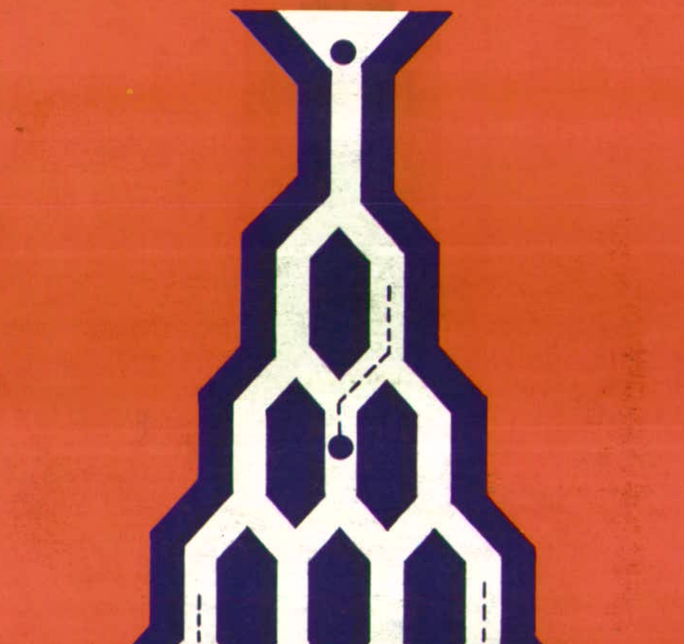
رشد آموزش ریاضی

سال اول - شمارهٔ ۳ پاییز ۱۳۶۳ - بها ۱۰۰ ریال



رشد آموزش ریاضی

شمارهٔ ۳ ، پاییز ۱۳۶۳

تهیه‌وتنظیم : گروه‌ریاضی دفترتحقیقات‌وبرنامه‌ریزی‌وتألیف‌کتابهای‌درسی—
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش وپرورش
تلفن ۴ــ ۸۳۹۱۶۱ (داخلی ۵۰)
تولید : معاونت‌فنی‌وهنری‌دفترامورکمک‌آموزشی‌وکتابخانه‌ها
مرکز توزیع : تلفن ۸۳۱۴۸۱
نشانی : خیابان‌ایرانشهرشمالی ،ساختمان‌شمارهٔ ۴ تلفن: ۸۳۲۰۲۱

● مجلهٔ رشد آموزش ریاضی نشریهٔ گروه ریاضی دفتر تحقیقات وبرنامه‌ریزی وتألیف کتابهای درسی سازمان پژوهش وزارت آموزش و پرورش است که هرسه ماه یکبار منتشر می‌شود. هدف از انتشار این‌مجله در وهلهٔ اول ایجاد ارتباط متقابل بین‌معلمین‌ریاضی‌ودفتر مذکور، به‌منظورتبادل‌تجارب وآراء در زمینهٔ آموزش‌ریاضی است؛ ودرمرحلهٔ بعد طرح وبررسی مسائل بنیادی ریاضیات‌مقدماتی ومطالب جنبی ومفید درسی، به منظور ارتقاء سطح معلومات معلمین ریاضی است. مجله از مشارکت و همکاری معلمین ریاضی در ارائهٔ مقالاتی ناظر براهداف فوق، بالاخص در زمینهٔ‌آموزش ریاضی، استقبال می کند.

فهرست

متن عربى مقدمة رسالة فى شرح ما اشكل من مصادرات كتاب اقليدس

تصنيف الشيخ الامام الاجل حجة الحق ابى الفتح عمر بن ابراهيم الخيامى

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمدلله ولى الرحمة والانعام والسلام على عباده الذين اصطفى و خصوصاً على سيدالانبياء محمد وآله الطاهرين اجمعين.

ان تحقيق العلوم و تحصيلها بالبراهين الحقيقية مما يفترض على طالب النجاة والسعادة الابدية و خصوصاً الكليات والقوانين التى يتوصل بها الى تحقيق المعاد واثبات النفس و بقائها و تحصيل اوصاف واجب الوجود تعالى جده والملائكة و ترتيب الخلق واثبات النبوة للسيد المطاع بين الخلق الآمر و الناهى اياهم باذن الله تعالى بحسب طاقة الانسان.

واما الجزئيات فغير مضبوطة واسبابها غير متناهيه فلا تحيط بها هذه العقول المخلوقة اصلا وليس يعرف منها الا مايقتنص بالحس والتخيل والوهم.

والجزء من الحكمة الموسوم بالرياضى اسهل اجزائها ادراكاً تصوراً و تصديقاً معاً: اما العددى منه فامر ظاهر جداً واما الهندسى فلايكاد يخفى منه شيء ايضاً على السليم الفطرة الثاقب الرأى الجيد الحدس. وهذا الجزء من بين اجزاء الحكمة له منفعة الرياضة و تشحيذ الخاطر و تعويد النفس الاشمئزاز عما لايكون عليه برهان و ذلك لقرب مآخذه و سهولة براهينه و معاونة التخيل العقل فيه و قلة خلاف الوهم اياه...

ترجمهٔ فارسی
مقدمهٔ رسالهٔ حکیم خیام

شرح ما اشکل من مصادرات اقلیدس

بنام خداوند بخشایندهٔ بخشایشگر

ستایش خدای را که خداوند رحمت و نعمت است و درود بر بندگان برگزیده‌اش بخصوص سید پیغامبران محمد مصطفی و پاکان خاندان او همگان.

همانا تحقیق در علوم و تحصیل دانشها با دلیل و برهان حقیقی بر کسانی که طالب نجات و جویای سعادت ابدی باشند از جملهٔ فرایض و واجبات است خصوصاً علوم کلی برهانی قانونی که وسیلهٔ تحقیق در معاد واثبات و بقاء نفس و تحصیل اوصاف واجب‌الوجود است تعالی شانه و همچنین وسیلهٔ تحقیق است برای اوصاف فریشتگان و ترتیب آفرینش واثبات نبوت حضرت سیدالمرسلین که مابین خلایق باطاعت مخصوص باشد واحکام امر و نهی او را که از طرف خداست گردن نهند؛ تحصیل آن علوم ودرك این حقایق تا آن حد که در حوصلهٔ قدرت و طاقت بشری باشد لازم و حتمی‌است. اما جزئیات علوم قابل ضبط و حصر نیست و علل واسبابش بی‌پایان است و بدین سبب عقول که خود یکی از مخلوقات باشند بهمهٔ جزئیات احاطه نتوانند کرد و جز آنچه را که با تخیل و حس و وهم سرَ و کار داشته باشد درنیابند.

[اینك گوییم] این جزو از حکمت که انرا علوم ریاضی می‌نـامند آسانترین اجزاء حکمت هم در ادراك تصوری و هم در تصدیـق؛ اما آن رشته که مربوط بعدد و حساب باشد خود واضح و آشکار است؛ اما بخش هندسیات نیز بر کسانی که دارای فطرت سلیم و رای راست وجودت حدس باشند پنهان نباشد؛ و فایدت علوم ریاضی اینست که موجب ورزیدگی ذهن و تند کردن خاطر گردد و نیز نفس را عادت دهد تا از قبول اموری کـه مقرون بدلیل و برهان نباشد اجتناب کند؛ و سبب این امر همانا سهولت براهین و نزدیك بودن مآخذ آن بذهن و معاونت تخیل است با تعقل و قلت مخالفت وهم با عقل...

نقل از کتاب خیامی‌نامه
تالیف جلال‌الدین همائی

ون دورمولن

یادگیری اقامهٔ برهان در ریاضی

۱. امروزه غالباً شکایت می‌شود دانش‌آموزانی که درس ریاضیات جدید را مطالعه می‌کنند دیگر قدرت ندارند برهانی منظم برای قضیه‌ای بیاورند. از طرف دیگر ممکن است کسانی بگویند که در برنامه‌های گذشته نیز دانش‌آموزان اساساً به‌طریق تصادفی و بی‌برنامه قادر بودند اثبات نمایند و اگر غالباً به‌جوابی درست می‌رسیدند مرهون تمرین و ممارستی بود که کسب می‌کردند، اما حتی ایدهٔ خفیفی از این حقیقت نداشتند که مقصود از اقامهٔ برهان چیست. در هردو مطلب فوق البته یك طرفه قضاوت شده است اما هردوی آنها تا حدی درست است. واضح است که در حال حاضر اشکالاتی وجود دارد اما مجبوریم در مقابل برگشت به‌عادات تدریس بدی که قبل از تغییر برنامه‌های آموزشی وجود داشته‌اند ایستادگی کنیم.

قبل از اینکه پا را کمی از این اظهار و ادعای بی‌پایه که «در حال حاضر دانش‌آموزان استدلال را یاد نمی‌گیرند» فراتر بگذاریم، بهتر است ابتدا در این مقاله بررسی نمائیم که تحت چه شرایطی و با چه روشی یك فرد می‌تواند استدلال ریاضی را یاد بگیرد؛ سپس به اظهار وادعای دو جانبهٔ فوق برگردیم.

۲. وقتی فردی می‌خواهد یك مسئلهٔ ریاضی را حل کند معمولا از آغاز امر نمی‌تواند بااستدلالی قیاسی و دقیق مسئله را دنبال نماید. قاعده این است که با مفروضاتی نامنظم مسئله را مورد بررسی قرار داده و پس از مدتی ور رفتن با مسئله بااستفاده از روش امتحان و خطا سعی می‌کند تا درکی از مسئله پیدا کرده و برآن مسلط گردد. پس از اینکه این مرحله با موفقیت انجام شد کوشش می‌کند تا جواب مسئله را بصورتی منظم و مرتب ارائه نموده و بدین ترتیب جواب را بصورت تقریباً استدلالی درآورد. چیزی که در انتهای امر بصورت نوشته درمی‌آید یك استدلال قیاسی است.

بنابراین قسمتی از برنامهٔ آموزش ریاضی بایستی این باشد که به‌دانش‌آموزان طریقهٔ ارائهٔ یك استدلال قیاسی را بیاموزد.

۳. آموزش‌فوق در دو وجه دارد. وجه اول، وجه تکنیکی ــ منطقی‌است: یعنی‌تدریس روشهائی‌است‌که برای‌این‌منظور طرح شده‌اند تا مرحلهٔ اول تحقیق را مرتب‌تر، با هدف‌تر، و مؤثرتر سازند. برای این مرحله دانش و مهارت لازم است که دانش‌آموز برای کسب آنها باید مقدار زیادی تمرین داشته باشد.

اما وجه دیگر آن روانی ــ انگیزه‌ای است. در اینجا دانش و مهارت عوامل اصلی نمی‌باشند بلکه بیشتر این سئوال مطرح است که چگونه دانش‌آموز لزوم یك استدلال قیاسی را بپذیرد، حتی در حالاتی که راست بودن یك گزاره آنقدر روشن است که فکر می‌کند ارزش آن را ندارد که برای اثبات آن خود را در زحمت بیاندازد. دانش‌آموز باید چنین چیزی را یاد بگیرد و گفتار معلم که چنین و چنان کن کافی نخواهد بود. این جنبهٔ روانی انگیزه‌ای مسئله است که آن را در زیر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۴. آنچه که برای یك مبتدی با توجه به‌سطح تفکر او واضح است برای یك ریاضیدان با تجربه با توجه به سطح تفکرش غیرقابل قبول می‌باشد. برای روشن شدن مطلب چند مثال از استدلال را در سطوح مختلف فکری می‌آوریم:

الف مسئله

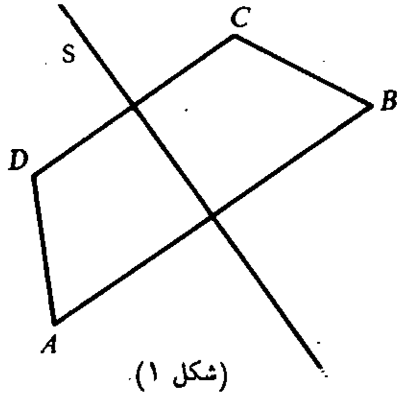
یك ذوزنقه متساوی‌الساقین رسم کنید و ثابت‌کنید که قطرها مساویند.

حل‌های مختلف:

الف (۱) دانش‌آموزی قطرها را با خط‌کش اندازه می‌گیرد و می‌گوید «نتیجهٔ اندازه‌گیری یکی است، لذا قطرها مساوی هستند.»

الف (۲) دانش‌آموز دیگری به‌طور ذهنی ذوزنقه را می‌برد و آن را پشت و رو کرده و در جای خود قرار می‌دهد و بدین‌ترتیب استدلال می‌کند که قطرها مساویند.

الف (۳) ممکن است دانش‌آموزی بحث کند «یك ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین طبق تعریف یك چهارضلعی است با محور تقارنی که از رأس نمی‌گذرد و در نتیجه تقارنی مانند S وجود دارد به‌طوری که $S(ABCD) = BADC$ (شکل ۱).



(شکل ۱)

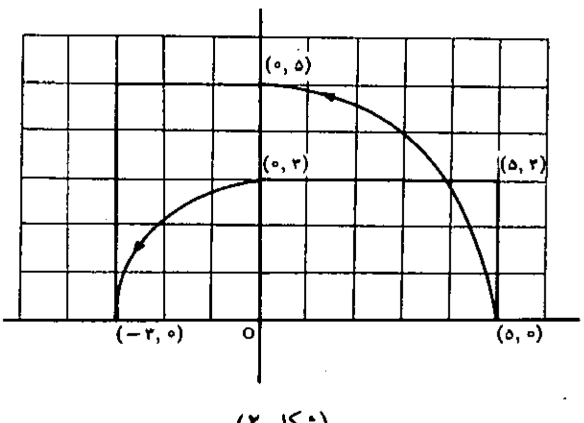
بنابراین $S(AC) = BD$. در یك تقارن یك‌خط باتصویرش مساوی است. بدین‌ترتیب ثابت می‌شود قطرها با هم مساویند.»

ب سئوال

تصویر یك نقطه با مختصات صحیح در صفحه، تحت‌دوران صفحه حول O به‌اندازهٔ ۹۰° چیست؟

حل‌های مختلف

ب (۱) دانش‌آموزی نقطه‌ای مانند (۵, ۳) را روی کاغذ شطرنجی انتخاب می‌کند و با دقت آن را حول O دوران

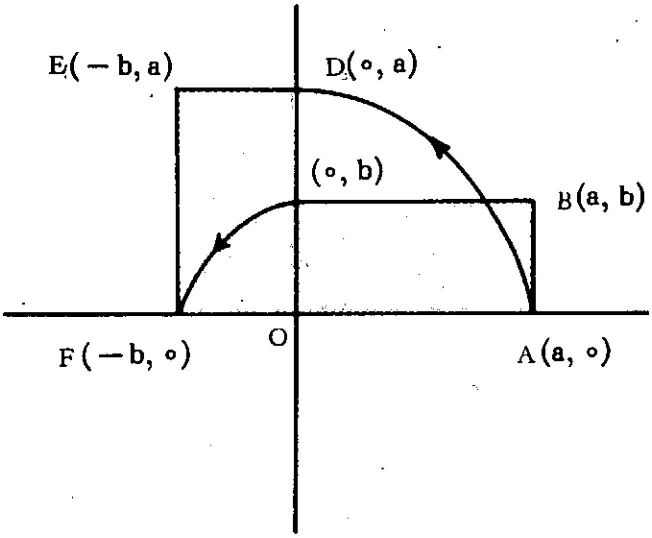


(شکل ۲)

می‌دهد و می‌یابد که تصویر آن دقیقاً (−۳, ۵) است.

