنها از این طریق غیر ممکن است. پدیده‌های اساسی جهان هستی ما به هیچ وجه به وسیلهٔ حواس قابل درک نیستند واگرنیرویی فوق نیروی حواس نداشتیم زندگی بشر شاید هنوز در شرایط چندهزار سال قبل بود و از بسیاری ازامکانات و نعمتهای امروزی محروم بودیم.

برای این که ناتوانی حواس پنجگانه و قدرت ریاضیات برای ما روشن شود کافی است به موارد زیر توجه کنیم:

۱ــ حواس ما قادر نیست در مورد کروی بودن زمین، مدار و حرکت و گردش آن به دورخورشید و به دور محور خودش چیزی به ما بگوید.

۲ــ حواس ما ناتوان‌تر از آن است که به ما چیزی دربارهٔ ماهیت نیرویی که موجب نگهداری سیارات و گردش آنها به دور خورشید می‌شود بگوید.

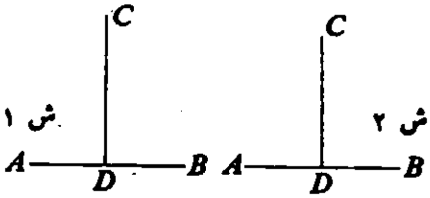
۳ــ حواس ما به هیچ وجه نمی‌تواند درشناخت امواج مغناطیسی که توانایی دریافت برنامه‌های رادیویی و تلویزیونی را از هزارها بلکه میلیونها فرسنگ به ما می‌دهد و مخابرات تلفنی را ممکن می‌سازد کوچکترین کمکی به ما بکند. رادیو و تلویزیون و تلفن و... تنها وجود این امواج را اعلام می‌کنند و بس.

۴ــ مثالهای زیر نشان می‌دهند که متأسفانه حواس ما نه تنها محدودیت دارند بلکه در مواردی گمراه‌کننده نیز می‌باشند و اتکاء به آنها (به تنهایی) ممکن است فاجعه‌آمیز باشد.

الف ــ ناتوانی حس بینایی

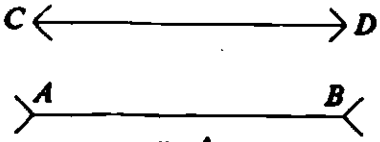
در بین حواس پنجگانه شاید مهمترین آنها حس بینایی باشد. در طول سالیان دراز به منظور نشان دادن این واقعیت که حس بینایی محدودیت دارد و گاهی نیز فریب‌دهنده هست اشکال هندسی خاصی ترسیم شده است که‌نمونه‌هایی چند از آنها را در زیر ملاحظه می‌کنید. در حقیقت فیزیکدانان و منجمین‌قرن نوزدهم به دلیل نگرانی در نامطمئن بودن مشاهدات عینی علاقه خاص به چشم‌بندی پیدا کردند تا نشان‌دهند که مشاهدات عینی فاقد اعتبار لازم هستند، و نمی‌توانند مبنای درستی برای قضاوت باشند. ویلهلم ووندت (Wilhelm Wundt) دستیار دانشمند سرشناس هلمهولتز (Helmholtz)شکل ۱ را ساخت که به ظاهر نشان می‌دهد CD بزرگتر است از AB در صورتی که برابرند.

در شکل ۲ چنین به نظر می‌رسد که AB وCD برابرند درصورتی که AB از CD بزرگتر است.



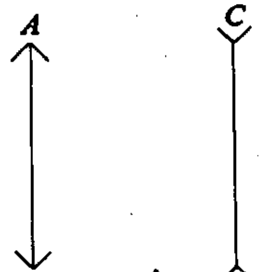
ش ۱ ش ۲

مولرلیر در ۱۸۹۹ میلادی شکل ۳ را رسم کرد که به خطای ارنست ماخ نیز شناخته می‌شود. در اینجا دوپاره خط با هم مساوی‌اند و این اثر زوایا است بر دید ما که آنها را نابرابر نشان می‌دهد.



ش ۳

شکل ۴ نیز به مولر–لی‌یر نسبت داده می‌شود، در این شکل می‌توان AB را نبش خارجی یك ساختمان و CD را محل تلاقی دو دیوار داخل ساختمان تصور کرد. در اینجا اثر زوایا ABرا کوتاهتر و CDرا بلندتر نشان می‌دهد. (شاید این تجربه را شما هم کرده باشید که ساختمانی از بیرون کوتاه بنظر می‌رسد ولی‌وقتی داخل آن می‌شوید سقفها بلندتر از انتظار شما هستند).



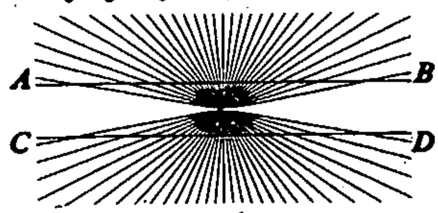
ش ۴

یوهان – زونه اولین کسی بود که خطای اشکال ۵ و ۶ را بیان کرد. وی به طور تصادفی از روی الگوی طراحی‌شده برای پارچه متوجه این مطلب شد. ملاحظه می‌کنید که خطوط راست موازی AB و CD در این اشکال چگونه خمیده به نظر می‌رسند. و حالت توازی ظاهراً از بین رفته است.

ش ۵

ش ۶

ادوارهرینگ در سال ۱۸۶۱ شکل ۷ را ارائه داد. در اینجاخطوط موازی AB و CD در رابطه باخطوط متقارب خمیده به نظر می‌رسند و حالت توازی را به‌ظاهر امر ازدست



ش ۷

می‌دهند.

یکی از خطاهای حس بینائی‌که از دیر زمان مورد توجه بوده است و کم و بیش هر کسی ممکن است آن‌را تجربه کرده باشد «سراب» است – پدیده‌ای که در اثر طبقات مختلف حاصل از غلظت هوا به علت حرارت خورشید و اثر انعکاس کامل ایجاد می‌شود – تصور کنید اگر مسافری‌در یك روز گرم تابستان به نیروی بینایی اعتماد کند و آنچه را چشم می‌بیند و به وی حکم می‌کند دنبال نماید چه سرنوشت شومی در انتظار او خواهد بود.

هنگام غروب قرص خورشید گرد به نظر نمی‌رسد بلکه بیضی‌گون است که قطر عمودی‌اش کوتاهتراست از قطر افقی‌اش! (این پدیده به علت خم شدن نور در جو زمین حاصل می‌شود).

علاوه بر مطلب فوق چشم در حالت عادی تنها دسته‌ای از نورهایی را می‌بینند که طول موجشان در حد معینی (تقریباً بین ۷ تا ۱۴ میلیونیم سانتی‌متر) است، در صورتی که در طبیعت اشعه‌هایی وجود دارند که‌طول موجشان کمتر از این است و برای ما قابل رؤیت نیستند و به عبارت دیگر خارج از حوزهٔ توانایی حس بینایی ما می‌باشند (امواج مفناطیسی از این گونه‌اند).

ب– نارسایی‌های سایر حواس

دست چپ را در ظرف آب نسبتاً داغ و دست راست را در ظرف آب سرد فرو برید و برای چند دقیقه نگهدارید. سپس هردو دست را در یك ظرف آب نیم گرم قرار دهید. مشاهده خواهید کرد که دست چپ شما آب را سردتر از دست راست شما حس می‌کند.

اگر محلول غلیظ شکر و آب را برای چند ثانیه در دهان‌نگهدارید و پس از آن آب تازه و معمولی بیاشامید آب تازه‌را شور حس‌خواهید کرد (آزمایش کنید!). شاید شوری یا بی‌نمکی غذاهای خانگی از همین‌جا سرچشمه می‌گیرد!

گوش انسان به طور عادی‌تنها صداهایی را می‌شنود که فرکانس آنها بین ۲۰ تا ۲۰۰۰۰ در ثانیه است و توانایی شنیدن صداهایی را که فرکانس آنها خارج از این حدود است ندارد.

ج – ادراك شهودی

ممکن است ادعا شود که علاوه بر حواس پنجگانه ادراك شهودی داریم که می‌توان به‌آن اعتمادکرد. حال‌ببینیم تا چه‌اندازه می‌توان سرنوشت خود را به ادراك شهودی بسپاریم!

از خواننده تقاضا می‌شودبدون مراجعه به پاسخ داده شده جوابی را که به نظر وی درست می‌آید روی کاغذ بنویسد (البته بدون توسل به استدلال!)

۱– فرض کنید شخصی با اتومبیل از شهر A به شهر B (که به فاصله ۵۴۰ کیلومتر از یکدیگر قرار دارند) برود و برگردد. اگر در رفتن با سرعت ثابت ۹۰ کیلومتر در ساعت و در برگشت با سرعت ثابت ۶۰ کیلومتر حرکت کند سرعت متوسط او چقدر است؟

پاسخ: ادراك شهودی حکم می‌کند که سرعت متوسط وی ۷۵ کیلومتر است در صورتی که پاسخ درست ۷۲ کیلومتر است.

۲– فرض کنید شخصی با قایقی مسافت ۴ کیلومتر در خلاف جریان و سپس ۴ کیلومتر در جهت جریان آب رودخانه‌ای که سرعت جریان آب در آن ۶ کیلومتر درساعت می‌باشد حرکت کند. اگر این شخص بتواند با سرعت ۱۰ کیلومتر در ساعت در آب ساکن (راکد) حرکت کند. زمان رفت و برگشت وی چقدر است؟

پاسخ: ادراک شهودی حکم می‌کند که به همان اندازه که جریان‌آب به سرعت قایق در جهت جریان‌کمک می‌کند در خلاف جهت مانع حرکت می‌شود و در نتیجه عملا اثرش خنثی می‌شود و به این ترتیب زمان رفت‌و برگشت این شخص ۴۸ دقیقه است. ولی پاسخ درست یك ساعت و ربع است!.

۳ـ مثال جالب دیگری که ناتوانی و نارسائی ادراک شهودی را بخوبی نشان می‌دهد از این قرار است:

فرض کنیم به جوانی که‌دنبال کار است دو شغل پیشنهاد شده است که هر یك با حقوق سالیانه معادل ۶۰۰۰۰ تومان شروع می‌شود. شغل اولی سالی ۶۰۰۰ تومان افزایش حقوق دارد در صورتی که برای شغل دوم هر شش ماهی ۱۵۰۰ تومان افزایش حقوق در نظر گرفته شده است. کدام شغل از نظر مالی به نفع این جوان است؟

پاسخ: ادراک شهودی حکم می‌کند که شغل اولی بهتر است از شغل دومی، در صورتی که با اندکی تعمق ملاحظه می‌شود که شغل دومی بیشتر به نفع وی است. برای روشن شدن مطلب به جدول مقایسه‌ای زیر توجه کنید.

	۶ماهه‌اول	۶ماهه‌دوم	۶ماهه‌سوم	۶ماهه‌چهارم	۶ماهه‌پنجم	۶ماهه‌ششم
شغل اول	۳۰۰۰۰	۳۰۰۰۰	۳۳۰۰۰	۳۳۰۰۰	۳۶۰۰۰	۳۶۰۰۰
شغل دوم	۳۰۰۰۰	۳۱۵۰۰	۳۳۰۰۰	۳۴۵۰۰	۳۶۰۰۰	۳۶۵۰۰

ملاحظه می‌شود که در ۶ ماهه‌های‌فرد حقوق‌ها یکسان ولی در ۶ ماهه‌های زوج شغل دوم پول بیشتری عاید می‌کند و عملا می‌بینیم که: سیلی‌نقد به از حلوای نسیه است!

۴ـ فرض کنید شخصی که در فاصله‌ای نسبتاً دور از درخت پرتقالی قرار دارد متوجه شود که پرتقالی در حال افتادن از درخت است. این شخص هوس می‌کند این پرتقال را با تفنگ در هوا بزند. وی با علم به اینکه هنگام رسیدن گلوله به هدف پرتقال فاصله‌ای را نسبت به زمین طی می‌کند نشانه‌گیری می‌نماید. برای اینکه گلوله‌اش به هدف بخورد آیا باید نقطه‌ای پایین‌تر از پرتقال را هدف قرار دهد؟ (فرض کنید خروج گلوله از تفنگ و سقوط پرتقال همزمان صورت گیرد).

پاسخ: برخلاف انتظار جواب نه است و باید خود پرتقال را هدف قرار داد؛ زیرا پرتقال و گلوله هردو یك فاصله افت می‌کنند (بر اثر قوهٔ جاذبه زمین).

از مثالهای فوق ملاحظه می‌شود که ادراک شهودی ترکیبی است از تجربه، برداشتهای حسی و حدس‌خام، و در بهترین وجه می‌توان گفت که ادراک شهودی تجربهٔ محض است و کاوشهای بعدی یا تجربه‌های آینده آن را تأیید و یا رد می‌کند.

همین نارسائی‌ها و عدم‌اعتماد به حواس پنجگانه و ادراک شهودی است که کار قضاوت را بسیارمشکل می‌کند و امر شهادت را بی‌اندازه پیچیده و خطرناك می‌نماید. به همین دلیل است که قضات برای صدور احکام خود، ادله کافی و مستند و خالی از خطا جمع‌آوری می‌کنند. تصور کنید اگر یك قاضی درصدور رأی خود تنها به شهادتهایی که بر مبنای حواس پنجگانه داده می‌شود اکتفا کند ممکن است سر یك بی‌گناه به پای دار برود.

حال این سئوال مطرح می‌شود که برای رفع خطاهای حسی و جلوگیری از لغزشهای ادراک‌شهودی چه باید کرد؟

بهترین پاسخ به این پرسش آن است که باید از نیروی خدادادی استدلال کمك گرفت و راه چاره را در توسل به ریاضیات جست. بدون شك قدم مؤثر، توانا و قاطع که دانش ما را در باره جهان خارجی افزوده و زندگی مادی ما را تا این حد بهبود بخشیده است به کارگرفتن ریاضیات می‌باشد.

شاید تلخ‌ترین واقعیت درباره ریاضیات این است که ریاضیات از ما برهان و دلیل می‌خواهد و از نیروی عظیم مغز (که ما را از حیوانات برتر می‌سازد) استفاده می‌کند، در صورتی که بعضی از مردم اعتقادی به ارزش استدلال ندارند.

شاید دلیل این امر آن باشد که‌ارزش استدلال به‌طور اعم و ارزش استدلال ریاضی به‌طور اخص برای عامه مردم روشن نیست. مردم برای بسیاری از تجربیات و اعمال روزانه نیازی به استدلال نمی‌بینند. از ورزش و تفریح و مصاحبت یکدیگر لذت می‌برند بدون آنکه به استدلال متوسل شوند. حتی برای امرار معاش کسبه و بازرگانانی که ثروت هنگفتی به‌هم می‌زنند بدون اینکه مفاهیم اولیه حساب را بدانند. از این مشاهدات برای بعضی افراد امر مشتبه می‌شود که استدلال یك امر لازم و طبیعی نیست. ولی با اندکی‌اندیشه وبررسی امور اجتماعی می‌بینیم که استدلال نه تنها مفید است بلکه در بعضی موارد گریزی از آن نیست.

یك پزشك برای تشخیص‌مرض به کمك استدلال از نشانه‌ها یا عوارض آن پی به علت می‌برد. یك قاضی یا وکیل‌مدافع برای قانع‌کردن هیأت داوری غالباً به استدلال متوسل می‌شود. یك مهندس برای طراحی‌و تولید یك فرآورده جدید به طور مستمر ازنیروی استدلال‌بهره می‌گیرد. یك محقق و دانشمند با استدلال

از مدارك به دست آمده از مشاهدات عینی و تجربی نتیجه‌گیری می‌کند و...

هدف و ارزش چنین استدلالهائی رسیدن به اطلاعات و دانشهائی‌است که یا با وسایل دیگر نمی‌توان به آنها دست یافت و یا با زحمت زیاد و صرف هزینه‌های هنگفت و تلاش بیشتری امکان‌پذیرند. منطق و استدلال ریاضی تجربیات خام به دست آمده از مشاهدات فیزیکی را (که مبتنی بر حواس پنجگانه وادراك شهودی است) سکوی حرکت خودش‌در فضای بی‌کران اندیشه، که تجربه را درآن مقطع زمانی خاص و یاهیچوقت راهی نیست، قرار می‌دهد و دربعضی موارد به پدیده‌هائی دست می‌یابد که خارج از قدرت حواس و حتی تخیل است.

به عبارت دیگر، بسیاری از مفاهیم و یا واقعیتهای فیزیکی از تجربه‌ها و مشاهدات عینی سرچشمه می‌گیرند و سپس به کمك استدلال ریاضی و استنتاج‌های منطقی نتایجی را پیش‌بینی می‌کنند که تجربه‌ممکن است در زمان خاص نتواند به آن دسترسی پیدا کند و نیاز به زمان و پیشرفت تکنولوژی لازم و مناسب داشته باشد.

از بین انواع مختلف استدلال (که دراینجا وارد این بحث‌نمی‌شویم) استدلال قیاسی است که درست بودن نتیجه را تضمین می‌کند. پایه روش این استدلال بر یك مجموعه اصول موضوعه گذاشته می‌شود. استنتاج از این اصول است که به‌ما امکان بدست آوردن دانشهای کاملا جدید برای اصلاح ادراکات حسی وکشف پدیده‌های‌ناشناخته می‌دهد. منطق درحقیقت زادهٔ ریاضیات است.

برای اینکه قدرت ریاضیات و استدلال منطقی روشنتر شود به مثالهای زیر توجه کنید:

۱ـ محاسبه محیط دایره عظیمه زمین: اراتستن (Erathestene) دانشمند، شاعر، مورخ و منجم و جغرافی‌دان و ریاضیدان بنامی بودکه قبل از میلاد مسیح می‌زیست. وی مانند سایر یونانیان می‌دانست که زمین کروی است و به این دلیل قصد محاسبهٔ دور زمین را کرد. وی به کمك محاسبات ساده مثلثاتی توانست کاری را انجام دهد که در آن روزگار با نبودن تکنولوژی مناسب از طریق تجربه امکان‌پذیر نبود.

۲ـ سیاره نپتون نظریه نجومی لاگرانژو لاپلاس وجود و محل سیاره نپتون را پیش‌بینی کرد و رئیس رصدخانهٔ پاریس قبل از کشف این سیاره مدار آن را محاسبه و یك ریاضی‌دان انگلیسی در سال ۱۸۴۱ جرم و محل آن را مشخص کرد (این محاسبات از اثرات این سیاره بر حرکت اورانوس و بی‌نظمی‌های حاصله انجام شد).

۳ـ ستاره‌شناس معروف قرن هفدهم هالی (۱۷۴۲ ـ ۱۶۵۶) به تشویق نیوتن مدارهای ستارگان دنباله‌دار را مورد بررسی قرار داد و با استفاده از نظریه جاذبهٔ نیوتن پیش‌بینی کرد که ستاره دنباله‌داری که در سالهای ۱۵۳۱، ۱۶۰۷ و ۱۶۸۲ دیده شده است مجدداً در سال ۱۷۵۸ یا ابتدا ۱۷۵۹ ظاهر خواهد شد. این ستاره روز کریسمس در سال ۱۷۵۸ ظاهر گردید. و از آن به بعد در سال ۱۹۱۰ و ۱۹۸۶ رؤیت شد.

۴ـ حالت بی‌وزنی در فاصله‌ای معین از زمین وحرکت اقمارمصنوعی در مدار معین سالها پیش از آنکه تجربه را به آن دسترسی باشد پیش‌بینی شده است.

۵ـ زمانهای کسوف و خسوف از سالها بلکه قرنها پیش مشخص می‌شود.

۶ـ سفینه‌ای به فلان کره آسمانی فرستاده می‌شود. زمان‌رسیدن آن را به کره مورد نظر از قبل پیش‌بینی می‌کنند (محاسبه می‌کنند).

۷ـ حجم و جرم کرات آسمانی و فاصلهٔ سیارات از زمین و خورشید قرنها پیش به کمك ریاضی تعیین شده است.

۸ـ صرفاً استدلال و ملاحظات ریاضی ماکسول (Maxwell) راهدایت کرد تا وجود امواج برقاطیسی را که به هیچوجه مستقیماً به وسیله حواس قابل درك نیستند کشف کند. امروزه آثار این امواج وجود آنها را غیر قابل انکار می‌کند.

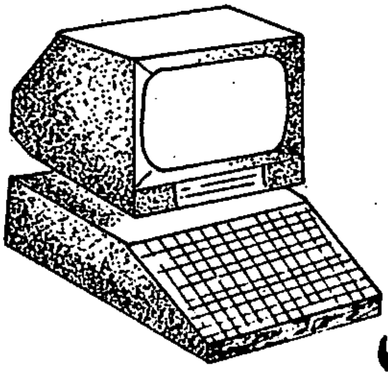
۹ـ نظریه نسبیت عمومی اینشتاین نتایجی را پیش‌بینی کردکه سالها بعد تجربه آنها را تأیید کرد.

۱۰ـ از طریق ریاضی می‌توان ثابت کرد که در هر لحظه از زمان دست کم دو نقطه در روی کرهٔ زمین وجود دارند که درجهٔ حرارت مساوی دارند و یا در هر لحظه از زمان حداقل دو نفر در روی کره زمین هستند که تعداد تارهای موی سرشان برابرند، اما نشان دادن این امر از طریق تجربه در زمان حاضر غیر ممکن است.

۱۱ـ نمونه‌های فراوان دیگری وجود دارد که حتی با ریاضیات‌بسیار مقدماتی و ساده نتایجی به دست می‌آید که با تجربه یا غیر ممکن است و یا بسیار مشکل. مثلا محاسبهٔ ارتفاع کره از سطح دریا، ارتفاع درخت، کندن تونل و...

از این مثالها بخوبی دیده می‌شود که ریاضیات می‌تواند دانشی به دست دهد که با حدس، ادراك‌شهودی و یا تجربه نمی‌توان دست یافت. به عبارت دیگر، به این نتیجه می‌رسیم که بپذیریم جهان هستی ما آن‌نیست که حواس ناتوان ما معرفی می‌کنند یا ادراکات محدود به ما می‌شناسانند بلکه آن چیزی است که نظریه‌های اساسی ریاضی به ما عرضه می‌کنند.

ادامه دارد



آشنایی با مبانی انفورماتیك و کامپیوتر

گروه کامپیوتر
دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب
درسی وزارت آموزش وپرورش

آموزش کامپیوتر (۲)

درشمارهٔ قبل، تا حدودی با نوشتن الگوریتمهای ساده آشنا شدید. دراین شماره ابتدا چند مثال دیگر از الگوریتم‌سازی می‌آوریم وبعد شما را با نمودارگردشی یا فلوچارت،که نمایش تصویری الگوریتم است، آشنا خواهیم کرد.

در برخی الگوریتمها مجبوریم فرایند مشخصی را به دفعات زیاد تکرارکنیم. گاهی اوقات تعداد این دفعات، هرچند متغیر، مشخص است وگاهی اصلاً مشخص نیست. مثالهای زیراین دو مورد را نشان می‌دهند.

مثال ۱. تعداد N فقره جنس خریده‌ایم مجموع قیمتهای آنها چقدر می‌شود. (یا، برای ارزشیابی افرادی N عامل درنظر گرفته شده که به‌هر عامل امتیازی داده می‌شود مجموع امتیازات هرفرد چقدراست؟)

مثال ۲. تعدادی جنس خریده‌ایم مجموع قیمتهای آنها را حساب کنید.

درمثال ۱ تعداد اجناس، قبل ازقیمت آنها، داده می‌شود (هر چند ممکن‌است ازیك مسأله به مسأله دیگر این تعداد تغییرکند)، ولی درمثال ۲ تعداد اجناس معلوم نیست وباید چاره‌ای اندیشید. دراینجا با توجه به‌اینکه قیمت هرجنس عددی بزرگتر ازصفر است می‌توان بعد ازاینکه قیمت آخرین جنس داده شد یك‌عدد، مثلاً صفریا یك عدد منفی، که به‌گونه‌ای متمایز از قیمت اجناس باشد، داد تا ضمن مقایسه قیمتها با آن بتوان به‌این مطلب که کدام داده قیمت نهایی است پی برد. الگوریتمهای زیر مربوط به‌مثالهای ۱ و ۲ هستند ومطلب بالا را بیشتر روشن می‌کنند.

الگوریتم مثال ۱

۱- شروع
۲- تعداد اعداد را بخوان و این تعداد را در N قرار بده
۳- عدد اول را بخوان و در A قراربده
۴- $SUM \leftarrow$ ۰ و $I \leftarrow$ ۱
۵- $SUM \leftarrow SUM+A$ (یعنی A را با مقدار قبلی SUM جمع کرده ومقدار جدید SUM قراربده)
۶- اگر $I \geqslant N$، به‌مرحلهٔ ۹ برو. (دقت داشته باشید که اگر $I<N$ اجرای عملیات ازمرحله ۷ ادامه می‌یابد.)
۷- عدد بعدی رابخوان و در A قراربده
۸- $I \leftarrow I+$۱ وبه مرحله ۵ برگرد
۹- SUM، مجموع اعداد است.
۱۰- پایان

به این ترتیب مجموع N عدد محاسبه شده و درمتغیر SUM قرارمی‌گیرد. اولین داده را که تعداد اعداد را مشخص می‌کند، «دادهٔ رأسی» می‌نامند.

بهتراست اجرای هر الگوریتمی را با چند مثال مختلف به طور دستی‌آزمایش کنید، تا ازصحت الگوریتم نوشته شده تا حدودی مطمئن شوید. درمورد الگوریتم فوق اعداد ۴، ۳، ۱۰، ۱۷ و ۹− را در نظرمی‌گیریم (که درآن ۴ دادهٔ رأسی‌است و پس ازآن به‌همین تعداد عدد داریم). جدول زیر را، با توجه به الگوریتم مثال ۱، تشکیل می‌دهیم:

N	A	I	SUM
۴	۳	۱	۰
	۱۰	۲	۳
	۱۷	۳	۱۳
	۹−	۴	۳۰
			۲۱

$SUM =$ ۲۱

درالگوریتم زیر بعد از قیمت آخرین جنس عدد صفر داده می‌شود.

الگوریتم مثال ۲

۱ـ شروع
۲ـ $SUM \leftarrow$ ۰
۳ـ قیمت اولین جنس خریداری شده را بگیر و در A قرار بده
۴ـ $SUM \leftarrow SUM+A$
۵ـ قیمت بعدی را بگیر و در A قرار بده (توجه کنید که این قیمت ممکن است صفری باشد که در انتها می‌دهیم).
۶ـ اگر $A\neq$ ۰، به‌مرحلهٔ ۴ برگرد
۷ـ SUM، مجموع پول خرج شده است
۸ـ پایان

تمرین ۱ـ این الگوریتم را برای قیمتهای ۷۵، ۸۰، ۱۲۵، ۱۲ و ۳۸ ریال بطور دستی آزمایش کنید. (دقت کنید که در پایان داده‌ها باید عدد صفر را وارد کنید)

تمرین ۲ـ الگوریتم بالا را طوری تغییردهید که تعداد اقلام خریداری شده را نیزمشخص کند.

همانگونه که دراین الگوریتم ملاحظه می‌نمائید، (با اطمینان به‌اینکه قیمت هیچیك ازجنسها صفر ریال نیست) انتهای عملیات را با ورودی صفر مشخص کرده‌ایم. آخرین داده را که انتهای ورودیها را مشخص می‌کند، «دادهٔ نگهبان» می‌نامند.

درمواقعی که تعداد دفعات تکراریك فرآیند مشخص باشد، از دستورات مناسبی می‌توان استفاده کرد، که درآینده (درمبحث برنامه‌نویسی) به‌آموزش این دستورات خواهیم پرداخت.

گاهی اوقات امکان دارد، فرایندهای تکراری به صورتهای دیگری نیز وجود داشته باشند. دستورات زیر را درنظربگیرید:

۱ـ شروع
۲ـ $m \leftarrow$ ۲
۳ـ m را بنویس
۴ـ $m \leftarrow m+$۲ و به مرحله ۳ برگرد
۵ـ پایان

با اجرای این دستورات اعداد زوج تولید ونوشته می‌شوند. ولی تا کجا؟ نوشتن اعداد چه زمانی‌متوقف می‌شود؟! هیچگاه!!؟ راه چاره چیست؟

برای اینکه دچارچنین اشکالی نشویم. بایستی یك شرط خاتمه به‌دستورات بالا اضافه کنیم. به‌این ترتیب الگوریتم زیر، که اعداد زوج‌کوچکتر از ۱۰۰ را تولید می‌کند، حاصل‌می‌شود.

الگوریتم زوج

۱ـ شروع
۲ـ $m \leftarrow$ ۲
۳ـ m را بنویس
۴ـ $m \leftarrow m+$۲
۵ـ اگر $m<$۱۰۰، به‌مرحله ۳ برگرد
۶ـ پایان

حال با توجه به مطالب فوق سعی کنید بهترین الگوریتم را برای تمرینهای زیر بنویسید.

تمرین

۱ـ الگوریتمی بنویسید که حاصل عبارت زیر را به دست آورد.

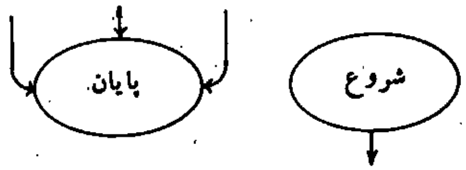
$$۲+۲^{۲}+۲^{۳}+\cdots+۲^{N}$$

۲ـ الگوریتمی بنویسید که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو عدد طبیعی را تعیین کند.
(راهنمایی: از روش نردبانی وتکرارفرایند تقسیم استفاده‌کنید.)

نمودار گردشی ونمایش یك الگوریتم

همانطور که ملاحظه نمودید مراحل مختلف حل هر مسأله‌ای را می‌توان به وسیلهٔ الگوریتم بیان کرد. برای قابل فهمتر کردن هرالگوریتمی نیزمی‌توان آن را به تصویر کشید، نمایش یك الگوریتم به‌وسیلهٔ «نمودارگردشی» یا «فلوچارت» میسرمی‌باشد. برای رسم نمودارگردشی ازمؤلفه‌های تصویری مشخصی‌استفاده می‌شود، که به‌معرفی‌آنها می‌پردازیم:

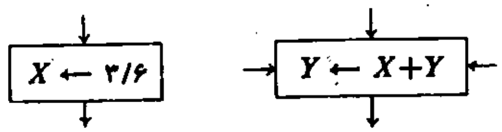
ـ خانهٔ شروع وپایان، که با شکل بیضی نشان داده می‌شود.



خانهٔ شروع فقط یك پیکان خروجی دارد (پیکان ورودی ندارد)

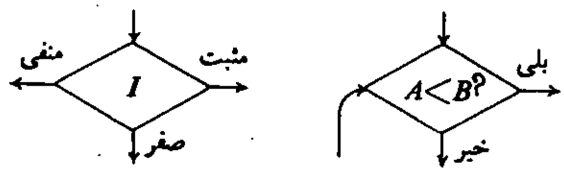
خانهٔ پایان می‌تواند بیش از یك پیکان ورودی داشته باشد (پیکان خروجی ندارد)

ـ خانهٔ عملیات محاسباتی و جایگزینی، که با شکل مستطیل نشان داده می‌شود.



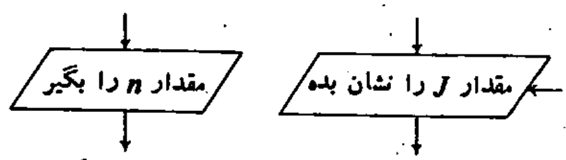
این خانه دارای یك پیکان خروجی است ولی می‌تواندبیش ازیك پیکان ورودی داشته باشد.

ـ خانهٔ عملیات شرطی، که با شکل لوزی نشان‌داده می‌شود.