ب (۲) دانش‌آموزدیگری‌نقطه‌ای‌مانند (۵, ۳) را روی‌کاغذ شطرنجی انتخاب می‌کند و مستطیلی به‌رئوس (۰, ۰)، (۵, ۰)، (۵, ۳)، و (۰, ۳) مطابق شکل‌زیر درنظرمی‌گیرد. سپس استدلال می‌کند که تصویر (۵, ۰) نقطهٔ (۰, ۵) و تصویر (۰, ۳) نقطهٔ (−۳, ۰) است، بنابراین تصویر (۵, ۳) نقطهٔ (−۳, ۵) است (شکل ۲).

ب (۳) دانش‌آموز دیگری سعی می‌کند یك روش کلی ارائه دهد. برای این کار نقطه‌ای مانند (a, b) در صفحه در نظر می‌گیرد و ابتدا فرض می‌کند ۰ ≠ a و ۰ ≠ b. سپس‌مستطیلی به‌رئوس (۰, ۰)، (a, ۰)، (a, b)، و (۰, b) در نظر می‌گیرد (شکل ۳).



(شکل ۳)

بااستفاده از عمل دوران حول O، نقطهٔ (۰, ۰) به (۰, ۰)، نقطهٔ (a, ۰) به (۰, a)، و نقطهٔ (۰, b) به (−b, ۰) تبدیل می‌شود. این دوران مستطیل OABC را به‌مستطیل ODEF که مساوی با آن است تبدیل می‌کند. بنابراین تصویر نقطهٔ (a, b) نقطهٔ (−b, a) خواهد بود. استدلال فوق وقتی که a = ۰ و/یا b = ۰، نیز صادق است.

ج سئوال

مجموع اولین n عدد فرد متوالی چیست؟

حل‌های مختلف

ج (۱) دانش‌آموزی می‌گوید «چون نمی‌دانم n چه عددی است، لذا نمی‌توانم به‌این سئوال جواب بدهم.»

ج (۲) دانش‌آموز دیگری بطریق زیر استدلال می‌کند:
مجموع سه عدد فرد متوالی
عبارتست از ۱ + ۳ = ۴،
مجموع چهارعدد فرد متوالی
عبارتست از ۱ + ۵ = ۹،
مجموع دو عدد فرد متوالی
عبارتست از ۱ + ۳ + ۵ + ۷ = ۱۶؛
بنابراین مجموع n عدد فرد متوالی باید n^2 باشد.
ج (۳) دانش‌آموز سومی بااستفاده از روش ج (۲) حدس می‌زند که مجموع n عدد فرد متوالی باید مساوی n^2 باشد و سپس حدس خود را با استفاده از استقراء ثابت می‌کند.

۵. اگر یك معلم ریاضی استدلالهائی نظیر الف (۱)، ب (۱)، ج (۱) را برای سئوالات فوق بیاورد، تعجب می‌کنیم و جای تعجب هم هست. در صورتی که دانش‌آموز دوازده ساله‌ای بدون کمك کسی دیگر چنین براهینی را اقامه نماید، برای معلم باید قابل قبول باشد. می‌توان گفت در حد سطح تفکرچنین دانش‌آموزی یك برهان منطقی ارائه شده است و این حقیقت با توجه به‌کلمه «بنابراین» که دانش‌آموز بکار برده است، استنباط می‌گردد.

قاعدتاً دانش‌آموز قادر نیست استدلالهائی نظیر الف (۲)، ب (۲)، ج (۲) را بیاورد گرچه در سن ۱۳ یا ۱۴ سالگی چنین انتظاری از او داریم و از این من‌انتظار نیز این است که سطح تفکر او طوری پیشرفت کرده‌باشد که استدلالهای از نوع الف (۱)، ب (۱)، ج (۱) برای او منطقی نباشد. در حالی که استدلالهای الف (۲)، ب (۲)، ج (۲) در حد سطح تفکر فعلی او، براهین منطقی خوبی به‌حساب می‌آیند.

استدلالهای فوق را گرچه از دانش‌آموز می‌پذیریم اما با فرض اینکه معلم سطح تفکر بالاتری دارد، برای او این استدلالها منطقی نمی‌باشند. حال باید دید این سطح تفکر بالاتر چیست؟ اما قبل از آن لازم است به‌بحث زیر توجه شود.

۶. استدلالهای الف (۱)، ب (۱)، ج (۱) شامل یك نظم منطقی در محدودهٔ بسیار کوچکی هستند. کلمهٔ «بنابراین» فقط یك بار در آنها بکار برده شده است. حقایق دیگری وجود دارند که به‌مسئله‌ربط پیدا می‌کننداما دانش‌آموزی که تازه استدلال را شروع کرده هنوز دانش و تجربه‌کافی ندارد تا بتواند آن حقایق را به‌این نظم منطقی بسیار محدود ربط دهد.

فرویدنتال[۲] یکی از متخصصین آموزش ریاضی این نوع استدلال را **سازماندهی موضعی**[۳] نامیده است بهتر است در اینجا عین مطالب ایشان آورده شود.

«اگر دانش‌آموز با روش ساختن هندسی کشف‌کند که دایره به‌وسیلهٔ پرکاری که باندازهٔ شعاع دایره باز شده است به‌شش قسمت مساوی تقسیم شده و بدین‌طریق یك شش ضلعی منتظم ساخته می‌شود و صحت این تجربه را با توجه به‌اینکه زوایای یك مثلث متساوی‌الاضلاع هریك ۶۰ درجه است، نشان دهد دراین صورت این یك نوع استدلال است. برای‌یك‌ریاضیدان مسلماً این‌استدلال درست‌نیست. به‌عقیدهٔ‌اودراین‌استدلال‌حقایق‌زیادی‌نهفته‌اند که مفروض گرفته شده‌اند؛ و چند اصل موضوع چه در هندسهٔ اقلیدسی، چه در هندسهٔ هیلبرت، و چه در جبر خطی باید فرض شوند تا به‌نتیجهٔ فوق برسیم. در هریك از دستگاههای اصل موضوعی فوق برای رسیدن به‌نتیجهٔ مذکور باید یك راه طولانی طی شود و دانش‌آموز باید این حقیقت را دریابد. اما اگر خواسته باشیم یك دستگاه اصل موضوعی را براو تحمیل کنیم هرگز به‌نتیجه نخواهد رسید. از نظر آموزشی این روش غلطی است. آن دقت منطقی است که می‌تواند فرد را متقاعد کند اما مفاهیم ریاضی از پیش ساخته شده نمی‌تواند متقاعدکننده باشد. برای اینکه دقت منطقی را در یك فرد ارتقاء دهیم، قدم اول آن است که او را واداریم تا نسبت به‌دقت منطقی که تا آن لحظه به‌صحت آن ایمان داشته شك نماید. بدون چنین شکی فرد از استدلال دقیقتری که به‌وسیلهٔ شخصی دیگر برای او عرضه می‌شود کمتر یاد می‌گیرد. البته در مسئله‌ای مانند مسئلهٔ شش ضلعی منتظم دانش‌آموز بایداز خود سئوال کند که چه چیزی را فرض می‌گیرد. می‌دانیم اگر او این سئوال را مرتباً از خود بپرسد، در نهایت حیران شده و به‌دور و تسلسل می‌رسد. این حقیقت را ما می‌دانیم اما دانش‌آموز هنوز نمی‌داند و باید دراین جهت هم تجربه کسب کند. بدون چنین تجاربی معنای اصول موضوعه را نمی‌تواند درك کند.

تجربه‌هائی که به‌این ترتیب دانش‌آموز در یك موضوع درسی کسب می‌نماید، می‌توان سازماندهی‌موضعی نامید. مفهوم سازماندهی موضعی اهمیت خاصی از نظر آموزشی در تدریس هندسه دارد. مفاهیم وروابط‌هندسی تا حد و مرز دلخواهی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند یعنی تا حدی که یك فرد با کمی دقت معنای مفاهیم را تمیز داده وراست بودن گزاره‌ها را درك می‌نماید. این روشی است که هرفرد در مطالعهٔ فضای ملموس هندسی مورد استفاده قرار می‌دهد؛ نه از طریق اصول موضوعه که خیلی دور از ذهن فرد است بلکه با توسعهٔ سریع دانش فرد نسبت به‌حقایق و گزاره‌هایی که راست فرض می‌شوند. به‌این ترتیب یك موضوع بجای اینکه بصورت یك موضوع کاملا بهم‌بافته شده مورد بحث قرارگیرد بصورت قسمتهای سازمان یافته بزرگ یا کوچك مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این روشی است که در فیزیك و یا در هر

موضوعی که در آن ریاضیات بکار می‌رود، مورد استفاده قرار می‌گیرد.»

در استدلالهای الف (۲)، ب (۲)، ج (۳) محدودهٔ استدلال منطقی تااندازه‌ای وسیعتر است. گرچه استدلال بصورت سازماندهی موضعی ارائه شده است اما مطالب مختلف بهتر بهم ربط داده شده‌اند. علت این است که دانش‌آموز خود را به‌شیء خاص مورد مطالعه محدود نمی‌سازد.

در الف (۱) دانش‌آموز چیزی بیش از یك ذوزنقهٔ بخصوص مفروض نمی‌تواند مشاهده کند. اگر ذوزنقهٔ دیگری به‌او بدهند از نو همین استدلال را برای آن ارائه می‌دهد.

در ب (۱) معلومات او محدود به‌نقطه‌ای به‌مختصات (۵, ۳) است. اگر نقطه‌ای دیگر به‌مختصات (۷, ۴) به‌او داده شود، استدلال را از نو از سرمی‌گیرد و اگر نقطه‌ای مانند(۵, ۴ -)را به‌او بدهند، جای شك است که‌بتواند به‌جوابی صحیح برسد.

در ج (۱) دانش‌آموز قادر به‌تصور شیء بخصوصی نبوده و لذا نتوانسته جوابی ارائه دهد.

از طرف دیگر در الف (۲)، ب (۲)، ج (۲) اشیاء مورد بررسی دیگر بخودی خود مهم نبودند بلکه هریك از آنها نماینده‌ای از گروه دشیاء مشابه تصور می‌شدند و دانش‌آموز در این حال خواص نوعی از اشکال را بررسی می‌نمود.

در استدلالهای الف (۳)، ب (۳)، ج (۳) قدم دیگری هم برداشته شده است. دراین استدلالها دانش‌آموز خود را به‌اشیاء خاص و یا به‌مجموعه‌ای از اشیاء خاص محدود نمی‌کرد، و دراستدلال خود قادر بود قوانین‌منطقی لازم را که مستقل از موضوع مورد بحث می‌باشد بکار گیرد.

۷. در اینجا لازم است سه مرحله از تفکر در استدلال ریاضی را که **ون‌هیل**[۴] اشاره می‌کند متذکر شویم. ابتدا

مرحلهٔ پایه:

در این مرحله دانش‌آموز فکر خود را به‌اشیائی خاص محدود می‌سازد. مثلا این ذوزنقه با آن ذوزنقه فرق دارد و این مربع ربطی به‌مربع دیگر ندارد. دراین مرحله سازماندهی خیلی موضعی است.

اگر به‌دانش‌آموز تعدادی زیادی‌مثال از اشیاء مشابه بدهیم می‌تواند با دسته‌بندی آنها به‌این درك برسد که این اشیاء دارای چیز مشترکی هستند. کشف می‌کند که مثلا بعضی خواص یك ذوزنقه بخصوص دربارهٔ همهٔ ذوزنقه‌ها صادق است دراین صورت‌دیگر ذوزنقه یك‌شکل و فرم نیست بلکه یك مفهوم خواهد بود. با کسب این گونه تجارب دانش‌آموز به‌مرحلهٔ اول تفکر می‌رسد. در این مرحله گرچه سازماندهی هنوز محدود به‌حوزه خاص مورد بحث است ولی در مقایسه با مرحلهٔ قبل کمتر موضعی است در این مرحله اثبات خواص ذوزنقه جدا از اثبات خواص تبدیلات، واین خود جدا از خواص مربع، مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

بعد از اینکه دانش‌آموز برای مدتی در مرحلهٔ اول تفکر تجربه اندوخت شروع به‌درك این حقیقت می‌نماید که بحثهای ارائه شده در زمینه‌هایی کاملا متفاوت مرحلهٔ قبل با هم دارای وجوه مشترکی می‌باشند. این بحثها مثالهائی هستند که خود بخود به‌فهم استدلالهای منطقی منتهی می‌گردند و دراین صورت می‌توان گفت که‌دانش آموز به‌مرحلهٔ دوم تفکر رسیده است. همانطور که یك فرد در مرحلهٔ اول تفکر توانست خاصیتی را دربارهٔ ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین بیان و ثابت کند، به‌روشی در مرحلهٔ دوم تفکر می‌تواند خاصیت-روشهای مختلف استدلال را درك نماید.

بطور خلاصه می‌توان گفت هرمرحلهٔ تفکر نتیجه سازماندهی در درون مرحلهٔ تفکر پائین‌تر از آن می‌باشد.

۸. حال در آموزش ریاضی معلم باید در نظر داشته باشد تا زمانی که دانش‌آموز به‌مرحله‌ای از تفکر نرسیده و تجربهٔ کافی کسب نکرده، نمی‌تواند در مرحلهٔ بالاتر از آن عمل کند. معهذا اگر دانش‌آموز را مجبور به‌انجام چنین کاری کنیم متوسل به‌روشها و تدبیرهایی که طوطی‌وار یادگرفته است می‌گردد. بنابراین برای هرنمونه از مسائل یك حل استاندارد یاد می‌گیرد و قادر نخواهد بود که تشخیص دهد دو جواب استاندارد مشابه هستند یانه، و اگر زمانی مسئله‌ای را درست باز نشناسد گمراه خواهد شد. اگر دانش‌آموز مجبور باشد چیزی را اثبات کند (اگر بتواند) اثبات می‌نماید، به‌جهت اینکه آموزگار از او می‌خواهد نه از آن جهت که خود نیاز ان را احساس می‌کند.

۹. پس از بحث فوق به‌دو مطلب بحث‌انگیز که در ابتدای مقاله متذکر شدیم برمی‌گردیم:

- دانش‌آموزانی که ریاضیات جدید یاد می‌گیرند، نمی‌توانند خوب استدلال نمایند.
- دانش‌آموزانی که در برنامهٔ قدیم آموزش دیده‌اند در یادگیری ریاضی به‌روشی مبهم پیش رفته بدون اینکه بدانند چه کار می‌کنند.

بهتر است به‌طور ایده‌آل و با قاطعیت دربارهٔ گذشته حکم نکنیم و معتقد نباشیم که دانش‌آموزان در برنامهٔ قدیم حداقل می‌دانستند چگونه اقامه برهان‌کنند ولی دانش‌آموزان فعلی بکلی از این لحاظ ناتوانند.

اعتقاد براین است که در گذشته آنچه اقامهٔ برهان نامیده می‌شد در حقیقت برای اغلب دانش‌آموزان یك عملکرد اجباری در مرحلهٔ دوم تفکر بود در حالی که باندازهٔ کافی در مرحلهٔ اول تجربه کسب ننموده بودند.

این حقیقت که بعضی از دانش‌آموزان به‌جهت درك درستی که از اقامهٔ برهان داشتند از ریاضیات لذت می‌بردند نتیجهٔ رسیدن به‌مرحلهٔ بالاتر از تفکر با تمرین بسیار زیاد بود. دانش‌آموزان به‌طور سیستماتیك به‌این مرحله راهنمائی نمی‌شدند. (خوشبختانه استثنائاتی هم وجوددارد. می‌دانیم‌که‌در همان‌زمان‌معلمینی‌بودندکه‌دانسته یا ندانسته روش تدریس خوبی را دنبال می‌کردند.)

در همه جای دنیا نسبت به‌این روش غیرسیستماتیك در تدریس ریاضی اعتراضاتی به‌وقوع پیوست. زمان مناسب برای پذیرش روشهای دیگر ارائهٔ مطالب ریاضی آماده شده بود. متخصصین آموزش ریاضی در موضوعات مختلف ریاضی روش جدید را بکار گرفته و تمرینات نامناسب را که باعث عدم فهم ریاضی می‌شد حذف نمودند. تصور این بود که ارائهٔ مطالب ریاضی به‌روش جدید به‌درك و بینش بیشتری منتهی گردد، و بنابراین انجام دادن گروههای وسیعی از تمرینهای واهی وخسته کننده زاید می‌گشت. چنین کاری البته از یك نظر اشتباه بود؛ زیرا حتی در یادگیری مطالب ریاضی جدید هم دانش‌آموز می‌بایست تعداد زیادی تمرین‌انجام دهدتامراحل مختلف تفکر را طی نماید بدون اینکه مرحله‌ای را از دست بدهد.

با حذف مسائلی که چنین تجربه را به‌دانش‌آموزان می‌داد این فرصت را که به مراحل بالای تفکر برسند از آنها سلب می‌شد. در موقعیت فعلی بنظر می‌رسد که: از یك طرف دانش‌آموزان بیشتری، به‌جهت اینکه به‌آنها اجازهٔ فعالیت در مرحلهٔ تفکر پایه داده می‌شود، از مطالعهٔ ریاضی لذت می‌برند. از طرف دیگر به‌دانش‌آموزان با استعداد که در مرحلهٔ دوم تفکر هستند فرصت کمتری داده می‌شود تا به‌مراحل بالاتر (جز به‌تصادف) برسند.

ما همهٔ اینها را می‌فهمیم، چون عکس‌العملها باعث می‌شوند که به‌سمت افراط یا تفریط تمایل حاصل شود. اما عکس‌العملهای متقابل ما را به‌بازگشت به‌روش قدیمی تهدید می‌نماید. اگر نظر ما این باشد که اصلاحاتی در آموزش ریاضی به‌وجود آوریم نباید کوششهای خود را صرف سازماندهی مجدد خود ریاضی بنمائیم. بهتر است دربارهٔ تدریس ریاضی به‌روش سیستماتیك بیشتر فکر کنیم. دراین جهت تئوری مربوط به‌مراحل تفکر کمك زیادی می‌تواند انجام دهد. تا زمانی که به‌دانش‌آموزان نیاموزیم که اقامهٔ برهان به‌چه معنی است نمی‌توان از آنان انتظار داشت تا در بحثهای استدلالی درك و بصیرت پیدا نمایند.

۱۰. چند نکتهٔ نهائی

(الف) دراینجا روشی که بااستفاده از آن بتوان دانش‌آموزان را کمك نمود تا از یك مرحلهٔ تفکر به مرحلهٔ بالاتر بروند، مورد بحث قرار نگرفته است. این موضوعی است که باید در جای دیگر مورد بحث‌قرارگیرد.

(ب) نظریهٔ مربوط به‌مراحل‌تفکر دارای برداشتهای دیگری نیز هست. نمی‌توان انتظار داشت که در ظرف مدت مشخصی دانش‌آموزان ما به‌مرحلهٔ دوم تفکربرسند. این بدان معنی است که باید پذیرفت بعضی از آنها قادر نیستند به‌مراحل بالاتر از مرحلهٔ پایه برسند ومخصوصاً اینکه باید بپذیریم این نوع دانش‌آموزان در حد خود ریاضیات واقعی را مطالعه می‌نمایند. احساس این است که اگر می‌خواهیم تفاوتهائی را در تعلیم و تربیت قائل شویم باید اساساً توجهمان را به‌اختلاف درسطوح تفکر معطوف نمائیم.

ترجمه: دکتر احمد شاهورانی

ترجمه از مجلهٔ

Educational Studies in Mathematics 8 (1977)

یادداشتها

1- Van Dormolen
2- Freudenthal
3- Local Organization
4- Van Miele

با بکار بردن ارقام ۱ تا ۹ (هر یک درست یکبار) عددی تشکیل دهد که بر ۹ قابل قسمت باشد به طوری که‌هشت رقم سمت چپ آن بر ۸، هفت رقم سمت چپ آن بر ۷، و به همین‌ترتیب ... قابل قسمت باشد. چند نوع از این اعداد وجود دارد؟

دکتر محمدقاسم وحیدی

ریاضیات یونانی (۱)

شالودهٔ ریاضیات و نجوم را مردم مصر و بابل ریختند ولی یونانیان بنایی رفیع برآن ساختند که هنوز هم چشم هربینندهای را خیره میکند. تاریخ این ملت را تا حوالی هزارهٔ دوم قبل از میلاد میتوان پی گرفت. اولین تمدن یونانی که از آن اطلاع داریم و بهتمدن موکنایی[۱] شهرت دارد، بهسالهای حدود ۱۶۰۰ـ۱۲۰۰ قبل از میلاد مربوط میشود و عمدتاً مدیون تمدن مینوسی[۲] جزیرهٔ کرت[۳] است که ممکن است از اختلاط مهاجمین یونانی زبان ومردم بومی جزیره حاصل شده باشد. از قرن چهارم قبل از میلاد بهبعد موج تازهای از تهاجمات آغاز شد. آخائیها[۴] بریونان و کرت استیلا یافتند و تمدنهای مینوسی و موکنایی را نابود کرده تا آسیای صغیر پیش رفتند؛ محاصرهٔ تروا (حدود ۱۱۰۰ ق.م.) بهاین دوره تعلق دارد. دستهٔ بعدی مهاجمین دوریها[۵] (حدود ۱۱۰۰ ق.م.) بودند که در پلوپونز[۶] مستقر شدند و شهر اسپارت[۷] را بنا کردند. در دورهٔ بین سالهای ۱۱۰۰ و ۸۰۰ قبل از میلاد، که از نظر تاریخی تا حدودی در پردهٔ ابهام قرار دارد، شهر ـ کشورهای بزرگ سر برآوردند. وضع جغرافیایی مانع از آن بود که این شهرها بهیگانگی ملی دست یابند از اینرو ساکنین این شهرها مجبور شدند که بهدریا روی آورند، در دورهٔ ۷۵۰ـ۵۵۰، یونانیان نهتنها بهبازرگانان توانایی مبدل شدند؛ بلکه مستعمراتی در گرداگرد دریای مدیترانه و دریای سیاه، در آسیای صغیر، سیسیل، جنوب ایتالیا، جنوب فرانسه، اسپانیا، و شمال افریقا بنا کردند. مراکز عمدهٔ فرهنگ یونانی در قرن ششم قبل از میلاد بنادر ثروتمند آسیای صغیر بودند که فلسفه و علوم و ازجمله ریاضیات در آنها پدید آمدند.

این مجاورت اولین مرکز بسط ریاضیات یونانی بهتمدنهای مهم شرق باستان، در رواج و تثبیت اینعقیده که افکار اولیهٔ ریاضی یونانیان محصول این تمدنهاست، مؤثر بوده است. بهگفتهٔ هرودوت[۸] روابط سیاسی، اقتصادی، و فرهنگی بین یونان از یك طرف و مصر و بابل از طرفدیگر وجود داشته است؛ گنومون[۹] وپولوس[۱۰] و تقسیم روز به۱۲ ساعت از بابل وارد یونان شدهاست.

گنومون نوعی ساعت آفتابی بوده است مرکب از میلهای عمودی که سایهٔ خود را بریك قرص افقی میافکنده. پولوس هم احتمالا نوعی ساعت آفتابی بهشکل یك نیمکره بوده است. از وجود متون میخی، گفتهٔ هرودوت تأیید میشود.

تالس میلتوسی[۱۱] (حدود ۶۲۴ـ۵۴۸ ق. م.) و فیثاغورس ساموسی[۱۲] (حدود ۵۸۰ـ۵۰۰ ق. م.) بهمصر و بابل سفر کردهاند و در آنجا بهاطلاعات دست اولی در نجوم و ریاضیات دست یافتهاند. گفتهاند که آنها درمصر هندسه آموختهاند؛ دربابل در زمانحکومت نبوکدنصر[۱۳]، فرمانروای کلدانی آن سرزمین، تالس احتمالا با جداول و ابزارهای نجومی آشنایی یافته است. گفتهاند که در سال ۵۸۵ ق. م. تالس با پیشبینی یك کسوف، هموطنان خود را دچار شگفتی نموده است. صحت این خبر ازلحاظ تاریخی مورد تردید است، زیرا کسوف خورشید تنها در قسمت کوچکی از سطح زمین قابل رؤیت است وغیرمحتمل است که در بابل جداولی از کسوف خورشید که تالس را قادر بهچنان پیشگوییی بکند، وجود داشته است.

از زندگی و کارهای تالس اطلاع بسیار کمی در دست است. تاریخ تولد و مرگ او از روی این حقیقت که کسوف سال ۵۸۵ ق. م. احتمالا وقتی رخ داده که تالس در سنین پختگی، مثلا در ۴۰ سالگی، بوده است و اینکه گفتهاند وی در موقع مرگ ۷۸ سال داشته است، تخمین زدهمیشود. معهذا تردیدفراوان در وثوق پیشبینی کسوف، چنین تخمینهایی را بیاعتبار میکند واعتماد ما را دربارهٔ کشفیاتی که بهتالس نسبت داده میشود، خدشهدار میسازد. متقدمین در این رأی متفقالقولند که تالس مردی بغایت باهوش و اولین فیلسوف بوده است و جملگی براین عقیدهاند که وی اولین فرد از حکمای هفتگانهبوده است. وی را «شاگرد مصریان و کلدانیان» دانستهاند؛ فرضی که معقول بهنظر میرسد. قضیهای را که امروزه بهقضیهٔ تالس مشهور است ـ یعنی اینکه زاویهٔ محاط در نیمدایره قائمه است ـ تالس احتمالا در سفر بهبابل فراگرفته است. معهذا اخبار فراتر از این رفته وگونهای برهان براین قضیه را هم بهاو نسبت میدهند. بهایندلیل

تالس ــ به‌عنوان آغازکنندهٔ نظم استنتاجی در هندسه ــ اولین ریاضیدان شمرده می‌شود. این خبر ــ یا افسانه ــ با افزودن چهار قضیهٔ دیگر به‌این قضیه وادعای اینکه تالس آنها را ثابت کرده است، شاخ و برگ بیشتری می‌یابد؛ این قضایا عبارتند از:

۱. دایره توسط قطرش به‌دو نیم می‌شود.

۲. زوایای مجاور به‌قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین برابرند.

۳. زوایای متقابل که از تقاطع دو خط به‌وجود می‌آیند، با هم برابرند.

۴. اگر دو مثلث چنان باشند که دو زاویه و یك ضلع یکی بترتیب با دوزاویه و یك ضلع از دیگری برابر باشند، آنگاه ذو مثلث متساوی‌اند.

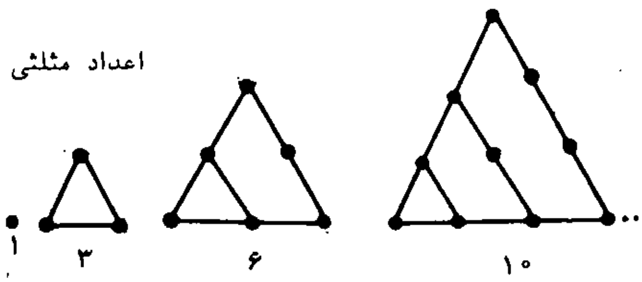
هیچ مدرکی مربوط به‌عهد باستان که برای تصدیق این دستاوردها بتوان به آنها استناد کرد، وجود ندارد و معهذا اخبار در این‌مورد متواتر است. نزدیکترین مدرکی که در این‌باره می‌تواند قابل استفاده باشد، از منبعی است که به‌هزار سال بعد از تالس تعلق دارد. یکی از شاگردان ارسطو[۱۴] به‌نام اودموس رودسی[۱۵] (رونقش به‌حدود ۳۲۰ ق. م.) تاریخی در ریاضیات نوشته است. این اثر مفقود شده ولی قبل از آن کسی، دستکم بخشی از آن را تلخیص کرده است. اصل این خلاصه هم از بین رفته ولی در قرن پنجم بعد از میلاد اطلاعاتی از محتوای کتاب توسط پروکلوس[۱۶] فیلسوف نو افلاطونی (۴۱۰ـ۴۸۰) در صفحات آغازین اثرش به‌نام **شرحی بر مقالهٔ اول اصول اقلیدس** داخل شده است. بعد از تذکرات مقدماتی دربارهٔ منشأ هندسه در مصر، **خلاصهٔ** پروکلوس گزارش می‌دهد که تالس «... ابتدا به‌مصر رفت و از آنجا این علم را به‌یونان وارد کرد. وی خود قضایای زیادی را ابداع کرد، و جانشینان خود را دربارهٔ اصول حاکم بربسیاری دیگر آموزش داد؛ روش مواجههٔ او در بعضی حالات بیشتر کلی و در برخی دیگر بیشتر تجربی بود». برپایهٔ این نقل قول دست سوم است که تالس عنوان اولین ریاضیدان را یافته است. پروکلوس سپس در **خلاصه**، باز مبتنی بر قول اودموس، چهار قضیهٔ فوق را به‌تالس نسبت می‌دهد. اشارات پراکندهٔ دیگری به‌تالس در منابع باستانی وجود دارد ولی اغلب آنها در توصیف کارهای عملی تالس می‌باشند. گفته‌اند که وی اهرام مصر را با مشاهدهٔ طول سایهٔ آنها در لحظه‌ای که یك چوب عمودی سایه‌ای برابر با خود داشته، اندازه گرفته است.