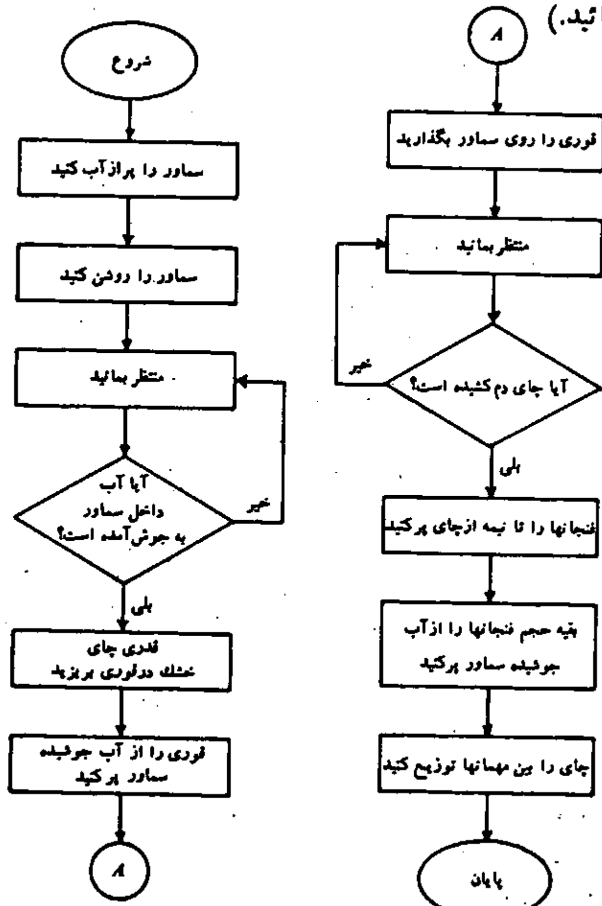
این خانه دارای یک یا چند پیکان ورودی است و می‌تواند دو یا سه پیکان خروجی داشته باشد.

ـ خانهٔ عملیات ورودی وخروجی، که با شکل متوازی‌الاضلاع نشان داده می‌شود.



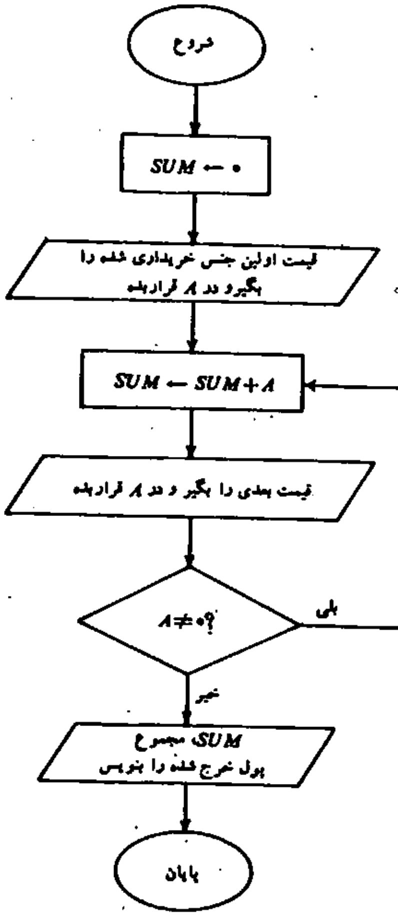
خانهٔ عملیات ورودی یا خروجی، فقط یک پیکان خروجی دارد ولی می‌تواند بیش از یك پیکان ورودی داشته باشد.

مثال ۱. به‌عنوان اولین مثال، نمودار گردشی الگوریتم تهیه چای را رسم می‌نمائیم. (به شمارهٔ پیشین این مجله مراجعه نمائید.)



(توضیح: خانهٔ A درنمودار گردشی، برای اتصال انتهای نمودار سمت چپ به‌ابتدای نمودارسمت راست می‌باشد.)

مثال ۲. نمودارگردشی الگوریتم مجموع قیمتها چنین است:



تمرین. نمودارگردشی الگوریتم زوج را رسم کنید.

مثال ۳. فرض کنید می‌خواهیم ماکسیمم دوعدد را معین کنیم. الگوریتم ونمودار گردشی‌آن را ارائه می‌دهیم:

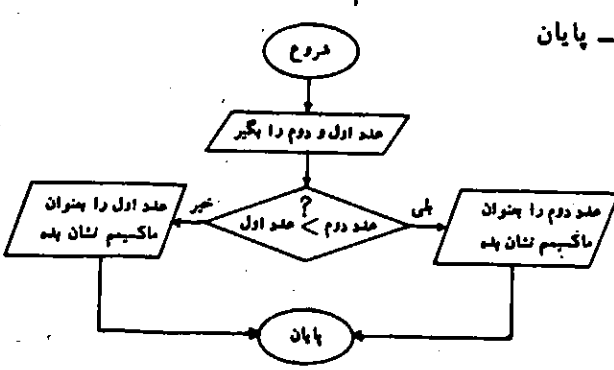
الگوریتم ماکسیمم

۱ـ شروع

۲ـ یکی‌از دوعدد را «عدد اوّل» و دیگری را «عدد دوم» بنامید.

۳ـ اگر عدد اول از عدد دوم کوچکتر بود عدد دوم ماکسیمم است والا عدد اول ماکسیمم است.

۴ـ پایان



مثال ۴. با توجه به اینکه زبان طبیعی معمولاً دارای ابهام بوده و

جملات آن طولانی هستند بکاربردن حروف ونمادهای ریاضی، بویژه وقتی مسأله ریاضی است، متداول وتوصیه می‌شود. ذیلاً الگوریتم ماکسیمم را با استفاده از حروف ونمادهای ریاضی می‌نویسیم:

الگوریتم MAX

۱ـ شروع

۲ـ یکی از اعداد را A و دیگری را B بنامید

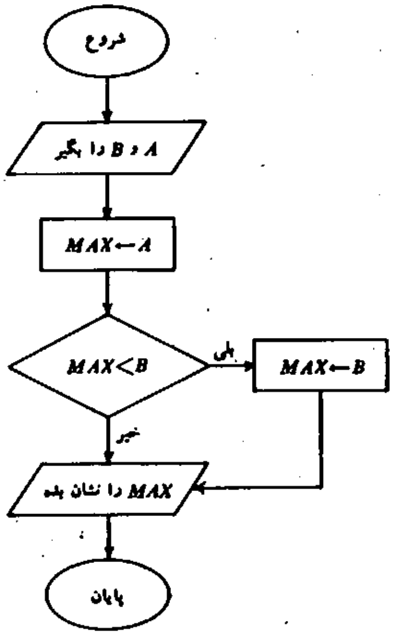
۳ـ قرار دهید $MAX \leftarrow A$ (یعنی فرض کنید A ماکسیمم باشد)

۴ـ اگر $MAX < B$، قرار دهید $MAX \leftarrow B$

۵ـ MAX را نشان بده

۶ـ پایان

نمودار گردشی این الگوریتم بشکل زیر است:



تمرین ۱. الگوریتمی بنویسید که ماکسیمم سه عدد مفروض را پیدا کند. (به نظر شما تعمیم الگوریتم ماکسیمم به سه عدد، ساده‌تر است یا الگوریتم MAX)

تمرین ۲. الگوریتمی بنویسید که مینیمم سه عدد مفروض را پیدا کرده و شمارهٔ ردیف آن (یعنی، اینکه چندمین عدد است) را معین کند.

تمرین

۱ـ فلوچارتی رسم کنید که سه عدد A، B و C را گرفته، اگر $B^2 - 4AC \geqslant 0$ باشد، پیغام «بلی» و در غیر این صورت پیغام «خیر» بدهد.

۲ـ فلوچارت الگوریتمی را رسم کنید که باگرفتن شعاع یک دایره، محیط و مساحت آن را محاسبه و چاپ نماید.

۳ـ روز اول سال چهارشنبه است. الگوریتمی بنویسید که معین کند روز Nام سال چه روزی ازهفته است. (مثلاً روز چهاردهم سه‌شنبه و روز ۱۴۳ م جمعه است.) فلوچارت آن را نیز رسم کنید.

مراجع

۱ـ آشنایی با مبانی کامپیوتر و انفورماتیک. تألیف دکتر اسماعیل بابلیان، و دکتر سونیا صحت‌نیاکی، شرکت چاپ و نشر ایران، ۱۳۶۹

اخبار مربوط به طرح اجرای آموزش کامپیوتر در مدارس

ـ بمنظور اجرای آزمایشی طرح آموزش کامپیوتر در کلاسهای سوم ریاضی ـ فیزیک برخی از دبیرستانها، در تابستان و زمستان سال ۶۹ دوره‌های بازآموزی و تکمیلی برای دبیران ریاضی این دبیرستانها تشکیل گردید. در این امر برای دبیران محترم آرزوی موفقیت داریم.

ـ در همین راستا، کارگاههایی در مراکز استانهای تحت پوشش طرح احداث و راه‌اندازی شد، که برای پیشرفت این امر بسیار مفید می‌باشد.

همچنین کتاب آشنایی با مبانی کامپیوتر و انفورماتیک تألیف دکتر اسماعیل بابلیان و دکتر سونیا صحت‌نیاکی، در دسترس دانش‌آموزان تحت پوشش طرح قرار گرفت. برای این عزیزان نیز آرزوی پیشرفت و موفقیت روزافزون در تحصیل داریم.

ـ سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، چگونگی اجرای مرحله اول آموزش کامپیوتر در سال تحصیلی ۷۱ـ۷۰ که برای نیمی از دانش‌آموزان سال سوم رشته ریاضی ـ فیزیک اجرا خواهد شد را بکلیه استانهای کشور ابلاغ نمود. در این دستورالعمل شرایط مناطق تحت پوشش طرح آموزشی و همچنین مشخصات کارگاههای مورد نیاز و نیز مشخصات دبیران این درس که باید در تابستان امسال آموزش ببینند ذکر شده است.

تأملی در ساختمان عدد ۱۹۹۰

ترجمه: از احمد قرائی

می‌خواهیم عدد سال ۱۹۹۰ را (به انحاء مختلف) بنویسیم. می‌توان ازفرهنگ ریاضی درسال جدید، ۱۹۹۰، با بازیها و تأملاتی درخصوص عدد ۱۹۹۰ فتح بابی کسرد. در زیرمسایلی را مطرح می‌کنیم که توجه دانش‌آموزان را به چنین فرهنگی جلب می‌کند. (شاید این موارد، این انگیزه را در دانش‌آموزان به‌وجود آورد که خود آنها، بازیهای جدیدی را پیدا کنند.)

درابتدا تعدادی روابط ساده با ارقام ۰، ۹، ۹، ۱ می‌نویسیم.

$$۱=۱+۹-۹+۰$$

$$۹=۱\cdot ۹^{۲}:۹+۰ \qquad ۱۹=۱+۹+۹+۰$$

$$۹=۱\cdot\sqrt{۹\cdot ۹}+۰ \qquad ۹۰=(۱+۹)\cdot(۹+۰)$$

$$۰=۱\cdot ۹\cdot ۹\cdot ۰$$

$$۱+۹+۹۰=۱+۹۹+۰=۱۹+۹^{۲}+۰$$

$$۱۹-۹-۰=(۱+۹)+(۹\cdot ۰)=\frac{(۱+۹)!}{(۹+۰)!}$$

$$۱+۹\cdot ۹+۰=۱-۹+۹۰$$

$$۱+\sqrt{۹}+\sqrt{۹}+۰=۱+۹-\sqrt{۹}+۰$$

$$(۱:۹)\cdot ۹۰=۱۹-۹+۰$$

ملاحظه کنید که در رابطهٔ آخر از تمام چهار عمل أصلی استفاده شده است.

اعداد ترتیبی ۹ ۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ بصورتی با علایم ریاضی بکار رفته‌اند که نتیجه درهرقالبی، ۱۹۹۰ شده است.

$$۱\cdot ۲+۳۴۵\cdot ۶+۷-۸۹=۱۹۹۰$$

$$۱۲\cdot ۳۴\cdot ۵-۶۷+۸+۹=۱۹۹۰$$

$$(۱+۲+۳۴)\cdot ۵۶+۷-۸۹=۱۹۹۰$$

$$((۱-۲):۳+۴)\cdot ۵۶۷-۸۹=۱۹۹۰$$

$$(-۱۲+۳۴۵)\cdot ۶-۷+۸-۹=۱۹۹۰$$

واگر ترتیب بالا را معکوس کنیم، چنین می‌شود:

$$(۹۸۷\cdot ۶+۵۴):۳-۲\cdot ۱=۱۹۹۰$$

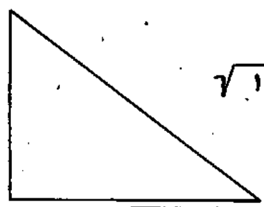
$$(۹+۸-۷+۶۵۴)\cdot ۳-۲\cdot ۱=۱۹۹۰$$

$$(۹\cdot ۸-۷)\cdot ۶\cdot ۵+۴۳-۲-۱=۱۹۹۰$$

$$(۹\cdot ۸\cdot ۷-۶-۵)\cdot ۴-۳+۲۱=۱۹۹۰$$

$$(-۹۸+۷۶۵-۴)\cdot ۳+۲-۱=۱۹۹۰$$

عدد ۱۹۹۰ درمثلث قائم‌الزاویه فیثاغورس



همواره به ۱۹۹۰ می‌رسیم

$$\begin{aligned}۱۹۹۰&=۱۹۹+۰+۱۹\cdot ۹۰+۱\cdot ۹\cdot ۹+۰\\&=(۱\cdot ۹+\sqrt{۹}-۰)^{۳}+(۱\cdot ۹)^{۲}+(۹+۰)^{۲}+۱+\\&\quad ۹۹+۰\\&=(۱+۹+۹+۰)^{۲}+((۱+۹)\cdot\sqrt{۹}+۰)^{۲}+\\&\quad(۱\cdot\sqrt{۹}\cdot ۹+۰)^{۲}\end{aligned}$$

وبا تکرار اعداد مشابه

$$\begin{aligned}۱۹۹۰&=۲۲۲۲-۲۲۲-۲\cdot ۲\cdot ۲-۲=۳۳۳\cdot(۳+۳)\\&\quad+۳-(۳۳:۳)\\&=۵۵۵+۵\cdot ۵\cdot ۵۵+۵۵+۵\\&=۸۸۸۸:۸+۸۸۸-۸-(۸:۸)=(۹:۹)+۹۹۹\\&\quad+۹۹۹-۹\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{i=(۱+۹)\cdot(۹+۰)}^{۱۹+۹۰} i=۱۹۹۰ \qquad \sum_{i=۰}^{\infty}\left(\frac{۱۹}{۹۰}\right)^{i}=\frac{(۱+۹)\cdot(۹+۰)}{-۱+۹^{۲}-۹+۰}}$$

$$\boxed{\sqrt{(۱+\sqrt{۹})\cdot(۹+۰-۱+\sqrt{۹})\cdot(۹+۰)}\approx ۱۹/۹۰}$$

$Q(x)$ به‌معنی حاصل‌جمع ارقام عدد x است. بنابراین

$$Q(۱۹۹۰)=۱۹$$

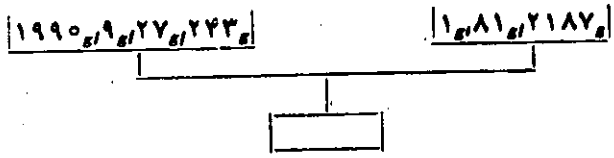
$$Q(Q(۱۹۹۰))=۱۹-۹$$

$$Q(Q(Q(۱۹۹۰)))=(۱-۹)+(۹-۰)$$

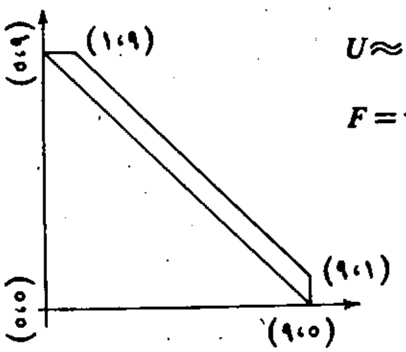
$$Q(Q(۱۹^۳+۹۰^۳))=Q(۱^۲+۹^۲+۹^۲+۰^۲)=(۱+۹)^۲-۹۰$$

$$Q(۱۹^۲+۹۰^۲)=Q(۱^۳+۹^۳+۹^۳+۰^۳)=۱+۹+۹+۰$$

بوسیله یك ترازوی کفه‌ای می‌خواهیم ۱۹۹۰ گرم را به‌طور دقیق‌توزین کنیم. برای این‌توزین سنگهای ۱، ۳، ۹، ۸۱، ۲۴۳، ۷۲۹ و ۲۱۸۷ گرمی را در دست داریم. به چه سنگهایی نیاز داریم واین سنگها چگونه می‌باید درکفه‌های ترازو قرار گیرند؟



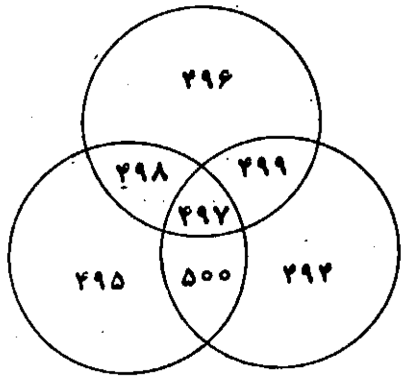
یك ذوزنقه باریك با مختصات زیر داده شده است.
محیط (U) ومساحت (F) این ذوزنقه چنین خواهد بود:



$$U\approx -۱+\sqrt{۹}\cdot۹+۰$$

$$F=\frac{-۱+۹+۹+۰}{۱+۹:۹+۰}$$

حلقه‌ها ومربع‌های جادوئی



اعداد ۴۹۴ تا ۵۰۰ دراین زمینه آن‌چنان ترتیب یافته‌اند که جمع اعداد هر دایره ۱۹۹۰ می‌شود.

۴۹۸	۵۰۵	۴۹۱	۴۹۶
۴۹۵	۴۹۲	۵۰۲	۵۰۱
۵۰۴	۴۹۹	۴۹۷	۴۹۰
۴۹۳	۴۹۴	۵۰۰	۵۰۳

اعداد ۴۹۰ تا ۵۰۵ درخانه‌های این مربع چنان تنظیم شده‌اندکه مجموع اعداد در ردیف‌افقی وستون عمودی وهمینطور درهرکدام ازجهات مورب ۱۹۹۰ می‌شود.

$$\begin{vmatrix}۱ & ۹\\ ۹ & ۰\end{vmatrix}=۱۹۹۰$$

$$\frac{۱!\,۹!}{۹!\,۰!}=۱+۹-۹+۰$$

وبا ضرایب دو جمله‌ای

$$\binom{۱+۹}{۹+۰}=\binom{۹}{۱}+\binom{۹}{۰}$$

$$(۱+۹)\cdot۹۰+۱+۹۹+۰+۱\cdot۹۹۰=۱۹۹۰$$

$\{f_n\}$ دنبالهٔ فیبوناتچی است: اعداد ...، ۵، ۳، ۲، ۱، ۱، (دنبالهٔ فیبوناتچی به‌صورت $f_n=f_{n-۱}+f_{n-۲}$ که در $f_۱=f_۲=۱$ است).

$$f_۸-f_۳=۱+۹+۹+۰$$

$$f_{۱۲}+f_۸-f_۳=۱^۲+۹^۲+۹^۲+۰^۲$$

$$f_{۱۷}-f_{۱۲}+f_۵+f_۲=۱^۳+۹^۳+۹^۳+۰^۳$$

$$(۱-۹)^۲-\sqrt{۹+۰}+\sqrt{۱.۹})^۲+(۹-۰)^۲=۱۹+۹۰$$

معادله درجه دوم $۱x^۲-۹x=۹۰$

دارای جوابهای ۱۵ و ۶ — است.

$$x_۱=۱\cdot\sqrt{۹}-۹+۰ \text{ و } x_۲=۱\cdot۹+(\sqrt{۹}+۰)!$$

$$۱۹=۱-۲-۳-۴۵+۶۷-۸+۹$$

$$=۹-۸-۷+۶۵-۴۳+۲+۱$$

$$۹۰=۱۲+۳+۴-۵-۶-۷+۸۹$$

$$=۹۸+۷-۶+۵+۴+۳-۲۱$$

$$۱۹+۹۰=۱۲+۳-۴+۵+۶+۷۸+۹$$

$$=۹۸-۷-۶-۵-۴+۳۲+۱$$

$$۱۹-۹۰=۱۰۲+۳+۴-۵۶-۷-۸-۹$$

$$=۹-۸-۷-۶-۵۴-۳-۲۰۱$$

نویسنده: اشتفان بوندلی

مجلهٔ «آموزش ریاضی» (MATHEMATIKLEHREN) شمارهٔ ۳۷، دسامبر ۱۹۸۹، صفحات ۵۶، ۵۷.

ظهور مسایل جدید در بررسی مسایل هندسه

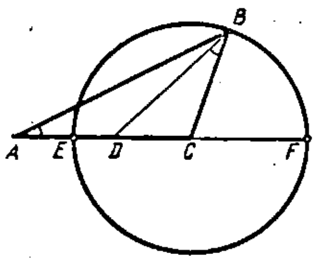
د. ف. ایزاك

ترجمهٔ ابراهیم دارابی

بررسی مسایل هندسه را می‌توان با تعبیر وتفسیر گسترده‌ای همراه ساخت. ضمن حل یك مسئله هندسی، ویژگی‌های گوناگونی مربوط به‌آن متناسب با اشکال آن ظاهرمی‌شوند. ویژگی‌هایی که ممکن است درحل مسئله بازگو نشوند و مورد استفاده قرار نگیرند. ازنظرما، این بررسی وجستجوی ویژگی‌ها، باید پس از حل مسئله صورت بگیرد که دربعضی حالات، بدیع و به قدر کافی جالب توجه‌اند. این ویژگی‌ها خود، بانی مسایل تازه‌ای می‌شود و تعمیم پیدا می‌کند. در این مقاله با آوردن چند مسئله: به بررسی این موضوع می‌پردازیم.

مسئله ۱. در مثلث ABC، نقطه D را روی AC طوری اختیار می‌کنیم که $D\hat{B}C = B\hat{A}C$. اگر ۵ $= AD$ و ۴ $= DC$ مطلوبست طول BC.

حل. ازشرایط مسئله معلوم می‌شودکه $\triangle_{BDC} \sim \triangle_{ABC}$. ازآنجا



شکل (۱)

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AB}{BD}=\frac{BC}{DC}$$

پس ۶ $= BC$ شکل (۱)

حل مسئله نشان می‌دهد که ضلع AB و درنتیجه کل مثلث ABC غیرمشخص است. بنابراین درمراحل بررسی، ویژگی‌های‌مختلفی را می‌توان از مثلث ABC به‌دست آورد و به کمك آنها مسایل جدیدی را مطرح ساخت. چون ضلع BC درتمام مثلثهای ABC طول منحصر به‌فردی دارد، و درشرایط مسایل صدق می‌کند، بنابراین این ویژگی حاصل می‌شود که اگر AC و نقطه D روی AB داده شده باشند، (۴ $= DC$، ۹ $= AC$) آنگاه نقطه B به دایره $\omega(C,$ ۶$)$ تعلق دارد.

به‌آسانی ثابت می‌شود که هر نقطه دلخواه M از دایره ω، به غیر ازنقاط E و F می‌تواند رأس مثلث AMC باشد و در شرایط مسئله صدق کند:

مثلث‌های AMC و MDC متشابهند (۳ : ۲ $= MC : DC =$ $AC : MC$ و $M\hat{C}D = A\hat{C}M$). بنابراین $M\hat{A}C = D\hat{M}C$

ویژگی حاصل را می‌توان در رسم مثلث ABC که درشرایط مسئله صدق کند، مورد استفاده قرارداد. مسئله‌ای را طرح می‌کنیم که با استفاده ازاین خاصیت قابل حل است.

مسئله ۱.۱. برروی پاره‌خط AC نقطه D از مثلث ABC طوری داده شده است که ۴ $= DC$ و ۵ $= AD$ مثلث ABC را رسم کنید درصورتی که $D\hat{B}C = B\hat{A}C$.

توضیح. B بر دایره $\omega(C,$ ۶$)$ قرار دارد

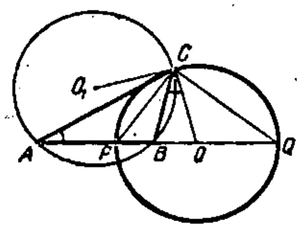
مسأله ۲.۱. نقطه D برروی پاره‌خط مفروض AC داده شده است و ۴ $= DC$، ۵ $= AD$. همه مثلث‌های ممکن را که در آن $B\hat{A}C = D\hat{B}C$ می‌سازیم. مکان هندسی نقطه B را پیدا کنید. زاویه A وضلع AB ازمثلث ABC چه مقادیری را می‌توانند اختیار کنند؟

حل. به یکی از ویژگی‌های مثلث ABC توجه می‌کنیم. از حل مسئله ۱ نتیجه می‌شود که ۲ : ۳ $= AB : BD$ یعنی دایره ω را می‌توان مجموعه نقاطی در نظر گرفت که نسبتهای فواصل آنها ازنقاط A و D برابر ۳/۲ است. اکنون این سئوال پیش می‌آید که آیا نتیجه حاصل را می‌توان تعمیم داد؟ ثابت می‌کنیم این کار امکان پذیر است:

مسأله ۳.۱. ثابت کنید مکان هندسی نقاطی که نسبت فواصل آنها از دونقطه مفروض برابر ۱ $k \neq$ باشد، یك دایره است.

حل. حل مسئله ۳.۱ بدیهی است. این دایره را دایره آپولن می‌نامند. حل مسئله ۳.۱ را با استفاده ازمسئله ۱ به انجام می‌رسانیم.

نقاط مفروض A و B و نقطه دلخواه C را درخارج AB در نظر می‌گیریم. بطوری که، $AC : BC = k$. مثلاً ۱ $k >$ (شکل (۲) ۲ $= k$).



شکل (۲)

با در نظرگرفتن مسئله ۱، خط CO را طوری رسم می‌کنیم که $B\hat{C}O=\hat{A}$ (شکل ۲). ثابت می‌کنیم موقعیت نقطه O بستگی به انتخاب نقطه C ندارد.

اگر $AB=a$، $BO=x$، از تشابه مثلثهای ACO و CBO نتیجه می‌شود:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AO}{CO}=\frac{CO}{BO} \quad ، \quad \frac{AC}{BC}=\frac{a+x}{CO}=\frac{CO}{x}$$

چون $AC:BC=k$ پس، $CO=kx$

$a+x=k^2x$

$x=\frac{a}{k^2-1}$ ،$CO=\frac{ak}{k^2-1}$

بنابراین اگر $AC:BC=k>1$ آنگاه $C\in\omega(O, r)$ که در آن

$BO=\frac{a}{k^2-1}$ و $r=\frac{ak}{k^2-1}$

برعکس اگر $C\in\omega$، آنگاه

$$AO:OC=\left(a+\frac{a}{k^2-1}\right):\frac{ak}{k^2-1}=ak^2:ak=k،$$

$CO:OB=k$ ،$A\hat{O}C=C\hat{O}B$ ،$\triangle_{ACO}\sim\triangle_{CBO}$،

$C\hat{A}O=B\hat{O}C$, $AC:CB=AO:CO=k$

اگر دایره ω خط AB را در نقاط P و Q قطع کند، (شکل ۲) آنگاه

$$AP:PB=AQ:QB=AC:BC=k$$

یعنی CP و CQ نیمسازهای داخلی وخارجی زاویه رأس C از مثلث ABC می‌باشند و $P\hat{C}Q=90^\circ$. یعنی دایره آپولن را می‌توان به قطر PQ رسم کرد.

اکنون یکی دیگر از ویژگی‌های دایره آپولن را در نظرمی‌گیریم. در بالا نشان دادیم که:

$OC^2=OA\cdot OB$ یا $AO:OC=OC:OB$

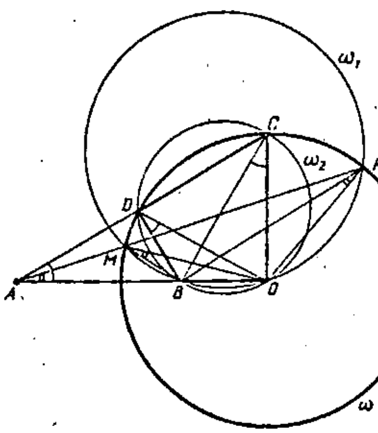
(شکل ۲). یعنی خط OC بر دایره‌ای که از نقاط A، B، C می‌گذرد مماس است. درضمن برشعاعی ازاین دایره که به نقطه C وصل می‌شود، عمود می‌باشد. به‌عبارت دیگر، دایره مار بر ABC عمود بر دایره آپولن می‌باشد.

پس مسئله دیگری را می‌توان طرح کرد.

مسئله ۴.۱. ثابت کنید دایره آپولن نظیر A و B هر دایره‌ای‌را که از نقاط A و B بگذرد، تحت زاویه قائمه قطع می‌کند. (شکل ۲) برای حل ۴.۱، می‌توان دانش‌آموزان را با مفهوم دسته دایره ومحور اصلی دو دایره آشنا کرد (در کلاس چهارم ریاضی فیزیک مدارس ما تدریس می‌شود .م)

بنابراین دوایری که از A و B می‌گذرند، دسته دایره بیضوی تشکیل می‌دهند که محور اصلی آنها AB است. هریک از دایره‌های دسته دایره بیضوی با محور اصلی AB مجموعه نقاط دایره آپولن را قطع می‌کنند و تشکیل دسته دایره هیپربولیك می‌دهند که محور اصلی آنها عمودمنصف AB می‌باشد.

از حل مسئله ۳.۱ نتیجه می‌شود که اگر دایره آپولن ω نظیر A و B به‌مرکز O رسم شود ونسبت فواصل $AC:BC=k>1$ برقرارباشد که $C\in\omega$ و خط AC دایره آپولن را در نقاط C و D قطع کند، آنگاه نقطه B بین A و O قرار می‌گیرد و $C\hat{A}B=B\hat{C}O$ (شکل ۳)



شکل(۳)

بنابراین چهارضلعی $BDCO$ محاطی است. با استفاده از این خاصیت می‌توان مسئله دیگری طرح کرد. که به مفهوم مرکز اصلی سه دایره مربوط می‌شود.

مسئله ۵.۱. در مثلث ACO روی ضلع AO نقطه B را طوری اختیارمی‌کنیم که $C\hat{A}O=B\hat{C}O$ دایره ω را به‌مرکز O و شعاع OC رسم می‌کنیم. دایره ω_1 از نقاط B و O طوری می‌گذرد که

دایره ω را در نقاط M و k قطع می‌کند. ثابت کنید. نقطه A برروی خط Mk قرار دارد.

حل ۱. فرض می‌کنیم با دایره آپولن و ویژگی‌های آن آشنا هستیم. بنابراین ω، دایره آپولن نظیر A و B را درنظرمی‌گیریم:

$k = AC : BC$

(شکل ۳) اگر k_1 نقطه برخورد دوم خط AM با دایره ω باشد، آنگاه

$$O\hat{A}M = O\hat{M}B = O\hat{k}_1B$$

از آنجا نتیجه می‌شود $k_1 \in \omega_1$ یعنی k_1 بر نقطه k منطبق است و برروی AM قرار دارد.

حل ۲. مسئله ۵.۱ را بدون استفاده از دایره آپولن حل‌می‌کنیم. ازشرایط مسئله معلوم می‌شود:

$$\triangle_{AOC} \sim \triangle_{COB} \text{ ، } OC^2 = OB \cdot OA$$
$$OM^2 = OB \cdot OA \text{ ، } OM : OB = OA : OM$$

یعنی

$$O\hat{A}M = O\hat{M}B \text{ و } \triangle_{AOM} \sim \triangle_{MOB}$$

محل برخورد دوم خط AM با دایره ω را با k_1 نشان می‌دهیم پس،

$$Ok_1^2 = OM^2 = OB \cdot OA$$
$$Ok_1 : OB = OA : Ok_1 \text{ ، } \triangle_{AOk} \sim \triangle_{k_1OB}$$

ازآنجا نتیجه می‌شود $O\hat{A}k_1 = O\hat{k}_1B$ ویا

$$O\hat{M}B = O\hat{k}_1B$$

یعنی نقطه k_1 به دایره ω_1 تعلق دارد. پس

$$k_1 \equiv k$$

به‌عبارت دیگر نقطه k برروی AM واقع می‌شود.

مسئله ۵.۱ را می‌توان به‌طورطبیعی با استفاده ازمفهوم مرکز اصلی سه دایره هم حل کرد. (نقطه A مرکز اصلی سه دایره ω، ω_1 و ω_2 است.)