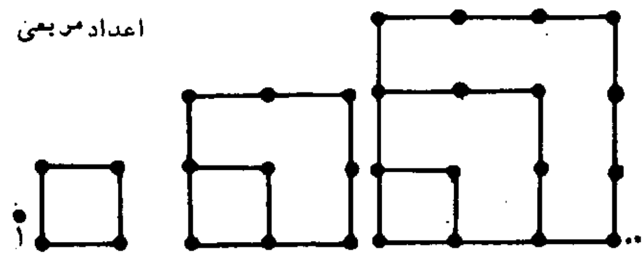
مکتب یونیایی[۱۷] که از تالس و آناکسیمنس[۱۸] (رونقش به‌حدود ۵۴۶ ق. م.) و آناکساگوراس[۱۹] (حدود ۵۰۰ ــ حدود ۴۲۸ ق. م.) از بنیانگذاران آن بودند، عمر کوتاهی داشت و در اواخر قرن ششم قبل از میلاد آوارگانی که از مقابل قوای درحال پیشروی ایرانی می‌گریختند، محلهای سکونتی در غرب بنا کردند و فرهنگ یونانی را باخود بدانجا بردند. ایتالیا و سیسیل به مراکز عمدهٔ دانش بدل شدند و بسط علم و بویژه ریاضیات در خاك ایتالیا بسیار سریع بود. در اوایل‌همین قرن مکتبی در کروتون[۲۰] در جنوب ایتالیا توسط فیثاغورس (۵۸۰ـ۴۹۷ ق. م.) دایر شده بود. این مکتب عمدتاً نوعی انجمن اخوت دینی بود، ولی اعضای آن به کسب فضایل اشتغال داشتند. فیثاغورس در ساموس، یکی از جزایر دودکانز[۲۱] که چندان فاصله‌ای با میلتوس نداشت، به‌دنیا آمد. گرچه برخی این تصور را به‌وجود آورده‌اند که فیثاغورس پیش تالس درس خوانده است، به‌علت نیم قرن فاصله بین ایندو چنین چیزی نامحتمل به‌نظر می‌رسد. فیثاغورس هم چون تالس به‌مصر و بابل و گویا به‌هند سفر کرده است. زندگینامه‌های متعددی برای فیثاغورس نوشته‌شده‌که یکی‌ازآنها‌اثرارسطوبوده ولی ازهیچکدام اثری باقی‌نمانده‌است. پیروان فیثاغورس را فیثاغورسیان[۲۲] یا فیثاغوریان می‌نامند. از فیثاغوریان نوشته‌ای برجای نمانده است، ولی بخوبی آشکار است که ریاضیات در مکتب آنان با جدیت تمام تعلیم می‌شده است. فیثاغوریان تحت‌تأثیر برخی روابط عددی که در طبیعت ظهور می‌یابند، قرار گرفتند. آنها می‌دانستند که تارهای در حال ارتعاش که طولهای آنها متناسب با اعداد ۴، ۳، ۲ باشد، نتی را همراه با دومینانت[۲۳] و اوکتاو[۲۴] آن پدید می‌آورند. این مشاهده به‌این عقیده در

ریاضیات یونانی

بین آنان منجر شده است که حقیقت نهایی را باید در اعداد جست. به‌گفتهٔ ارسطو «فیثاغوریان ظاهراً اعداد را اصل، و به‌عبارتی، ماده‌ای که موجد هستی‌هاست، تلقی می‌کرده‌اند.» جملهٔ قصار «همه چیز از اعداد است» به فیثاغورس نسبت داده می‌شود. در نتیجه علم اعداد حاکم بر ذهن چالاك آنان بوده است؛ روشهای محاسبه **(لوژیستیك)**[۲۵] که اقوام پیشین پدید آورده بودند، کمتر مورد توجه آنان بود. آنها اولین کسانی بوده‌اند که به ایدهٔ مجرد عدد اهمیت بخشیده‌اند. اعداد را آنان به صورت زوج و فرد، اول و مرکب، تام، متحابه، وغیره دسته‌بندی کرده‌اند، و در مطالعهٔ اینها قضایایی را کشف کرده‌اند که تا درجهٔ زیادی پیچیدگی داشته‌اند و اغلب این قضایا در **اصول**[۲۶] اقلیدس[۲۷] آورده شده‌اند.

حساب فیثاغوریان ارتباط نزدیکی با هندسه‌داشت. این حساب مبتنی بردسته‌ای از سنگریزه‌ها بود که در الگوهای مختلف مرتب می‌شدند. آنها این اعداد را اعداد **مصور**[۲۸] نامیدند. اعداد **مثلثی**[۲۹]، **مربعی**[۳۰]، وغیره از این جمله بودند. مجموع اولین n عدد طبیعی، یعنی $\frac{1}{2}n(n+1)$، اعداد مثلثی را تشکیل می‌دهند؛ مجموع اولین n عدد فرد $1 + 3 + 5 + \dots + (n - 1)$، یك عدد مربعی را تشکیل می‌دهد وغیره...





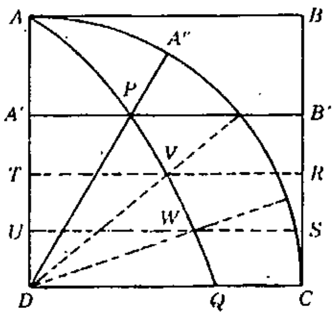
نقطه از نظر آنها دارای اندازه بود؛ نقاط خط را تشکیل می‌دادند، خطها سطح را تشکیل می‌دادند وغیره. این مطلب با کشف فیثاغوری دیگری، یعنی اینکه نسبت قطر مربع به‌ضلع آن را نمی‌توان به‌صورت نسبت دو عدد صحیح نشان داد، مغایرت جدی داشت، بنابراین دیگر نمی‌شد ادعا کرد که همهٔ کمیتها قابل اندازه‌گیری با کمیت مشترکی هستند (یا متوافقند). نامتوافق بودن برخی خطوط با خطوط دیگر نه‌تنها به‌عنوان مانعی جدی در برابر فیثاغوریان ظهور کرد، بلکه این مطلب به صورت سدی در مقابل هندسهٔ یونان درآمد، و تلاش برای یافتن راه‌حلی که رابطهٔ بین حساب و هندسه را به‌طور کامل از هم جدا نکند به‌مطرح شدن نوع جدیدی از اعداد، یعنی اعداد گنگ، منجر شد.

فیثاغورسیان، هندسه را هم مانند حساب به‌خاطر خود این موضوع مورد مطالعه قرار دادند، وقضایای‌زیادی به‌مکتب آنان نسبت داده شده است. علاوه برقضیهٔ‌معروف راجع به‌مثلث قائم‌الزاویه، فیثاغوریان با خواص موازیها آشنایی داشتند و از این خواص برای اثبات اینکه مجموع زوایای‌هرمثلث‌دوقائمه‌است، استفاده‌کردند؛ وازقضیهٔ‌اخیر، قضیه‌ای را که مربوط به‌زوایای یك چند ضلعی می‌شود، استنتاج کردند. اغلب قضایای راجع به‌روابط بین‌مساحت اشکال مستقیم‌الخط که در **اصول** اقلیدس دیده می‌شوند، برفیثاغوریان معلوم بوده است. آنها همچنین نظریهٔ تناسب را پدید آوردند و با مندرجات مقالهٔ ششم **اصول** اقلیدس آشنا بوده‌اند. به‌دلیلی، هندسه دوایر کمتر توجه آنها را به‌خود جلب کرده است. سهم عمدهٔ آنها درتوسعهٔ ریاضیات خصلت استنتاجی است که در ریاضیات وارد کرده‌اند.

نفوذ مکتب فیثاغورس دامنهٔ بیشتری یافت و بعد از مرگ مؤسس آن در ۴۹۷ ق.م. رونق آن در تارنتوم[۳۱] تا حدود پایان قرن چهارم دوام داشت. فیثاغوریان مصری، و برجسته‌تر از همهٔ آنان فیلولائوس[۳۲] و آرخوتاس[۳۳] سنت مؤسس خود را ادامه دادند و کار آنان تأثیر عمیقی در بسط ریاضیات برای مدت دو قرن یا بیشتر داشت.

قرن پنجم پیش از میلاد در تاریخ تمدن غرب دوره‌ای تعیین کننده بود، زیرا این قرن با شکست قوای مهاجم ایرانی آغاز و با تسلیم آتن به‌اسپارت خاتمه می‌یابد. در فاصلهٔ این دو واقعه، عصر پرعظمت پریکلس[۲۴] قرار دارد. پریکلس اتحادیه‌ای از شهرها به رهبری آتن به‌وجودآورد و اوج تمدن‌یونان به‌دورهٔ اوتعلق دارد. رونق آتن و جو روشنفکری آن در طی این قرن، فضلایی از همهٔ قسمتهای یونان را به‌خود جلب کرد و مشتاقان رشته‌های جدید و قدیم علم از کیهانشناسی گرفته تا اخلاقیات دراین شهر گرد آمدند. از جملهٔ‌کسانی که به‌این شهر آمدند، یکی آناکساگوراس بود که از یونیا بدانجا آمد. آناکساگوراس بعداً در آتن، به‌دلیل بی‌تقوایی ناشی از اظهار این نظر که خورشید جزء خدایان نیست و بلکه سنگ داغی است ببزرگی تمام پلوپونز واینکه ماه کره‌ای است که نور خود را از خورشید می‌گیرد، زندانی شد. بعدها وی به‌کمك پریکلس از بند رها شد. به‌گفتهٔ پلوتارخ[۲۵]، وقتی آناکساگوراس در زندان بوده خود را مشغول تربیع دایره می‌کرده است. در اینجا برای‌نخستین بار اشاره به‌اولین مسئله از «سه مسئلهٔ مشهور (یا کلاسیك)» را، که‌به‌مدت ۲۰۰۰ سال ریاضیدانان‌را مشغول و مجذوب خود کرده است، می‌بینیم. منظور از تربیع‌دایره یافتن مربع، یا هرشکل مستقیم‌الخط دیگری، است که مساحت آن دقیقاً برابر با مساحت دایره‌ای مفروض‌باشد. لازم به‌یادآوری است که در ترسیم این مربع صرفاً می‌توان از خط‌کش (غیر مدرج) و پرگار استفاده کرد. دومین مسئلهٔ کلاسیك دیگر، تضعیف مکعب، هم ریشه‌ای در افسانه‌ها دارد. پریکلس در اثر طاعونی درگذشت که تقریباً ربع جمعیت آتن را از صحنهٔ زمین محو کرد. گفته‌اند که گویا هیئتی از مردم آتن به‌مذبح آپولون[۲۶] در دلوس[۲۷] رفته‌اند تا راهی برای رفع این بلیه جویا شوند. در پاسخ به‌آنان گفته شده است که باید مذبح مکعب شکل آپولون را (از حیث حجم) دو برابر کنند. آتنی‌ها هر ضلع مکعب را دو برابر کرده‌اند، اما این کار در رفع طاعون مؤثر نبوده است؛ زیرا بدین طریق حجم هشت برابر شده است، درحالی‌که‌درمسئلهٔ تضعیف‌مکعب بایدمکعب دیگری یافت که حجم آن دوبرابر حجم مکعب‌مفروض‌باشد. سومین مسئلهٔ‌کلاسیك، تثلیث، یا سه‌سازی، زاویه است. نیم‌سازی زوایا وتثلیث یك‌پاره‌خط مفروض بآسانی‌میسر است‌ولذا بعید نیست که مسئلهٔ اخیر در تقلید از آنها مطرح شده باشد. متجاوز از ۲۲۰۰ سال گذشت تا ثابت شود که این مسائل به‌کمك خط‌کش و پرگار قابل حل نیستند، ولی بخش قابل توجهی از ریاضیات یونانی وافکار ریاضی سالهای بعد در کوششهایی که برای حل آنها به‌عمل‌آمده، وارد ذهنها شده است.

از جملهٔ کسانی که کوششهایشان برای رسیدن به راه‌حل این مسائل منجر به‌دستاوردهایی در ریاضیات شده است، سوفسطائیان[۲۸]، یا «خردمندان» بودند. برخلاف پیروان فیثاغورس‌که از دریافت هرگونه وجهی در ازای تعلیم‌دانسته‌های‌خود به‌دیگران منع‌شده‌بودند، سوفسطائیان آشکارا از این طریق زندگانی خود را می‌گذراندند. البته ریاضیات اشتغال اصلی سوفسطائیان نبوده و علاقهٔ عمدهٔ آنان به‌تعلیم فن جدل بوده است. هیپیاس الیسی[۲۹] (متولد ۴۶۰ ق. م.) که از سوفسطائیان بسیار مشهور است، وقتی به‌عدم کفایت خط‌کش و پرگار در حل مسئلهٔ تثلیث پی برد، به‌روشهای دیگر روی آورد. در این راه، هیپیاس منحنیی را که **مربع‌ساز**[۴۰] نامیده می‌شود، ابداع کرد. این وجه تسمیه از آنروست که در تربیع دایره هم می‌توان از این منحنی استفاده کرد. این اولین منحنی سوای‌دایره و خط است که به‌عالم ریاضیات معرفی شده است و آن را می‌توان چنین رسم کرد: در مربع ABCD (شکل زیر)

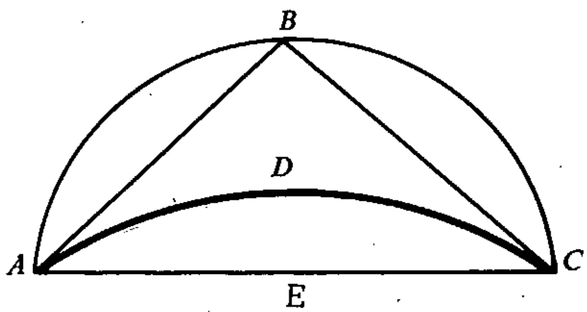


ریاضیات یونانی

فرض کنید که ضلع AB به‌طور یکنواخت از وضع فعلی خود به‌طرف پائین شروع به‌حرکت می‌کند تا با ضلع DC منطبق شود و فرض کنید که این حرکت درست در زمانی انجام شود که ضلع DA در جهت عقربه‌های ساعت از وضعیت فعلی خود به‌چرخش در می‌آید تا بر DC منطبق شود. اگر وضعیتهای دو خط متحرک در لحظهٔ مفروض بترتیب با AB و DA داده شود و اگر P محل تلاقی AB و DA باشد، مکان هندسی P مربع‌ساز هیپیاس است. در شکل این منحنی با APQ نشان داده شده است. با در دست داشتن این منحنی، می‌توان هرزاویه را به‌سه قسمت (و در واقع به‌هرچند قسمت) تقسیم کرد. مثلاً اگر PDC زاویه‌ای باشدکه باید ثلث‌شود، ابتدا خطوط B'C و A'D را توسط نقاط R، S، T، و U به‌سه قسمت تقسیم می‌کنیم اگر خط TR و US مربع‌ساز را بترتیب در V و W قطع کنند، خطوط VD و WD، بنا به‌خاصیت مربع‌ساز زاویهٔ PDC را به‌سه‌قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.

معلوم نیست‌که هیپیاس از قابل‌استفاده بودن مربع‌ساز در تربیع دایره آگاه بوده است یا خیر. حدس زده می‌شود که وی از این روش اطلاع داشته ولی قادر به توجیه آن نبوده است. بعداً دینوستراتوس از این منحنی در حل مسئلهٔ اخیر استفاده کرده است. بقراط خیوسی[41] (رونقش در ۴۳۰ ق. م.) ریاضیدان نابغه‌ای که درباب مثلثهای متشابه و نظریه تناسب مطالعاتی کرده بود، نشان داد که این مسئله قابل تحویل به‌یافتن دو واسطهٔ هندسی بین دو پاره خط، که یکی دو برابر دیگری است، می‌باشد. زیرا اگر این دو خط را با a و $2a$ نشان دهیم و x و y دو واسطهٔ هندسی مطلوب باشند، داریم $a:x = x:y = y:2a$، یا $ay = x^2$ و $y^2 = 2ax$ و از آن $2x^3 = y^3$. کوششهای بعدی برای حل این مسئله جملگی دریافتن دو واسطهٔ هندسی بین دو خط متمرکز شد.