درمسئله ۱، می‌توان حالات مختلفی را درنظرگرفت. حالات زیر که موردبررسی قرارمی‌گیرند، ازنظر ما جالبند:

۱) دربین مثلث‌های ABC که در شرایط مسئله ۱ صدق می‌کنند، مثلثی را اختیار می‌کنیم که درآن $BD \perp AC$. دراین حالت

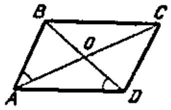
$$A\hat{B}C = 90^\circ \text{ ، } A\hat{B}D = B\hat{C}A$$

وهریك ازمثلث‌های BDC و ADB با مثلث ABC متشابهند. با استفاده از ویژگی این شکل، می‌توان روابط متری درمثلث قائم‌الزاویه و درحالت خاص قضیه فیثاغورث را نتیجه گرفت

۲) حالتی را در نظر می‌گیریم که BD میانه مثلث ABC و $B\hat{A}D = D\hat{B}C$. این مثلث را می‌توان به متوازی‌الاضلاع تبدیل کرد که درآن D محل برخورد اقطارباشد. ازآنجا مسئله زیر پیدا می‌شود:

مسأله ۲. ویژگی متوازی‌الاضلاعی را پیدا کنید که در آن اقطار با اضلاع نظیر خود زوایای مساوی می‌سازند:

$$B\hat{A}C = A\hat{D}B \qquad \text{(شکل (۴))}$$

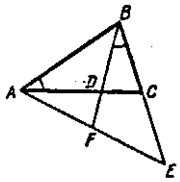


شکل (۴)

۳) همچنین حالتی را درنظرمی‌گیریم که درمثلث ABC، داشته باشیم

$$B\hat{A}D = D\hat{B}C \text{ و } AD : DC = 2$$

(شکل ۵) این مثلث را می‌توان قسمتی ازمثلث ABE به‌حساب آورد که درآن نقطه D محل برخورد میانه‌ها می‌باشد. درنتیجه این مسئله مطرح می‌شود:



شکل (۵)

مسئله ۳. ویژگی مثلثی را پیدا کنید که درآن دومیانه، با اضلاع نظیرخود زوایای‌مساوی می‌سازند. (درشکل ۵، $C\hat{A}B = E\hat{B}F$ و AC و BF میانه‌اند).

مسایل ۲ و ۳ را ازطریق فرمولبندی معینی حل می‌کنیم.

حل مسئله ۲. محل برخورد اقطار متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را O می‌نامیم،

$$B\hat{A}C = A\hat{D}B \qquad \text{(شکل)}$$

پس،

$$A\hat{C}D = A\hat{D}B \text{ ، } \triangle_{AOD} \sim \triangle_{ADC} \text{ ، }$$
$$AO : AD = AD : AC \text{ ، } 2AO^2 = AD^2 \text{ ، } AC = AD\sqrt{2}$$

به‌طریق مشابه از تشابه مثلثهای ABO و DBA نتیجه می‌شود،

$BD=AB\sqrt{2}$

به‌آسانی می‌توان عکس آنرا هم ثابت کرد: اگر در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داشته باشیم $AC=AD\sqrt{2}$، آنگاه

$\triangle_{AOD}\sim\triangle_{ADC}$

بنابراین

$\widehat{ACD}=\widehat{ADO}$

نتیجه حاصل را می‌توان درمسئله زیر فرمولبندی کرد.

مسئله ۲.۱. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ $(\overline{AB}=\overline{DC})$ $\widehat{BAC}=\widehat{ADB}$، ثابت کنید:

$AC=AD\sqrt{2}$ ، $BO=AB\sqrt{2}$

مسئله ۲.۲. درمتوازی‌الاضلاع $ABCD$ داریم

$AC=AD\sqrt{2}$ ثابت کنید $\widehat{BAC}=\widehat{ADB}$

اکنون به اختصار ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را می‌نویسیم:

۱) $\widehat{BAC}=\widehat{ADB}\Rightarrow AC=AD\sqrt{2}$ و $BD=AB\sqrt{2}$

۲) $AC=AD\sqrt{2}\Rightarrow\widehat{BAC}=\widehat{ADB}$ و $BD=AB\sqrt{2}$

۳) $BD=AB\sqrt{2}\Rightarrow\widehat{BAC}=\widehat{ADB}$ و $AC=AD\sqrt{2}$

حالا این سئوال پیش می‌آید:

آیا می‌توان هر یك از سه شرط بالا را با شرط $AC:AD=BD:AB=k$ تعویض کرد؟

به‌عبارت دیگر با مسئله دیگری مواجه هستیم.

مسئله ۳.۲. اگر در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ اقطار متناسب با اضلاع باشند، یعنی $AC:AD=BD:AB=k$، k چه مقادیری می‌تواند اختیارکند؟ نسبت اضلاع چقدرمی‌تواند باشد؟

حل. بنا برقضیه کوسینوسها داریم،

$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos A$

$AC^2=AB^2+AD^2+2AB\cdot AD\cos A$

از جمع تساوی‌های بالا و با قرار دادن $BD=kAB$ و $AC=kAD$ داریم،

$k^2(AB^2+AD^2)=2(AB^2+AD^2)\Rightarrow k=\sqrt{2}$

به‌این ترتیب اگر درمتوازی‌الاضلاعی، اقطارمتناسب با اضلاع باشند نسبت قطر بزرگ به ضلع بزرگ (یا نسبت قطر کوچك به ضلع کوچك) فقط می‌تواند $\sqrt{2}$ باشد.

این شرط هم‌ارز هریك ازشرایطی است که قبلاً به آنها اشاره شده است. اکنون نسبت اضلاع را پیدا می‌کنیم.

اگر $AD=a$، $AB=b$، $AC=a\sqrt{2}$ آنگاه و ازمثلث ACD داریم

$a\sqrt{2}-a<b<a+a\sqrt{2}$

یا

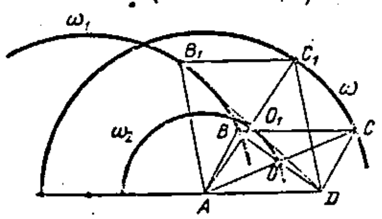
$\sqrt{2}-1<\frac{b}{a}<\sqrt{2}+1$

خاصیت حاصل، خود مسایلی را پیش می‌آورد.

مسئله ۴.۲. برروی پاره‌خط AD همه متوازی‌الاضلاعهای ممکن راکه درآن $\widehat{BAC}=\widehat{BDA}$ می‌سازیم. مطلوبست مکان نقاط C، B و نقطه O محل برخورد اقطار.

حل. حل مسئله به‌آسانی ازنتایج قبل به‌دست می‌آید.

مکان C دایره (A و $AD\sqrt{2}$) ω ومکان B دایره $\omega_1=\overline{DA}(\omega)$ ومکان O دایره $\left(A \text{ و } AD\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\omega_2$ است. شکل (۶).



شکل (۶)

مسئله ۵.۲. متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را $(\overline{AB}=\overline{DC})$ که درآن $\widehat{BAC}=\widehat{BDA}$ رسم کنید. با فرض اینکه

a) ضلع AD و زاویه $\widehat{BAD}$ که درآن $\widehat{BAD}=\alpha<90^\circ$ داده شده باشند.

b) ضلع AD و زاویه CAD داده‌شده باشند. $\widehat{CAD}=\beta<45^\circ$

c) ضلع AB و AD داده شده باشند.

d) ضلع AD و زاویه $\widehat{ACD}$ داده شده باشند.

$\widehat{ACD}=\gamma<90^\circ$

e) AD و زاویه بزرگ بین اقطار داده شده باشند.

$\widehat{AOD}=\alpha>90^\circ$

f) ضلع AB و زاویه ACD داده شده باشند که در آن $\widehat{ACD}=30^\circ$.

g) اقطار داده شده باشد.

همه این‌مسایل به‌سادگی قابل‌حل هستند به‌شرطی که از نسبت‌هایی که در بالا بدست آوردیم استفاده بکنیم.

مسئله ۳. میانه‌های BD، AF و CE ازمثلث ABC در نقطه M یکدیگر را قطع می‌کنند بقسمی که $\widehat{ABD}=\widehat{MAD}$ برای این شکل ویژگی‌های جدیدی را پیدا کنید و مسایل تازه‌ای را مطرح سازید.

حل. ازتشابه مثلثهای ABD و MAD (شکل ۷) نتیجه می‌شود:

$$\frac{AB}{MA}=\frac{AD}{MD}=\frac{BD}{AD}$$

$AD^2=MD\cdot BD$ ، $BD=AD\sqrt{3}$ ، $AB=MA\sqrt{3}$ ،

$$\frac{AF}{AB}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

چون

$$BD=DC\sqrt{3} ،\ CD=\frac{BD}{\sqrt{3}}=\frac{3MD}{\sqrt{3}}=MD\sqrt{3}$$

$$\widehat{BDC}=\widehat{CDM}$$

پس،

$$\triangle_{CBD}\sim\triangle_{MCD}$$

وبنابراین،

$$\widehat{CBD}=\widehat{MCD} ،\ \frac{CE}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

اگر $AB=c$ ، $AC=b$ ، $BC=a$ ، $AF=m_a$ ، $CE=m_c$ و $BD=m_b$ نتایج حاصل به اختصار چنین می‌شود:

۱) $\widehat{ABD}=\widehat{FAD}\Rightarrow\widehat{CBD}=\widehat{MCD}$

$$m_b=\frac{b\sqrt{3}}{2}\qquad\frac{m_a}{c}=\frac{m_c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۲) $\widehat{CBD}=\widehat{MCD}\Rightarrow\widehat{ABD}=\widehat{FAD}$

$$m_b=\frac{b\sqrt{3}}{2} ،\ \frac{m_a}{c}=\frac{m_c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۳) $m_b=\frac{b\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\widehat{ABD}=\widehat{FAD}$ ، $\widehat{CBD}=\widehat{ECD}$

$$\frac{m_a}{c}=\frac{m_c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ویژگی‌های حاصل، انگیزه‌ای برای مطرح‌کردن مسایل زیر می‌گردد.

مسئله ۳.۱. مثلث ABC را که در آن $\widehat{ABD}=\widehat{CAF}$ و BD و AF میانه‌های آن می‌باشند در حالات زیر رسم کنید.

a) ضلع AB و AC داده شده باشد.

b) ضلع AC و زاویه C داده شده باشد.

c) ضلع AC و زاویه ABD برابر بازاویه CAF داده‌شده باشند.

مسئله ۳.۲. روی پاره خط AC همه مثلث‌های ممکن ABC را طوری بنا می‌کنیم که در هر یک از آنها $\widehat{ABD}=\widehat{FAC}$. BD و AF میانه‌های مثلث‌اند. مکان نقطه B و مکان نقطه M محل برخورد میانه‌ها را پیدا کنید.

توضیح. از حل مسئله ۳ نتیجه می‌شود که،

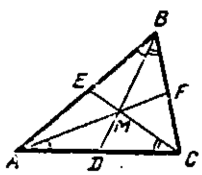
$$DB=\frac{AC\sqrt{3}}{2}$$

این وقتی برقرار است که میانه‌های BD و AF با اضلاع BA و AC زوایای مساوی بسازند. ازآنجا $m_a:c=m_c:a=\sqrt{3}:2$

حالا این سؤال پیش می‌آید: آیا بافرض $m_a:c=m_c:a$ و $a\neq c$ عکس قضیه هم درست است؟

به یک مسئله دیگر می‌رسیم:

مسئله ۳.۳. در مثلث ABC میانه‌های AF و CE با اضلاعی که بر آن وارد شده‌اند نسبت عکس دارند، یعنی $m_a:m_c=c:a$ و در ضمن $a\neq c$ ویژگی‌های چنین مثلثی را بررسی کنید.



شکل (۷)

حل. با استفاده از شکل (۷) دیده می‌شود که مساحتهای AEC و AFC باهم برابرند. پس،

$$\frac{1}{2}m_c\cdot\frac{c}{2}\sin\widehat{AEC}=\frac{1}{2}m_a\cdot\frac{a}{2}\sin\widehat{AFC}$$

چون بنا به‌فرض $m_c\cdot c=m_a\cdot a$ درنتیجه $\sin\widehat{AEC}=\sin\widehat{AFC}$.
اگر $AEC=AFC$، آنگاه $a=c$ و این با فرض مسئله تناقض دارد. بنابر این

$$\widehat{AEC}+\widehat{AFC}=180^\circ ،\ \widehat{BEC}+\widehat{BFA}=180^\circ$$

و از آنجا نتیجه می‌شود که چهار ضلعی $MEBF$ محاطی است.

$$\widehat{MBE}=\widehat{MFE}=\widehat{MAD}$$

یعنی $\widehat{ABD}=\widehat{FAD}$.

اما در آن صورت بنا بر مسئله ۳ داریم:

$$m_b=\frac{b\sqrt{3}}{2} ،\ \frac{m_a}{c}=\frac{m_c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

آیا می‌توان شرایط مسئله ۳.۳ را با شرط $\frac{m_a}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ تعویض کرد، و سایر ویژگی‌های موجود در مسئله ۳ را در آن نشان داد؟ مسئله زیر را خواهیم داشت:

مسئله ۳.۴. در مثلث ABC داریم $m_a : c = \sqrt{3} : 2$ که در آن m_a طول میانه AF و $c = AB$. تعیین کنید آیا این مثلث ویژگی‌های حاصل از مسئله ۳ را دارا می‌باشد!

حل. مثلثهای ABF و AME را در نظر می‌گیریم. (شکل۷) داریم،

$$\frac{AF}{AB}=\frac{m_a}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{AE}{AM}=\frac{c}{2}:\frac{2}{3}m_a=\frac{3}{4}\cdot\frac{C}{m_a}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$B\widehat{A}F=M\widehat{A}E$$

از آنجا نتیجه می‌شود

$$\triangle_{ABF}\sim\triangle AME \text{ ، } \quad A\widehat{F}B=A\widehat{E}M$$

چهار ضلعی $MFBE$ محاطی است یعنی

$$M\widehat{B}E=M\widehat{F}E=M\widehat{A}D$$

از آنجا $A\widehat{B}D=FAC$.

به این ترتیب شرایط مسئله ۳ برقرار است و مثلث ABC همه ویژگی‌هایی را که در بالا به‌آنها اشاره شد دارا می‌باشد. با توجه به مطالب و مقادیر بالا، اگر یکی از مثلث‌هایی که مورد بررسی قرار می‌گیرد، یکی از آن ویژگی‌های بالا را داشته باشد، سایر آنها را هم دارا خواهد بود.

۱) میانه‌های BD و AF زوایای مساوی با BA و AC می‌سازند.

۲) میانه‌های BD و CE زوایای مساوی با اضلاع BC و CA می‌سازند.

۳) $m_b=\frac{b\sqrt{3}}{2}$

۴) $m_a : m_c = c : a$ ، $a\neq 1$

۵) $\frac{m_a}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

۶) چهار ضلعی $BEMF$ محاطی است.

محتوای مقاله را می‌توان به عنوان یک کار کلاسی مورد استفاده قرار داد و یا به‌عنوان مسایل فردی به دانش‌آموزان علاقمند به ریاضیات ارجاع نمود.

مرجع: مجله ریاضیات در مدرسه، ۱۹۸۷

شگفتانه اعداد

مسعود طاهرخانی
دانشجو مهندسی کامپیوتر ـ قزوین

مجموعه اعداد

$\{4, 16, 37, 58, 89, 145, 20\}$

را در نظر می‌گیریم. اعمال ذیل را بر روی این مجموعه انجام می‌دهیم:

$$4^2=16$$
$$1^2+6^2=37$$
$$3^2+7^2=58$$
$$5^2+8^2=89$$
$$8^2+9^2=145$$
$$1^2+4^2+5^2=42$$
$$4^2+2^2=20$$
$$2^2+0^2=4$$

روش فوق ما را به عدد اولی هدایت می‌کند، و لذا، این عمل به صورت دایره وار ادامه دارد. خاصیت مشابه‌ای را می‌توان برای توان ۳، برای مجموعه {۲۵۰ و ۵۵ و ۱۳۳}، برقرار نمود.

$$1^3+3^3+3^3=55$$
$$5^3+5^3=250$$
$$2^3+5^3+0=133$$

آیا مجموعه دیگری با خاصیتهای فوق وجود دارد؟

منبع:

Mathematical Spectram, Volume 22, No. 1 and 2

مسائل ویژه دانش‌آموزان شماره ۲۹

تهیه و تنظیم از: محمود نصیری

۱ـ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2+px+q=0$ و α و γ ریشه‌های معادله $x^2+ax+b=0$ باشند معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن β و γ باشند.

راهنمائی: با استفاده از روابط بین ریشه‌ها β و γ را برحسب ضرایب معادله‌ها پیداکرده وسپس $\beta+\gamma$ و $\beta\gamma$ را تشکیل دهید.

۲ـ اگر x و y دو عدد حقیقی باشند که در رابطه $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=1$ صدق کنند، مینیمم مقدار $\frac{x}{y}$ را پیدا کنید.

راهنمائی: ثابت کنید $1\leqslant x\leqslant 2$ و $1\leqslant y\leqslant 2$ در نتیجه

$$\mathrm{Min}\,\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$$

۳ـ ثابت کنید اگر معادله چند جمله‌ای $f(x)=0$ با ضرایب گویا دارای ریشه $x=a+b\sqrt{c}$ باشد (a و b و c عددهای گویا، $b\neq 0$، $c>0$ و c مجذور یک عدد گویا نیست) آنگاه عدد $x'=a-b\sqrt{c}$ نیز ریشه معادله است.

(فرستنده: فرشید ارجمندی، دانش‌آموز، اهواز)

راهنمائی: چند جمله‌ای $f(x)$ را به صورت،

$$f(x)=g(x)\,(x-a-b\sqrt{c})(x-a+b\sqrt{c})+mx+n$$

بنویسید و سپس ثابت کنید $m=n=0$.

۴ـ در مثلث ABC اندازه زاویه‌های B و C بترتیب برابر 30° و 15° است. ثابت کنید میانه AM با ضلع BC زاویه 45° می‌سازد.

راهنمائی: عمود منصف BC را رسم کنید تا امتداد AB را در D قطع کند، سپس با استفاده از تشابه ثابت کنید AM نیمساز زاویه BMD است.

۵ـ از نقطه مفروض M روی ضلع AB از مثلث ABC خطی چنان رسم کنید که مثلث را به دو جزء معادل (مساحتهای مساوی) تقسیم کند.

راهنمائی: اگر M به رأس A نزدیکتر باشد از A خطی موازی MC رسم کنید.

۶ـ دو دایره مساوی مماس خارج‌اند. از مرکز یکی از آنها دو مماس بر دیگری رسم می‌کنیم مساحت سطح محصور بین دو دایره و دو مماس را بر حسب R شعاع دایره‌ها پیدا کنید.

(جواب: $S=\frac{(2\sqrt{3}-\pi)R^2}{4}$)

۷ـ در مثلث ABC، AD و AD' نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه A می‌باشند. اگر میانه وارد بر ضلع BC بر دایره به قطر DD' مماس باشد. ثابت کنید زاویه A برابر 90° است.

راهنمائی: از قوت نقطه و تقسیم توافقی استفاده کنید.

۸ـ در مثلث ABC ضلع BC را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و از نقاط تقسیم به رأس A وصل می‌کنیم تا زاویه A به سه قسمت به اندازه‌های α و β و γ تقسیم شود.

ثابت کنید $\mathrm{Sin}A=\frac{3\,\mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Sin}\gamma}{\mathrm{Sin}\beta}$

(فرستنده: علی‌محمد محمدی دبیر ریاضی ساوه)

راهنمایی: ازمساحت مثلثها استفاده کنید.

۹ـ نمودار مجموعه نقاطی را که در روابط زیر صدق می‌کنند رسم کنید.

الف) $f(x)=x^{|x|}$ در فاصله $[-2,3)-\{0\}$

ب) $|[x][y]|=p$ (p عددی اول است)

(فرستنده: ناصر شامیر، دبیر ریاضی، تبریز)

۱۰ـ از دایره‌ای به شعاع واحد قطاعی بریده و قیفی می‌سازیم اگر حجم قیف ماکسیمم باشد. زاویه قطاع را بر حسب رادیان پیدا کنید.

۱۱ـ تابع $f(x)=x^2|x|-3x^2+2|x|$ مفروض است.

نقاط ماکسیمم و مینیمم و عطف تابع را مشخص کرده نمودار آنرا رسم کنید.

جواب: تابع دارای سه مینیمم ودو ماکسیمم و دو نقطه عطف است.

۱۲– تابع f با ضابطهٔ

$$f(x)=\begin{cases} x^2\left[\frac{1}{x^2}\right] & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

مفروض است.

الف) تابع در چه نقاطی ناپیوسته است؟

ب) $f'(0)$ و $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ را در صورت وجود پیدا کنید.

ج) مشتق تابع را در نقاطی که مشتق پذیر است به‌دست آورید.

۱۳– هرگاه تابع f در فاصله $[a, b]$ پیوسته و مشتق پذیر باشد آنگاه طول قوس منحنی از a تا b برابر است با:

$$l=\int_a^b \sqrt{(1+(f'(x))^2}\,dx.$$

با توجه به فرمول فوق ثابت‌کنید محیط دایره به‌شعاع R برابر $2\pi R$ است. همچنین ثابت کنید طول قوس منحنی $y=x\sqrt{x}$ از $x=0$ تا $x=4$ برابر $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$ است.

۱۴– فرض کنیم a، b، c، و d اعداد حقیقی باشند بطوری که $a^2\leqslant\frac{8}{3}b$. ثابت کنید معادله $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ حد اکثر سه ریشه حقیقی متمایز دارد.

۱۵– A (۰ و ۲) و B (۱ و ۱) مفروض‌اند نقطه p را روی محور xها چنان پیدا کنید که زاویه APB، ماکسیمم باشد.

راهنمائی: ازفرمول $\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\,\operatorname{tg}b}$ استفاده‌کنید.

۱۶– فرض می‌کنیم n عددی طبیعی باشد و

$$x^{2n}+x^{2n-1}+\dots+x^2+x+1=0$$

عبارت فوق را بر حسب قوای $x+\frac{1}{x}$ بنویسید.

(فرستنده: مجید محمدزاده، فیض‌آباد)

راهنمائی: طرفین معادله را بر x^n تقسیم‌کرده و به‌استقراء قوی ثابت کنید

$$x^k+\frac{1}{x^k}=a_kt^k+a_{k-1}t^{k-1}+\dots+a_1t+1=g_k(t)$$

که $t=x+\frac{1}{x}$.

۱۷– ثابت کنید هر عدد به‌صورت زیر مکعب کامل است.

$$N=\underbrace{99\dots9}_{n-1\text{ مرتبه}}\;7\;\underbrace{0000000}_{n-1\text{ مرتبه}}\;2\;\underbrace{99\dots9}_{n\text{ مرتبه}}$$

راهنمائی:

$$N=9(10^{n-1}+\dots+1)+2\times10^n+7\times10^{2n}+9(10^{3n-1}+\dots+10^{2n+1})$$

۱۸– دو چهار وجهی منتظم را به وسیله یک وجه روی هم قرار می‌دهیم بطوری که در آن وجه مشترک باشند. ۶ مرکز وجه‌های ۶ وجهی حاصل را رئوس یک منشور قائم در نظر می‌گیریم. حجم این منشور را بر حسب a طول یال چهار وجهی منتظم پیدا کنید.

(فرستنده: رضا پورعظیم، دانش‌آموز، تبریز)

راهنمائی: در چهار وجهی منتظم $O\text{-}ABC$ اگر M و N و P مرکزهای وجه‌های OAB و OAC و OBC باشند، به‌کمک تشابه مثلثها $MN=NP=PM=\frac{a}{3}$ ولذا مساحت قاعده منشور $\frac{a^2\sqrt{3}}{36}$ و ارتفاع آن $\frac{2}{3}$ ارتفاع چهار وجهی است.

۱۹– با رقمهای ۱، ۲، ۳ و ۴ دو عدد چهار رقمی متمایز می‌سازیم بطوری که در هر عدد هر رقم بیش از یک بار به‌کار نرفته باشد. ثابت کنید این عددها برهم بخش پذیر نمی‌باشند.

راهنمائی: بزرگترین عدد ۴۳۲۱ وکوچکترین ۱۲۳۴ است لذا خارج قسمت ۲ یا ۳ می‌تواند باشد، ثابت کنید امکان ندارد.

۲۰– اگر $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & |x|\leqslant 1\\ 1-|x| & |x|>1\end{cases}$، مطلوبست $\int f(x)dx$

خطها و پاره خطهای هم زاویه نسبت به دو خط

حسین غیور

در متمم هندسه که در آن پاره خطها و زاویه‌ها و گاهی مساحتهای مثبت و منفی بکار می‌رود. نیاز به‌این هست که در مورد پاره‌خطها و زاویه‌های مثبت و منفی و زاویهٔ تقاطع دو خط در صفحهٔ جهت‌دار مطالبی گفته شود. دربارهٔ زاویه‌ها از ابتدای کار اکثراً کوتاهی شده و مقدمه‌ای که مفید و راهنما باشد ننوشته‌اند. امید است این نقصها در آینده برطرف شود. در مجلهٔ رشد ریاضی شماره ۳ صفحهٔ ۳۸، ۳۹ و ۴۰ مقدمه‌ای با ذکر منبع در صفحهٔ ۴۴ همان شماره نوشته شده است چون این شماره در اختیار همه نیست قسمتهائی از آن را با رعایت اختصار در اینجا می‌آوریم، برای اینکه توجه خوانندگان بیشتر متوجه این مهم گردد به‌عنوان مثال این نکته را متعرض می‌شویم.

در دستگاه تقسیم توافقی و دسته خطها و دسته‌های غیر توافقی اکثراً خوانندگان خطها را نیم‌خط (خط شعاعی) تصور می‌کنند. این اشتباه باعث محدود شدن میدان عمل، و تناقضاتی می‌شود که قابل اصلاح نیست. درصورتی‌که خطهای متقاطع در دسته‌ها و دستگاهها خطهای متمرکز در یک نقطه‌اند و از دو طرف قابل امتدادند.

مقدمه

۱) زاویه در صفحهٔ جهت‌دار. زاویهٔ جهت‌دار که با نماد $\angle BAC$ نشان داده می‌شود، مقدار مثبت یا منفی دورانی است که ضلع AB را بر AC منطبق می‌کند. معیار برابری اندازهٔ زاویه‌ها بر اساس $360°$ صورت می‌گیرد. یعنی دو زاویه در صورتی برابرند که اختلاف آنها $360k$ باشد (k عدد صحیح مثبت یا منفی یا صفر است). اندازهٔ اصلی زاویهٔ جهت دارکه به‌صورت $pr\angle BAC$ نوشته‌می‌شود، اندازهٔ‌جبری زاویهٔ جهت‌داراست. در بازهٔ $[180° \text{ و } -180°)$؛ از این تعریف نتیجه می‌گیریم که $pr\angle BAC=-pr\angle CAB$، وبطور کلی $\angle BAC=-\angle CAB$

۲) زاویهٔ تقاطع دو خط. اندازهٔ زاویهٔ تقاطع دو خط AB و AC که با نماد $\measuredangle$ نشان داده می‌شود مقدار مثبت یا منفی دورانی است تا خطی که از A و B می‌گذرد بر خطی که از C و A می‌گذرد منطبق شود. معیار برابری زاویهٔ تقاطع دو خط بر اساس $180°$ استوار است.

اندازهٔ اصلی زاویهٔ تقاطع دوخط با نماد $pr\measuredangle BAC$ نشان داده می‌شود AB و ACکه به‌صورت $pr\measuredangle BAC$ نوشته می‌شود، اندازهٔ‌آن دربازهٔ $[0, 180)$ است. دراین‌جا نیز

$$\measuredangle BAC=-\measuredangle CAB$$

۳) زاویهٔ بدون جهت. اندازهٔ زاویهٔ بدون جهت BAC که به صورت $B\widehat{A}C$ یا $C\widehat{A}B$ نشان داده می‌شود یکی از اندازه‌های مثبت یا صفر این زاویه است.

تبصره ۱. زاویه‌های جهت‌دار را به‌صورتهای زیر نیز نشان‌می‌دهند؛

$$\angle BAC=(AB, AC)+360k$$

$$\measuredangle BAC=\angle(AB, AC)+180°k$$

$$\measuredangle(D, D')=(D, D')+180k$$

در رابطهٔ اخیر $\measuredangle(D, D')$ مقدار مثبت یا منفی دورانی است که خط D را موازی D' قرار دهد.

تبصرهٔ ۲. گاهی از اوقات برای سهولت زاویهٔ جهت دار را با همان نمادی که برای اندازه یا اندازهٔ اصلی آن وضع کردیم

نشان خواهیم داد.

۴) احکام مربوط به زاویه‌های جهت دار. دربارهٔ زاویه‌های جهت‌دار احکام زیر را یادآوری می‌کنیم:

۱. ۴ زاویه‌های حول یک نقطه. اگر A و B و C، D، و O نقطه‌های غیر واقع بر یک خط راست باشند آنگاه

$$\angle AOB+\angle BOC+\angle COD=\angle ADO$$

۲. ۴ زاویه‌های مثلث. اگر A و B و C نقطه‌های غیر واقع بر یک‌خط باشندآنگاه $pr\angle ABC$، $pr\angle BCA$، و $pr\angle CAB$ جهت یک ن دارند و حاصل جمع آنها $\pm 180^\circ$ است.

۳. ۴ زاویه‌های چندضلعی. اگر A، B، C، ....، M، N، n نقطهٔ واقع در یک صفحه باشند آنگاه

$$\angle ABC+\angle BCD+\angle CDE+\dots+\angle MNA+\angle NAB=m;$$

که‌هرگاه n زوج‌باشد $m=0$ وهرگاه n فردباشد، $m=\pm 180^\circ$

۵) نیمساز زاویهٔ جهت‌دار. نیمساز زاویه جهت‌دار $\angle BAC$ خطی است مانند AM که در تساوی زیر صدق کند

$$\sphericalangle BAM=\frac{1}{2}\angle BAC.$$

از این تعریف نتیجه می‌شود که

ازاین تعریف نتیجه می‌شود که

$$\sphericalangle BAM=\frac{1}{2}\, pr\angle BAC+180^\circ k.$$

بنابراین، نیمساز زاویهٔ جهت‌دار یك خط نامحدود است.

نیمساز زاویهٔ جهت‌دار دوخط $\sphericalangle ABC$ خطی است مانند AM بطوری که

$$\sphericalangle BAM=\frac{1}{2}\angle BAC$$

ازتساوی $\sphericalangle BAC=pr\angle BAC+180^\circ k$ با توجه به رابطهٔ فوق نتیجه می‌شود که

$$\sphericalangle BAM=\frac{1}{2}\, pr\angle BAC+90\, k$$

بنابراین زاویهٔ جهت‌دار دوخط، دو نیمساز عمود برهم دارد.

زاویهٔ جهت‌دار نیم‌خط وخط، مانند زاویهٔ جهت‌دار دو خط، دو نیمساز عمود برهم دارد.

نیمساز خارجی زاویهٔ $\angle BAC$ نیمساز زاویهٔ مجانب‌آن است.

به موجب این تعریف هرگاه AD و AD' بترتیب نیمسازهای داخلی وخارجی $\angle BAC$ باشد. خواهیم داشت:

$$\sphericalangle BAD=\frac{1}{2}\, pr\angle BAC$$

$$\sphericalangle BAD'=\frac{1}{2}\, pr\angle BAC+90$$

تمرین ۱ــ دونقطهٔ متمایز A و B و زاویه α درصفحه مفروض است. دایره‌ای را به صورت زیر مشخص کنید

$$\{X: \sphericalangle AXB=\alpha\}$$

۲ــ قضیه. شرط لازم وکافی برای‌آنکه چهار نقطهٔ A، B، C، D متعلق به‌یك دایره باشند آن است که

$$\sphericalangle ABC=\sphericalangle ADC$$

۱) فاصلهٔ دوسریك پاره‌خط (دونقطهٔ متمایز به‌عنوان یك شکل) از یك خط.

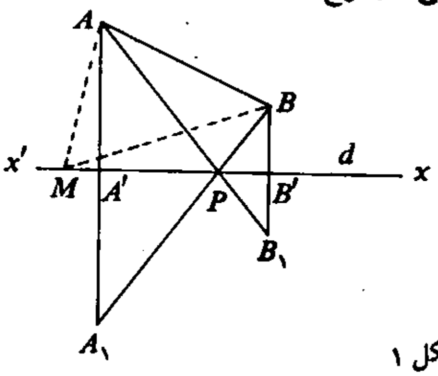
۱.۱. تعریف. پاره‌خط AB وخط d درصفحه مفروضند. A_1 و B_1 قرینه‌های A و B نسبت به‌خط d دوپاره‌خط AB_1 و BA_1 را پدید می‌آورند که با توجه به‌خواص تقارن؛

الف) درنقطهٔ P روی خط d یکدیگر را قطع می‌کنند.

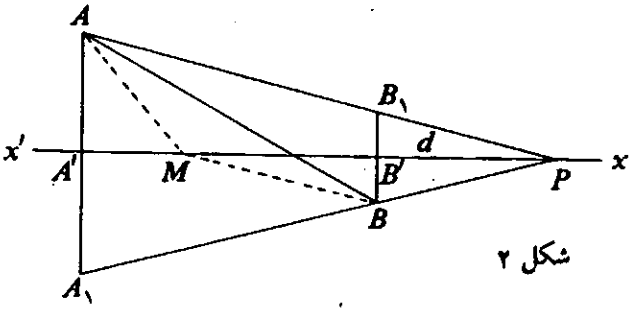
ب) نسبت به خط d قرینهٔ یکدیگرند.

ج) طول‌های متساوی ومیل‌های برابر نسبت به‌محور $x'x$ منطبق بر d دارند. بنابه قرارداد، نقطهٔ P را نقطهٔ اصلی و $AB_1=BA_1$ را فاصلهٔ اصلی پاره‌خط AB نسبت به خط d می‌نامیم و آن را با نماد AB_d نشان می‌دهیم.

تبصره. درحالت خاصی که دونقطه A و B برهم منطبق شوند فاصلهٔ اصلی، مجموع فاصله‌های دونقطه ازخط d است



شکل ۱



شکل ۲

۱.۲. قضیه. پاره‌خط AB وخط d دریك صفحه مفروضند.

الف) در حالتی که A و B دریـك طرف خط d باشند فاصلهٔ اصلی دونقطه A و B ازخط d یعنی AB_d کوچکتر است از مجموع فواصل هر نقطه مانند M از خط d از دونقطه A و B (M منطبق بر P نیست)

AB_d یا $AP+PB\angle AM+MB$

ب) در حالتی که A و B در دوطرف خط d باشند فاصلهٔ اصلی دونقطه A و B ازخط d یعنی AB_d بزرگتراست ازتفاضل فواصل هرنقطه مانند M ازخط d از دونقطه A و B (به شرط اینکه M منطبق بر P نباشد)

AB_d یا $|MA-MB|<|PA-PB|$

درحالت الف بهشکل (۱) نگاه کنید

شکل ۱ $AP+PB_1<MA+MB_1$

$AB_d<MA+MB$ ، $AP+PB<MA+MB$

ب) A و B در دوطرف خط d باشد (شکل ۲)

$|MA-MB_1|<|AP-PB_1|$

$|MA-MB|<AB_d$ یا $|MA-MB|<|AP-PB|$

۳۰۱. دایرهٔ اصلی پاره‌خط AB نسبت به خط d

۱.۳۰۱. دایرهٔ اصلی پاره‌خط AB نسبت به‌خط d دایره‌ای است که مرکزآن O وسط AB و از A' و B' تصویرهای قائم A و B روی خط d می‌گذرد. چون درمثلث ABA_1، O وسط AB و A' وسط AA_1 است OA' با BA_1 موازی و نصف آن است. و در مثلث B_1AB، OB' موازی AB_1 ونصف‌آن است. بنابراین؛

مرکز دایره اصلی وسط پاره‌خط AB وشعاع آن $\frac{1}{2}AB_d$ است.

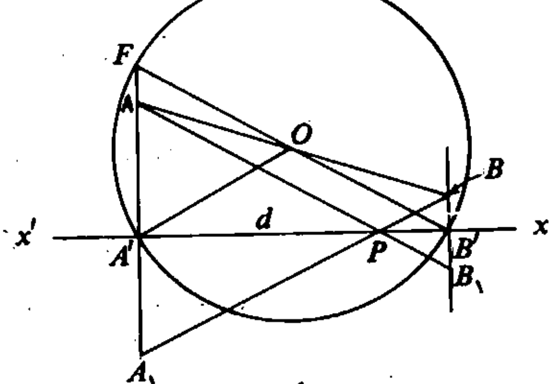
۲.۳۰۱ قضیه. رابطهٔ بین شعاع دایرهٔ اصلی وپاره‌خط AB و $\overline{AA'}\cdot\overline{BB'}$ یعنی (حاصلضرب اندازهٔ جبری فاصلهٔ دوسرپاره‌خط مفروض ازخط d)

$$AB_d^2=AB^2+4\overline{AA'}\cdot\overline{BB'}$$

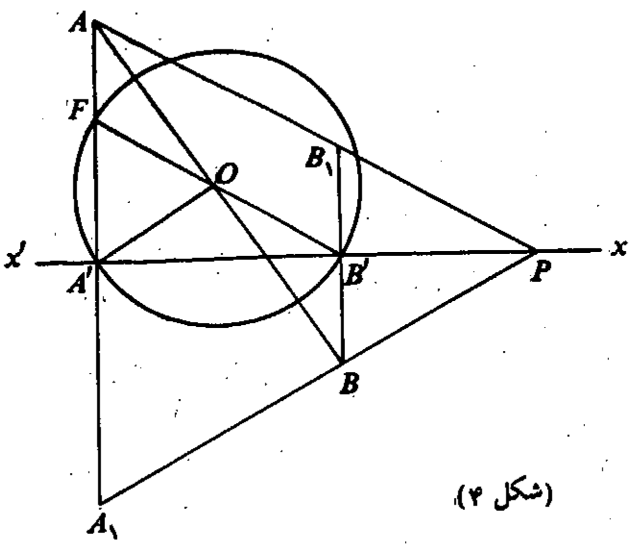
برهان. خط عمود برخط d را جهت‌دار فرض می‌کنیم و در دو شکل ۳ و ۴

قوت نقطهٔ A را نسبت به‌دایرهٔ اصلی به‌کارمی‌بریم

$$\overline{AF}\cdot\overline{AA'}=OA^2-OA'^2 \Rightarrow -\overline{BB'}\cdot\overline{AA'}=$$
$$\frac{1}{4}AB^2-\frac{1}{4}AB_d^2 \Rightarrow AB_d^2=AB^2+4\overline{AA'}\cdot\overline{BB'}$$



(شکل ۳)



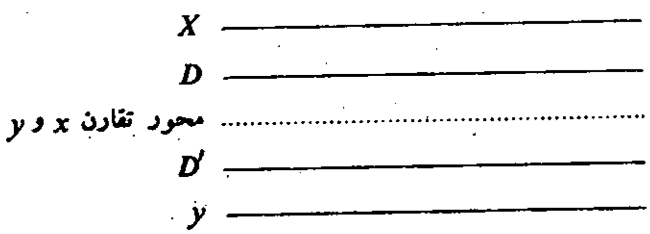
(شکل ۴)

اگر A و B دریك طرف یا دوطرف خط d باشند

$$AB_d^2=AB^2\pm AA'\cdot BB'$$

۲. خطهای هم‌زاویه نسبت به‌دوخط

۱.۲ــ دوخط x و y واقع درصفحهٔ جهت‌دار مفروضند: دوخط D و D' نسبت به‌این دوخط هم‌زاویه نامیده می‌شوند، هرگاه نسبت به نیمساز هردو زاویهٔ دوخط قرینه باشند و به سادگی می‌توان دریافت، دراین صورت ازنقطهٔ تقاطع دوخط می‌گذرند. اگرنسبت به‌یکی از دونیمساز قرینه باشند و ازنقطهٔ تقاطع آنها بگذرند نسبت به نیمساز دیگر نیز قرینه‌اند. بنابراین دوخط D و D' نسبت به x و y وقتی هم‌زاویه‌اند که ازنقطهٔ تقاطع آنها بگذرند ونسبت به‌هر دونیمساز زاویه‌های آنها قرینه باشند. در حالت خاصی‌که دوخط x و y با هم موازی باشند. دوخط نسبت به‌آنها هم‌زاویه‌اند که موازی وقرینه نسبت به محور تقارن آن دوخط باشند.



(شکل ۵)

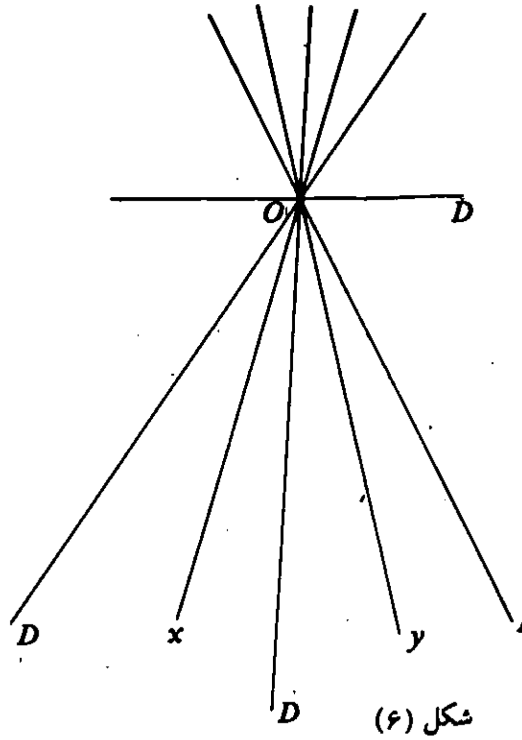
۲۰۲ تعریف. پاره‌خط هم‌زاویه نسبت به دوخط.

پاره‌خط هم‌زاویه نسبت به دوخط، پاره‌خطی است که دوسر آن روی دوخط هم‌زاویه نسبت به‌دوخط مفروض باشد.

۳.۲ هرگاه پاره‌خط AB نسبت به‌زاویهٔ $\angle xoy$ هم زاویه باشد تساوی زیر برقرار است.

$$\sphericalangle XOA+\sphericalangle XOB=2\sphericalangle XOD$$

$\sphericalangle XOA = \sphericalangle XOD + \sphericalangle DOA$
$\sphericalangle XOB = \sphericalangle XOD + \sphericalangle DOB$



شکل (۶)

ازجمع دوطرف تساوی نتیجه می‌شود

$\sphericalangle XOA + \sphericalangle XOB = 2 \sphericalangle XOD + k\pi$

به‌عکس با فرض $XOA + \sphericalangle XOB = 2 \sphericalangle XOD$.

$\sphericalangle XOA + \sphericalangle XOB + \sphericalangle DOX + \sphericalangle DOX = 0$

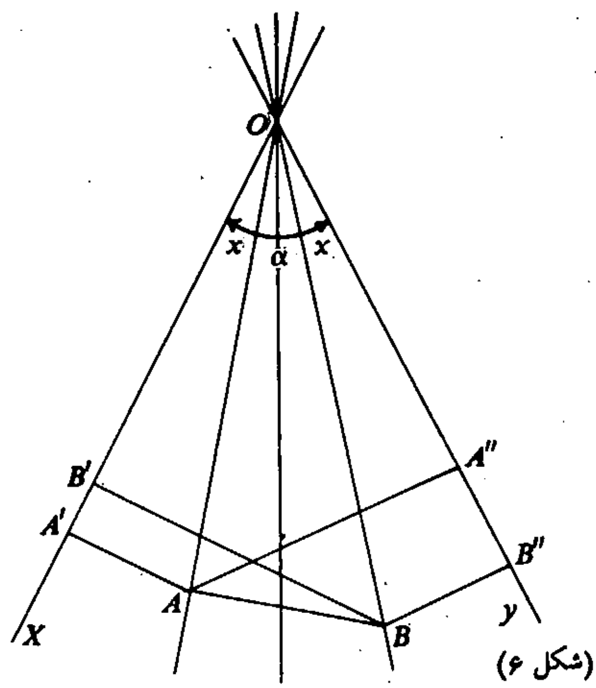
$\sphericalangle DOA + \sphericalangle DOB = 0$

این تساوی نشان می‌دهد OA و OB نسبت بـه نیمساز OD قرینه‌اند.

۴.۲. پاره‌خط هم‌زاویه نسبت به دوخط.

قضیه اصلی. پاره‌خط هم‌زاویه نسبت به دو ضلع زاویهٔ ازهر دو ضلع به یك فاصله اصلی است و به عکس.

برهان. با توجه به ۲.۳.۱ داریم:



(شکل ۶)

$AB_d^2 = AB^2 + AA' \cdot BB'$

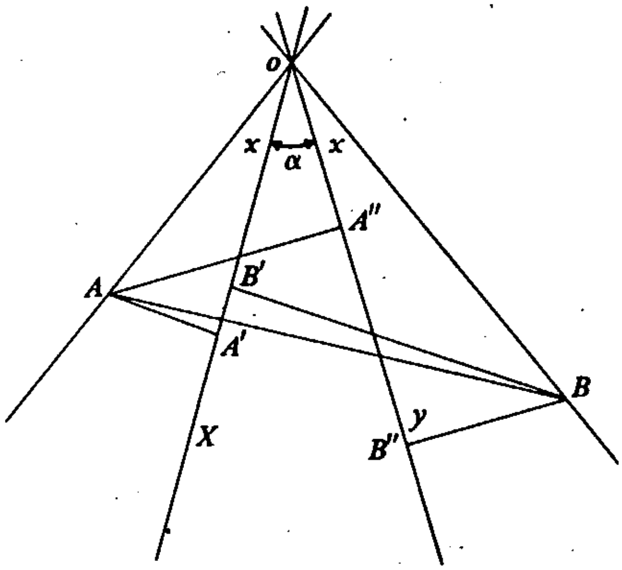
$AA' = OA \sin x \quad BB' = OB \sin(\alpha - x)$

۱) $AB_{ox}^2 = AB^2 + OA\, OB \sin x \sin(\alpha - x)$

به‌همین ترتیب رابطهٔ ۲ را می‌نویسیم

۲) $AB_{oy}^2 = AB^2 + OA\, OB \sin x \sin(\alpha - x)$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $AB_{ox} = AB_{oy}$



(شکل ۷)

درشکل (۷) عین شکل ۶ عمل می‌شود

$AB_{ox}^2 = AB^2 - AA'\, BB'$

$AA'=OA\sin x \quad BB'=OB\sin(\alpha+x)$

$AB^2_{ox}=AB^2-OA\cdot OB\sin x\sin(\alpha+x)$

به همین ترتیب

$AB^2_{oy}=AB^2-OA\cdot OB\sin x\sin(\alpha+x)$

$AB_{ox}=AB_{oy}$

بعکس با فرض اینکه در شکل (۶) AB داخل زاویهٔ xoy و $AB_{ox}=AB_{oy}$ و $XOA=x$ و $YOB=X'$ چنین عمل می‌کنیم

$AB^2_{ox}=AB^2+OA\cdot OB\sin x\sin(\alpha-x)$

$AB^2_{oy}=AB^2+OA\cdot OB\sin x'\sin(\alpha-x')$

ازاین دوتساوی نتیجه می‌شود

$\sin x\sin(\alpha-x)=\sin x'\sin(\alpha-x')$

و این تساوی را می‌توان به این شکل نوشت.

$\cos(2x-\alpha)-\cos\alpha=\cos(2x'-\alpha)-\cos\alpha$

یعنی

$2x-\alpha=\pm(2x'-\alpha)$

و ازآنجا $x'=x$، $x+x'=2\alpha$.

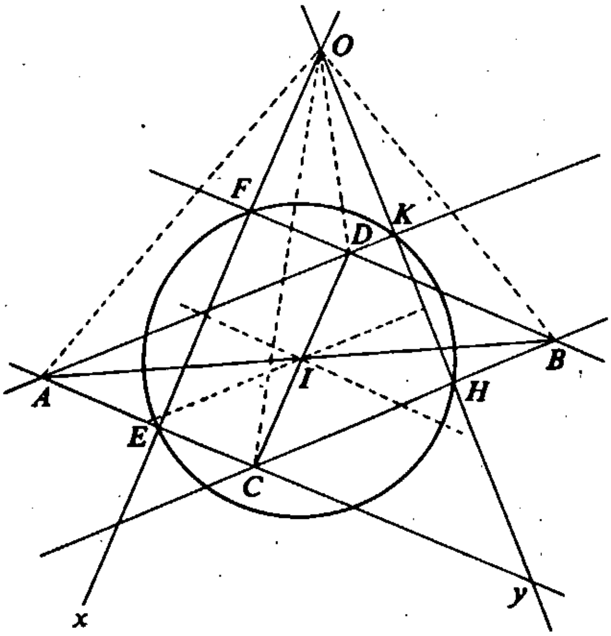
چون x و x' متغیرند تساوی $x+x'=2\alpha$ قابل‌قبول نیست.
عکس قضیه برای شکل ۷ را مانند شکل ۶ عمل می‌کنیم.

۵.۲ قضیه. تصویرهای قائم دوسر پاره‌خط هم‌زاویه نسبت به دو خط مفروض چهارنقطهٔ واقع بریك دایره‌اند.

برهان. چون پاره‌خط نسبت به‌دوخط متقاطع هم‌زاویه است بنا به قضیه قبل فاصله‌های اصلی آن از دوخط با هم مساویست. دایرهٔ اصلی این پاره‌خط نسبت به دوخط متقاطع دایره‌ای است که مرکز آن وسط پاره‌خط وشعاع آن نصف فاصلهٔ اصلی آن از دوضلع زاویه است و این دایره ازتصویر دوسر پاره‌خط روی دو ضلع زاویه می‌گذرد و قضیه ثابت است.

۶.۲ قضیه. دایره‌ای که دوخط متقاطع مفروض را درچهارنقطه قطع می‌کند، دایرهٔ اصلی‌مشترك دوپاره‌خط متمایز هم‌زاویه نسبت به دوخط مفروض است.

برهان. دایرهٔ (I, R) را طوری رسم می‌کنیم که دو خط ox و OY را به‌ترتیب در (E و F) و (K و H) قطع کند. از E و F دوخط عمود بر OX واز K و H دوخط عمود بر OY اخراج می‌کنیم وامتداد می‌دهیم تا ازتقاطع‌آنها متوازی‌الاضلاع $ACBD$ پدید آید. مرکز این متوازی‌الاضلاع منطبق بر I مرکز دایرهٔ مفروض است، زیرا دو خطی که از I بر EF و KH عمود رسم شود، موازی و به یك فاصله از دوضلع مقابل متوازی‌الاضلاعند واضلاع مقابل آن را نصف می‌کنند. I وسط AB و CD دوقطر متوازی‌الاضلاع و دایرهٔ به مرکز I وشعاع R از (E و F) و (H و K) می‌گذرند. یعنی این دایره، دایره اصلی دوپاره‌خط AB و CD نسبت به ox و oy است و درنتیجه (OA و OB) و (OC و OD) مزدوج توافقی نسبت‌به OX و OYاند (شکل ۸)



(شکل ۸)

۷.۲ قضیه. درمثلث ABC دوخط هم‌زاویه در زاویه‌های B و C ازتقاطع با هم دوپاره‌خط هم‌زاویه پدید می‌آورند که این دو پاره‌خط، نسبت به سه زاویه C و B و A هم‌زاویه‌اند.

برهان. از قضیه اصلی ۴.۲ استفاده شود.

ادامه دارد.

یادآوری. مطالبی که در این مقاله مطرح شده است و امید است با ادامهٔ آن مشکلاتی ازفصل مهمی از هندسه مربوط به مقاطع مخروطی به سبك هندسهٔ اقلیدسی گشوده شود، از ابتکارات شخص اینجانب حسین غیوراست. از دانش‌آموزان و دانشجویان و اهل تحقیق تقاضا می‌شود در استفاده از این مطالب ذکر منبع را فراموش نفرمایند.

یک مثال نقض بر اول بودن $a^b - b^a$

محمدتقی دیبایی ـ عضو هیئت علمی دانشگاه تربیت معلم

علاقمندان به‌نظریهٔ اعداد و به‌ویژه دوستداران یافتن فرمولی برای اعداد اول همواره در تلاش هستند که تابعی مثال بزنند که به‌ازای هر مقدار متغیر آن، و از مرتبه‌ای به‌بعد، اعداد اول را تولید کند. چندی قبل یکی از این علاقمندان در نامه‌ای ادعا کرده بودند که عبارت $2^n - n^2$ به‌ازای تمام اعداد طبیعی و فرد n بزرگتر از ۳، اول است. انگیزهٔ ایشان در ابراز این حدس، مشاهدهٔ نمونه‌های زیر بود:

$2^5 - 5^2 = 7$ عددی اول است

$2^7 - 7^2 = 79$ 〃

$2^9 - 9^2 = 431$ 〃

البته، به‌دلیل آنکه تاکنون سعی فراوانی در این زمینه‌ها شده است، گمان می‌رفت که این حدس درست نباشد. در اینجا، ابتدا نادرستی این حدس را ثابت می‌کنیم و سپس به مطالعهٔ عبارت کلی $a^b - b^a$ می‌پردازیم در عبارت $2^n - n^2$، چون $n>3$ فرد است، فرض می‌کنیم $n = 2p+1$ که p عددی طبیعی است. در این صورت

$$(1)\quad 2^n - n^2 = 2^{2p+1} - (2p+1)^2 = 2\times(2^p)^2 - 4p(p+1) - 1 .$$

حال اگر p را عدد اول فردی بگیریم، بنا بر قضیهٔ فرما داریم $2^p \equiv 2 \pmod p$. پس

$$(2)\quad 2\times(2^p)^2 - 4p(p+1) - 1 \equiv 2.2^2 - 1 = 7 \pmod p .$$

اکنون روشن است که با اختیار $p=7$، از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که به ازای $n = 2\times 7+1 = 15$ عدد $2^{15} - 15^2$ اول نیست. در حقیقت $2^{15} - 15^2 = 7\times 4649$.

اینک به‌مطالعهٔ عبارت کلی $a^b - b^a$ می‌پردازیم. ابتدا توجه کنیم که مطالعهٔ حالتهای $a=1$ یا $b=1$ آسان است. پس فرض می‌کنیم $a>1$ و $b>1$ روشن است که برای آنکه $a^b - b^a$ عددی اول باشد، باید بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b مساوی ۱ باشد. پس $(a, b) = 1$. برای آنکه بتوانیم به‌مثال نقضی دست یابیم، فرض می‌کنیم $b = ap+1$ و p را عددی اول اختیار می‌کنیم که $p \nmid a$. بنا بر قضیهٔ فرما داریم $a^p \equiv a \pmod p$. لذا

$$a^b - b^a = a^{ap+1} - (ap+1)^a = (a^p)^a \cdot a - (ap+1)^a \equiv a^a \cdot a - 1 \equiv a^{a+1} - 1 \pmod p .$$

برای آنکه $a^b - b^a$ بر p بخشپذیر باشد، کافی است p را عددی اول بگیریم که $p \mid a^{a+1} - 1$؛ یعنی p یک عامل اول $a^{a+1} - 1$ باشد. بنابراین ثابت کردیم که اگر a عددی طبیعی بزرگتر از واحد باشد و p عددی اول باشد که $p \mid a^{a+1} - 1$، آنگاه با اختیار $b = ap+1$، عدد $a^b - b^a$ اول نیست. توجه می‌کنیم که درحالتی‌که $a=2$، p یک‌عامل‌اول $2^3 - 1 = 7$، یعنی $p=7$، است. در پایان بی‌مناسبت نیست که متذکر شویم که اگر عبارت $a^b + b^a$ را اختیار کنیم با همان روش، عدد اول p را چنان اختیار می‌کنیم که $p \mid a^{a+1} + 1$. در این صورت به‌ازای $b = ap+1$ عبارت $a^b + b^a$ اول نخواهد بود.

در رابطه با مطالب فوق سؤالهای زیرمطرح می‌شوند که خواننده می‌تواند دربارهٔ آنها فکر کند.

آ ـ آیا بینهایت عدد اول به شکل $2^n - n^2$ وجود دارد؟

ب ـ آیا بینهایت عدد اول به شکل $a^b - b^a$، $a, b \in \mathbb{N}$، وجود دارد؟

آشنایی با فلسفه‌های ریاضی

دکتر محمدحسن بیژن‌زاده

برای کسانی که کارشان آموزش ریاضی است شاید این کار طبیعی‌ترین کار در دنیا برایشان جلوه کند، ولی اگر اندکی کارشان را متوقف کرده و در مورد چیزهایی که انجام می‌دهند فکر کنند که معنی آنها چیست، این کار اسرارآمیزترین کارها به‌نظر می‌رسد!

چگونه می‌توانیم در مورد چیزهایی سخن بگوییم که هیچ‌کس آنها را ندیده است و بهتر از امور روزمره زندگی آنها را می‌فهمیم؟ چرا هندسه اقلیدس هنوز هم تدریس می‌شود در حالی که فیزیك ارسطویی از سالها پیش مرده است؟ در ریاضیات چه می‌دانیم و آنها را چگونه درمی‌یابیم؟ اینها همه سؤالات فلسفی‌اند. سؤالاتی کلی که مربوط به ماهیت ریاضیات، بنیان آن و روشهای آن هستند. در فلسفه ریاضی اینگونه سؤالات مطرح است. گرچه در سالهای اخیر مطالعه فلسفه‌های ریاضی و صورتبندیهای آن پیشرفت‌های زیادی کرده است ولی ریشه‌های آن از هزاران سال پیش، حتی از بدو شروع ریاضیات، نشأت می‌گیرد.

وقتی اقلیدس در کتاب مبانی خود نقطه را به عنوان **چیز بدون بعد** تعریف می‌کند، فلسفه ریاضی شروع می‌شود. مگر می‌شود چیزی مادی وجود داشته‌باشد و فاقد بعد و اندازه باشد؟

پیشرفت حساب اعداد نیز با آشوبهای فلسفی توأم بوده است. در حالی که مفهوم عدد نمایانگر تعدد است. قائل به اعدادی مانند یك و صفر شدند که آخری با مفهوم تعدد بیگانه است! پیدایش اعداد منفی نیز آشوب دیگری برپا کرده بود.

در این مقاله سعی می‌کنیم که به گونه‌ای اجمالی دیدگاههای فلسفی معاصر را در باب ریاضیات مورد بررسی و مطالعه قرار دهیم. مشهورترین فلسفه‌های ریاضی مشتمل بر افلاطونگرایی، صورتگرایی و ساختارگرایی می‌باشند.

۱) افلاطونگرایی[۱]. در این دیدگاه فلسفی، اشیاء ریاضی اشیایی حقیقی انگاشته می‌شوند که وجود آنها وجودی مستقل است و از وجود دیگری عارض نشده‌است. این وجود، بخصوص مستقل از دانش ما درباره آنها است. مجموعه‌های نامتناهی، عدد π، مجموعه‌های نامتناهی ناشمارا. فضاهای برداری، منحنی‌های فضاپرکن، همه اعضای باغ‌وحش ریاضی‌اند. اینها اشیایی مشخص و با خواص معین‌اند که برخی از این خواص بر ما معلوم و برخی هنوز برما نامعلوم‌اند. فی‌المثل هیچ‌کس نمی‌داند چند عدد اول دوقلو وجود دارد. این اشیاء خارج از فضا و زمان وجود دارند و به تصور و عقیدهٔ افلاطون اینها ازلی هستند. خلق نشده و تغییر نمی‌کنند وناپدید نمی‌شوند! هر سؤال با معنی درباره یك شیئی ریاضی جواب مشخصی دارد. در این دیدگاه یك ریاضیدان همانند یك زمین‌شناس است. ریاضیدان چیزی را ابداع نمی‌کند بلکه همه چیز از پیش ابداع شده است، کار وی تنها کشف حقایق و یا اشیاء ریاضی است.

دو نفر از طرفداران تمام‌عیار این فلسفه رنه‌توم[۲] و کورت گودل[۳] می‌باشند.

۲) صورتگرایی[۴]. طرفداران این فلسفه مدعی هستند که هیچ شیئی ریاضی واقعی و حقیقی وجودندارد. وجود اشیاء ریاضی وجودی وابسته است. مفاهیم ریاضی ساخته و پرداخته ذهن آدمی (ریاضیدان)اند. مفهوم نقطه، مفهوم خط، مفهوم عدد، عدد اول، پیوستگی و نظایر آن همه و همه ساخته ذهن آدمی‌اند و تنها در ذهن او جای دارند. خطی که بر تخته سیاه رسم می‌کنیم یك خط فیزیکی است زیرا که عرض دارد، خط ریاضی را هیچ‌کس ندیده است! مفهوم ۲ سیب چیزی جز عدد ۲ است. عدد ۲ را تا کنون هیچ‌کس ملاقات نکرده است!

در این دیدگاه ریاضیات از اصول موضوع، تعاریف و قضیه‌ها تشکیل شده است. به عبارت دیگر، ریاضیات از فرمولها ساخته شده است. لیکن قواعدی وجود دارد که برطبق آن فرمولی از فرمول دیگر نتیجه می‌شود (قواعد منطقی)، اما فرمولها خود در باب چیزی نیستند و دارای محتوا نیستند. بلکه نوارهایی ازنمادها و علایم هستند. شکلی صوری و ظاهری دارند. همانند قالبی می‌مانند که فاقد محتوا و چیزی هستند.

البته‌صورتگرایان (طرفداران فلسفه صورتگرایی) به خوبی می‌دانند که فرمولهای ریاضی گاهی به مسائل فیزیکی به‌کار می‌آیند. وقتی فرمولی تعبیری فیزیکی پیدا می‌کند دارای معنا می‌شود و این معنی ممکن است حقیقت باشد یا کذب. لیکن این حقیقت یا کذب فقط مربوط به یك تعبیر فیزیکی خاص می‌باشد. به عنوان یك فرمول ریاضی محض، یك‌فرمول هیچ معنایی که ارزش راستی داشته باشد ندارد.

صورتگرایان و افلاطونگرایان از باب اعتقاد به وجود اشیاء حقیقی ریاضی در نقطه مقابل هم هستند. لیکن از حیث آنکه در استنتاجهای ریاضی چه اصولی‌را باید به‌کار گرفت اختلاف نظری ندارند.

از نظر صورتگرایان «ریاضیات علم استدلالات منطقی است». همه چیزی که در ریاضیات می‌توان ادعا کرد این است که **قضایا به صورتی منطقی از اصول موضوع نتیجه می‌شوند**. بنابراین قضایا مبری از خطا و

نگرانی هستند. زیرا فرآیندها برهانها و استدلالات هیچ رخنه ونقصی باقی نمی‌گذارد.

دیدگاه صورتگرایی در اواسط قرن بیستم دیدگاه رسمی و غالب به‌شمار می‌رفت. گرچه اکثریتی از ریاضیدانان، در ته دل فلسفه افلاطونگرایی را باور داشتند لیکن این فلسفه همانند یك جریان زیرزمینی وجود داشت و فقط در محافل خصوصی از آن یادمی‌شد.

ریشهٔ دیدگاه صورتگرایانه از هندسه اقلیدسی نشات می‌گیرد. کارهای مستمری که برای اثبات اصل پنجم اقلیدس (اصل توازی) طی قرون متوالی انجام گرفت منجر به پیدایش هندسه‌های نااقلیدسی گردید. این هندسه از جهت توازی خطوط در مقابل هندسه اقلیدسی قرار داشتند. حال این سؤال پیش می‌آید که کدام‌یك از این هندسه‌ها جهان فیزیکی (جهان مادی) را می‌توانند تعبیر نمایند. هریك از این هندسه‌ها در خود سازگاری دارند و از حیث اعتبار ریاضی همهٔ آنها در یك درجه قرار دارند. پس این مشکل باقی می‌ماند که هیچ‌یك به تنهایی مفسر جهان فیزیکی نیستند.

صورتگرا چنین نتیجه‌گیری می‌کند که برای آنکه ریاضیدان آزادانه هم هندسه اقلیدسی و هم هندسه‌های نااقلیدسی را مطالعه کند لازم است که مفهوم حقیقت را از هر دوی آنها سلب کند. از دیدگاه صورتگرایان هندسه یك ساختار استدلالی دارد نه ساختار توصیفی. در هندسه نباید از تصاویر و دیاگرامها استفاده کرد.