معهذا نام بقراط (این بقراط غیر از بقراط‌حکیم مشهور است که در پزشکی صاحب آوازه است) بیشتر به خاطر تربیع هلال زبانزد است. یك هلال عبارت از منحنی محصور بین دو قوس از دو دایره با شعاعهای نابرابر است: بقراط برای تربیع هلال از این قضیه که «نسبت مساحتهای قطعه‌های متشابه دو دایره همان نسبت‌مربعهای قاعده‌های آنهاست»، و از خلاصهٔ اودموسی چنین برمی‌آید که آن را خود ثابت کرده است، سود می‌جوید. بنابرهمین متبع، بقراط این قضیه را با نشان دادن اینکه نسبت مساحت دو دایره به‌هم همان نسبت قطرهای آنهاست، ثابت کرده است. بقراط برای حل مسئلهٔ اصلی یعنی تربیع هلال، با نیمدایره‌ای که مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین را محاط می‌کند، آغاز کرده و برروی قاعدهٔ (وتر) مثلث قطعه‌ای متشابه با قطعه‌های دایره‌ای روی اضلاع مثلث ترسیم می‌کند (شکل زیر). چون نسبت این قطعه‌ها به‌هم‌مثل نسبت‌مربعات قاعده‌های آنهاست، و از قضیهٔ فیثاغورس دربارهٔ مثلث قائم‌الزاویه، نتیجه می‌شود که مجموع مساحتهای دو قطعهٔ کوچکتر دایره برابر با مساحت قطعهٔ بزرگتر آن است، بنابراین تفاضل بین مساحت نیمدایرهٔ روی AC و مساحت قطعهٔ ADCE برابر است با مساحت مثلث ABC. لذا مساحت هلال ABCD دقیقاً برابر با مساحت مثلث ABC است و چون مساحت مثلث ABC برابر با مساحت مربعی به‌ضلع نصف AC است، تربیع هلال حاصل می‌شود.



آنتیفون[42] و بروسون[43] که‌هردو سوفسطایی‌بودند، مسئلهٔ تربیع دایره را مورد توجه قرار دادند. با شروع از مربع، آنتیفون یك چند ضلعی منتظم را در دایره محاط کرد. وی با نصف کردن مکرر قوسها، متوالیاً چند ضلعهایی با تعداد اضلاع بیشتر و بیشتری به‌دست‌آورد به‌طوری که مساحت چند ضلعی تدریجاً قابل تقریب با مساحت دایره بود. آنتیفون اعتقاد داشت که با افزایش

مداوم عدهٔ اضلاع، می‌تواند سرانجام مساحت بین چند ضلعی و دایره را «افناء» کند و از این راه به‌تربیع‌دایره دست یابد. معاصر وی، بروسون، مسئله را با در نظر گرفتن دوایرمحاطی ومحیطی‌گامی‌فراتربرد، اماهیچ‌مدرکی در تأیید این نظر که به‌اعتقاد وی مساحت واقعی، میانگین حسابی بین این دو بوده وجود ندارد. این روش به‌**«روش افناء»**[۴۴] موسوم شد که ارشمیدس[۴۵] دو قرن بعد از آن به‌طور مؤثری استفاده به‌عمل آورد.

معهذا نتایج آنتیفون و بروسون مورد بی‌مهری یونانیان قرار گرفت. یونانیان براین عقیده بودند که یك چند ضلعی هرگز نمی‌تواند تا مرحلهٔ انطباق با دایره پیش برود، زیرا یك خط مستقیم را نمی‌توان دقیقاً با یك منحنی تطبیق داد. پذیرش این مطلب به‌معنی آن بود که کمیتها بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیرند، واین نظری بود که برای یونانیان اصلا قابل قبول نبود. چنین‌استدلالهایی به‌کمك پارادوکسهای هوشمندانه‌ای که توسط زنون الئایی[۴۶] ابداع شده بود، به‌اهمیت رسیده بودند. زنون به‌کمك این پارادوکسها نشان می‌داد که حرکت غیرممکن است.

پارادوکس اول این بود. تیر متحرك قبل از اینکه به‌انتهای مسیر برسد، باید نصف آن را طی نماید؛ اما قبل از اینکه به‌نقطه میانی برسد، لازم است که ربع‌مسیر را طی نماید، و همینطور الی آخر. بنابراین حرکت‌هرگز امکان‌پذیر نیست.

پارادوکس دوم به‌پارادوکس‌آشیل[۴۷] و لاك‌پشت معروف است. آشیل‌بادپا که ده‌بار تندتر از لاك‌پشت می‌دود ولی ۱۰۰ متر عقب‌تر از لاك‌پشت است هرگز به‌آن نمی‌رسد. زیرا وقتی آشیل به‌نقطه‌ای می‌رسد که لاك‌پشت از آن شروع به‌حرکت کرده است، هنوز ۱۰ متر دیگر عقب‌تر است، و وقتی این ۱۰ متر را می‌دود، هنوز ۱ متر عقب‌تر است، و همینطور الی آخر. بنابراین وی همیشه عقب‌تر از لاك‌پشت است،؛ گرچه بنابرتجربه وی می‌تواند سریعاً به‌لاك‌پشت برسد.

اینها و پارادوکسهای دیگر، ریاضیدانان آن عصر را دچار سرگشتگی کرد. یونانیان برای گریز از آنها همهٔ اندیشه‌های مربوط به‌بی‌نهایت کوچکها و بی‌نهایت بزرگها را از هندسهٔ خود کنار گذاشتند. زنون ریاضیدان نبود ولی انتقادات او در افزایش دقت در روشهای هندسی یونانی مؤثر بود، و اعلام پارادوکسهای او اثر زیادی در مسیری که هندسهٔ یونانی بعد از آن پیمود، به‌جا گذاشت.

تفوق تجاری آتن بیش از نصف قرن دوام آورد. به محض اینکه خطر حمله از جانب ایرانیان برطرف شد، یگانگی جای خود را به اختلاف و سوءظن داد. رقابت بین آتن واسپارت جنگهای پلوپونزی را از پی اورد که بجز با وقفه‌های کوتاه، تاسال ۴۰۴ ق. م. ادامه یافت و دراین سال آتن سر به‌تسلیم نهاد. اما گرچه‌نفوذ آتن رو به‌کاهش گذاشت، به‌قدرت معنوی آن لطمه‌ای وارد نشد. این، عصر سقراط[۴۸] (۴۶۹–۳۹۹ ق. م.) و شاگرد نامدارترش، افلاطون[۴۹] (۴۲۸–۳۴۸ ق. م.) بود. علاقهٔ اصلی سقراط به‌شیوهٔ دولت‌داری بود، و اینکه چگونه می‌توان به‌بهترین صورت به‌دولت خدمت کرد. وی وقعی به‌ریاضیات نمی‌گذاشت. در مقابل، افلاطون کمتر به‌مسائلی که ماهیت اخلاقی یا سیاسی داشتند، علاقه نشان می‌داد. وی سفرهای فراوانی کرد و از مصر و جنوب ایتالیا دیدار نمود و با اعضای مکتب فیثاغورس ملاقاتهایی انجام داد. همینها بودند که علاقه به ریاضیات را در وی برانگیختند. در نتیجه فلسفهٔ او به‌فلسفه‌ای ریاضی بدل شد و بدینگونه تأثیر فوق‌العاده برمعاصرین و تالیانش اعمال کرد.

افلاطون دربازگشت به‌آتن، مدرسه‌ای را درباغی به‌نام **آکادمی**[۵۰] در مجاورت شهر بنا کرد. برای آنکه از قدر و اعتبار آنچه به‌زعم وی ریاضیات تلقی می‌شد، غافل نباشند، به‌دستور وی برسر در مدرسه کتیبه‌ای آویخته شد تا از ورود کسانی که هندسه نمی‌دانستند، جلوگیری شود.

مانند فیثاغورس، افلاطون هم معتقد بود که معمای جهان در عدد و در شکل است. به‌نظر وی پروردگار همواره قواعد هندسی را به‌کار می‌برد، و از اینرو مطالعهٔ هندسه مقدمه‌ای ضروری برای مطالعهٔ فلسفه است. بنابراین افلاطون به‌طور آشکاری به‌رعایت دقت پا می‌

ریاضیات یونانی

فشارد. با اعتنا به‌مشکلاتی که تعریف نقطه، خط، وغیره برای فیثاغورس پیش آورده بود، افلاطون برای واضح شدن مفاهیم اساسی اقدام کرد؛ نقاط ذیگر «خشت»‌های سازندۀ خط و صفحه نبودند. ازاین پس‌نقطه صرفاانتهای یك خط بود، خط مرز یك صفحه بود، والی آخر. تعدادی از تعاریف افلاطون واحتمالا یك یادوتا از اصلهای وی، بعداً توسط اقلیدس در **اصول** آورده شده‌اند.

گرچه افلاطون به‌طور عمده به‌هندسه می‌پرداخت، وی به‌حساب، یا علم اعداد، ارج زیادی قایل بود و در نوشته‌های او، و بخصوص در **جمهوریت**[۱۵]، وی قویاً از این عقیده پشتیبانی می‌کند که این موضوع دارای تأثیری عظیم و روح‌افزاست. قدیمی‌ترین روش منظم برای تعیین رشته‌ای از طولها به‌طوری که یك مثلث قائم‌الزاویه را تشکیل دهند، به‌وی نسبت داده می‌شود. وی نشان داد که خطوطی که طولهای آنها با اعداد n^2-1، $2n$، n^2+1 مشخص می‌شوند، چنین مثلثی را تشکیل می‌دهند. افلاطون همچنین روش تحلیلی اثبات را در مقابل روش ترکیبی معمول در بین یونانیان، به‌وجود آورد. دراین روش فرض می‌شود که نتیجه درست است، واستدلال از این نقطه شروع شده و به‌نتیجه‌ای که قبلا ثابت شده، ختم می‌شود. بنابراین اعتبار این روش بستگی تام به‌قابل برگشت بودن مراحل انجام شده دارد.

تحت تأثیر پرانگیزه آکادمی، ریاضیات به‌رشد خود ادامه داد. تأثیر آن در بسط ریاضیات فوق‌العاده زیاد بود و میراث بزرگ آن توجه روزافزون به‌دقت ریاضی بود تئایتتوس[۵۲] آتنی (حدود ۴۸۰ ق. م.)، یکی از شاگردان سقراط و یکی از اعضای مهم آکادمی، در بسط نظریۀ اعداد **اصمی**[۵۳] سهمی ایفا کرد. یك عدد اصمی عددی است به‌صورت مجموع یك عدد گویا با ریشۀ گنگ یك یا چند عدد گویا مانند $\sqrt{3}$، $1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{7}$. وی همچنین دربارۀ پنج جسم صلب منتظم مطالبی نوشت. **قطعاً معلوم** نیست که ایا وی دراثبات اینکه جمعاً پنج جسم صلب منتظم وجود دارد، موفق بوده است یاخیر؛ اما عقیده‌براین است که وی چنین کرده، در غیر این صورت برای وی چیزی قابل کشف نمی‌ماند زیرا تقریباً مطمئنیم که این پنج جسم را زودتر از عصر تئایتتوس می‌شناخته‌انـد. قسمت عمدۀ محتویات مقالۀ دهم **اصول** اقلیدس هـم به تئایتتوس نسبت داده می‌شود.

یکی از برجسته‌ترین اعضای آکادمی، ائودوکسوس کنیدوسی[۵۴] (۴۰۸ـ۳۵۵ ق. م.) بود. وی نظریۀ عام تناسب را پدید آورد و آن را تعمیم داد تا شامل اعداد گویا هم بشوند. قسمت اعظم کار او درباب این موضوع در مقالۀ پنجم **اصول** اقلیدس نقل شده‌اند. ابداع روش افناء در توسعه ریاضیات اهمیت بیشتری دارد و سزاوار است که او را با این دستاورد در اختراع حساب بی‌نهایت کوچکها سهیم بدانیم. وی به‌کمك این روش نشان دادکه حجم یك مخروط وهرم بترتیب برابر با یك‌سوم حجم استوانه و منشوری است باهمان ارتفاعها وهمان‌قاعده‌ها. این روش، که بعداً سهم عمده‌ای در ریاضیات یونانـی داشت، کاملا دقیق است و برمبنای اصلی است که در ابتـدای مقالـۀ دهـم **اصول** اقلیـدس داده شده است. ائودوکسوس با احتراز از مشکلات مربوط به‌بی‌نهایت کوچکها توانست استدلالهای خود را به‌روش قابل قبولی برای یونانیان، عرضه نماید، و همین امر به‌رواج این روش‌کمك‌فراوانی‌کرد. این‌روش‌درقرون‌اخیر، تنها زمانی کنار گذاشته شد که ریاضیدانان به‌دنبال روشهای کم زحمت‌تری بودند.

بجاست که از ارسطو (۳۸۴ـ۳۲۲ ق. م.) هم که از شاگردان آکادمی افلاطون و از فضلای جامع‌الاطراف بود، ذکری به‌میان‌آوریم. گرچه ارسطو دراصل ریاضیدان نبود ولی برای ریاضیات حرمت زیادی قایل بود. تمایز دقیق بین اصول متعارفی، و تعاریف را به‌او مدیونیم. وی همچنین نظرات روشنی دربارۀ بی‌نهایت وپیوستگی‌داشت ارسطو ظاهراً با کارهای ائودوکسوس و دیگـر هندسه‌دانان زمان خود آشنا بوده‌است. درنوشته‌های او به‌تعدادی قضایای مهم هندسی برمی‌خوریم. او درمکانیك هم اصولی ارائه داد که، هرچند خطاآمیز بودند، تا قرن شانزدهم بلامعارض باقی ماندند. رسالۀ او در منطق نام وی را جاودانه ساخته است.

یادداشتها

1- Mycenaen
۲- Minoan
۳- Crete
۴- Achaeans
۵- Dorian
۶- Peloponnes
۷- Sparta
۸- Herodotus
۹- Gnomon
۱۰. Polos
۱۱- Thales of Miletus
۱۲- Pythagoras of samos
۱۳- Nebuchadnezzar
۱۴- Aristotle
۱۵- Eudemus of Rhodes
۱۶- Proclus
۱۷- Ionian school
۱۸- Anaximenes
۱۹- Anaxagoras
۲۰- Croton
۲۱- Dodecanese
۲۲- Pythogoraeans
۲۳. dominant
۲۴- octave
۲۵- Logistica
۲۶- Elements
۲۷- Euclid
۲۸- figurate
۲۹- triangular
۳۰- Square
۳۱- Tarentum
۳۲- Pilolaus
۳۳- Archytas
۳۴- Pericles
۳۵- Plutarch
۳۶- Apolo
۳۷- Delos
۳۸- Sophists
۳۹- Hippias of Elis
۴۰- quadratrix
۴۱- Hippocrates of chios
۴۲- Antiphon
۴۳- Bryson
۴۴- method of exhaustion
۴۵- Archmiedes
۴۶- Zeno of Elea
۴۷- Achilles
۴۸- Socrates
۴۹- Plato
۵۰- Academia
۵۱-Republic
۵۲- Thaeatetus
۵۳- surd
۵۴- Eudoxus of Cnidus

منابع

1- Van der Waerden, B. L., *Sience Awakening* (New York, 1963)
2- Boyer, C. B., *A History of Mathematics* (New York, 1968)
3- Scott, J. F. *A History of Mathematics* (London, 1958)

چند دستور برای Π

(آ)

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

(دستور ویت (*Vieté*)، ریاضیدان فرانسوی، (۱۵۴۰–۱۶۰۳))

(ب)

$$\frac{2}{\pi}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 7}{6\cdot 6}\cdots\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n\cdot 2n}\cdots$$

(دستور والیس (*Wallis*)، ریاضیدان انگلیسی، ۱۶۱۶–۱۷۰۳)

(پ)

$$\frac{4}{\pi}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cdots}}}}$$

(دستور براونکر (*Brouncker*)، ریاضیدان انگلیسی، (۱۶۲۰–۱۶۸۴))

(ت)

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

(دستور اویلر (*Euler*)، ریاضیدان سویسی، (۱۷۰۷–۱۷۸۳))

مقالهٔ حاضر قسمتی از سخنرانی تحقیقی آقای دکتر امیدعلی کرم‌زاده است که در پانزدهمین کنفرانس ریاضی کشور ایراد شده است. متن‌سخنرانی بنا به‌درخواست دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی وزارت آموزش و پرورش (گروه ریاضی) به‌منظور چاپ در مجلهٔ رشد آموزش ریاضی به‌دفتر مجله واصل شده است.