یکی از بنیان‌گذاران فلسفه صورتگرایی دیوید هیلبرت[5] است. از زمان هیلبرت فلسفه صورتگرایی سیر نزولی طی کرده است از دید **صورتگرایان ریاضیات علم نیست زیرا موضوع مادی مورد مطالعه‌ای ندارد.** مفروضاتی شهودی و بینشی ندارد تا بتوان به آنها تعبیری داد. آنها می‌گویند که ریاضیات یك زبان است؛ **و یا آنکه ریاضیات وسیله فرمولبندی کردن و توسعه نظریه‌های علمی است.**

۳) **ساختارگرایی**[6] مخالف با هردوی صورتگرایان و افلاطونگرایان، ساختارگرایان‌اند. ساختارگرایان‌معتقدند که‌ریاضیات معقول فقط‌ریاضیاتی است‌که باساختارهایی متناهی به‌دست آمده باشد. مجموعهٔ اعداد حقیقی ویا هر مجموعه نامتناهی دیگر را نمی‌توان بدین‌طریق به دست آورد. ساختارگرایان قسمتهای مهمی از ریاضیات کلاسیك را فدای فلسفه خویش می‌کنند. آنان نه تنها مجموعه اعداد حقیقی (R) را باور ندارند، بلکه قضیه‌های زیبا و اساسی همچون قضیه پیوستار (فرض پیوستار) و یا این قضیه که $N_0<C$ است را قبول ندارند که در آن N_0 عدد اصلی (کاردینال) N و C نیز عدد اصلی R است.

اخیراً تلاشهای ساختارگرایان شدت یافته است و برای مباحث کلاسیك و معمول ریاضی همچون آنالیز ریاضی برنامه‌هایی ارائه داده‌اند.

ما در این مبحث اجمالی سه‌فلسفه مشهور را بیان کردیم. قصدمان این نبوده است که بیان داریم که‌کدام یك بیشتر قابل قبول و کدام‌یك مردوداند؟ تنها خواستیم اشاره‌ای باشد بر رشته‌ای جدید از رشته‌های متنوع دانش ریاضیات به نام فلسفه ریاضی.

اصطلاحات و حواشی

۱. منتسب به افلاطون فیلسوف شهیر یونان باستان است و در مقابل Platonism می‌باشد.

۲ـ Rene Tom ریاضیدان فرانسوی است که وی بر پایه نظریه مجموعه‌ها معتقد است که شهود نظریه مجموعه‌ای چیزی هم طراز شهود عینی است.

۳ـ Kurt Godel ریاضیدان و منطقی آلمانی است.

۴ـ این واژه در مقابل Formalism گفته شده است. ریشهٔ این واژه از Form به معنای شکل و ظاهر است؛ بخصوص به‌ظاهری خالی از محتوا نیز اطلاق شده است.

۵ـ دیوید هیلبرت David Hilbert یکی‌ازبزرگترین ریاضیدانان قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم است. وی تحقیقات شگرفی در علم جبر، مبانی هندسه و دیگر شاخه‌های ریاضیات انجام داده است. همو بود که در سال ۱۹۰۰ میلادی در کنگره ریاضیدانان که در پاریس برگزار شده بود فهرستی متشکل از ۳۶ مسأله لاینحل را ارائه داد.

۶ـ این واژه در مقابل Constructivism گفته شده است. Construct به‌معنی ساختن است.

۷ـ خواستاران اطلاعات بیشتر در زمینه اصل قوت متصله، $N_0<C$ می‌توانند کتاب «آنالیز ریاضی» تالیف غلامحسین مصاحب، جلد اول قسمت دوم مراجعه کنند. از دیدگاه ساختارگرایان برهان این قضیه یك برهان ساختاری نبوده و لذا قابل قبول نمی‌باشد..

مراجع

۱ـ هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی، ترجمهٔ محمدهادی شفیعها، از انتشارات مرکز نشر دانشگاهی.

2. Hersch and Davis, The Mathematical Experience

قضیهٔ مقدار میانگین و یك مثال نقض

ترجمه و اقتباس از:
علی آبکار دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی

این یادداشت مربوط می‌شود به کاربردی از قضیهٔ مقدار میانگین (ق. م. م) و نقش مثالهای نقض در ریاضیات که به‌طور طبیعی وقتی مشغول بحث روی جواب یك مسئله درکلاس درس آنالیز بودم پیدا شد. گروهی از دانشجویان علاقمند، همگی، مرتکب «اشتباه» یکسانی شده بودند و مشتاق بودند که مرا متقاعد کنند به اینکه در نگرش آنها به مسئلهٔ زیر هیچگونه اشتباهی رخ نداده است.

مسئله. تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^3 & x\geqslant 0 \\ x^2 & x<0 \end{cases}$ داده شده‌است. با درنظرگرفتن مشتقات‌راست وچپ، نشان دهید که f در $x=0$ مشتق‌پذیراست، ولی مشتق دوم f در $x=0$ وجود ندارد.

راه‌حل درست. مشتق راست، $f'_+(0)$، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to 0^+}x^2=0$$

مشتق چپ، $f'_-(0)$، از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0^-}x=0$$

چون $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ هردو موجود و مساویند، پس f در $x=0$ مشتق‌پذیراست و $f'(0)=0$.

چون به‌ازای هر $x>0$، $f'(x)=3x^2$ و به‌ازای هر $x<0$، $f'(x)=2x$، تابع مشتق به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & x\geqslant 0 \\ 2x & x<0 \end{cases}$$

اکنون با بررسی مستقیم معلوم می‌شود که $f''_+(0)=0$ اما $f''_-(0)=2$، بنابراین f' در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست و لذا f در $x=0$ مشتق دوم ندارد.

راه‌حل نادرست. چون به‌ازای هر $x>0$، $f'(x)=3x^2$ و به ازای هر $x<0$، $f'(x)=2x$، پس:

$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=0$$

و

$$\lim_{x\to 0^-}f'(x)=0$$

بنابراین $f'(0)=0$ و f در $x=0$ مشتق‌پذیراست. با استفادهٔ مجدد از همین روش می‌توان نشان داد که $\lim_{x\to 0^+}f''(x)=0$ و $\lim_{x\to 0^-}f''(x)=2$، یعنی $f''(0)$ وجود ندارد.

درنگاه اول به‌نظرمی‌رسد که روش حل نادرست هم منجر به‌نتیجهٔ درست شده باشد ولی باید توجه کرد که دانشجویان آشکارا از مفروضات $\lim_{x\to 0^+}f'(x)=f'_+(0)$ و $\lim_{x\to 0^-}f'(x)=f'_-(0)$ دراستنتاج اینکه f در $x=0$ مشتق‌پذیراست بهره جسته‌اند. در حصول نتیجهٔ نهایی، یعنی اینکه f در $x=0$ مشتق دوم ندارد، آنچه که واقعاً ثابت شده این است که f'' در $x=0$ پیوسته نمی‌باشد. وقتی که این موضوعات را به دانشجویان خاطرنشان کردم، با اطمینان گفتند که فرضهای ضمنی انجام شده معتبرند. (در واقع برای تابعی که موردمطالعه قرارگرفته بود فرضیات ضمنی درست بودند). ما تصمیم گرفتیم ببینیم که آیا فرضیات ضمنی دانشجویان درحالت‌کلی هم درست می‌باشند یا خیر ولذا حدس زیر را تنظیم کردیم.

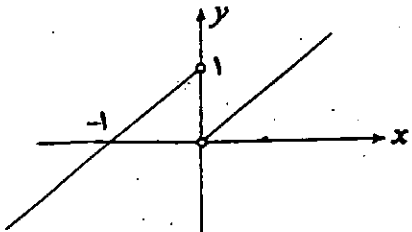
حدس ۱. اگر به‌ازای هر $x>a$، f مشتق‌پذیر باشد و $\lim_{x\to a^+}f'(x)$ وجود داشته باشد، آنگاه f در $x=a$ مشتق راست دارد و $\lim_{x\to a^+}f'(x)=f'_+(a)$.

حدس مشابهی هم برای مشتق چپ درنقطهٔ $x=a$ درنظر گرفته می‌شود.

بعد ازکمی تجربه، با مثال نقض زیر مواجه می‌شویم.

$$g(x)=\begin{cases} x & x>0 \\ x+1 & x\leqslant 0 \end{cases}$$

درشکل زیرنمودار تابع g رسم شده است.



به‌آسانی می‌توان نشان داد که $\lim_{x\to 0^+}g'(x)=1$، اما

$$g'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\infty$$

بقیه در صفحهٔ ۶۶

قاعده لایبنیتز و تعمیم آن

ترجمه: مسعود سارویی

با فرض اینکه توابع U و V به تعداد n بار مشتق‌پذیر باشند و داشته باشیم $D=\frac{d}{dx}$، می‌توان نوشت

$$D\,(UV)=VDU+UDV$$
$$D^2\,(UV)=VD^2U+2DVDU+UD^2V$$
$$D^3\,(UV)=VD^3U+3DVD^2U+3D^2VDU+UD^3V$$
$$D^4\,(UV)=VD^4U+4DVD^3U+6D^2VD^2U+4D^3VDU+UD^4V$$

با توجه به نتایجی که بدست‌آمده است ومقایسهٔ آن برای‌حاصل $(U+V)^n$، می‌توان حدس زد که اگر عمل مشتق‌گیری را ادامه دهیم خواهیم داشت:

$$D^n\,(UV)=VD^n\,U+\frac{nDVD^{n-1}U}{1!}+\frac{n(n-1)\,D^2VD^{n-2}}{2!}+\cdots+UD^nV$$

به‌عبارتی دیگر

$$D^n\,(UV)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\,D^rUD^{n-r}V \qquad (1)$$

درستی تساوی ۱ را به کمك استقراء ریاضی براحتی می‌توان ثابت کرد. تساوی (۱) فرمول عمومی محاسبهٔ مشتقات کوچکتر ازمرتبه n و n از UV است وآنرا فرمول لایبنیتز می‌نامند.

یك دانش‌آموز دقیق ممکن‌است به‌این فکر بیافتد که آیا فرمول مشابهی برای مشتق nام، $\frac{U}{V}$ هم وجود دارد؟ می‌دانیم

$$D\left(\frac{U}{V}\right)=(VDU-UDV)/V^2$$

که می‌توان آنرا به‌صورت زیرهم نوشت

$$D\left(\frac{U}{V}\right)=\begin{vmatrix} V & U \\ DV & DU \end{vmatrix}/V^2 \qquad (2)$$

ذهن آشنا به جبر متوجه می‌شود که می‌توان با توجه به رابطهٔ (۲) فرمولی عام را که در زیرمی‌آید پیش‌بینی‌کرد. بدین‌صورت که اگربنویسیم $U=WV$ فرمول لایبنیتز (برای هرعدد صحیح غیرمنفی k) می‌دهد

$$D^kU=D^k\,(WV)=\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\,D^rW\,D^{k-r}V$$

به‌عبارتی دیگر

$$\frac{D^kU}{k!}=\sum_{r=0}^{k}\frac{D^rW\,D^{k-r}V}{r!\,(k-r)!} \qquad (3)$$

با استفاده از (۳) مشاهده می‌شود که به ازای

$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n$

یك دستگاه مثلثی متشکل از $n+1$ معادله بدست می‌آوریم که بر حسب W، $\frac{DW}{1!}$، $\frac{D^2W}{2!}$، . . . ، $\frac{D^nW}{n!}$ خطی‌اند.

بنابرقاعده کرامر می‌توان نوشت:

$$\frac{D^nW}{n!}=\frac{D^n(U/V)}{n!}=\frac{1}{V^{n+1}}\begin{vmatrix} V & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & U \\ \frac{DV}{1!} & V & \cdots & & & 0 & \frac{DU}{1!} \\ \frac{D^2V}{2!} & \frac{DV}{1!} & V & 0 & \cdots & 0 & \frac{D^2U}{2!} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \frac{D^nV}{n!} & \frac{D^{n-1}V}{(n-1)!} & \frac{D^{n-2}V}{(n-2)!} & \cdots & & \frac{DV}{1!} & \frac{D^nU}{n!} \end{vmatrix}$$

آنچه بدست‌آمده است یك فرمول درشکل دترمینان برای‌محاسبهٔ مشتق nام U/V است. نکته جالب توجه ساختاری است که بدینسان آشکارشده است.

مراجع:

(1)- Differential And Integral Calculus, By: N. Piskunov (P. 113-114) Vol 1

(2)- the Mathematical Garette, No, 324 P. 52)

ریز مواد هندسه

دبیرستان در برنامهٔ جدید

در شماره قبل مجلهٔ رشد آموزش ریاضی ، هدفهای آموزش ریاضی در دوره متوسطه ، دربرنامه جدید، درج شده بود. اینک ریز مواد هندسه از نظر خوانندگان محترم می‌گذرد و بقیه ریز موادنیزبه ترتیب در شماره‌های آینده خواهد آمد. باید توجه داشت که هدفها و ریز مواد ریاضی ۴ ساله دبیرستان در طول ۲ سال در شورای برنامه‌ریزی ریاضی متوسطه مطرح و سپس تصویب شده است که اینک برای اطلاع عموم به نظر خواهی گذاشته می‌شود

مقدمه

ریز مواد هندسه رشته ریاضی فیزیك وبه‌طور کلی اهداف و محتوای این درس پس از ارائه طرح وگزارش کمیسیون هندسه به شورای عمومی در جلسات شمارهٔ ۲۱ و ۲۲ و ۲۳ مورخ۲۱ دیماه، ۵ بهمن، ۱۹ بهمن۱۳۶۸ این شورا مورد بحث قرار گرفت. در جلسات شورای عمومی بخصوص روی این مساله که چه نوع هندسه‌ای باید در این دورهٔ چهارساله تدریس گردد بحثهای مستمری صورت گرفت. نظر شورا بر این است که اگرچه باید محتوای اصلی هندسه در این دورهٔ هندسهٔ اقلیدسی باشد ولی مواد متشکل این درس و نحوهٔ تدریس آن باید به گونه‌ای باشد تا فکر دانش‌آموزان را محدود به اینکه این تنها هندسه ممکن است ننماید (بلکه هندسه‌های دیگری نیز که از نظر ریاضی ممکن و کاربرد فیزیکی نیز دارند و نظریه‌پردازی شده‌اند معرفی می‌شوند) که البته دراین سطح، ما نمی‌توانیم وارد بحث دقیق در آنها بشویم. برای القا این تفکر شیوه‌های ذیل که مکمل یکدیگر هستند، مد نظر مؤلفین این درس قرار خواهد گرفت.

۱ــ تا آنجا که ممکن است بیان اصل موضوع پنجم اقلیدس به تعویق می‌افتد (همچنانکه خود اقلیدس نیز در کتاب مبانی خود این کار را کرده است). این امر در ریز مواد پیوست صورت گرفته است و پس از اینکه نیاز به این اصل در ادامهٔ این هندسه محرز و الزامی گردید. این اصل بیان شده است.

۲ــ در بیان اصل موضوع پنجم و مقدم بر آن با ذکر مثالهایی مثلا درهندسهٔکره، برای‌دانش‌آموزان، براین نکته تاکید می‌گردد که اصل توازی صرفاً یك اصل (قضیه اثبات‌نشده) است‌که آنرا می‌پذیریم و می‌توانیم با پذیرفتن اینکه از یك نقطه خارج یك خط هیچ خطی موازی آن رسم نمی‌شود (مثال هندسه کروی که درك آن ساده است) هندسه‌های دیگری نیز بسازیم پس از تأکید و توضیح کافی، با ذکر شواهد تاریخی و کاربرد فیزیکی هندسه ریمانی، به‌کار در هندسهٔ اقلیدسی ادامه می‌دهیم.

باید توجه داشت که ظرافت القاء تفکر ریاضی مبتنی بر روش اصل موضوعی خود به‌خود تصور هندسه اقلیدسی به‌عنوان‌تنها هندسهٔ ممکن‌را لغوکرده وجهان‌بینی

صحیح‌تری از جهان فیزیکی را در دانش‌آموزان رشد و تقویت خواهد نمود.

۳ــ نکته دیگری را که هم کمیسیون و هم شورای عمومی به اتفاق برآن تاکید نموده‌اند آنست که در کتب راهنمای دبیران، در دوره‌های بازآموزی، ضمن حل مسائل دشوار هندسه اقلیدسی و ارائه زیبائیهای آن مختصری در حد آشنایی با مواردی از هندسه‌های نااقلیدسی کلاسیك که نیازی به هندسه دیفرانسیل و مطالب پیشرفته آن نداشته باشد، (مانند هندسه‌های متناهی و هندسه کروی) ارائه شود و در اینگونه دوره‌ها تدریس گردد، تا دبیران درحدی بالاتر از کتب درسی به‌مطالب هندسه آشنایی داشته‌باشند. بدیهی است این تسلط بیشتر دبیران باعث تشویق و ایجاد انگیزه‌های لازم در دانش‌آموزان و ترغیب آنها به فراگیری این قسمت از ریاضیات خواهد شد.

اهداف:

۱ــ ارائه آشناترین و قدیمترین نمونه از یك علم قیاسی

۲ــ ارائه هندسه به‌نوعی که باعث بالا بردن درك شهودی دانش‌آموزان باشد و در عین حال استعداد و توانائیهای ذهنی آنها را محدود ننماید.

۳ــ ارائه یك الگوی صحیح (در بیان مطالب علمی) بوسیله درج مطالب به صورت منطقی و مستدل. (حتی‌ــ الامکان مفاهیم لازم منطقی نظیر برهان خلف، مثال‌نقض و... قبل از اولین مورد استفاده بحث می‌شود).

۴ــ بالا بردن اطلاعات علمی دانش‌آموزان در یکی از قدیمترین ــ جالب‌ترین و شیرین‌ترین شاخه‌های علم «به‌نام هندسه» به صورتی که او را جلب و جذب به فراگیری علوم ریاضی نماید.

۵ــ ارائه هندسه به عنوان یك علم زیباشناسی (در قالب مطالبی نظیر، تشابه، تقارن و...) و بالا بردن دقت دانش‌آموزان در ترسیمات هندسی.

۶ــ پرورش فکر ــ ایجاد ذهن خلاق و بالابردن درك فضایی دانش‌آموزان.

۷ــ رفع نیاز سایر دروس ریاضی و غیر ریاضی در ارتباط با کاربرد هندسه (نظیر روابط متری ومحاسبات سطح و حجم و...)

بدیهی است در تدوین مطالب همواره اهداف فوق مدنظر قرار خواهند گرفت.

ریز مواد هندسه دبیرستان:

۱ــ مقدمات:

تعریف نشده‌ها ــ مفهوم نخستین ــ برهان ــ قضیه ــ اصل موضوع ــ تمرین.

برخی‌ازتعریف‌نشده‌ها(نقطه، خط، صفحه، فضا،...) و تعریف شده‌ها از قبیل: زاویه ــ اندازهٔ زاویه ــ مثلث ــ انواع مثلث ــ بیان پنج اصل اقلیدس از جنبهٔ تاریخی آن تمرین.

(لازم است دانش‌آموزان با مفاهیم مقدماتی در مورد مجموعه‌هــا ــ نظیر عضویت و جــزئیت و زوج مــرتب نیز آشنا شوند).

۲ــ با توجه به چهار اصل اول اقلیدس و بعضی از اصول هیلبرت و مجموعه‌ها هندسه براصول زیربنائی‌شود. این اصول به‌شرح زیر است.

الف ــ از هر دو نقطه درست یك‌خط می‌گذرد (اصل اول اقلیدس)

ب ــ هر خط را می‌توان به‌یك محور تبدیل کرد.

ج ــ هر خط (در صفحه) دو طرف دارد برخــلاف هندسه فضایی که چنین نیست.

د ــ هر زاویه یك اندازهٔ مناسب دارد. (اصل سوم اقلیدس)

هـ ــ دو مثلث که دارای دو ضلع و زاویــهٔ بیــن همنهشت باشند، همنهشتند (همزمان‌باطرح اصل۲ مفهوم فاصله و پاره‌خط بیان می‌شود و رابطهٔ آن با این اصل توضیح داده شده، سپس همنهشتی تعریف شود).

با توجه به اصول فوق تعریف‌های زیر بیان می‌شود.

بینیت ــ نیم خط ــ مجموعه‌های محدب ــ چندضلعی و چندضلعی محدب ــ دایره تمامد ــ تقارن نسبت بــه نقطه و خط ــ انواع زاویه‌ها ــ جمع زاویه‌ها در صفحه ــ داخــل و خارج زاویه در صفحه ــ نیمسازهای زاویه ــ نیمسازهای داخلی و خارجی یك زاویه برهم عمودند.

۳ــ قضایا و تعاریف

الف: حالات همنهشتی دو مثلث (ارتفاع ــ میانه ــ نیمسازهای داخلی و خارجی ــ عمود منصف).

ب: نامساوی‌ها در مثلث (بین اضلاع مثلث ــ بین زوایای مثلث ــ و ارتباط بین زوایا و اضلاع از نظــر نامساویها).

جــ دو خط عمود برهم موازیند.

دــ هرگاه خطی دو خط را قطع کند و دو زاویــه متبادل داخلی مساوی باشند، آن دو زاویه مساویند.

هـ ــ دایره

وــ تقاطع دو دایره

زــ تقاطع خط و دایره

حــ رسم نیمساز ــ عمود منصف ــ رسم خط عمود

بر یك خط از یك نقطه ــ رسم مثلث در چهار حالت مختلف (به‌صورت شهودی با خط کش و پرگار).

ط ــ تعریف مکان هندسی و ارائه مثالهایی درحدود مطالب گفته شده قبلی.

ی ــ حالتهای خاص مثلث (متساوی‌الساقین، متساوی الاضلاع و...) و بحث در خواص آنها.

۴ــ بیان اصل پنجم اقلیدس:

قضیه: از نقطه‌ای خارج یك خط، یك خط می‌توان به‌موازات آن رسم کرد.

اصل: از هر نقطه خارج یك خط، بیش از یك خط نمی‌توان به‌موازات آن رسم کرد.

قضایا:

الف ــ دو خط موازی با خط سوم با هم موازیند. (هر خط با خودش موازی است).

ب ــ هرگاه خطی یکی از دو خط موازی را قطع‌کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

ج ــ هرگاه خطی بریکی از دو خط موازی عمود باشد، بردیگری نیز عمود است.

د ــ اثبات تساوی زوایای متبادل و متقابل

هـ ــ مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است.

و ــ مجموع زوایای خارجی n ضلعی محدب ۴ قائمه است.

ز ــ زوایایی که اضلاعشان باهم موازی یا برهم عمودند مساوی یا مکملند.

ح ــ زوایای محاطی ــ ظلی ــ داخلی و خارجی در دایره، وتر در دایره و قضایای‌مربوط به وضعیت دو دایره نسبت به‌هم.

بعضی از قسمتهای فوق را قبل از بند ۴ می‌توان ارائه نمود. البته قسمتهائی که نیاز به اصل توازی دارد از جمله اندازهٔ زاویه‌ها را باید بعد آورد.

۵ــ چهارضلعی‌ها و خواص آنها

الف ــ متوازی‌الاضلاع ــ مستطیل ــ لوزی ــ ذوزنقه و قضایای مربوط

ب ــ خط میانگین در مثلث و ذوزنقه

ج ــ اثبات همرس‌بودن ارتفاعات، میانه‌ها، نیمسازها و عمودمنصفهای مثلث

د ــ مساحت و اثبات قضیهٔ فیثاغورث در فصل مساحتها (اثبات اقلیدس) و خواص مثلث قائم‌الزاویه

هـ ــ کسینوس زوایا و نسبتهای موجود بین اضلاع و زوایای مثلث قائم‌الزاویه و معرفی نسبتهای مثلثاتی

و ــ تعمیم قضیه فیثاغورث (قضیه کسینوسها)

ز ــ چهارضلعی‌های محاطی و محیطی

۶ــ قضیه تالس

الف ــ بیان قضیه تالس

ب ــ تشابه در مثلث‌ها

ج ــ تشابه در چند ضلعیها

د ــ روابط بین اشکال متشابه

۷ــ قضیه سوا ــ منلائوس و بطلمیوس در چهارضلعیهای محدب و نتایج آن ــ (بیان و اثبات قضیهٔ استوارت و نتایج آن و قضیه فیثاغورث به‌صورت تمرین).

۸ــ روابط طولی در مثلث

الف ــ روابط بین اجزاء اصلی

ب ــ روابط بین اجزاء فرعی و اجزاء اصلی(اجزاء فرعی برحسب اجزاء اصلی)

ج ــ روابط بین اجزاء فرعی بصورت تمرین(بعضی از حالات ساده)

۹ــ بردارها در صفحه (جبر بردارها و کاربردهای آنها)

۱۰ــ تبدیلات: انتقال ــ تقارن مرکزی و محوری ــ دوران ــ تجانس ــ تشابه ــ انعکاس قطب و قطبی و قضایای مربوط (به‌طور ساده و محدود و بدون استفاده از تبدیل قطبی معکوس) ــ استفاده از ماتریسها در تبدیلات.

۱۱ــ تقسیم توافقی: (خلاصه‌تر از کتابهای فعلی ودرواقع جنبه تحلیلی آن حذف شود).

۱۲ــ هندسه فضایی در سطح کامل‌تر از مطالب فعلی با ذکر مسائل بیشتر و تاکید بر مسائل چهاروجهی و محاسبه حجم بعضی از احجام.

۱۳ــ بردارها در فضا.

اعمال بر بردارها در فضا، ضرب اسکالر ــ ضرب عددی ــ ضرب‌هندسی ــ مختصات‌فضایی ــ کاربرد بردارها در تعمیم قضیه فیثاغورث (قضیه سینوسها و کسینوسها).

۱۴ــ معادلات خط و صفحه در فضا: در سطح کتب درسی فعلی (حتی‌الامکان کاربرد بردارها در بیان مفاهیم در این مورد بکار گرفته شود).

۱۵ــ مقاطع مخروطی (دایره ــ سهمی ــ هذلولی ــ بیضی و درواقع منحنی‌های درجه دوم) بیشتر از جنبه تحلیلی.

قاعده هوپیتال

جواد لآلی

مقدمه. یکی از قاعده و یا دستورهایی که بارها در دوران دبیرستان و یا سالهای اول دانشگاه مورد استفاده قرار می‌گیرد، قاعده هوپیتال است. سادگی کاربرد آن برای محاسبه صورتهای مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$، در متنهای درسی، مورد توجه اکثر دانش‌آموزان و دانشجویان است. آنچه را که در کاربرد آن کمتر بدان توجه می‌شود بررسی مفروضات این قاعده است. اگر از دانش‌آموزی بخواهید که شرایط این قاعده را دقیقاً بیان کند، ممکن است قادر به پاسخگویی کامل آن نشود. ما در اینجا درپی آن هستیم که صورت دقیق آن را بیان کنیم، و با ارائه دسته‌بندی جهت تقلیل مراحل برهان، به‌اثبات این قاعده بپردازیم. به عنوان کاربردی، صور مبهم را بررسی می‌کنیم و با مثالهایی نشان می‌دهیم که صور مبهم به کمک قاعده هوپیتال محاسبه پذیراند.

ملاحظات تاریخی. کسانی که تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، معمولاً، کتابهایی از نوع حسابان (حساب دیفرانسیل و انتگرال) را دیده‌اند. مباحث این نوع کتابها مشتمل بر حساب، جبر مقدماتی، هندسه، و مثلثات است که بعضی از آنها امروزه در مدارس هم تدریس می‌شوند؛ و همراه با آنالیز مقدماتی، جبر مقدماتی دانشگاهی، هندسه تحلیلی است‌که معمولاً در سالهای اول و دوم دانشگاهها تدریس می‌گردد. چون شاخه‌های دیگر علوم نیز نیاز به «ریاضیات مقدماتی» دارد، بیان این نوع ریاضیات باید به همان دقت و شیوه‌ای باشد که در مبانی جبر و آنالیز گفته می‌شوند. مثلاً، مفاهیم تابع، حد، پیوستگی، مشتق‌پذیری و انتگرال پذیری مفاهیمی هستند که کم و بیش در شاخه‌های علوم مورد نیاز است. امروزه، اینگونه مفاهیم در دروسی تحت عنوان حسابان (ریاضی عمومی) ارائه می‌گردد. شالوده کتابهایی، با این نوع مفاهیم، در قرن هفدهم گذاشته شده است، و شاید یکی از دستاوردهای گسترش ریاضی در این قرن ابداع حسابان باشد. از جمله کسانی که در پایه گذاری آن سهیم بوده‌اند می‌توان نیوتن و لایبنیتز[1] را نام برد. بعضی از تاریخ نویسان یکی از این دو را بر دیگری، درابداع حسابان، ترجیح می‌دهند. ولی، امروزه، عقیده عمومی بر این است که هر یک از آنها حسابان را مستقل از دیگری کشف کرده‌اند. با اینکه کشف نیوتن زودتر انجام شد، ولی، لایبنیتز زودتر به انتشار نتایج خود پرداخته است. او در بین سالهای ۱۶۷۳ تا ۱۶۷۶ حسابان خود را ابداع کرد و در ۲۹ اکتبر ۱۶۷۵، برای اولین بار، علامت امروزی انتگرال را که به صورت $\int$، همان s کشیده شده است، به‌کار برد. بعد از نیوتن و لایبنیتز برای مدتی شالوده‌های حسابان در پرده ابهام باقی ماند و چندان بدان اعتنایی نشد، تا اینکه اولین کتاب درسی در این موضوع در سال ۱۶۹۶، نوشتهٔ مارلی دولوپیتال[2] (۱۶۶۱–۱۷۰۴)، که نزد ما به هوپیتال معروف است، منتشر گردید. هوپیتال یکی ازشاگردان یوهان برنویی (۱۶۶۷–۱۷۴۸) بود. هوپیتال با یوهان برنویی قرار گذاشت که، در مقابل مقرری منظمی، اکتشافات خود را برای هوپیتال بفرستد تا وی به هر طریقی که می‌خواهد با آنها عمل کند. بدین‌گونه بود که اولین کتاب درسی حسابان تحت عنوان «آنالیز بینهایت کوچکها»، با موافقتنامه مالی با یوهان، گردآوری و منتشر گردید. در این کتاب قاعده‌ای موسوم به‌قاعده هوپیتال برای یافتن مقدار حد یک کسر، که صورت و مخرج آن با هم به صفر میل می‌کنند، وجود دارد.

بدین طریق قاعده آشنایی که برای محاسبه صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در کتابهای‌درسی‌دیده می‌شود به‌قاعده‌هوپیتال شهرت‌یافت. هوپیتال، درمقدمه‌کتاب، از لایبنیتز وخاندان‌برنویی، به‌خصوص، استادجوان خودش (یوهان)، سپاسگزاری کرد، و یوهان در ضمن نامه‌ای؛ از اینکه هوپیتال در مقدمه کتاب از او نام برده است، تشکر کرده است. اما، بعد از وفات هوپیتال، یوهان او را به سرقت اکتشافات خود متهم کرد.

ملاحظات مقدماتی. قبل ازآنکه وارد دستورهوپیتال شویم، ابتدا یك لم و نتایج حاصل ازآن را بررسی می‌کنیم.

۱۰۱ تعریف. فرض کنید R مجموعه اعداد حقیقی باشد، مجموعه R^* (R ستاره) را چنین تعریف می‌کنیم

$$R^* = R \cup \{\pm\infty\}$$

۲۰۱ لم. اگر $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ و x_0 و L عضو R^* باشند آنگاه یك همسایگی از x_0 موجود است که در آن همسایگی

تابع f همان علامت L را دارد.

برهان. دراینجا، حالتی را بررسی می‌کنیم که x_0 و L حقیقی است و $L>0$.

با توجه به تعریف حد، متناظر با $\varepsilon=\frac{1}{2}L$، عددی مانند δ هست که به ازای هر x، اگر $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ آنگاه $|f(x)-L|<\frac{1}{2}L$. این معادل این است که $\frac{1}{2}L<f(x)<\frac{3}{2}L$. چون L مثبت است، پس به‌ازای هر x دراین همسایگی، $f(x)>0$.

۳.۱. نتیجه ۱. درلم ۱، می‌توان همسایگی را به صورت بازهٔ بسته نوشت.

برهان. اگر x_0 عدد حقیقی لم فوق باشد، کافی است که بازه

$$\left[x_0-\frac{\delta}{2}, x_0+\frac{\delta}{2}\right]$$

را درنظر بگیریم.

۴.۱. نتیجه ۲. اگر f درهمسایگی از x_0 مشتق‌پذیر باشد و

$$\lim_{x\to x_0} f'(x)=L \text{ و } L\neq 0$$

همسایگی محذوفی (یعنی، همسایگی از x_0 که نقطه x_0 حذف شده است) از x_0 موجود است که درآن همسایگی

(الف) اگر $L>0$، تابع f صعودی است،

(ب) اگر $L<0$، تابع f نزولی است.

برهان. چون f' درنقطه x_0 حدی متمایز از صفر دارد، پس یك همسایگی از x_0 موجود است‌که به‌ازای هر x دراین همسایگی، $f'(x)$ و L هم‌علامت‌اند. حال اگر $L>0$، تابع f در این همسایگی صعودی است؛ و اگر $L<0$، تابع f دراین‌همسایگی نزولی است.

۲. دسته‌بندی حالتهای ممکن قاعده هوپیتال

حکم قاعده هوپیتال این است که

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$

که درآن، x_0 و L عضو R^* است. اگر قرار باشد برای هر دو مقدار x_0 و L برحسب آنکه حقیقی باشند و یا برابر $\pm\infty$ باشند، برهانهای جداگانه‌ای ارائه گردد، می‌بایستی ۹ برهان عرضه شود. چون قاعده هوپیتال برای حد راست وحد چپ نیز قابل بیان است حالتهای ممکن از ۹ حالت نیز تجاوز می‌کند. بدیهی است که بررسی همه این حالتها، به‌طور جداگانه، کار پر زحمتی است. اینك، می‌خواهیم با دسته‌بندی خاصی مراحل برهان را تقلیل دهیم. انتخاب روش زیر می‌تواند دراین زمینه مفید باشد.

۱) می‌دانیم که؛ $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ اگر و فقط اگر

$$\lim_{x\to x_0} -f(x)=-L.$$

پس‌کافی است حالت $0\leqslant L\leqslant\infty$ را بررسی‌کنیم وحالت $-\infty\leqslant L<0$ را بدین حالت برگردانیم.

۲) قاعده هوپیتال را، وقتی که $x_0=0$، بر بازه $(0, \delta]$ بیان می‌کنیم وحالتهای دیگر را بدین حالت برمی‌گردانیم.

۳) فرض‌کنید x_0 یك عدد حقیقی دلخواهی باشد. با انتخاب توابع

$$F(x)=f(x+x_0) \text{ و } G(x)=g(x+x_0)$$

می‌توان این حالت را به‌حالت (۲) برگرداند. زیرا،

$$\lim_{x\to 0^+}F(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x) \text{ و } \lim_{x\to 0^+}G(x)=\lim_{x\to x_0^+}g(x)$$

$$\frac{F'(x)}{G'(x)}=\frac{f'(x+x_0)}{g'(x+x_0)}$$

۴) برای حالت $x_0=\infty$، توابع F و G را چنین تعریف می‌کنیم:

$$F(x)=f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ و } G(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)$$

بنابراین،

$$\lim_{x\to 0^+}F(x)=\lim_{x\to\infty}f(x) \text{ و } \lim_{x\to 0^+}G(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)$$

بعلاوه،

$$F'(x)=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) \text{ و } G'(x)=-\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right)$$

بنابراین،

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{y'(x)}$$

۵) مطابق حالت (۲)، وقتی که $x_0=0$، برهانی برای حد چپ، بربازه $[-\delta,0)$ ارائه می‌دهیم و حالتهای (۳) و (۴)، به ترتیب، وقتی که x_0 حقیقی یا $-\infty$ باشد عیناً تکرار می‌کنیم.

دسته بندی فوق موجب می‌شود که فرض کنیم $0\leqslant L\leqslant\infty$ و قاعده را به ازای مقادیر حقیقی x_0 مطابق (۲) و (۵) مورد بررسی قرار دهیم.

قبل از آنکه به‌بررسی‌قاعده هوپیتال بپردازیم، صورت‌مقدماتی

از آن را، با برهانی بسیار ساده و با حد اقل مفروضات، بیان می‌کنیم.

۳. صورت مقدماتی قاعده هوپیتال

قضیه. فرض کنید بازه (a,b) شامل نقطه $x_\circ$ باشد بطوری که

(الف) f و g در $x=x_\circ$ مشتق پذیر باشند،

(ب) $f(x_\circ)=g(x_\circ)=\circ$،

(ج) $g'(x_\circ)\neq\circ$ و بـه ازای هر x از (a,b)، کـه $x\neq x_\circ$، $g(x)\neq\circ$. در این صورت،

$$\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_\circ)}{g'(x_\circ)}$$

برهان. برای اثبات، از این امر که $f(x_\circ)=g(x_\circ)=\circ$ استفاده می‌کنیم و چنین می‌نویسیم:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_\circ)}{g(x)-g(x_\circ)}=\frac{[f(x)-f(x_\circ)]/(x-x_\circ)}{[g(x)-g(x_\circ)]/(x-x_\circ)}$$

حال اگر x به $x_\circ$ میل کند، صورت کسر به $f'(x_\circ)$ و مخرج به $g'(x_\circ)\neq\circ$ میل می‌نماید. و با توجه به قضیه حد خارج قسمت دو تابع حکم برقرار می‌شود.

موضوع وقتی پیچیده می‌شود که تابع f در همسایگی محذوف $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد، ولی، در آن نقطه دارای چنین خاصیتی نباشد، همچنین، وقتی که $x_\circ=\infty$. بـا کمی دقت، بـا تکنیک ε و δ، می‌توان برهان جالبی برای آن ارائه داد.

۴. برهان بسیار جالب. اگر برهـان قاعده هوپیتال را در کتابهای درسی حسابان مشـاهده کنید خواهید دید که، احتمالاً حدود نود درصد آن، متکی بر برهان کوشی است. علت آن بدین خاطر است که اکثر ریاضیدانان، به سبب دقت آن، بدین برهان مراجعه می‌کنند. ولی، اغلب دانش‌آموزان ازمراجعه بدان صرفنظر می‌کنند. زیرا، این برهان بسیار دقیق وظریف است. ظرافت برهان کوشی به قضیه مقدار میانگین کوشی بستگی دارد که بیان این قضیه متکی بر قضیه رل است. بنابراین، اثبات قاعده هوپیتال از طریق برهان کوشی نیاز به مقدماتی دارد که بیان آن را به فرصت دیگری می‌گذاریم.

اینک، می‌خواهیم قاعده هوپیتال را با اجتناب از برهان کوشی، که با دردسرهای زیادی بنا نهاده شده است، بیان و ثابت کنیم. شاید در ابتدای امر چنین تصور شود که برهان ارائه شده به سبب استفاده از «تکنیک ε و δ» بسیار پیچیده باشد. اما، اگر برهان قضیه مقدار میانگین کوشی را به عنوان قسمتی از برهان کوشی قاعده هوپیتال در نظر بگیریم، چنین نخواهد بود. البته این برهان قدیمی است. ولی، اکثر مؤلفین برهان کوشی را به سبب معروفیت آن ترجیح می‌دهند.

قضیه (قاعده هوپیتال) فرض کنید I بازه بـازی از اعداد حقیقی باشد و $a\in R^*$ یکی از دو انتهای آن باشد و f و g توابعی حقیقی باشند که بر I مشتق پذیراند و به‌ازای هر x از I در شرایط ذیل صدق می‌کنند:

(الف) $g(x)\neq\circ$

(ب) $g'(x)\neq\circ$ و تابع g اکیداً یکنواست.

(پ) یکی از دو شرط ذیل برقرار باشد:

(۱) $\lim_{x\to a}f(x)=\circ=\lim_{x\to a}g(x)$ (صورت $\frac{\circ}{\circ}$)

(۲) $\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty=\lim_{a\to x}g(x)$ (صورت $\frac{\infty}{\infty}$)

(ت) $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$، $L\in R^*$

در این صورت، $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

برهان: چون a یکی‌ازدو انتهای بازه I است، می‌توان این‌بازه‌را به‌صـورت (a,b) یا (c,a) نوشت. ما برهـان را برای بازهٔ (c,a) ارائه می‌دهیم. حالت دیگر، با تغییرات جزئی، عیناً تکرار می‌شود. بنابر دسته بندی تقلیل برهان، می‌توانیم a را یک عدد حقیقی درنظر بگیریم و $\circ\leqslant L\leqslant\infty$.

صورت $\frac{\circ}{\circ}$. فرض کنید که $f(x)$ و $g(x)$، وقتی که x از سمت‌چپ به a میل‌کند، حدودی برابر صفر داشته باشند. چون g یکنوا است، پس می‌توان فرض کرد که به‌ازای هر x از (c,a)، $g'(x)>\circ$ (در غیر این صورت، $-g'(x)$ را در نظر می‌گیریم). ابتدا فرض کنید که $\circ\leqslant L<\infty$. چون $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ پس به‌ازای ε مفروض عددی‌مانند δ $(\circ<\delta<a-c)$ موجود است‌که به ازای هر x

اگر $x\in(a-\delta,a)$ آنگاه

$$(1)\quad L-\varepsilon<\frac{f'(x)}{g'(x)}<L+\varepsilon$$

چون در این همسایگی g' مثبت است، پس ضرب طرفین نامساوی فوق در $g'(x)$ جهت آن را تغییر نمی‌دهد. بنابراین،

$$(2)\quad (L-\varepsilon)g'(x)<f'(x)<(L+\varepsilon)g'(x)$$

فرض کنید $(x,a)\subseteq(a-\delta,a)$. با انتگرال گیری از نامساوی فوق، بر بازه (x,a)، خواهیم داشت:

$$(L-\varepsilon)\int_x^a g'(t)\,dt \leqslant \int_x^a f'(t)\,dt \leqslant (L+\varepsilon)\int_x^a g'(t)\,dt$$

یکی از توابع اولیه f' و g' بترتیب برابر f و g است. بالنتیجه،

$$(L-\varepsilon)[g(a)-g(x)]\leqslant f(a)-f(x)\leqslant (L+\varepsilon)[g(a)-g(x)]$$

از طرفی، حد توابع f و g در نقطه a برابر صفر است. بنابراین، بدون آنکه به‌کلیت برهان خللی وارد شود می‌توان مقدار توابع را در نقطه a صفر تعریف کرد. بنابراین، از نامساوی فوق نتیجه می‌شود که

(۳) $-(L-\varepsilon)g(x)<-f(x)<-(L+\varepsilon)g(x)$

بنابر فرض و اینکه $0<g'(x)$، تابع g اکیداً صعودی است و $0<-g(x)$ طرفین نامساوی (۳) را بر $-g(x)$ تقسیم می‌کنیم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند؛

یعنی، $L-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<L+\varepsilon$

یا $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

حال اگر $L=\infty$، متناظر عدد حقیقی مثبت M همسایگی از a موجود است که به ازای هر x در این همسایگی $M<\frac{f'(x)}{g'(x)}$، این نامساوی جایگزین نامساوی (۱) می‌شود و برهان عیناً تکرار می‌شود. اینک، حالت $\frac{\infty}{\infty}$ را بررسی می‌کنیم:

مطابق حالت قبل، متناظر ε مفروض عددی مانند δ هست که به‌ازای هر x، اگر $x\in(a-\delta,a)$ آنگاه نامساویهای (۱) و (۲) برقراراست. فرض‌کنید x عدد دلخواهی باشدکه $(a-\delta,x)\subseteq(a-\delta,a)$. با انتگرال‌گیری از طرفین نامساوی (۲) خواهیم‌داشت:

$$(L-\varepsilon)\int_{a-\delta}^x g'(t)\,dt\leqslant\int_{a-\delta}^x f'(t)\,dt\leqslant(L+\varepsilon)\int_{a-\delta}^x g'(t)\,dt$$

$$(L-\varepsilon)[g(x)-g(a-\delta)]<[f(x)-f(a-\delta)]\leqslant(L+\varepsilon)[g(x)-g(a-\delta)]$$

چون g اکیداً صعودی است، پس $g(x)-g(a-\delta)>0$. بنابراین،

$$L-\varepsilon<\frac{f(x)-f(a-\delta)}{g(x)-g(a-\delta)}\leqslant L+\varepsilon$$

$$L-\varepsilon\leqslant\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1-\frac{f(a-\delta)}{f(x)}}{1-\frac{g(a-\delta)}{g(x)}}\leqslant L+\varepsilon$$

می‌دانیم که حد توابع f و g، وقتی که x به a میل می‌کند، برابر به $\pm\infty$ است، پس اگر x به a میل کند آنگاه

$$L-\varepsilon\leqslant\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant L+\varepsilon$$

و با میل کردن ε به سمت صفر، خواهیم داشت

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

توجه‌کنیدکه‌اگر $f'(a)=g'(a)=0$، می‌توان قاعده هوپیتال‌را برای $\frac{f''}{g''}$ تکرار کرد.

تبصره: به جای یکنوا بودن g' در قاعده هوپیتال می‌توان فرض $\lim_{x\to a}g'(x)\neq 0$ را قرار دادکه یکنوا بودن از آن نتیجه می‌شود.

۵. صور مبهم. حالتهای مختلفی برای محاسبه حدود دو تابع به‌وجود می‌آید که مقدار آنها مبهم خواهد بود. این مقادیر مبهم ممکن است به یکی از صورتهای ذیل ظاهر شود:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0.\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty,\ \infty-\infty$$

صورتهای فوق را صور مبهم گویند. قاعده هوپیتال دستوری برای محاسبه صور مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$ است. اینگونه صورتها، که قابل محاسبه به‌وسیله قاعده هوپیتال است، صور مبهم هوپیتالی می‌نامند. اینک، می‌خواهیم این موضوع را بررسی کنیم که آیا می‌توان صور دیگر را به صور مبهم هوپیتالی تبدیل کرد؟ با به کارگیری توابع لگاریتمی و نمایی، که توابعی پیوسته واکیداً یکنوا هستند، جواب پرسش مثبت خواهد بود. اگر چه در حالت کلی می‌توان بدین پرسش دقیقاً جواب داد، ولی ما به خاطر اختصار مطلب، با نمونه مثالهایی، بدین پرسش پاسخ خواهیم داد.

نمونه $0\times\infty$.

مثال ۱. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\cos x-1)$ را محاسبه کنید.

حل. عبارت فوق را به‌صورت $\frac{\cos x-1}{x^2}$ می‌نویسیم‌که قابل محاسبه به‌وسیله قاعده هوپیتال است. اگر دوبار از قاعده‌هوپیتال استفاده کنیم حد فوق برابر $-\frac{1}{2}$ خواهد بود.

نمونه 0^0.

مثال ۲. $\lim_{x\to 0^+}x^x$ را محاسبه کنید.

حل. فرض کنید که $x^x = y$. بنا بر این

$$\ln y = x\ln x = \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

عبارت فوق به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ — است که به‌کمک دستور هوپیتال قابل محاسبه است؛ یعنی،

$$\lim_{x\to 0^+} (\ln y) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

تابع $g(x)=e^x$ تابعی پیوسته است و $g(\ln y) = y$. بنابراین،

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0^+} g(x\ln x) = g(0) = e^0 = 1$$

با محاسبات عددی حد فوق را می‌توان حدس زد. زیرا،

$$(0/01)^{0/1} = 0/79$$

$$(0/001)^{0/001} = 0/994$$

$$(0/00001)^{0/0001} = 0/99988 .$$

نمونه 1^∞ .

مثال ۳. $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ را محاسبه کنید

حل. به‌سادگی ثابت می‌شود که $x^{\frac{1}{1-x}} = e^{(\ln x)/(x-1)}$

با توجه به قاعده هوپیتال،

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1} = 1$$

بنابراین چون e^x پیوسته است، پس

$$\lim_{x\to 1} x^{1/(x-1)} = e^1 = e$$

نمونه $\infty - \infty$.

مثال ۴. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2}\right)$ را پیدا کنید.

حل. اگر کسر فوق را ساده کنیم خواهیم داشت

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-\sin x}{x^2\sin x}$$

در نقطه صفر این کسر، به صورت $\frac{0}{0}$، که قابل محاسبه با قاعده هوپیتالی است، بنابر این،

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1-\cos x}{2x\sin x + x^2\cos x}$$

که باز هم در نقطه صفر به صورت $\frac{0}{0}$ است، بار دیگر از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم؛

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{\sin x}{2\sin x + 4x\cos x - x^2\sin x}$$

سمت راست به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است که با تکرار عمل فوق خواهیم داشت

$$\frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{\cos x}{6\cos x - 6x\sin x + x^2\cos x}$$

اینک حاصل سمت راست معین و مقدار آن در نقطه صفر $\frac{1}{6}$ است که حد عبارت فوق است؛ یعنی،

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{1}{6}$$

پانوشت:

1) Newton, Leibniz

2) Marquis de L' Hospital

منابع:

۱) غلامحسین مصاحب، تئوری مقدماتی اعداد، جلد اول، قسمت دوم، انتشارات دهخدا.

۲) هاوردو. ایوز، ترجمه محمدقاسم وحیدی اصل، آشنایی با تاریخ ریاضیات جلد دوم، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۸

3) Math. Magazine, Vol. 63, No. 3, June 1990

4) Amer. Math. Monthly, Vol. 97, No. 6, June - July 1990

5) Richard R. Goldberg, Methods of real analysis, Copyright 1976

6) Marsden and Weinstein, Calculus II, 1980

7) Howard Anton, Calculus with analytic geometry.

مسایل شماره ۲۹

ترجمه و تنظیم از: ابراهیم دارابی

۱ــ روی تخته چند عدد مثبت نوشته شده است مجموع حاصلضرب دو به‌دوی آنها برابراست با ۱. ثابت کنید از بین آنها می‌توان عددی را طوری تعیین کرد که مجموع بقیه اعداد کمتر از $\sqrt{2}$ باشد.

۲ــ آیا چهارعدد طبیعی می‌توان پیدا کرد بقسمی که حاصلضرب هردوتای دلخواه ازآنها را با ۱۹۹۰ جمع کنیم مربع یك عدد طبیعی بشود؟

۳ــ ۷ بردار داده شده‌اند. می‌دانیم طول مجموع هرسه بردار دلخواه برابر است با مجموع طولهای چهار بردار باقیمانده. ثابت کنید مجموع همه بردارها برابراست با بردارصفر.

۴ــ دنباله‌ای از اعداد طبیعی $\{x_n\}$ به این ترتیب ساخته شده است که

$$x_1 = a \text{ ، } x_2 = b$$

و به‌ازای هر $n \geqslant 1$ داریم

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$$

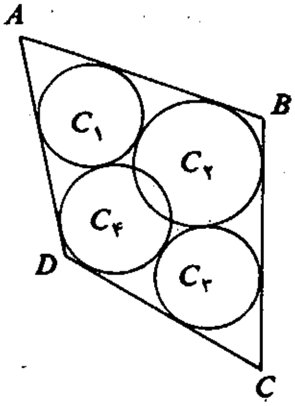
می‌دانیم یکی ازجملات دنباله برابر است با ۱۰۰۰. می‌نیم $a+b$ چقدراست؟

۵ــ تابع f به‌ازای جمیع مقادیر مثبت x تعریف شده است و مقادیرمثبت می‌گیرد. می‌دانیم c, b, a طولهای اضلاع یك مثلث و $f(c), f(b), f(a)$ طولهای اضلاع مثلث دیگری هستند. ثابت کنید اعداد مثبتی مانند A و B یافت می‌شوند بقسمی که به‌ازای هر x

$$f(x) \leqslant Ax + B$$

۶ــ ۸ مکعب یکسان به یال ۱ مفروضند. ۲۴ وجه دلخواه از ۴۸ وجه موجود این مکعب‌ها سفید و ۲۴ تای بقیه سیاه هستند. ثابت کنید از ۸ مکعب می‌توان مکعبی را بقسمی ساخت که در سطح جانبی آن تعداد مربع‌های سفید وسیاه به ضلع ۱ با هم برابر باشند.

۷ــ روی صفحه چهار دایره C_1، C_2، C_3 و C_4 داده شده‌اند، به‌قسمی که، C_1 بر C_2 و C_4 مماس خارج است، C_3 بر C_2 مماس خارج است و C_4 بر C_3 مماس خارج است. مماسهای مشترک هر زوج از دایره‌های C_1 و C_2، C_2 و C_3، C_3 و C_4، C_4 و C_1 را رسم می‌کنیم. این خطوط یک چهار ضلعی محیطی ایجاد می‌کند که دایره‌های C_1 و C_2 و C_3 و C_4 را شامل می‌باشد. ثابت کنید دوتا از این دایره‌ها باهم برابرند.



۸ــ دایره S_1 و وتر OC از آن داده شده است. دایره S_2 به‌مرکز O، وتر OC را در نقطه D متمایز از C و دایره S_1 را در نقاط A و B قطع می‌کند. ثابت کنید نقطه D محل برخورد نیمسازهای مثلث ABC است.

۹ــ معادله

$$x^5 - x^3 - x^2 + 1 = y^2$$

را در اعداد صحیح حل کنید.

۱۰ــ ۵۵ عدد طبیعی نابزرگتر از ۱۰۰ را انتخاب می‌کنیم. آیا لازم است در بین آنها دو عدد موجود باشد بقسمی که تفاضل آنها: الف) ۹ ب) ۱۱ باشد؟

(این مسایل از المپیادهای داخلی ریاضیات شوروی در سال ۱۹۹۰ انتخاب شده‌اند).

حل مسائل شماره ۲۵

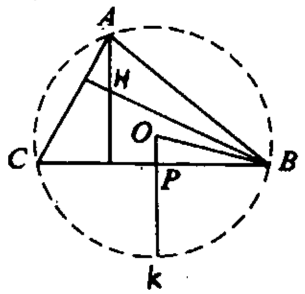
تهیه و تنظیم از: ابراهیم دارابی

۱ـ ثابت کنید در مثلث ABC با زوایای $A=\alpha$ و $\hat{B}=\beta$ و $\hat{C}=\gamma$، ارتفاع مرسوم از رأس A در نقطه مرکز ارتفاعی (محل برخورد سه ارتفاع) به نسبت

$$\frac{AH}{HD}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}$$

تقسیم می‌شود (H مرکز ارتفاعی مثلث است).

حل: دایره محیطی مثلث را رسم وشعاع آن‌را R می‌نامیم OP را



عمود بر BC رسم می‌کنیم. $AH=2OP$ (درهرمثلث مانند ABC فاصله مرکز ارتفاعی از رأس B، دو برابر فاصله مرکز دایره محیطی آن از ضلع AC است.) در اینجا H مرکز ارتفاعی مثلث است. مثلث OPB را در نظر بگیرید. چون اندازه $K\hat{O}B$ نصف اندازه کمان BC است، داریم

$$K\hat{O}B=C\hat{A}B=\alpha$$

بنابراین، $OP=R\cos\alpha$ و از این دو $AH=2R\cos\alpha$،

با توجه به قضیه سینوسها داریم

$$\frac{AC}{\sin A\hat{B}C}=2R$$

پس $AC=2R\sin\beta$ و از مثلث ACD

نتیجه می‌شود

$$AD=AC\sin A\hat{C}B=2R\sin\beta\sin\gamma$$

پس

$$AH=2R\cos\alpha$$

و

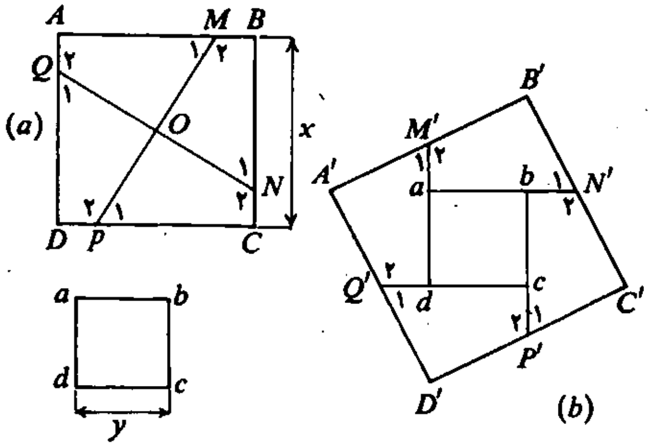
$$HD=AD-AH=2R\sin\beta\sin\gamma-2R\cos\alpha$$
$$=2R(\sin\beta\sin\gamma-\cos(180-(\beta+\gamma))$$
$$=2R(\sin\beta\sin\gamma+\cos(\beta+\gamma)$$
$$=2R(\sin\beta\sin\gamma\times\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma)=2R\cos\beta\cos\gamma$$

بنا بر این

$$\frac{AH}{HD}=\frac{2R\cos\alpha}{2R\cos\beta\cos\gamma}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}$$

۲ـ n مربع دلخواه مفروضند. ثابت کنید می‌توان آنها را طوری برید که از کنار هم قرار دادن قطعات حاصل از آنها مربع جدیدی ساخته بشود.

حل.



۱ـ به ازای $n=1$ حکم برقرار است. به ازای $n=2$ را اثبات می‌کنیم. دومربع $ABCD$ و $abcd$ را به‌ترتیب به اضلاع x و y $(x\geqslant y)$ در نظر می‌گیریم. روی اضلاع $ABCD$ به‌ضلع x شکل (a) پاره‌خط‌های $AM=BN=CP=DQ=\frac{x+y}{2}$ را جدا می‌کنیم و خطوط MP و NQ را رسم می‌کنیم. به‌آسانی دیده می‌شود که آنها برهم عمودند وهمدیگر را در نقطه O مرکز مربع قطع می‌کنند. مربع را در طول MP و NQ می‌بریم تا به چهار قسمت مساوی تقسیم شود. اکنون این قطعات را مطابق شکل (b) به‌مربع دوم وصل می‌کنیم. شکل حاصل مربع خواهد بود. زیرا زوایای نظیر M' و N' و P' و Q' مکمل یکدیگرند، زوایای A' و B' و C' و D' قائم‌اند.

و $A'B'=B'C'=C'D'=D'A'$.

۲ـ فرض می‌کنیم حکم برای n مربع درست باشد. باید درستی آن را برای $n+1$ مربع k_1 و k_2 و ...... k_n و k_{n+1} ثابت کنیم. همان‌طور که نشان داده شد، هر دو مربع k_n و k_{n+1} را که انتخاب کنیم می‌توانیم از قطع و تلفیق آنها یک مربع مانند k' به‌دست آوریم. بنابراین بنا به فرض از بریدن و تلفیق n مربع $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k'$ هم یک مربع جدید ساخته می‌شود و حکم ثابت می‌شود.

۳ـ وجوه جانبی هرم مثلث‌القاعده‌ای دو به‌دو بر یکدیگر عمودند. اگر مساحتهای آنها برابر با Q_1 و Q_2 و Q_3 باشند حجم هرم را پیدا کنید.

حل. چون وجوه جانبی دو به‌دو بر یکدیگر عمودند، یالهای جانبی هم دو به‌دو بر یکدیگر عمود خواهند بود. مثلاً اگر کنج سه قائمه $SABC$ را که با صفحه ABC قطع شده در نظر بگیریم، در شرایط مسئله صدق خواهند کرد. می‌توان نوشت

$$Q_1 = S_{ASB} = \frac{1}{2} SA \times SB$$

$$Q_2 = S_{BSC} = \frac{1}{2} SB \times SC$$

$$Q_3 = S_{SAC} = \frac{1}{2} SA \times SC$$

طرفین تساوی‌های بالا را درهم ضرب می‌کنیم،

$$Q_1 Q_2 Q_3 = \frac{1}{8}(SA \cdot SB \cdot SC)^2$$

اما مقدار داخل پرانتز برابر است با $6V$ که در آن V حجم هرم است.

از این رو

$$2Q_1Q_2Q_3 = 9V^2$$

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{2Q_1Q_2Q_3}$$

۴ـ ثابت کنید

$$\log_3 \log_3 \underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\dots\sqrt[3]{3}}}}_{n \text{ بار}} = -n$$

حل:

$$-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{\dots\sqrt[3]{3}}} = t$$

داریم،

$$\log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{\dots\sqrt[3]{3}}} = 3^{-t}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{\dots\sqrt[3]{3}}} = 3^{3^{-t}}$$

$$(2)\quad 3^{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = 3^{\left(\frac{1}{3}\right)^t}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^t$$

$$n = t$$

۵ـ کوچکترین عدد پنج رقمی را پیدا کنید که اگر آخرین رقم آن را قبل از رقم اول قرار دهیم پنج برابر شود.

حل. عدد مطلوب را با $\overline{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}$ نشان می‌دهیم که درشرط زیر صدق می‌کند.

$$\overline{a_n a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} = 5\,\overline{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}$$

ازآنجا داریم

$$a_n \times 10^{n-1} + \overline{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} = 5 \times (\overline{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} \times 10 + a_n)$$

$$a_n \cdot (10^{n-1} - 5) = 49 \times \overline{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}$$

$$(1)\quad a_n \times \underbrace{99\cdots95}_{(n-2)\text{ رقم}} = 49 \times \overline{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}$$

چون عددی که در سمت راست (۱) قرار دارد، بر ۴۹ بخش‌پذیر است عدد سمت چپ نیز بر ۴۹ بخش‌پذیر خواهد بود. بنابراین عامل دوم درسمت چپ (۱) لااقل باید بر ۷ بخش‌پذیر باشد. کوچکترین عدد بشکل ۹۵ . . . . ۹۹ که بر ۷ بخش‌پذیر باشد، ۹۹۹۹۵ است که به‌ازای $n=6$ به‌دست می‌آید. بنابراین درنوشتن عدد مطلوب لااقل ۶ رقم به‌کار رفته است. پس مسأله دارای جواب نیست ولی اگر تساوی (۱) به شکل زیر نوشته شود

$$a_6\,99995 = 49 \times \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$$

یا

$$a_6 \times 14285 = 7 \times \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$$

عدد ۱۴۲۸۵ بر ۷ بخش‌پذیر نیست. پس $a_6 = 7$ و $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} = 14285$. بنابراین کوچکترین عدد ۶ رقمی ۱۴۲۸۵۷ خواهد بود.

۶ـ α را چنان تعیین کنیدکه ریشه‌های معادله زیر تشکیل تصاعد عددی بدهند،

$$3x^4 - 2(4\sin^2\alpha + 2\sin^2 2\alpha + 1)x^2 + 4 - 2\cos^2\alpha - \cos^2 2\alpha = 0$$

(فرستنده: عبدالحسین کلهری دانشجوی فنی ازتهران)

حل.

$$3x^4 - 2(4\sin^2\alpha + 2\sin^2 2\alpha + 1)x^2 + 2\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + 1 = 0$$

اگر،

$$2\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha = z$$

$3x^4 - 2(2z+1)x^2 + z + 1 = 0$

ریشه‌های این معادله عبارتند از:

$-x' , -x'' , x' , x''$

$x' = 3x''$

چون این ریشه‌ها تشکیل تصاعد عددی می‌دهند داریم

$$(1)\begin{cases} x'^2 \times x''^2 = \dfrac{2(2z+1)}{3} \\ x'^2 x''^2 = \dfrac{z+1}{3} \\ x'^2 = 9x''^2 \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow z = 2 , z = -\frac{11}{2}$

$z = -\frac{11}{2}$ قابل قبول نمی باشد، پس

$z = 2 = 2\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha \Rightarrow \cos^2 2\alpha + \cos 2\alpha = 0$

$\cos 2\alpha(\cos 2\alpha + 1) = 0$

$\cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{K\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

$\cos 2\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = K\pi + \frac{\pi}{2}$

۷ـ پارامتر α $(0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2)$ را طوری تعیین کنید که به ازای آنها می‌نیمم تابع

$f(x) = 3x^4 + 4x^3(\cos\alpha - \sin\alpha) - 3x^2\sin 2\alpha$

درفاصلهٔ $-\sin\alpha < x < \cos\alpha$ حداقل مقدارممکن را داشته باشد.

حل. α را ثابت می‌گیریم و کمترین مقدار $f(x)$ را در فاصله $-\sin\alpha \leqslant x \leqslant \cos\alpha$ با $\phi(\alpha)$ نشان می‌دهیم. $\phi(\alpha)$ را باید پیدا بکنیم.

تابع $f(x)$ درهر نقطه ازمحور xها مشتق‌پذیر است.