مقالهٔ اخیر حاوی مطالبی ارزنده در زمینهٔ مسائل انگیزه بخش ریاضی در سطوح مختلف است، و بعلاوه یك ارتباط نسبتاً منطقی بین این مسائل را نشان می‌دهد. نگارنده در این مقاله ــ بنابر بینش شخصی ــ مسائل‌ریاضی را به‌شش دسته تقسیم می‌کند. مسائل دستهٔ اول و دوم بیشتر جنبهٔ هندسی دارند و از این حیث قابل استفاده برای کلیهٔ سطوح می‌باشد؛ ولی در مسائل از دستهٔ سوم ببعد بیشتر مفاهیم ریاضیات عالی از قبیل حلقهٔ توابع، ارتباط، شمارش‌پذیری، وغیره بکار می‌رود. علیرغم اینکه این مسائل بسیار جالب و انگیزه بخش‌اند و در ارتباط با مسائل دستهٔ اول و دوم هستند و حذف آنها از جذابیت و تمامیت مقاله می‌کاهد، معهذا با توجه به‌بالا بودن سطح مسائل فوق‌الذکر و اهداف مجله و در نظر گرفتن اولویتهای مسائل آموزش ریاضی، هیئت تحریریه ترجیح می‌دهد که قسمت اول این مقاله را تا پایان مسائل دستهٔ دوم در این شماره بچاپ رساند. بدیهی است که اگر انگیزهٔ کافی برای چاپ قسمت دوم ایجاد شود، در شماره‌های آتیه بدان اقدام خواهدشد.

هیئت تحریریه

متن سخنرانی ایراد شده در پانزدهمین کنفرانس ریاضی کشور (شیراز)

کدام مسائل انگیزه بخش‌اند؟

دکتر امیدعلی کرم‌زاده

مسائل ریاضی بی‌شک قبل از خود ریاضی وجود داشته‌اند و کوشش بشر برای حل این مسائل بوده که چه به صورت موفقیت‌آمیز و یا ناموفق اکثراً بشر را به نتایجی وسیعتر یا مسائلی کلی‌تر از مسائل اولیه هدایت کرده است؛ و این کوشش تا به امروز ادامه داشته و باعث بوجود آمدن ریاضیات به‌شکلی که می‌بینیم شده است. به عبارت دیگر اگر مانند هالموس[1] [۹]، [۲۲] و دیگران (مرحوم هشترودی بیشتر اوقات در سر کلاس درس می‌گفت مسائل، رگهایی هستند که به بدن ریاضیات خون می‌رسانند) بپذیریم که مسائل قلب ریاضیات هستند، این قلب از هزاران سال قبل مشغول زدن‌بوده و از این بعد هم خواهد زد و هرگز نخواهد ایستاد و به پرفسور بارنارد هم نیازی ندارد.

مسائل ریاضی غیر از اهمیتی که در خود ریاضی دارند دو کار مهم دیگر نیز انجام می‌دهند. اول اینکه عده‌ای از انسانها را به تلاش و کوشش شبانه‌روزی وادار می‌کنند، دوم اینکه به همین عده از انسانها که موفقیتهایی نیز بدست می‌آورند هرگز اجازهٔ مغرور شدن نمی‌دهند. مثلاً وقتی می‌بینیم که مسئلهٔ سیلوستر[۲] اینکه اگر n نقطه در صفحه داشته باشیم که بر روی یک خط راست نباشند، آنگاه حد اقل یک خط راست وجود دارد که فقط از دو نقطه از این نقاط می‌گذرد برای مدت چهل سال (۱۹۳۳–۱۸۹۳) بدون جواب مانده و در آن سالها ریاضیدانهایی نظیر هیلبرت[۳]، هاردی[۴]، کلاین[۵]، مینکووسکی[۶]، وبلن[۷]، آرتین[۸]. ندر[۹]، پوریسون[۱۰]، و دهها تن دیگر فعالانه کار می‌کردند ولی هیچکدام جوابی به این مسئله ندادند، درس بزرگی به ما می‌دهد. بخصوص وقتی که بفهمیم حل این مسئله با ریاضیات مقدماتی آن زمان هم امکان‌پذیر بوده، مثلاً اگر در بین مثلثهایی که با این n نقطه می‌توان ساخت یکی را در نظر بگیریم که دارای کمترین ارتفاع باشد آنگاه قاعدهٔ مربوط به این ارتفاع فقط از همان دو رأس مثلث می‌گذرد و حل مسئله تمام می‌شود. گرچه عده‌ای معتقد هستند که این مسئله از چشم ریاضیدانها بدور مانده و بعد از مدتی دوباره مطرح شده است، ولی من باور ندارم که هیچ ریاضیدان برجسته‌ای در آن سالها به این مسئله برخورد نکرده باشد. از این نوع مسائل در تاریخ ریاضی زیاد بوده است. البته باید توجه داشت که هر مسئله‌ای برای هر کس جالب و برانگیزنده نیست. برای یکی مسئله‌ای جالب است هرگاه بیانی ساده و حلی ساده داشته باشد. برای دیگری مسئله‌ای جالب است اگر بیانی مشکل و حلی مشکل داشته باشد، و برای دیگری مسئله‌ای جالب است هرگاه کس دیگری آنرا حل نکرده باشد، و بالاخره برای یکی دیگر مسئله‌ای جالب است هرگاه بتواند از نتایج آن مقالاتی بچاپ رساند و خیلی چیزهای دیگر.

مثلاً در مصاحبه‌ای که با کاکستر[۱۱] هندسه‌دان معروف کانادایی (که به‌حق لقب سلطان هندسه گرفته است) درسال ۱۹۸۰ انجام شده و در [۴] به چاپ رسیده از او سئوال می‌شود که آیا قسمتی از هندسه وجود دارد که چنانچه امکان یابد، دوست داشته باشد به دیگران بگوید و خود نیز لذت ببرد. کاکستر فوراً مسئلهٔ معروف دو نیمساز و حل معروف فوردر[۱۲] اینکه زاویهٔ کوچکتر نیمساز بزرگتر دارد را نام می‌برد و می‌گوید احتمالاً بیش از صد راه حل مختلف برای این مسئله وجود دارد. از این نوع سئوال و جوابها قبلاً هم زیاد شده، بعضی‌ها هم بودن اینکه مورد سئوال قرار گیرند به این موضوع جواب داده‌اند. مثلاً هاردی درکتاب معروف خود به نام‌پورش ریاضیدان [۱۰] از اثبات نامتناهی بودن اعداد اول و اثبات عیرگویا بودن $\sqrt{2}$ به عنوان قضایایی جاودانی که هرگز تازگی خود را از دست نمی‌دهند نام می‌برد. همچنین از قضیهٔ اساسی حساب و قضیهٔ فرما[۱۳]، اینکه هرعدد اول بشکل $4n + 1$ را می‌توان به‌صورت مجموع مربعات دو عدد صحیح نوشت به‌عنوان قضایایی زیبا نام می‌برد و اظهار تأسف می‌کند از اینکه اثباتی از این قضیه فرما وجود ندارد که قابل فهم برای همه باشد؛ و بالاخره از قضیهٔ کانتور[۱۴] در مورد شمارش‌ناپذیری اعداد حقیقی اسم می‌برد و معتقد است هر کس که هیچکدام از این نتایج را تحسین نکند احتمالاً چیز دیگری را در ریاضی تحسین نخواهد کرد.

اما آنچه که مسلم است مفاهیمی نظیر مسئلهٔ جالب و برانگیزنده، حل ساده، حل مشکل، قضیهٔ جاودانی، قضیهٔ زیبا و قشنگ در ریاضی تعریف نشده‌اند و معیاری برای تشخیص آنها وجود ندارد. ولی هرشخص با بلوغ ریاضی خود می‌تواند این مسائل را برای خود تشخیص دهد؛ و بعضی اوقات در مورد مسئله‌ای خاص عدهٔ زیادی نظرات مشترک پیدا می‌کنند.

اما ازآنجا که تحسین کردن‌آثار هنری فقط کار هنرمندان نیست و هنردوستان نیز این حق را دارند، بنابراین من هم به خود این حق را دادم که از این فرصت استفاده کرده و چند مسئله‌ای را برای شما نام ببرم و برای اینکه کارم‌کمی ساده‌تر شود، اول یک دسته‌بندی از مسائل می‌کنم و بعد از هردسته یک یا چند مسئله را به عنوان نمونه انتخاب کرده و برای اینکه خیال بعضی‌ها راحت‌باشد این انتخاب راهم بدون اصل انتخاب انجام می‌دهم!

دستهٔ اول: مسائلی که اززمان تحصیلات دبیرستانی تاکنون در فکر ما جایی برای خود باز کرده‌اند و در علاقهٔ ما به ریاضیات تأثیر گذاشته‌اند.

دستهٔ دوم: مسائلی که در اولین برخورد با آنها وادار می‌شویم به اینکه یا حلی از آن مسئله را شخصاً ارائه دهیم و یا در اولین فرصت حل آنها را در منابع پیدا کنیم.

دستهٔ سوم: مسائلی که در لابلای مجلات و کتابها، ضمن‌گشتن برای یافتن موضوعی خاص تصادفی آنها را می‌یابیم.

دستهٔ چهارم: مسائلی که در سرکلاس درس در رابطه با تدریس‌مان مطرح می‌کنیم.

دستهٔ پنجم: مسائلی که در رابطه با کار تخصصی‌مان با آنها سر و کار داریم.

دستهٔ ششم: مسائل معروف حل شده و یا حل نشده.

آشکار است که اشتراک این دسته‌ها ممکن است تهی نباشد. ولی من ترجیح می‌دهم که راجع به دو دستهٔ آخر حرفی نزنم چون دستهٔ پنجم مشتریان چندانی ندارد؛ و مسائل دسته‌آخر هم همانطور که از اسمشان معلوم است به اندازهٔ کافی معروف

هستند و در حقیقت معروفیت آنها هم ممکن است به بعضی‌ها تحمیل شده باشد.

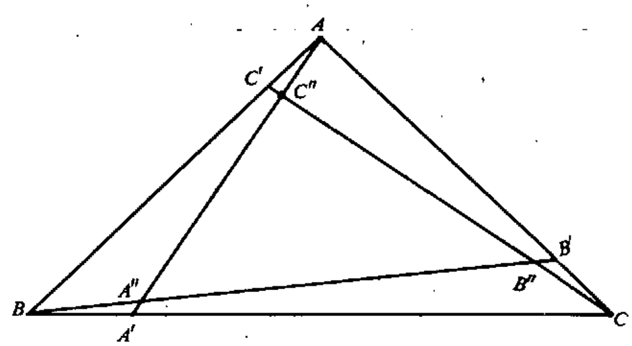
مسئلهٔ نمونه از دستهٔ اول: بی‌شک هیچ شکل هندسی وهیچ مفهوم ریاضی به اندازهٔ مثلث به ریاضیات مقدماتی خدمت نکرده است، من‌هم مسئلهٔ نمونه از دستهٔ اول را در رابطه با مثلث انتخاب کرده‌ام.

در مثلث ABC هرگاه روی اضلاع BC، AC، و AB به ترتیب نقاط A'، B'، و C' طوری انتخاب شوند که

$$\frac{BA'}{BC}=\frac{CB'}{CA}=\frac{AC'}{AB}=\frac{1}{\lambda}$$

(ش ۱۰)، آنگاه ثابت کنید که

(ش ۱۰)



(۱) سه مثلث $BA'A''$، $CB'B''$، و $AC'C''$ دارای مساحتهای برابرند و همچنین مساحت چهارضلعیهای $A'A''CB''$، $B'B''AC''$، و $C'C''BA''$ نیز برابر می‌باشد.

(۲) مثلث $A''B''C''$ با مثلثی با اضلاع AA' و BB' و CC' متشابه است.

(۳) $S_{A''B''C''}=f(\lambda)\, S_{ABC}$، و $f(\lambda)$ را بیابید.

(۴) محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC، $A'B'C'$، و $A''B''C''$ برهم منطبق است.

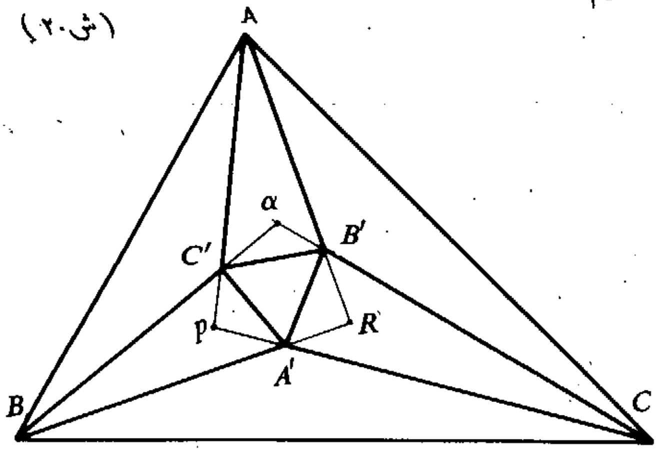
معروفیت این مسئله بیشتر در قسمت (۳) است. مسئله در حالت $\lambda = ۳$، در مجلهٔ یکان حل شده است. در حالتی که λ یک عدد صحیح باشد مسئله مورد توجه مرحوم هشترودی بوده و بیشتر اوقات در سر کلاس درس دانشگاه آنرا مطرح می‌کرد. کاکستر نیز چند صفحه‌ای از کتاب خود [۳] را به این مسئله اختصاص داده، و در مجلهٔ ریاضی گزت[۱۵] [۱۳] و [۱۴] مسئله توسط جان ساترلی[۱۶] بررسی شده است. قسمت (۴) این مسئله را نیز روزبال[۱۷] در کتاب خود [۱۲] بنام گزارش کوتاهی از تاریخ ریاضی، صفحه ۱۰۰، به پاپوس نسبت می‌دهد.

راه حل‌های کاکستر و ساترلی را من شخصاً راه حلهای خوبی برای این مسئله نمی‌دانم. بخصوص راه حل ساترلی را [۱۴] که در بعضی از جاها از محورهای مختصات نیز استفاده می‌کند؛ و باید اقرار کرد که استفاده از محورهای مختصات در حل بعضی از مسائل هندسی همانقدر بد است که استفاده از کامپیوتر در حل مسئله چهار رنگ. راه حل کاکستر هم فقط در مورد قسمت (۳) بکار می‌رود.

در اینجا راه حلی پیشنهاد می‌کنیم که نه تنها برای این مسئله بلکه برای دستهٔ بزرگی از مسائل هندسه ممکن است بکار رود و در واقع همین راه حل است که مسئله را قشنگ می‌کند. این راه حل در [۱۷] مفصلاً بکار گرفته شده است.

برای توجیه راه حل بهتر است اول حقایقی را بخاطر آوریم.