$f'(x) = 12x^3 + 12x^2(\cos\alpha - \sin\alpha) - 6x\sin 2\alpha$

با حل معادله $f'(x) = 0$ نقاط اکسترمم تابع را پیدا می‌کنیم

$x_1 = 0 , x_2 = \sin\alpha , x_3 = -\cos\alpha$

۵ حالت درنظرمی‌گیریم.

۱). اگر $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$، آنگاه $0 < \sin\alpha < \cos\alpha$ وبنابراین $x_3 < x_1 < x_2$.

درفاصله $-\sin\alpha < x < \cos\alpha$ نقاط x_1 و x_2 قرار دارند.

(شکل (۱) را نگاه کنید)

$x_3 \quad x_1 \quad x_2$

$-\cos\alpha \quad -\sin\alpha \quad 0 \quad \sin\alpha \quad \cos\alpha$

درفاصله $(-\sin\alpha , \cos\alpha)$ علامت مشتق چنین خواهد بود

فاصله	$(-\sin\alpha, x_1)$	(x_1, x_2)	$(x_2, \cos\alpha)$
علامت $f'(x)$	+	−	+

و این نشان می‌دهد که درفاصله $(-\sin\alpha , x_1)$ تابع $f(x)$ صعودی درفاصله (x_1 , x_2) نزولی درفاصله $(x_2 , \cos\alpha)$ باز هم‌صعودی می باشد وچون تابع $f(x)$ درهر نقطه از محور Ox پیوسته است کمترین مقدار آن درفاصله $[-\sin\alpha , \cos\alpha]$ کمترین یکی از دومقدار $f(-\sin\alpha)$ و $f(x_2) = f(\sin\alpha)$ خواهد بود.

چون

$f(\sin\alpha) - f(-\sin\alpha) = 8\sin^3\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha) > 0$

پس

$\varphi(\alpha) = f(-\sin\alpha) = 7\sin^4\alpha - 10\sin^3\alpha\cos\alpha$

۲) اگر $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ آنگاه $0 < \cos\alpha < \sin\alpha$ و بنابراین $x_3 < x_1 < x_2$ و x_3 و x_1 درفاصله $-\sin\alpha < x < \cos\alpha$ قرار می‌گیرند (شکل ۲)

$x_3 \quad x_1 \quad x_2$

$-\sin\alpha \quad -\cos\alpha \quad 0 \quad \cos\alpha \quad \sin\alpha$

بنابراین در فاصله $(-\sin\alpha , \cos\alpha)$ علامت مشتق چنین خواهد بود.

فاصله	$(-\sin\alpha, x_3)$	(x_3, x_1)	$(x_1, \cos\alpha)$
علامت $f'(x)$	−	+	−

یعنی درفاصله $(-\sin\alpha , x_3)$ تابع نزولی، در فاصله (x_3 , x_1) تابع صعودی و درفاصله $(x_1 , \cos\alpha)$ باز تابع نزولی است. و چون $f(x)$ درهر نقطه Ox پیوسته است کمترین مقدار تابع درفاصله $[-\sin\alpha , \cos\alpha]$ کمترین یکی از دو مقدار $f(x_3) = f(-\cos\alpha)$ و $f(\cos\alpha)$ خواهد بود.

چون،

$f(-\cos\alpha) - f(\cos\alpha) = -8\cos^3\alpha \times (\cos\alpha - \sin\alpha) > 0$

پس

$\varphi(\alpha) = f(\cos\alpha) = 7\cos^4\alpha - 10\sin\alpha\cos^3\alpha$

۳) اگر $\alpha = 0$ آنگاه $x_1 = x_2 = 0$ و $x_3 = -1$ وفاصله $[-\sin\alpha , \cos\alpha]$ تبدیل به‌فاصله $[0 , 1]$ می‌شود و درفاصله $(0 , 1)$ هیچ یک ازمقادیر x_1 و x_2 و x_3 قرار ندارند. چون تابع $f(x)$ در هر نقطه محور Ox پیوسته است کمترین مقدار $f(x)$ درفاصله $[0 , 1]$ کمترین یکی از دومقدار $f(0)$ و

$f(1)$ خواهد بود. چون $f(0)=0$ و $f(1)=1$ پس $\cos(\alpha)=0$.

۴) اگر $\alpha=\frac{\pi}{2}$، آنگاه $x_1=x_2=0$ و $x_3=1$ و فاصله $[-\sin\alpha, \cos\alpha]$ ، $[-1, 0]$ می‌شود. درفاصله $(-1, 0)$ هیچ یك از نقاط x_1 و x_2 و x_3 قرار ندارند. بنابراین کمترین مقدار $f(x)$ درفاصله $[-1, 0]$ کمترین دومقدار $f(-1)$ و $f(0)$ خواهد بود. چون $f(0)=0$ و $f(-1)=7$ پس

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

۵) اگر $\alpha=\frac{\pi}{4}$، آنگاه $x_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و

$$x_3<0=x_1<x_2$$

فاصله $[-\sin\alpha$ و $\cos\alpha]$ فاصله $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right.$ و $\left.\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ می‌شود و در فاصله $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right.$ و $\left.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ تنها $x_1=0$ قرار دارد بنابراین کمترین مقدار $f(x)$ درفاصله $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right.$ و $\left.\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ می‌نیمم مقادیر $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و $f(0)$ و $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ خواهد بود. چون $f(0)=0$ و $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{3}{4}$ پس $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{4}$

بنابراین

$$\varphi(\alpha)=\begin{cases} 0 & \text{اگر } \alpha=0 \\ 7\sin^4\alpha-10\sin^3\alpha\cos\alpha & \text{اگر } 0<\alpha<\frac{\pi}{4} \\ -\frac{3}{4} & \text{اگر } \alpha=\frac{\pi}{4} \\ 7\cos^4\alpha-10\cos^3\alpha\sin\alpha & \text{اگر } \frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{اگر } \alpha=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

به‌آسانی دیده می‌شود که $\varphi(\alpha)$ را می‌توان چنین نوشت

$$\varphi(\alpha)=\begin{cases} 7\sin^4\alpha-10\sin^3\alpha\cos\alpha & \alpha\in\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ 7\cos^4\alpha-10\cos^3\alpha\sin\alpha & \alpha\in\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

در مسئله خواسته شده است. کمترین مقدار $\varphi(\alpha)$ در فاصله $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ چقدر است. از عبارات به‌دست آمده برای $\varphi(\alpha)$ نتیجه می‌شود در فاصله $\alpha\in\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ، $\varphi(\alpha)=\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

بنابراین کافیست کمترین مقدار تابع زیر را در فاصله $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$ پیدا کنیم،

$$\varphi(\alpha)=7\sin^4\alpha-10\sin^3\alpha\cos\alpha$$

تابع $\varphi(\alpha)$ در هر نقطه مشتق پذیر است.

$$\varphi'(\alpha)=28\sin^3\alpha\cos\alpha-30\sin^2\alpha\cos^2\alpha+10\sin^4\alpha$$

بنابراین درفاصله $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$، داریم

$$\varphi'(\alpha)=2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\,(5\,\mathrm{tg}^2\alpha+14\,\mathrm{tg}\,\alpha-15)$$

مقادیری که $\varphi'(\alpha)$ را در آن فاصله صفر می‌کند، جوابهای معادله زیر است

$$5\,\mathrm{tg}^2\alpha+14\,\mathrm{tg}\,\alpha-15=0$$

$$\alpha=\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{-7+2\sqrt{31}}{5}+\pi n,$$

$$\alpha=\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{-7-2\sqrt{31}}{5}+\pi n \qquad (n\in z)$$

مقدار $\mathrm{tg}\,\alpha$ درفاصله $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ مثبت است و از ۱ تجاوز نمی‌کند. بنابراین تنها $\alpha_1=\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{2\sqrt{31}-7}{5}$ درفاصله $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ قرارمی‌گیرد. در فاصله $0<\alpha<\alpha_1$ مشتق $\varphi'(\alpha)$ منفی و در فاصله $\alpha_1<\alpha<\frac{\pi}{4}$ مثبت است بنابراین در فاصله $0<\alpha<\alpha_1$ تابع $\varphi(\alpha)$ نزولی و درفاصله $\alpha_1<\alpha<\frac{\pi}{4}$ صعودی است. چون $\varphi(\alpha)$ درهر نقطه از فاصله $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$ پیوسته است بنابراین کمترین مقدار $\varphi(\alpha)$ درفاصله $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ برابر با $\varphi(\alpha_1)$ خواهد بود. که در نقطه $\frac{\pi}{2}-\alpha_1$ هم که متعلق به فاصله $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ است همین‌مقدار به‌دست‌می‌آید. به‌این ترتیب تابع φ در فاصله $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ در دونقطه α_1 و $\frac{\pi}{2}-\alpha_1$ کمترین مقدار را پیدا می‌کند. جواب:

$$\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{2\sqrt{31}-7}{5} \text{ و } \frac{\pi}{2}-\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{2\sqrt{31}-7}{5}$$

(حل از: فرشید ارجمندی دانش‌آموز اهواز)

۸ـ مطلوبست رسم نمودار وتعیین برد تابع،

$$f(x)=(x-2)\,\varphi(x+1)$$

بطوری‌که

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x\geqslant 0 \end{cases}$$

حل.

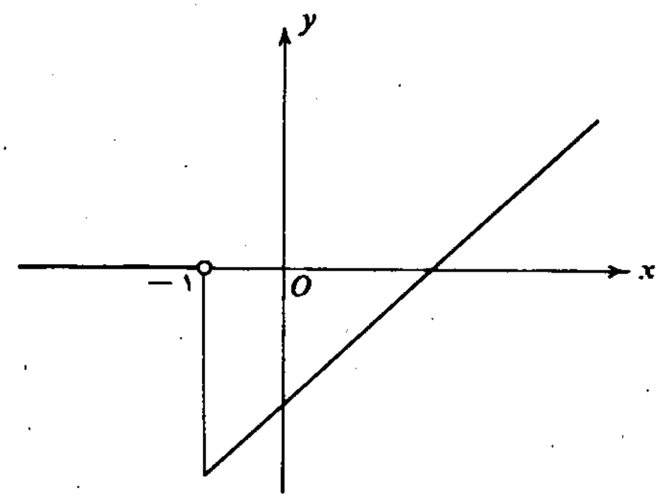
$$\varphi(x+۱)=\begin{cases}۰ & x+۱<۰\\ ۱ & x+۱\geqslant ۰\end{cases}$$

یا

$$\varphi(x+۱)=\begin{cases}۰ & x<-۱\\ ۱ & x\geqslant -۱\end{cases}$$

پس

$$f(x)=\begin{cases}(x-۲)\times ۰ & x<-۱\\ (x-۲) & x\geqslant -۱\end{cases}$$



از روی نمودار دیده می‌شود که برد تابع برابراست با $[-۳,\infty)$

۹ـ دریك صفحه n خط مستقیم طوری رسم شده‌اند که هیچ دوخطی با هم موازی‌نیستند وهیچ سه‌خطی ازیك‌نقطه نمی‌گذرند. این خطوط صفحه را به چند قسمت تقسیم می‌کنند؟

حل. اگر ترسیمات مناسب را انجام دهیم بین n یعنی تعداد خطوط راست که درشرایط مسئله صدق می‌کنند و a_n یعنی تعداد قسمت‌هایی‌که صفحه بر آن تقسیم می‌شود، رابطه متناظر زیر نوشته می‌شود.

$n=۱, ۲, ۳, ۴, ۵, \dots$

$a_n=۲, ۴, ۷, ۱۱, ۱۶, \dots$

یعنی مثلاً اگر یك خط راست رسم کنیم، صفحه به دوناحیه تقسیم می‌شود واگر ۵ خط راست با شرایط مسئله رسم کنیم صفحه به ۱۶ ناحیه تقسیم خواهد شد. دیده می‌شود،

$a_۲-a_۱,\ a_۳-a_۲,\ a_۴-a_۳, \dots$

بشکل تصاعد عددی نوشته شده‌اند وجمله عمومی این دنباله به صورت زیراست.

$$(۱)\quad a_n=۱+\frac{n}{۲}(n+۱)$$

فرمول (۱) به‌ازای چند مقدار اولیه n درست است. اما این دلیل بر آن نیست که جواب مسئله در دسترس ما قرار دارد. حکم را به استقراء ثابت می‌کنیم.

برای لحظه‌ای مطالب بالا را فراموش کنید و تنها ثابت کنید n خط راست که درشرایط مسئله صدق می‌کنند، صفحه را به a_n ناحیه تقسیم می‌کنند. و a_n همان است که درفرمول (۱) به آن اشاره شده است.

واضح است که به‌ازای $n=۱$ حکم برقراراست، با ساختن حکم استقراء، آنرا برای $K+۱$ خط ثابت می‌کنیم.

یعنی‌با پراکنده ساختن K خط به‌طور دلخواه می‌گوئیم صفحه به $\frac{K(K+۱)}{۲}+۱$ ناحیه تقسیم شده است. (فرض استقراء)

اکنون $(K+۱)$ امین خط را برآنها اضافه می‌کنیم، چون این خط با هیچ یك ازخطوط دیگر موازی نیست و ازمحل برخورد هیچ دوخط دیگری نمی‌گذرد، درنتیجه از $(K+۱)$ ناحیه صفحه خواهد گذشت وهریك ازآنها را به دوناحیه تقسیم خواهدکرد.

یعنی با افزودن $(K+۱)$ امین خط، $(K+۱)$ ناحیه، به‌نواحی قبلی اضافه خواهد شد. وتعداد کل نواحی برابر خواهد بود با

$$۱+\frac{K}{۲}(K+۱)+(K+۱)=۱+\frac{(K+۱)[(K+۱)+۱]}{۲}$$

وبرهان کامل است.

۱۰ـ با استفاده ازتابع

$$f(x)=(a_۱x+b_۱)^۲+(a_۲x+b_۲)^۲+\dots+(a_nx+b_n)^۲$$

نامساوی زیر راکه به‌نامساوی کوشی‌ـشوارتز‌.مشهور است‌نتیجه بگیرید.

$$(a_۱b_۱+a_۲b_۲+\dots+a_nb_n)^۲\leqslant (a_۱^۲+a_۲^۲+\dots+a_n^۲)(b_۱^۲+b_۲^۲+\dots+b_n)^۲$$

حل. اگر a_iها جملگی صفرباشند حکم بدیهی است پس فرض می‌کنیم که حداقل یکی از a_iها ناصفرباشد

$$f(x)=(a_۱^۲+a_۲^۲+\dots+a_n^۲)\,x^۲+۲\,(a_۱b_۲+a_۲b_۲+\dots+a_nb_n)\,x+b_۱^۲+b_۲^۲+\dots+b_n^۲$$

بطوریکه دیده می‌شود $f(x)$ نسبت به x یك سه‌جمله‌ای است‌که درآن ضریب $x^۲$ مثبت است وعلاوه برآن $f(x)\geqslant ۰$

بنابراین باید مبین سه‌جمله‌ای همواره نامثبت باشد یعنی

$$(a_۱b_۱+a_۲b_۲+\dots+a_nb_n)^۲\leqslant (a_۱^۲+a_۲^۲+\dots+a_n^۲)\times(b_۱^۲+b_۲^۲+\dots+b_n^۲)$$

۱۱ـ عضوهای منفی دنباله $x_n=\frac{A_{n+۴}^۴}{P_{n+۲}}-\frac{۱۴۳}{۴P_n}$ را پیداکنید.

که درآن منظور از $A^{۴}_{n+۴}$ ترکیب و P_n تبدیل و

$n=۱, ۲, ۳, \cdots$

حل.

$$x_n = \frac{(n+۴)!}{n!\,(n+۲)!} - \frac{۱۴۳}{۴\times n!} = \frac{(n+۴)(n+۳)}{n!} - \frac{۱۴۳}{۴\times n!} = \frac{۴n^۲+۲۸n-۹۵}{۴\times n!}$$

ازآنجا نتیجه می‌شود که برای مقادیر موردنظر n باید داشته باشیم

$۴n^۲+۲۸n-۹۵<۰$

ریشه‌های سه‌جمله‌ای $۴n^۲+۲۸n-۹۵$ عبارتند از $x_۱=-\frac{۱۹}{۲}$ و $x_۲=\frac{۵}{۲}$ چون جوابهای نامعادله $۴n^۲+۲۸n-۹۵<۰$ فاصله $-\frac{۱۹}{۲}<x<\frac{۵}{۲}$ است، بنابراین باید تمام اعداد طبیعی دراین فاصله را پیدا کنیم که تنها عبارتند از ۱ و ۲ یعنی دنباله x_n تنها دارای $x_۱$ و $x_۲$ عضوهای منفی دارد و این عضوها عبارتند از

$$x_۱ = \frac{۴\times ۱^۲+۲۸\times ۱-۹۵}{۴\times ۱!} = -\frac{۶۳}{۴},$$

$$x_۲ = \frac{۴\times ۲^۲+۲۸\times ۲-۹۵}{۴\times ۲!} = -\frac{۲۳}{۸}$$

۱۲ــ مطلوبست $\lim\limits_{x\to ۰}\left(\frac{۱+\operatorname{tg}x}{۱+\sin x}\right)^{\frac{۱}{\sin x}}$

حل. می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to۰}\left(\frac{۱+\operatorname{tg} x}{۱+\sin x}\right)^{\frac{۱}{\sin x}} = \lim_{x\to۰}\frac{\left[(۱+\operatorname{tg}x)^{\frac{۱}{\operatorname{tg}x}}\right]^{\frac{۱}{\cos x}}}{(۱+\sin x)^{\frac{۱}{\sin x}}}$$

$$=\frac{e}{e}=۱$$

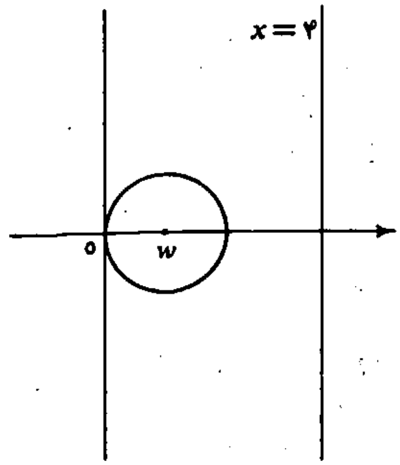
ویا می‌توان با قرار دادن

$$y=\left(\frac{۱+\operatorname{tg} x}{۱+\sin x}\right)^{\frac{۱}{\sin x}}$$

ازطرفین لگاریتم گرفت وبا استفاده ازقانون هوپیتال مسئله را به انجام رساند.

۱۳ــ دایره‌ای به معادله $x^۲-۲x+y^۲=۰$ را حول محور $x=۴$ دوران می‌دهیم حجم حادث ازاین دوران را پیدا کنید.

حل. فاصله مرکز ثقل دایره، یعنی‌مرکز دایره ازمحور برابراست با ۳. مرکز این دایره ضمن دوران حول محور $x=۴$ دایره‌ای بشعاع ۳ را طی می‌کند که محیط آن برابر است با ۶π چون مساحت دایره برابراست با $\pi R^۲$ پس حجم حادث برابرمی‌شود با $\pi\times ۶\pi=۶\pi^۲$



(در واقع حجم حادث را می‌توان استوانه‌ای درنظر گرفت که قاعده آن دایره وارتفاع آن محیط دایره دیگری است که مرکز دایره مفروض طی کرده است اما دوسراین استوانه بههم وصل شده است که بهشکل یك چنبره است.)

۱۴ــ مطلوبست

$$\int_۰^۲ \frac{dx}{(x-۱)^{\frac{۳}{۴}}}$$

حل. اگر $۰\leqslant x\leqslant ۱$ آنگاه $(x-۱)^۳<۰$. بنابراین ریشه چهارم این عبارت بی‌معنی است. بنابراین، اشتباه چاپی در این مسئله رخ داده که باید حدود انتگرال بین ۱ و ۲ باشد. پس از تصحیح مسئله، حل آن چنین است.

$$\int_۱^۲ \frac{dx}{(x-۱)^{\frac{۳}{۴}}} = \lim_{t\to۱}\int_t^۲ (x-۱)^{\frac{-۳}{۴}}dx =$$

$$\lim_{t\to۱} ۴(x-۱)^{\frac{۱}{۴}}\Big|_t^۲ = \lim_{t\to۱}۴(۱-\sqrt[۴]{t-۱}) = ۴$$

۱۵ــ ثابت کنید که اگر n عدد صحیح نامنفی باشد آنگاه

$$\int_{-۱}^{۱}(۱-x^۲)^n dx = \frac{۲^{۲n+۱}(n!)^۲}{(۲n+۱)!}$$

حل. انتگرال را مطابق‌روش ذیل به دوجزء تقسیم می‌کنیم وتغییر متغیر $x=-t$ یك جزء را بهجزء دیگر تبدیل می‌کند؛ یعنی،

$$\int_{-۱}^{۱}(۱-x^۲)^n dx = \int_{-۱}^{۰}(۱-x^۲)^n dx + \int_۰^۱ (۱-x^۲)^n dx = ۲\int_۰^۱(۱-t^۲)^n dt$$

حال تغییر متغیر $t=\sin y$ را اعمال می‌کنیم. بنابراین،

$$\int_{-۱}^{۱}(۱-x^۲)^n dx = ۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\cos^{۲n+۱}y\,dy$$

فرض کنید که $I_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} y\, dy$. به کمک انتگرال‌گیری به‌طریق جزء به‌جزء با انتخاب
$u=\cos^{2n} y$ و $dv = \cos y\, dy$
خواهیم داشت

$$I_{2n+1} = 2n(I_{2n-1} - I_{2n+1})$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$$

با ضرب اعداد مناسب، عبارت‌فوق را به‌صورت‌ذیل درمی‌آوریم:

$$\frac{I_{2k}\times I_{2k+1}}{I_{2k-1}\times I_{2k}} = \frac{2^2\times k^2}{(2k)(2k+1)}$$

اینك، حاصل عبارت فوق را وقتی که k برابر ۱، ۲، . . . ، n باشد محاسبه می‌کنیم. بنابراین،

$$\frac{I_2\times I_3}{I_1\times I_2}=\frac{2^2\times 1^2}{2\times 3}$$

$$\frac{I_4\times I_5}{I_3\times I_4}=\frac{2^2\times 2^2}{4\times 5}$$

$$\cdots = \cdots$$

$$\frac{I_{2n}\times I_{2n+1}}{I_{2n-1}\times I_{2n}} = \frac{2^2\times n^2}{(2n)\times(2n+1)}$$

طرفین نامساوی فوق را درهم ضرب می‌کنیم

$$\frac{I_2\times I_3 + I_4\times I_5\times \cdots I_{2n}\times I_{2n+1}}{I_1\times I_2\times I_3\times I_4\times \cdots I_{2n-1}\times I_{2n}} = \frac{(2^2\times 1^2)(2^2\times 2^2)\cdots(2^2\times n^2)}{(2\times 3)(4\times 5)\cdots(2n)(2n+1)}.$$

اگرعبارت مشترك را ازسمت راست حذف کنیم وعبارت سمت راست را خلاصه نمائیم خواهیم داشت:

$$\frac{I_{2n+1}}{I_1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

مقدار $I_1 = 1$ بنابراین

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\, dx = 2I_{2n+1} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

مسئله ۱۶ــ n کیسه هریك n مهره دارند. که دراولی D مهره سفید در دومی $D+1$ مهره سفید و در nامی $D+n-1$ مهره سفید است. یك کیسه انتخاب کرده و k مهره بیرون می‌آوریم مطلوبست احتمال اینکه هر k مهره سفید باشند.

حل.

$$\text{احتمال سفید بودن} = \frac{1}{n}\left[\frac{\binom{D}{k}}{\binom{n}{k}} + \frac{\binom{D+1}{k}}{\binom{n}{k}} + \cdots + \frac{\binom{D+n-1}{k}}{\binom{n}{k}}\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\,\frac{\binom{D+i}{k}}{\binom{n}{k}} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{pi}{n}$$

که درآن

$$pi = \frac{\binom{D+i}{k}}{\binom{n}{k}}$$

درضمن دراین مسئله داریم $D+n-1\leqslant n$ پس $D\leqslant 1$. یعنی D فقط ۰ یا ۱ است.

۱۷ــ G یك گروه دوری است ثابت کنید اگر G نامتناهی باشد تعداد زیر گروههای G نیز نامتناهی است.

برهان. چون G دوری‌است‌مولدی مانند a دارد. یعنی، $G=(a)$. حال فرض کنید p عددی اول باشد و $b=a^p$ واضح است که $H=(b)$ زیرگروه G است. بسادگی معلوم می‌شود که اگر q اول باشد و $p\neq q$ آنگاه $(a^p)\neq(a^q)$ (چرا؟). چون تعداد اعداد اول نامتناهی است حکم ثابت شده است.

۱۸ــ G یك گروه دلخواه است ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه G نامتناهی باشد آن است که تعداد زیرگروههای G نامتناهی باشد.

برهان (لزوم). فرض می‌کنیم G گروهی نامتناهی باشد. اگر G زیرگروهی دوری ونامتناهی داشته باشد بنابرمسأله قبل حکم ثابت است، درغیر این صورت هر زیرگروه دوری G متناهی است. اینك می‌توان یك دنبالهٔ نامتناهی از زیرگروههای دوری G به‌طریق‌ذیل ساخت. فرض‌می‌کنیم $a_1\in G$ و $H_1=(a_1)$. اگر $G_1=G-H_1$ چون H_1 متناهی و G نامتناهی است پس G_1 نامتناهی است. عضو a_2 را از G_1 اختیار می‌کنیم و قرار می‌دهیم $H_2=(a_2)$. H_2 زیرگروه G ومتمایز با H_1 است. بازهم $G_2=G-H_2$ نامتناهی‌است‌ومی‌توان‌ساختن زیرگروهها را به‌همین ترتیب ادامه داد. یعنی، تعداد زیرگروههای G نامتناهی است. (بیان دقیق ساخت زیرگروهها به‌استقراء ساده است و به خواننده محول می‌شود).

(کفایت). فرض می‌کنیم تعداد زیرگروههای G نامتناهی باشد باید ثابت کنیم G نامتناهی است. با توسل به عکس نقیض‌حکم را ثابت می‌کنیم. یعنی، ثابت می‌کنیم

اگر G متناهی باشد تعداد زیرگروههای G متناهی است.

اما، این مطلب بسیار ساده است چرا که زیر گروههای G زیرمجموعه G هستند و اگر G متناهی باشد تعداد زیرمجموعه‌های G متناهی است (تعداد زیرگروههای G مساوی $2^{O(G)}$ است که درآن $O(G)$ تعداد اعضای G است).

پاسخ به نامه‌ها

تنظیم از: محمود نصیری

آقای محمدکاظم کاظمی‌پور، تهران

در بخش نامه‌ها به سؤالاتی پاسخ داده می‌شود که جواب آن برای عموم خوانندگان قابل استفاده باشد و برای اینکه به همه نامه‌ها پاسخ مناسب داده شود، در صورت امکان سعی می‌شود، جواب کوتاه باشد. کوشش می‌شود که از مسائل ارسالی شما در بخش مسائل استفاده‌شود. تنها به‌یکی از مسائل‌شما پاسخ می‌دهیم. می‌دانید که اگر تابعی در یک نقطه حد داشته باشد، حد آن در آن نقطه منحصر به‌فرد است. تابع $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ در نقطه $x=0$ حد ندارد زیرا، اگر x با مقادیر، $\frac{1}{n\pi}$ یا با مقادیر $\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$، به صفر میل کند، تابع به دو مقدار صفر و یک نزدیک می‌گردد. بنابراین حد آن موجود نیست.

آقای ادموند باغرامیان، اصفهان

زیاد کردن مسایل مجله، بیش از این نه برای ما میسر است و نه برای مجله مناسب.

آقای هاشم سازگار، تهران

مطالب ارسالی شما در مورد «حدس کاتالان، ۱۸۴۲» بسیار پیچیده و بیشتر تحقیقی است که درج آن بـرای معلمین مفید نخواهد بود. در ضمن، شرایط اضـافی که بر روی این حدس گذاشتید، مسئله را به صورت دیگری مطرح کرده است. گویا این شرایط، در ادامه برهان شما به‌گونه‌ای بیان گردیده است که راه حل ارائه شده به نتیجه مطلوب برسد. جهت یـادآوری، حدس کاتالان را از کتاب تئوری مقدماتی اعداد، جلد دوم، قسمت سوم، صفحه ۱۴۶۹ می‌آوریم: «حدس کاتالان: معادله سیاله چهار مجهولی $x^m-y^n=1$ در اعداد طبیعی تـا یک جوابی جز $x=3$، $y=2$، $n=3$، $m=2$ ندارد.

این حدس علی‌رغم‌کوششهایی‌که در حل آن به‌عمل آمده‌است، هنوز نه اثبات شده و نه ابطال گردید است. اثبات نتایج کلی معدودی که در باب آن به‌دست آمده سخت دشوار است. بیشتر نتایج دیگر مربوط به حالاتی است که مقدار بعضی از مجهولات داده شده است، یـا مجهولات مقید به شرایطی می‌باشند. مثلاً

۱) معادله سیاله $x^2-y^3=1$، در اعداد طبیعی، جز (۳و۲)، جواب ندارند.

۲) جواب معادله سیاله $x^y-y^x=1$ در اعداد طبیعی عبارتند از (۱ و ۲) و (۲ و ۳)، و لاغیره هیأت تحریریه بیش از این اطلاعاتی در این زمینه ندارد.

آقای محمدصادق محمدی، قم

ذیـلاً مسئله ارسـالی شما را درج می‌کنیم تا بدین‌وسیله در اختیار خوانندگـان قرار گیرد. توان n ام $(n+1)$ عدد صحیح متوالی را در یک سطر نوشته و متوالیاً از هم کم می‌کنیم اعداد حاصل را در سطر جداگـانه‌ای نوشته عمل را تکرار می‌کنیم. ثابت‌کنید که پس n مرحله به سطری می‌رسیم که همه اعداد آن سطر مساوی و هر یک برابر $n!$ است. اگر ادعای فوق نادرست باشد، برای آن مثال نقضی ارائه دهید.

آقای احمد جعفری، اهر

روش ارائه شده شما، به‌سبب پیچیدگی قاعدهٔ آن، کاربرد عملی ندارد. اصولاً حاصلجمع n عدد متوالی، ابتدا از m، یک تصاعد عددی با قدر نسبت یک است که محاسبـات به‌قدری ساده است که نیاز به‌دستور العمل ندارد.

آقای جعفر عشریه، قائم‌شهر

مجموعه اعداد اولی که اختلاف آنها ۲ است به اعداد اول دوقلو معروف است و تا به‌حال بدین پرسش، که آیا مجموعه چنین اعداد متناهی و یا نامتناهی باشد، پاسخی داده نشده است. و برهان‌شما نیز با اشکالاتی همراه است. توفیق شمارا آرزومندیم.

آقای فرشید دلگشا، تهران

دستورموآور رابطه بسیارمناسبی برای بسط $\sin nx$ و $\cos nx$ است دستوراتی که شمـا برای بسط سینوس و کسینوس ارائه داده‌اید بسیار جالب‌است ولی اثبات آن به‌استقراء است. به‌کمک دو جمله‌ای نیوتن می‌توان دستورات مشابه‌ای را ثـابت کرد. در آتیه در بخش مسائل از این دستورات استفاده خواهیم کرد.

آقای ارشک حمیدی، تهران

از مسایل ارسالی شما بسیار متشکریم. در فرصت مناسب از مسایل ارسالی شما که از مجلـه خارجی اقتبـاس شده است، استفاده خواهیم کرد.

آقای مسعود طاهرخانی، دانشجو، قزوین

اینکه از مجله ریاضی اسپکترم نقل می‌کنید که بزرگترین عدد اولی که تا کنون شناخته شدهٔ عبارتست از:

$$391581\times 2^{216193}-1$$

است سپاسگزاریم.

آقای سعید مقدم، دانشجو، فسا

حل معادله $n!=k^2$ را می‌توان از قضیه برتراند استفاده کرد. اولاً، معادله فوق موقعی جواب دارد که عوامل اول $n!$ به‌صورت قوای زوج ظاهرشود. بنابر اصل برتراند، به‌ازای هر عدد طبیعی

n، عدد اولی مانند p موجود است که $n \leqslant p \leqslant ۲n$. بنابراین، همیشه در $n!$ عامل اولی مانند p (به شرط این‌که $n>۱$) موجود است که توان آن فرد است بنابراین، این مسئله جوابی غیر از (۱ , ۱) ندارد.

آقای مهران فولادی، دانشجوی عمران، تبریز.

جواب سؤال شما مبنی براینکه «به ازای هر عدد طبیعی n، n عدد طبیعی متوالی موجود است که هیچکدام از آنها عدد اول نباشد» بدین صورت است.

اعداد

$$(n+۱)!+۲,\ (n+۱)!+۳,\ \dots,\ (n+۱)!+(n+۱)$$

جملگی مرکب‌اند.

آقای علی عرب، دانش‌آموز سال چهارم ریاضی، کالیکش مازندران.

رابطه‌ای که برای تقسیم یک عدد بر ۵ به‌دست آورده‌اید، در حقیقت، ضرب آن عدد در $\frac{۲}{۱۰}$ است که ارقام عدد را در ۲ ضرب کرده و رقم اولی را با یک ممیز از بقیه جدا می‌کنیم مثلاً:

$$۷۵۲ \div ۵ = ۱۵۰/۴$$

$$۷۵۲ \div ۵ = \overline{(۲\times۷)(۲\times۵)/(۲\times۲)}$$

خانم لیلا رحیمی، دانش‌آموز سال سوم

کاربرد قاعده ارسالی شما چندان وسیع نیست؛ بخصوص، که برای ادعای خود دلیلی ارائه نداده‌اید. اصولاً با محاسبه چند عدد نمی‌توان درستی یک قاعده را بیان کرد مگر آنکه همراه با استدلال دقیق ریاضی باشد.

آقای افشین رحمانیان‌فر، دانش‌آموز سال سوم ریاضی، جهرم

مسائل ارسالی شما در بخش مسائل مورد استفاده قرار می‌گیرد و سؤال شما در زمینه مشتق توابعی که به‌توان تابعی دیگر می‌رسد از طریق لگاریتم است‌که نیاز به‌مقدماتی بیش ازمفاهیم دیرستانی دارد. در مورد سؤال دیگر که اگر بزرگترین مقسوم علیه دو عدد a و b برابر d باشد بدیهی است که بر مقسوم‌علیه دیگر a و b باید d را عاد کند و این تعریف مقسوم علیه است.

آقای علی‌اکبر جاویدمهر، دبیر ریاضی، ساوه

پیشنهاد شما در مورد همکاران دبیر بسیار به‌جا است و مسلماً مورد توجه قرار خواهد گرفت.

ضمناً از حل مسائل شماره ۲۴ و ۲۶ شما تشکر می‌کنیم امیدواریم موفق باشید.

آقای محمد داوری اردکانی، دبیر ریاضی، یزد

از ارسال حل مسائل شماره ۲۴ تشکر می‌کنیم موفق باشید.

خانم کافیه کیومرثی، دانش‌آموز، شهرکرد

از حل و ارسال مسائل تشکر می‌کنیم موفق باشید.

آقای مسعود طاهرخانی، دانش‌آموز، قزوین

از ارسال مسائل تشکر می‌کنیم. باید منابع آنها را ذکر کنید.

آقای فریدون عباسی خزائی، دانش‌آموز، باختران

از ارسال مسائل تشکر می‌کنیم. باید مسائل با ذکر منابع ارسال شود.

آقای سید عماد حسینی، قروه کردستان

امیدواریم که‌تلاش شما موجب موفقیت شما باشد.

آقای مهدی توکلی افشاری، دانش‌آموز

از ارسال مسائل تشکر می‌کنیم موفق باشید.

آقای رضا الفتی صابر، دانش‌آموز، رشت

از حل مسائل المپیاد تشکر می‌کنیم موفق باشید.

آقای شهرام محسنی‌پور، دانش‌آموز، تهران

از حل‌مسائل المپیاد آلمان تشکرمی‌کنیم‌امیدواریم موفق باشید.

آقای بابك بختی ــ آقای فرید رئیس‌زاده

از ارسال مسائل تشکر می‌کنیم باید مسائل باحل ارسال شوند.

آقای عباس موسوی‌نژاد، دبیر ریاضی، قم

از حل مسائل تشکر می‌کنیم امیدواریم موفق باشید.

آقای حمیدرضا فنائی، دانشجو، تهران.

از حل مسائل المپیاد آلمان تشکر می‌کنیم. امیدواریم بیش از این با ما همکاری کنید موفق‌باشید.

آقای فریدون عباسی‌خزایی، دانش‌آموز، باختران

از حل مسائل و ارسال مسائل تشکر می‌کنیم باید مسائل ارسالی همراه با حل باشند.

آقای ش ــ زرین دانش‌آموز، تهران

از ارسال مسائل تشکر می‌کنیم باید مسائل همراه با حل و ذکر منبع ارسال گردد.

اسامی همکارانی که حل مسائل شماره ۲۴ را فرستاده‌اند

آقای غلامرضا صفری‌نژاد، دانش‌آموز، بندر انزلی
۱، ۲، ۴، ۵، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۶، ۱۸، ۱۹، ۲۰.

آقای آیت‌ا... کریم‌زاده، دانش‌آموز
۲، ۴، ۵، ۶، ۱۰، ۱۱، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۹، ۲۰.

آقای نوید باژدان‌زاده، دانش‌آموز، بندر انزلی
۲، ۳، ۵، ۶، ۸، ۹، ۱۰، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۹، ۲۰.

آقای محمدرضا جمشیدی، اندیمشک
۲، ۳، ۵، ۶، ۸، ۱۲، ۱۳، ۱۶، ۱۷، ۱۹.

آقای محمدقلی‌پورطالعی، دانش‌آموز، رشت
۲، ۴، ۵، ۱۰، ۱۲، ۱۳، ۱۵، ۱۶، ۱۸، ۲۰.

آقای حسین طلوع‌شریفی، دانش‌آموز، تهران
۴، ۵، ۶، ۸، ۱۳، ۱۶، ۱۸.

آقایان احمدرضا شیرزاد ـ داریوش سعیدکیا، دانش‌آموز، فریدون‌کنار
۲، ۴، ۵، ۶، ۸، ۹، ۱۰، ۱۳، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰.

آقای غلامرضا عبدالله‌زاده، دانش‌آموز، فریدون‌کنار
۱، ۴، ۵، ۶، ۸، ۱۳، ۲۰.

آقای عباس کمیجانی برچلوئی، دانش‌آموز، تهران
۴، ۵، ۶، ۷، ۱۱، ۱۶.

آقای محمدعلی مهدی‌آبادی، بیرجند
۱، ۴، ۸، ۱۳.

آقای محمدمهدی امینی، دانش‌آموز، قرچک ورامین
۲، ۶، ۸، ۱۶، ۱۸، ۲۰.

آقای پیام پیشنماز، دانشجو، پزشکی مشهد
۹، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۲۰.

آقای مهرزاد انتظامی رودسری، دانش‌آموز، تهران
۴، ۵، ۶، ۷.

آقای مهدی اسدی، زنجان
۶، ۸، ۱۶، ۱۹، ۲۰.

آقای پیام ناصر طیوب ـ آقای علی نوری، شیراز
۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۶، ۱۸، ۱۹، ۲۰.

آقای مهدی شریف، دانش‌آموز، بیرجند
۴، ۱۵، ۱۶، ۱۸، ۲۰

آقای بابک تیموری، دانش‌آموز، تهران
۱، ۴، ۸، ۱۱، ۱۶، ۲۰.

آقای ارشک حمیدی، تهران
۲، ۳، ۸، ۱۸.

آقای فرشید شعبانی مطلق، دانش‌آموز، رشت
۴، ۱۲، ۱۹.

آقای ادموند باغرامیان، دانش‌آموز، اصفهان
۶، ۱۹، ۲۰.

آقای ضرغام مؤمن‌زاده، دانش‌آموز، رشت
۴، ۱۳، ۱۵، ۱۶.

آقای علی ثابت‌اقدام، گچساران
۲، ۴، ۱۱، ۱۳، ۱۴، ۱۶.

آقای مسعود کریمی، دانش‌آموز، اراک
۱۳، ۱۴، ۱۶.

آقای محمدحسن نخل‌کار، دیپلمه ریاضی، رشت
۲، ۶.

آقای داود غرویان، دانش‌آموز، نیشابور
۱، ۲، ۵، ۸، ۱۲، ۱۶.

آقای کیاوش تسلیمی بابلی، دانش‌آموز، بابلسر
۱۲، ۱۳، ۱۶، ۲۰.

آقای محمد جواد مؤمنی آشجردی، فریدن
۲، ۱۵، ۱۷.

آقای بهنام قلیچ‌خانی، دانش‌آموز، تهران
۸، ۱۶، ۱۷، ۲۰

آقای حسین پیرهادی، دانش‌آموز، تهران
۲، ۴، ۶، ۱۶، ۲۰.

خانم نوشین سعیدی، دانش‌آموز، تهران
۲، ۴، ۵، ۶، ۱۶.

خانم نوشین حبیبی مرند، کرج

۱۴، ۱۶، ۱۷، ۲۰.

خانم آیین عفیفی، دانش‌آموز، رشت
۱۶، ۱۹، ۲۰.

خانم منیره صدقی، دانش‌آموز، تبریز
۵، ۸.

آقای روزبه سیف کاشانی، تهران
۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۸، ۱۹، ۲۰.

آقای سهیل صالح‌پور، اصفهان
۶، ۸، ۹، ۱۳، ۱۶، ۲۰.

آقای علی کریمی، دانش‌آموز، تهران
۱، ۲، ۳، ۸، ۱۸، ۱۹.

آقای امیر سیامك جعفری، دانش‌آموز، تهران
۲، ۱۶، ۱۹.

آقای بهروز نفعی، دانشجو، تهران
۱۹، ۲۰.

آقای وحید آقایانی، دانش‌آموز، کرج
۲، ۲۰.

آقای رضا نصر، دانش‌آموز، تهران
۶، ۱۶.

آقای غضنفر جلالی، هفشجان
۴، ۱۰، ۱۹.

آقای رضا فرهی مقدم، دانش‌آموز، کرمان
۱۱، ۱۹.

آقای علی‌محمد کارپرور، دانش‌آموز، شیراز
۲، ۴، ۶، ۱۶

آقای فرشاد ماهوشی، دانشجو، اصفهان
۲، ۳، ۲۰.

آقای رامین ـ م ـ معطری، دانش‌آموز، بروجرد
۱، ۲، ۳.

آقای اتابك اتابکی، دانش‌آموز
۱۲.

آقای محمدرضا اسکندپور
۱، ۲.

آقای مهرداد خلیلی، دانش‌آموز، تهران
۱۶.

آقای مهرداد آقاجانی، دانش‌آموز، تهران
۶، ۱۰، ۱۴، ۲۰.

آقای هادی بخشایش، دانش‌آموز، مشهد
۸، ۱۶، ۲۰.

برادر دکتر حداد عادل

معاونت محترم وزیر و رئیس سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی وزارت آموزش و پرورش

احتراماً، پیرو نامه شماره ۱۰۰/۳۰۷۷ مورخ ۶۹/۲/۸، بار دیگر اختصاص بورس به‌دانش‌آموزان موفق مرحلهٔ دوم هشتمین دوره المپیاد ریاضی کشور توسط دانشگاه صنعتی اصفهان را به‌شرح زیر به استحضار میرساند:

۱) به هریك از ۱۲ نفر اول المپیاد ریاضی کشور در صورت قبولی و ثبت‌نام در این دانشگاه سالیانه مبلغ ۲۶۰۰۰۰ ریال بعنوان بورس تحصیلی بمدت ۴ سال پرداخت می‌نماید.

۲) به هریك از ۲۴ نفر اول المپیاد ریاضی کشور در صورت قبولی و ثبت‌نام در یکی از رشته‌های ریاضی و یا فیزیك این دانشگاه سالیانه‌مبلغ ۲۴۰۰۰۰ ریال بعنوان بورس‌تحصیلی بمدت ۴ سال پرداخت می‌نماید.

۳) به هریك از ۳۶ نفر اول المپیاد ریاضی کشور در صورت قبولی و ثبت‌نام در یکی از رشته‌های ریاضی و یا فیزیك این دانشگاه سالیانه مبلغ ۱۲۰۰۰۰ ریال بعنوان بورس تحصیلی بمدت ۴ سال پرداخت می‌نماید.

انتخاب‌شدگان مذکور برحسب مورد و اولویت میتوانند فقط از یکی از بندهای سه‌گانه فوق‌الذکر استفاده نمایند.

۴) در ضمن به هریك از ۴۸ نفر اول المپیاد ریاضی در صورت‌قبولی و ثبت‌نام در این دانشگاه امکانات خوابگاهی و غذای رایگان مناسب و تخفیف ۲۵٪ جهت خرید کتب درسی اختصاص می‌یابد.

بدیهی است ادامه استفاده از این امکانات بستگی به وضعیت علمی دانشجویان در سالهای بعد دارد. لطفاً دستور فرمائید:

۱ـ موضوع از طریق مقتضی جهت تشویق دانش‌آموزان در سطح وسیع اعلام گردد و حداقل در انتشارات دفتر تحقیقات درج گردد.

۲ـ اسامی، آدرس دقیق و رتبه نفرات اول تا چهل و هشتم المپیاد ریاضی بطور رسمی سریعاً به‌دانشگاه اعلام گردد تا بتوان در فرصت‌مناسب موضوع را به‌اطلاع آنان رساند.

رئیس دانشگاه صنعتی اصفهان

خوانندگانی که
حل مسایل شماره ۲۵
را برای مجله فرستاده‌اند

از خوانندگان عزیز مجله تقاضا می‌شود اولاً حل مسایل هرشماره را حداکثر تا دو ماه پس از انتشار برای مجله بفرستند. ثانیاً روی پاکت شماره مسأله و مجله را قید کنند.

آقای سید محمود موسوی، دانشجو، تبریز ۴–۱۰–۱۲–۱۴–
آقای ماهان غلامی، تهران ۱–۴–۵–۶–۷–۸–۹–
۱۰–۱۲–۱۳–۱۴–۱۵–۱۶–
آقای امیر اتابکی، تهران ۲–
آقای یوسف نظری گنجه‌لو، دانش‌آموز، تبریز ۱–۲–۸–
آقای آدم نقی‌پور، دانشجوی فوق‌لیسانس، تبریز ۱۷–۱۸–
آقای داریوش حیدریان، دانش‌آموز، باختران
۱–۲–۳–۴–۸–۹–۱۰–۱۱–۱۳–۱۴–
آقای مهران فولادی، دانشجو، تبریز ۴–۱۲–۱۳–
آقای علیرضا احقاقی، دانش‌آموز، تبریز ۴–۶–۱۰
آقای رها زندی‌خو، دانش‌آموز، تهران ۱–۳
آقای علی‌محمد کارپرور، دانشجو، شیراز
۱–۲–۳–۴–۱۰–۱۳–۱۶
آقای حسن آهک‌چی، دانش‌آموز، سلماس آذربایجان ۸–۹–
آقای ادموند باغرامیان، اصفهان ۳–۴–۸–۹
آقای امیرعطا سهبایی، دانش‌آموز، مشهد
۱–۳–۴–۶–۹–۱۱–۱۲–۱۳–
آقای پژمان موسوی، دانشجو، شیراز ۴–۸–۱۴–۱۵
آقای مرتضی گچ‌پزان، دانشجو، مشهد ۴–۶–۸–۱۰–۱۱–
۱۲–۱۴
آقای رضا نصر، دانش‌آموز، تهران ۱–
آقای شهرام قلندری، دانش‌آموز، بندرعباس ۴–۸
آقای ایوب احمدپور پرویزیان، تبریز ۴–۱۰–۱۱–۱۲–
۱۳–۱۴–۱۶–۱۷–۱۸
آقای فرشید ارجمندی، دانش‌آموز، پالادشهر
۴–۶–۸–۹–۱۰–۱۲
آقای حسین حیات‌بخش، دانش‌آموز، قم ۴–۷–۸–۱۰
آقای علی‌اکبر جاویدمهر، دبیر ریاضی، ساوه
۱–۲–۳–۴–۵–۶–۸–۹–۱۰–۱۱–۱۲–۱۴–۱۵
آقای عباس کمیجانی برچلوئی ۱–۲–۳–۴–۸–۹–۱۰–
۱۱–۱۳–۱۶–۱۸
آقای هادی هادی‌زاده، اصفهان ۱–۴–۵

آقای مهدی سمیع، دانش‌آموز، اصفهان ۱–۴–۸
آقای وحید شاه‌سنایی، دانش‌آموز، اصفهان ۴–۵
آقای علیرضا تیزهوش، دانش‌آموز، خرم‌آباد ۹
آقای فرید فقهی، دیپلمه ریاضی، تهران ۴–۸–۱۲–۱۴–۱۶–
خانم منیره صدیقی، دانش‌آموز، تهران ۱–۳–۴–۸–۱۰–
۱۲–۱۳–۱۴
آقای محمدجواد موسی‌آشجردی ۴–۸–۱۳–۱۴
آقای مهران محرمیان، دانش‌آموز، مشهد ۱–۳–۴–۵–۶–
۸–۱۳–۱۴–۱۷
آقای بابک وکیلی، تهران ۱–۲–۳–۴–۸–۹–۱۰–۱۱–
۱۲–۱۶–۱۸
آقای علی‌اصغر پورجامی‌کاظم، تبریز ۴–۱۰
آقای ابوالفضل کربلایی‌اکبر، دانش‌آموز، تهران ۴–۱۲
آقای محمد اکبریان، دانش‌آموز، کاشمر ۸–۱۲
آقای رضا فرهی‌مقدم، دانشجو، کرمان ۲–۳–۴–۵–۶–۷–
۸–۱۰–۱۲–۱۳–۱۴–۱۵–۱۶–۱۸
آقای صداقت شهمرادی، دانشجو، تبریز ۴–۸–۱۰–۱۱–
۱۲–۱۳–۱۴–۱۵–۱۷
آقای ارشک حمیدی، دانش‌آموز، تهران ۴–۱۰–۱۲–
آقای داود شایقی‌مغانلو، دانش‌آموز، اردبیل ۴–۱۲–
آقای فرشید ارجمندی، دانش‌آموز، اهواز
۱–۵–۷–۱۱–۱۴
آقای غلامرضا قبادی، دانش‌آموز، قزوین ۴–۸–۱۰–۱۲–
آقای جواد نادری، دانش‌آموز، قم ۳–۴–۱۰–۱۲–۱۴
آقای حمیدرضا عسگری، دانش‌آموز، الیگودرز ۴–۹–۱۰–۱۲
خانم سیده آمنه عالم‌بین، دانش‌آموز، بندرانزلی ۴–۸–
آقای بهروز شکوهی‌گاوگانی، دانشجو، تبریز
۳–۴–۵–۸–۹–۱۳–
خانم طاهره شکریان، دانشجو، تهران
۳–۴–۸–۹–۱۰–۱۲–۱۳–۱۴–
آقای مسعود شریفلو، دیپلمه، تهران ۲–
خانم فاطمه بابایی، دانش‌آموز، مرند ۸–۱۲
آقای حسین حیاتی، دانش‌آموز، کاشمر ۸–۱۶
آقای کامران دیوانی، دانشجو، تهران ۴–۸–۱۰–۱۲–۱۳–
۱۴–۱۵–۱۷–۱۸
آقای آیدین پیرزه، دانش‌آموز، تبریز ۴–
آقای کیوان ابراهیمی، دانش‌آموز، بیجار
آقای رضا مدرسی، دانش‌آموز، تهران ۱–۴–۶–۸–۱۰
آقای علی خسروآبادی، دانش‌آموز ۴–
آقای محمد علیپوراسکندانی، دانشجو، تبریز ۸–۱۲–۱۳–
۱۴–۱۵–۱۶–۱۷–۱۸–
آقای علی قاسم‌پور، تبریز ۴
آقای واحد نورزاده، دانشجو، تبریز ۴–۷–۱۳–۱۴–۱۵
آقای محمد امیری، دانش‌آموز، قائم‌شهر ۱۴
آقای کاظم قنبری، دانشجو، تبریز ۱۷–۱۸–
آقای محمد محمدی، دانش‌آموز، اصفهان ۴–۱۶
آقای یونس برادران‌شکوهی، دانش‌آموز، تبریز ۱–۴–۸–۱۱
آقای رضا نصر، دانش‌آموز، تهران ۱۰
آقای ماهان غلامی، تهران ۱–۴–۵–۶–۷–۸–۹
۱۰–۱۲–۱۳–۱۴–۱۵–۱۶–

معرفی کتاب‌های رسیده

تنظیم: دکتر محمدحسن بیژن‌زاده

۱ـ واژه‌نامه ریاضی: ناشر، جهاد دانشگاهی صنعتی شریف، ۲۲۰ صفحه وزیری.

کتاب واژه‌نامه ریاضی برای اولین‌بار در سال ۱۳۶۳ و در نتیجه یك کار جمعی توسط گروه ریاضی کاربردی جهاد دانشگاهی صنعتی شریف به چاپ رسید. این کتاب طی سه بار تجدید چاپ خود، با همان محتوای اولیه در تیراژ وسیع منتشر و در اختیار دانشجویان رشته‌های مختلف دانشگاهی قرار گرفت. به دنبال استقبال گسترده از این کتاب ضرورت تکمیل و رفع نقایص چاپ اولیه آن به‌خوبی احساس و وظیفه انتشار مجموعه‌جدیدی که حتی‌الامکان تمامی واژه‌های متداول ریاضی را دربر داشته باشد در صدر فعالیتهای انتشاراتی‌گروه تهیه‌کننده کتاب جای داده شد.

مجموعه حاضر که تجدید نظر کلی بر چاپ اول کتاب می‌باشد، مشتمل بر هشت هزار و یکصد واژه ساده و ترکیبی بوده و به جهت اضافه شدن واژه‌های جدید، حذف واژه‌های غیر ریاضی و تهیه شکل‌های مورد نیاز از غنای خاصی برخوردار می‌باشد. دراین مجموعه، تعاریف، صورت قضایا و مسائل مهم ریاضی نیز درج شده‌اند که خود اعتبار ویژه‌ای به‌آن بخشیده است. واژه‌های این‌کتاب از منابع متعدد گردآوری شده ومعادلهای فارسی آنها نیز تا حد میسور از کتب ترجمه شده معتبر فراهم آمده‌اند.

با این امید که بهره‌گیری از کتاب حاضر بتواند کمك بسیار مؤثری دربرداشت دانشجویان و دبیران از منابع ریاضی به زبان انگلیسی باشد.

۲ـ گزیده‌هایی از نظریه اعداد: ادیستن ادر، ترجمه منوچهر وصال؛ مرکزنشر دانشگاهی، از سری‌ریاضیات پیش‌دانشگاهی (۲۵).

۳ـ تبدیلهای هندسی (جلد سوم): ای. م. یاگلم، ترجمه محمدهادی شفیعیها؛ مرکز نشر دانشگاهی، از سری ریاضیات پیش‌دانشگاهی (۲۴).

۴ـ واژه‌نامه‌ریاضی جهاددانشگاهی گروه ریاضی‌کاربردی دانشگاه صنعتی شریف.

وزارت فرهنگ و آموزش عالی

مرکز تحقیقات فیزیك نظری و ریاضیات

مفتخر است که با همکاری

انجمن حکمت و فلسفه
انجمن منطق سمبولیك
سازمان انرژی اتمی ایران
مرکز بین‌المللی فیزیك نظری (تریست)
سازمان فرهنگی علمی و آموزشی ملل متحد (یونسکو)

برگزاری نخستین

دوره تابستانی منطق
۲ تا ۱۴ مرداد ۱۳۷۰

را اعلام دارد

موضوع: نظریه‌مجموعه‌ها، روشهای مدلسازی درنظریه مجموعه‌های ساخت‌پذیری و ساختارهای ریز، فورسینگ و کاربردهای آن، نظریه توصیفی مجموعه‌ها. گذشته از این مباحث بالا سخنرانیهائی نیز در زمینه‌های گوناگون منطق توسط منطقدانان و فیلسوفان برجسته جهانی ایراد می‌گردد.

• **استادان**

ژ. استرن (دانشگاه‌پاریس)، ك. دولین (کالج کولبی، مین)، ك. ا. دی‌بریسکو (مؤسسه مطالعات علمی ونزوئلا)، علی عنایت (دانشگاه آمریکائی واشنگتن دی. سی.)، ك. کونن (دانشگاه‌ویسکانسین)، ا. میلر (دانشگاه ویسکانسین)، ه. وودین (دانشگاه کالیفرنیا) و استادان دیگر

• **مکان**

محل تشکیل این دوره در یکی از نقاط خوش آب و هوای اطراف تهران خواهد بود.

• **داوطلبان**

شرکت کنندگان از میان دانشجویان کارشناسی، کارشناسی ارشد، دکترای ریاضی و نیز استادان و محققان رشته‌های گوناگون علمی و فلسفی از کشورهای مختلف انتخاب خواهند شد. اولویت با داوطلبان ایران و کشورهای منطقه خواهد بود.

• **شرایط ورود**

داوطلبان باید آگاهی لازم از زبان انگلیسی و نیز آشنائی کافی با منطق محمولات مرتبه اول نظریه مدل و نظریه اصل موضوعی مجموعه‌ها داشته باشند.

داوطلبان میتوانند تقاضای شرکت خود را تا پایان خرداد ۱۳۷۰ به دفتر اجرائی دوره به آدرس زیر ارسال دارند.

مرکز تحقیقات فیزیك نظری و ریاضیات

تهران ـ نیاوران میدان شهید باهنر صندوق پستی ۱۷۹۵ـ۱۹۳۹۵
تلفن: ۲۸۰۹۵۸ تلکس: ۲۲۴۵۹۶ ـ IIrm فاکس: ۲۷۹۱۳۰

کمیته برگزار کننده

• ژاك استرن (دانشگاه پاریس)
• محمد جواد لاریجانی (مرکز تحقیقات فیزیك نظری و ریاضیات)
• علی عنایت (دانشگاه آمریکائی واشنگتن دی. سی)
• ضیاء موحد (انجمن حکمت و فلسفه)

بقیه از صفحه ۴۲

بنابراین حدس ۱ غلط است. معهذا دراین حالت

$$\lim_{x\to 0^-} g'(x) = g'_-(0)$$

سپس دانشجویان مشاهده کردند که درمثال بالا g در $x=0$ از چپ پیوسته است (یعنی $\lim_{x\to 0^-} g(x)=g(0)$) اما در $x=0$ از راست پیوسته نیست (چونکه $\lim_{x\to 0^+} g(x)\neq g(0)$).

بنابراین حدس دومی را تنظیم کردیم و پس ازشکست در پیدا کردن مثال‌های نقض روشنی، برآن شدیم‌که حدس را ثابت‌کنیم.

حدس ۲. اگر به‌ازای هر $a<x$، f مشتق‌پذیر باشد و در $x=a$ از راست پیوسته و $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ موجود باشد، آنگاه f در $x=a$ مشتق راست دارد و $\lim_{x\to a^+} f'(x) = f'_+(a)$.

حدس مشابهی هم برای مشتق چپ در $x=a$ برقراراست.

برهان. به‌ازای هر $a<x$، f روی بازهٔ $[a, x]$ درشرایط ق‌م‌م صدق می‌کند، لذا $c\in (a, x)$ای وجود دارد بطوری که

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

بنابراین

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} =\lim_{x\to a^+} f'(c)=\lim_{c\to a^+} f'(c)$$

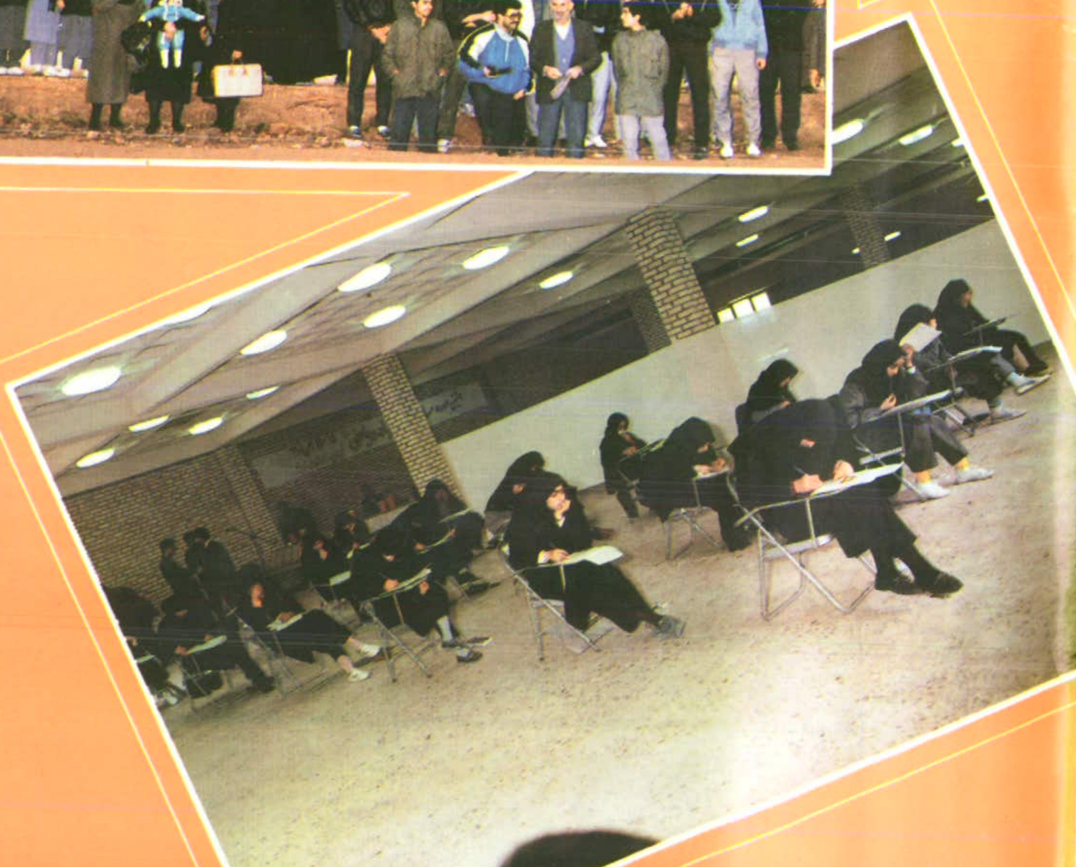
و چون، طبق فرض، حد آخری وجود دارد پس حدس ثابت می‌شود.

دانشجویان دریافته بودند که تابع موردبحث درمسئلهٔ اصلی، درفرضهای این قضیهٔ «جدید» صدق می‌کرده است. آنها کاملاً تصدیق کردند که درحل مسئلهٔ اصلی فرضهای ضمنی و ثابت‌نشده‌ای را به‌کار گرفته‌اند. آنچه که ازاین بررسی عاید دانشجویان شد نظری اجمالی به فرآیندی است که ریاضیدانان حرفه‌ای درجهت نیل به‌یك نتیجهٔ قابل اثبات، حدسهای خود را درپرتو مثالهای نقض، متوالیاً تظریف می‌کنند. برای من روزی به‌یادماندنی بود وقتی که احساس‌کردم فرآیند بالا به‌خوبی از عهدهٔ مسئله برآمده است.

مرجع:

Rod Haggarty, The Mathematical Gazette, vol 74, NO 469, 1990 293–297.

تیم المپیاد ریاضی
جمهوری اسلامی ایران
در مسابقات بین‌المللی چین




قابل توجه
دبیران و
دانشجویان
رشد آموزش زمین شناسی
رشد آموزش شیمی
رشد آموزش جغرافیا
رشد آموزش ادب فارسی
رشد آموزش ریاضی
رشد آموزش فیزیک
فصلنامه
تعلیم و تربیت
نشریه
علمی کاربردی
مرکز تحقیقات آموزشی
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش
سال ششم ـ شمارهٔ ۴ ـ زمستان ۱۳۶۹ ـ شمارهٔ مسلسل ۲۴
رشد
رشد آموزش زبان
FLT
آیا شما
مجلات
رشد تخصصی
مخصوص دبیران و دانشجویان را که هر
سه ماه یکبار در زمینه آموزش دروس
دبیرستانی منتشر می شود می خوانید؟