(ش ۲۰)



(الف) مثلث مورلی[۱۸]. اگر سه زاویهٔ مثلث ABC را به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم از برخورد خطوط، مثلث متساوی‌اضلاع $A'B'C'$ بدست می‌آید (ش ۲۰). برای اثبات به [۳] رجوع شود. برای تازه‌ترین کار در مورد مثلث مورلی به [۱۶] رجوع شود. همچنین لازم است از مقالهٔ شخصی بنام دابز[۱۹] در [۵] اسم برد که هرزاویه را به سه طریق ثلث می‌کند و از این برخورد خطوط ۲۷ مثلث بوجود می‌آورد و ثابت می‌کند که ۱۸ تا از این مثلث‌ها متساوی‌الاضلاع هستند که یکی از آنان مثلث مورلی است.

(ب) اگر به جای تثلیث زوایای مثلث، هرضلع را به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم و روی قسمتهای وسطی، مثلثهای متساوی‌الاضلاع بسازیم (چه رو به بیرون مثلث و چه رو به داخل) و رئوس مثلثهای بدست آمده را بهم وصل کنیم باز مثلثهای متساوی‌اضلاع $A'B'C'$ و $A''B''C''$ بدست می‌آیند (ش ۳۰). رجوع شود به [۸].

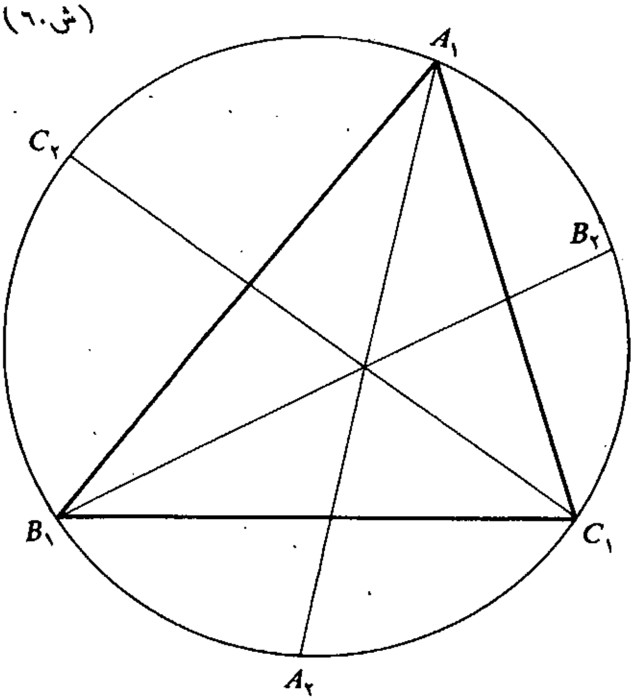
(پ) اگر در درون مثلث حادةالزاویهٔ ABC، نقطه O را طوری انتخاب کنیم که از سه ضلع به زاویهٔ ۱۲۰° دیده شود و در A، B، و C به ترتیب عمودهایی بر OA، OB، و OC رسم کنیم مثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'C'$ بدست می‌آید (ش ۴۰). به

سادگی می‌توان نشان داد که O نقطه‌ای است در داخل مثلث که مجموع فواصل آن از سه رأس مینیمم است و برابر است با ارتفاع مثلث $A'B'C'$. این قضیه به فرما نسبت داده شده است.

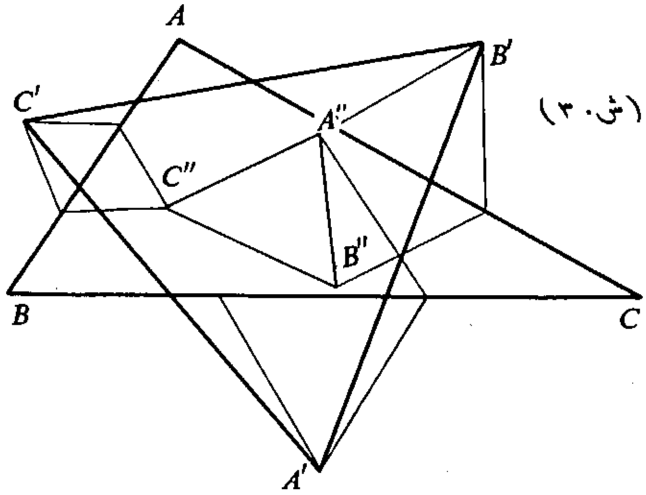
(ت) اگر روی اضلاع مثلث ABC مثلثهای متساوی‌الاضلاع رسم کنیم و مراکز این مثلثهای جدید را بهم وصل کنیم یک مثلث متساوی الاضلاع بدست می‌آید (ش۵۰). رجوع شود به [۲۱] صفحهٔ ۳۰۲ و یا [۱۸].

(ج) مثلث $A_1B_1C_1$ و دایرهٔ محیطی آن را در نظر می‌گیریم. حال میانه‌های مثلث را رسم می‌کنیم تا دایرهٔ محیطی را در A_2، B_2 و C_2 قطع کند دوباره میانه‌های مثلث را رسم می‌کنیم تا دایره را A_3، B_3 و C_3 قطع کند و عمل را ادامه می‌دهیم. نشان دهید که اگر $n \to \infty$ آنگاه حد مثلث $A_nB_nC_n$ متساوی‌الاضلاع خواهد بود (ش۶۰). برای اثبات به [۱۹] رجوع شود.

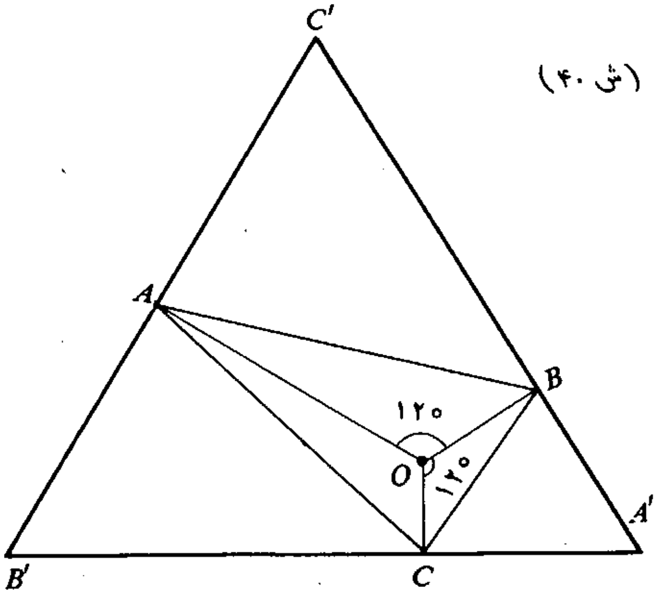
(ش۶۰)



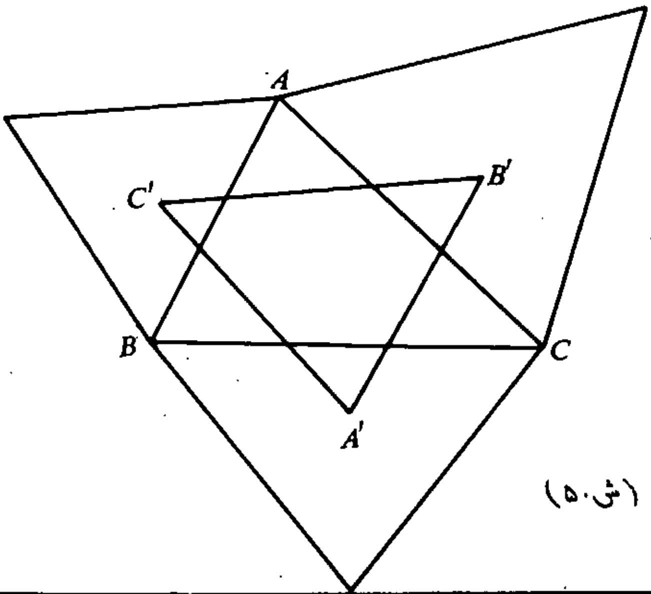
این مسائل به ما ارتباط نزدیک بین یک مثلث غیرمشخص و یک مثلث متساوی‌الاضلاع را نشان می‌دهد. از این‌رو می‌بایست بتوان دسته‌ای از مسائل را بجای اینکه برای یک مثلث غیرمشخص حل کرد، کافی باشد که آنها را فقط برای مثلث متساوی‌الاضلاع حل کنیم؛ خوشبختانه مسئله‌ای را که مطرح کرده‌ایم از این دسته است. اول توجه می‌کنیم که هر مثلث را می‌توان با تصویر کردن به موازات یک امتداد، به روی یک مثلث متساوی‌الاضلاع تصویر کرد؛ زیرا اگر صفحهٔ P را به



(ش۳۰)



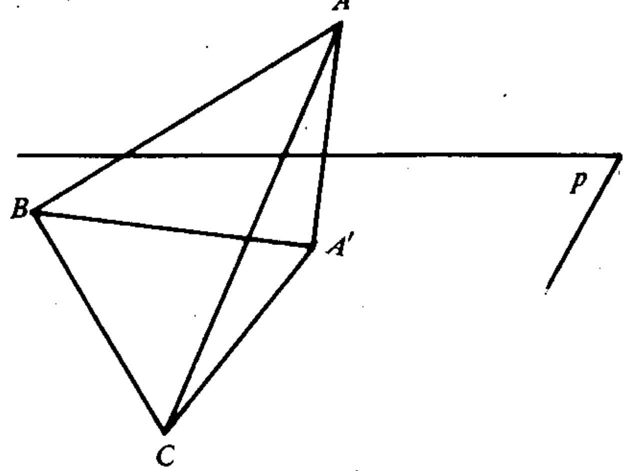
(ش۴۰)



(ش۵۰)

دلخواه از ضلع BC بگذرانیم و در این صفحه مثلث متساوی‌الاضلاع $A'BC$ را رسم کنیم و A را به A' وصل کنیم آنگاه مثلث ABC با رسم خطوطی بـه موازات AA' به روی مثلث $A'BC$ تصویر می‌شود (ش.۷). در این تصویر، نسبت مساحتها و همچنین نسبت پاره خطها بر روی یک خط و یا بر روی دو خط موازی ثابت باقی می‌ماند. برای جزئیات بیشتر به [۱۷] رجوع شود.

(ش.۷)



حال به حل مسئلهٔ خودمان برمی‌گردیم. با توجه به مطالبی کـه گفتیم مسئله را کافیست برای یک مثلث متساوی‌الاضلاع حل کرد. در آن صورت مسئله تقریباً بـدیهی خواهد بود و بد نیست توجه کنیم که

$$\frac{S_{A''B''C''}}{S_{ABC}}=\frac{(\lambda-2)^2}{\lambda^2-\lambda+1}=f(\lambda);$$

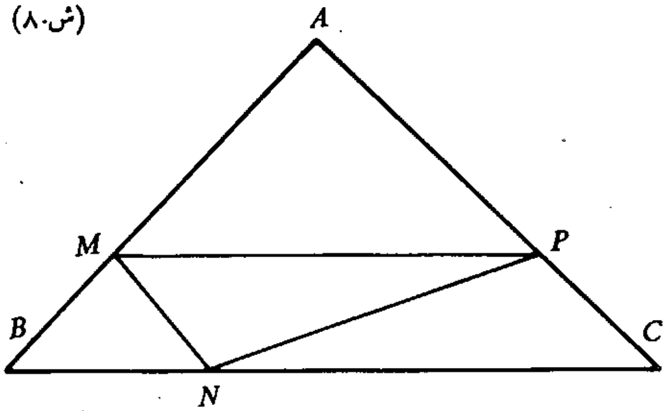
و $\frac{S_{A''B''C''}}{S_{A'B'C'}}=\frac{(k-2)^2}{k^2-k+1}=f(k)$، کـه k از رابـطـهٔ $k-1=(\lambda-1)^2$ بدست می‌آید.

حال خوبست به مسئله زیر که در ارتباط بـا مسئلهٔ خودمان است توجه کنیم. در مثلث ABC هرگـاه نقاط M، N، و P را روی اضلاع طوری بگیریم که

$$\frac{MA}{MB}=\frac{1}{t},\ \frac{PC}{PA}=\frac{1}{s},\ \frac{BN}{NC}=\frac{1}{r},$$

(ش.۸)، آنگاه کازارینوف[۲۰] در کتاب خود [۱۱] به‌نام نامساوی‌های هندسی، دو مسئلـه در صفحهٔ ۷۸ مطرح می‌کند. یکی اینکه مساحت مثلث MNP نمی‌تواند از مساحت هرکدام از مثلث‌های AMP، BMN، و CPN کمتر باشد؛ و بعـد همین مسئله را در مورد محیط به عنوان حدسی کـه قبلاً زده شده مطرح می‌کند و اقرار می‌کند که حل موجود در منابع در مورد مساحت، در سطح

(ش.۸)



کتابش نیست و در مورد محیط نیز مسئله حل نشده است. در مورد مساحت کاکستر در [۳] صفحهٔ ۲۱۲ مسئله را به دبرانر[۲۱] نسبت می‌دهد. اما برای حل این مسئله در مورد مساحت بـا توجـه به آنچه کـه گفتیم کافیست مثلث ABC را متساوی‌الاضلاع فـرض کنیم (گرچـه حل مسئلـه خیلی هم ساده‌تر نمی‌شود)؛ و بـا یک محاسبه ساده در می‌یابیم که

$$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}}=\frac{rst+1}{(r+1)(s+1)(t+1)}.$$

در حالتی کـه ($r \geqslant 1$ و $s,t \leqslant 1$) یا ($r \leqslant 1$ و $s,t \leqslant 1$) مسئله بدیهی است. پس فـرض می‌کنیم کـه ($r,s,t \geqslant 1$) یا ($r,s,t \leqslant 1$). در آن صورت هـرگـاه مساحت مثلث MNP کمتر از مساحت هر یک از سه مثلث دیگر باشد، خواهیم داشت

$$\frac{rst+1}{(r+1)(s+1)(t+1)}<\frac{1}{4}.$$

یعنی

$$(r-1)(st-1)+(s-1)(rt-1)$$
$$+(t-1)(rs-1)<0;$$

که یک تناقض است. در مـورد محیط، متأسفانه بنظر می‌رسد که مسئله هنوز حل نشده است.

به نظر من این قضیهٔ تصویر کـردن یک مثلث غیرمشخص به روی یک مثلث متساوی‌الاضلاع از نظر ایدهٔ ریاضی با قضیهٔ اساسی حساب و اکثر قضایای نظریـهٔ ساختمـانی در جبر یکی هستند؛ چون در تمام ایـن قضایا هدف اینست کـه اشیاء مورد مورد مطالعه را بـه اشیاء ساده‌تری از نوع خود تجزیـه کنیم و بعد از مطالعهٔ این اشیاء ساده‌تر پی بـه خواص اشیاء مورد نظر ببریم. جالب اینجاست که در کاربرد این قضایا در حل مسائل با مشکلاتی مشابه مواجه هستیم. مثلاً در حساب اکثر مسائل مشکل چه حل شده و چه حل نشده آنـهایی هستند که بـه شکلی عمل دوتایی جمع در بیان آنها بکار رفته است؛ مثل قضیهٔ معروف فرما و حدس گلدباخ[۲۲] و قضیهٔ فرما که هاردی برای ساده نبودن اثبات

آن اظهار تأسف کرده است و اکثر معادلات سیاله و صدها مسئله دیگر؛ دلیل این موضوع آنست که موارد اصلی علم حساب یعنی قضیهٔ اساسی حساب و تعریف اعداد اول فقط با ضرب بیان می‌شوند و آشکار است که اگر در آن مسائل جای جمع را به ضرب دهیم مسائل ساده خواهند شد. همین موضوع در مورد مسئلهٔ ما به شکلی نمایان است؛ وقتی صحبت از مساحت است، مسئله تقریباً ساده حل می‌شود و توجه می‌کنیم که مساحت مثلث مفهومی است که با ضرب تعریف می‌شود. ولی وقتی صحبت از محیط می‌شود که مفهومی جمعی است مسئله مشکل می‌شود؛ و این قضیهٔ تصویر کردن به روی یک مثلث متساوی‌الاضلاع نیز نسبت مساحتها را ثابت نگه می‌دارد ولی نسبت محیطها را اکثراً تغییر می‌دهد.

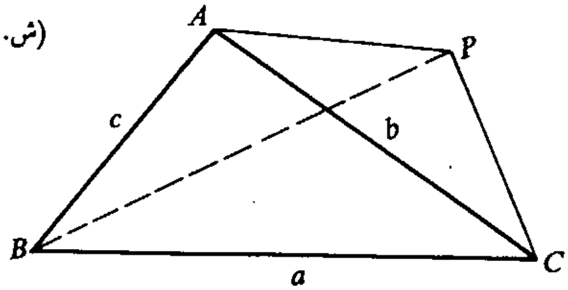
روشی را که ذکر کردیم در مورد مسائل زیادی بکار می‌رود. در بیشتر مسائلی که در آنها صحبت از نسبت مساحتها، تقارب خطوط، و نسبت پاره خطها در یک مثلث می‌شود می‌توان بدون اینکه از کلیت مسئله کم شود مسئله را برای یک مثلث متساوی‌الاضلاع حل کرد؛ گرچه ممکن است حل مسئله ساده‌تر نشود. مثلاً تقارب میانه‌ها، قضیهٔ سوا[23]، و قضیهٔ منلائوس[24] را کافیست برای یک مثلث متساوی‌الاضلاع ثابت کرد. همچنین در مسئلهٔ الف (مثلث مورلی) اقطار شش ضلعی $PA'RB'QC'$ متقاربند. حال اگر خطوط (BA', BC')، (AC', AB')، و (CA', CB') به جای اینکه سه زاویه را ثلث کنند سه ضلع مقابل را به سه قسمت مساوی تقسیم کنند باز هم اقطار این شش ضلعی متقاربند و برای اثبات این موضوع کافیست مثلث ABC را متساوی‌الاضلاع گرفت؛ و حل مسئله بدیهی خواهد شد.

مسئلهٔ نمونه از دستهٔ دوم: آشکار است که بر روی یک خط راست تعداد نامتناهی نقطه وجود دارد که فاصله دو بدوی آنها اعداد صحیح‌اند. حال همین سئوال را در مورد صفحه می‌کنیم. آیا تعداد نامتناهی نقطه در صفحه وجود دارند که بر روی یك خط راست نباشند و فاصلهٔ دو بدوی آنها اعداد صحیح باشد؟ به این سئوال پل‌اردیش[25] و آنینگ[26] در [1] جواب داده‌اند. آنها قضیهٔ قشنگ زیر را ثابت کرده‌اند.

قضیه: هرگاه تعداد نامتناهی نقطه در صفحه وجود داشته باشد که فاصلهٔ دو بدوی آنها اعداد صحیح باشد، آنگاه این نقاط باید روی یك خط راست قرار گیرند.

این قضیه را اولین بار در [15] دیدم ولی متأسفانه اثبات اولیهٔ اردیش ــ آنینگ به اندازهٔ بیان قضیه قشنگ نبود، به این دلیل مسئله را شش سال پیش در دانشگاه اهواز به مسابقه گذاشتیم و یکی از همکاران، بنام مرحوم گیل‌مارتین، از طریق متغیرهای مختلط مسئله را حل کرد. ولی باز هم مسئله راه حل مقدماتی طلب می‌کرد، تا اینکه راه حلی از خود اردیش یافتم که

(ش. ۹)



حل کوتاهی است و خیلی بهتر از حل اولیهٔ آنست و در اینجا آن را ذکر می‌کنم. فرض کنیم که سه نقطه A، B، و C از این نقاط بر روی یک خط راست نباشد. آشکار است که تعداد نقاط روی اضلاع متناهی است و اگر فرض کنیم که P نقطهٔ دلخواهی از این نقاط باشد که روی اضلاع مثلث نباشد (ش. ۹) آنگاه

$$PB - PA < c \ , \ PA - PC < b.$$

اما در $PB - PA < c$ و $PA - PC < b$، اگر قرار دهیم $PB - PA = n < c$ و $PA - PC = m < b$، پس مکان P دوهذلولی است یکی به کانونهای A و C و دیگری به کانونهای A و B. اما برای m و n حداکثر به‌ترتیب b و c تا انتخاب وجود دارد یعنی برای P حداکثر $4bc$ انتخاب وجود دارد که یک تناقض است. البته اگرچه اثبات کوتاه است ولی اگر کسی بتواند اثباتی مقدماتی و بدون استفاده از هذلولی ارائه دهد خیلی بهتر است. نکتهٔ جالب در مورد این مسئله نظر خود اردیش راجع به آن می‌باشد. در مصاحبه‌ای که در سال ۱۹۸۱ با او شده و در [۶] به چاپ رسیده، از اردیش سئوال می‌شود که چند مقاله دارد و با چند نفر مقالهٔ مشترک دارد، ایشان در جواب می‌گوید نزدیک به ۹۰۰ مقاله دارد و با ۲۰۰ نفر نیز مقالهٔ مشترک نوشته است. همچنین از او سئوال می‌شود که به کدام نتایج بیشتر افتخار می‌کند. او در جواب چهار یا پنج نتیجه را نام می‌برد که یکی از آنها همین مسئله‌ایست که ما مطرح کردیم و خودش قبول دارد که حل اولیهٔ آن حل خوبی نبوده و کاپلانسکی[27] از او خواسته که حل ساده‌تری ارائه دهد و او هم همین حل کوتاه ذکر شده را ارائه می‌دهد. پس باید از کاپلانسکی هم ممنون باشیم. در ضمن در رابطه با تعداد مقالات، اردیش می‌گوید رکورددار کیلی[28] است که ۹۲۷ مقاله دارد؛ ولی من که به مجموع کارهای کیلی مراجعه کردم دیدم تعداد مقالات او ۹۶۷ است و فکر می‌کنم به سبب اشتباه چاپی در [۶] این عدد ۹۲۷ نوشته شده است. البته اردیش کسی نیست که به تعداد مقالات خود ببالد؛ گرچه در میان کارهای او مقالات ارزندهٔ بسیار وجود دارد. او معتقد است که کیفیت مقالات تعیین‌کننده است نه تعداد آنها. بهرحال از نظر تعداد مقالات، اردیش نفر اول است و کیفیت بسیاری از مقالات او شگفت‌انگیز

است. حال کـه صحبت از تعداد مقالات شد، خوبست کـه یک لطیفه هم در این مـورد بگویم و بعد به کارمان ادامه دهیم. بهتر است اول به تعریف زیر توجه کنیم.

تعریف اعـداد اردیش. هرکس بـا اردیش مقـاله‌ای نوشته باشد دارای عـدد اردیش ۱ است و گوئیم عدد اردیش شخصی n است اگر او با کسی که عدد اردیش‌اش $n-1$ باشد مقـاله‌ای نوشته باشد.

حالا چند سئوال مطرح است. بزرگترین عـدد اردیش چند است؟

آیا گاوس[29] دارای عدد اردیش می‌باشد؟ بنظـر می‌رسد که کسی تـا به‌حال برای این سئوالات جوابی نیافته است. اما بهتر است لطیفـه‌ای تعـریف کنیم. معـروف است کـه یکبـار ریاضیدانی در فرودگـاه لندن پل‌اردیش را مـی‌بیند و بسمت او می‌رود، پس از سلام و احوالپرسی بـه او می‌گوید عدد اردیش من اخیراً از ۷ به ۳ تقلیل پیدا کرده و دوست داشتم کـه باز هم کمتر شود. اردیش به ساعت خود نگـاه می‌کند و می‌گوید اگر بتوانی پروازم را یک ساعت به تأخیر بیندازی، آنگاه عدد ترا به یک می‌رسانم. البته این لطیفه در منابع به‌شکل دیگری است و من کمی آن را دستکاری کرده‌ام.

حال بـرای اینکـه زیبایـی مسئلهٔ اردیش را کـه مطرح کرده‌ایم بهتر ببینیم چند مسئلهٔ دیگر را کـه با آن هم خانواده‌اند مطرح می‌کنیم.

(آ) برای هر عدد صحیح n همـواره می‌توان n نقطه کـه هیچ سه تا بر یک خط راست نباشند یافت به‌طوری که فاصلهٔ دو بدوی آنها اعداد صحیح باشند. بـرای اثبات به [۱] یـا [۱۵] رجوع شود.

(ب) مسئلهٔ سیلوستر. اگر $n(>2)$ نـقطه در صفحه طوری باشند کـه هر خط که از دو نقطهٔ آنهـا بگـذرد از نقطهٔ سومی از این نقاط هم بگذرد، آنگاه این نقاط بـاید بر روی یک خط راست باشند.

(پ) قضیهٔ مازورکویچ[30] در صفحه مجموعـه‌ای از نقـاط وجود دارد کـه هر خط راست آن را فـقط در دو نقطه قـطع می‌کند. این مسئله را سرپنسکی[31] نیز در [۲۰] مطرح کرده است و اثبات آن به کمک اصل انتخاب است. هرکس بتواند مجموعه‌ای از این نقاط را در صفحه مثال بزند کشف بزرگی کرده است.

(ت) مسئله الام[32]. آیا در صفحهٔ R^2 مجموعهٔ نقـاطی مـانند A وجود دارد که فاصلهٔ نقاط آن دو بدو اعداد گویا باشند و هر دایرهٔ بازی A را قطع کند؟ (یعنی A در R^2 چگال باشد).

این مسئله تا به‌حال حل نشده است. امـا اردیش حدس زده که جواب این سئوال منفی است و گفته است اگر بتوان شش نقطه در صفحه یافت بطوری که هیچ سه نقطه‌ای بـر روی یک خط و هیچ چهار نقطه‌ای بر روی دایره نباشند و فاصله دو بدوی آنان اعداد صحیح باشند آنگاه می‌تواند اثباتی هـم از حدس خود ارائه دهد. رجوع شود به [۷].

* * *

یادداشتها

۱- Halmos, R.P
۲- Sylvester, J.J.
۳- Hilbert, D.
۴- Hardy, G.H.
۵- Klein, F.
۶- Minkowski, H.
۷- Veblen, O.
۸- Artin, E.
۹- Noether, E.
۱۰- Urysohn, P.
۱۱- Coxter, H.S.M.
۱۲- Forder, H.G.
۱۳- Fermat, P.
۱۴- Cantor, G.
۱۵- The Gazette
۱۶- Satterly, J.
۱۷- Rouse Ball, W.W.
۱۸- Morley, F.
۱۹- Dobbs, W.J.
۲۰- Kazarinoff, N.D.
۲۱- Debrunner, H.
۲۲- Goldbach, C.
۲۳- Ceva, G.
۲۴- Menelaus
۲۵- Erdös, P.
۲۶- Anning
۲۷- Kaplansky, I.
۲۸- Kelly, J.L.
۲۹- Gauss, K.F.
۳۰- Mazurkiewicz, S.
۳۱- Sierpinski, W.
۳۲- Ulam, S.

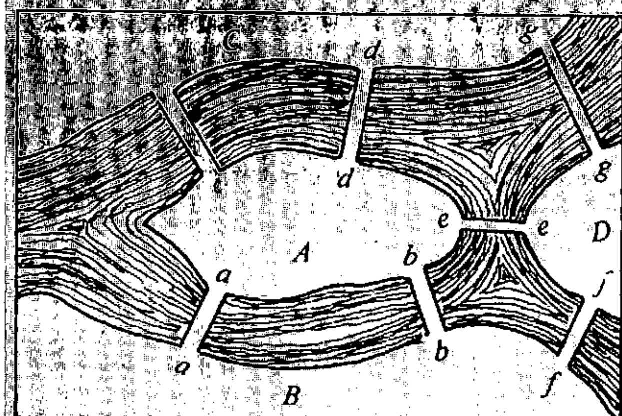
منابع

1. Anning, and Erdös, P., Integral distances, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), 595–600.
2. Bulmberg, W., Trans. Amer. Math. Soc. 24 (1922), 113–128.
3. Coxeter, H. S. M., introduction to Geometry, John Willey, 1969.
4. Coxeter, H. S. M. and Logothetti, D., An interview with Coxeter, the King of Germetry, 2-Year. Coll. Math. J. 11 (1) (1980), 2–18.

5. Dobbs, W. J., Morley's Triangle, Math. Gaz., 1938(50–57).
6. Erdös, P., and Alexanderson, G. L., An interview with Drdös; 2. Year Coll. Math. J. 12 (4) (1981), 249–259.
7. Erdös P., On Some Problems of Elementary and Combinatorial Geometry, Math. Di. Annali, (1975) 99–108
8. Gorfunkel, J., and Stahl, S., The Triangle Reinvestigated, Amer. Math. Monthly, Jan. (1965), 12–20.
9. Halmos, R. P., The Heart of Mathematics, Amer. math. Monthly, 87 (7) (1980), 519–524.
10. Hardy, G. H., A mathematician's apology, Cam. Univ. Press, 1969.
11. Kazarinoff, N. D., Geometric inequalities, the M. A. A. New Math. Library, 1961.
12. Rouse Ball, W. W., A Short History of Mathematics, Dover, 1915.
13. Satterly, J. The nedian Triangle, the Gazette, May (1954), 111–112.
14. Satterly, J. The nedian Triangle, the Gazette, May (1955), 109–113.
15. Serpinsky, A selection of problems in number theory, Pergamon press.
16. Yung–chow wong and Kai–Man Tsang, A strong Converse of Morley's Trisector theorem, Amer. Math. Monthly, 89 (9) 1982, 642–653.
17. Yaglom, I. M., Geometric Tranformation, 111, M. M. A., New Math Library, 1973.
18. Yaglom, I. M., Geometric Tranformation, 11. M. M. A.
19. Matkematics Magazine, Sep. (1975), 246-247.
۲۰ــ نظریهٔ مجموعه‌ها (نوشته سرپنسکی ــ ترجمهٔ پرویز شهریاری) انتشارات امیرکبیر.
۲۱ــ هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی (نوشته گرینبرگ ــ ترجمهٔ م. ه. شفیعها) نشر دانشگاهی.
۲۲ــ قلب ریاضیات (مقاله‌ای از هالموس ــ ترجمهٔ جعفر زعفرانی) بولتن انجمن ریاضی ایران، ۱۳۶۰ جلد ۸ شماره ۲.

مسئلهٔ پلهای کونیگسبرگ

شهر کونیگسبرگ در تاریخ ریاضیات معروفیت خاصی دارد. در زمان اویلر، هفت پل در این شهر از رود پرگل (Pregel) می‌گذشت (aa، bb، و غیره در شکل ذیل)، و نواحی A، B، C، و D را به هم مرتبط می‌ساخت.



مسئلهٔ پلهای کونیگسبرگ، از معماهای معروف زمان اویلر بود، اینست که آیا می‌شود که از یکی از نقاط یکی از این نواحی عزیمت کرده پس از عبور درست یک بار از هر پل به نقطهٔ عزیمت بازگشت؟ اویلر با حل این معما (که جوابش منفی است) توپولوژی و تئوری‌گراف را تأسیس کرد.

نقل از کتاب «تئوری مقدماتی اعداد» جلد اول، قسمت زندگینامه‌ها

نیوتز (ترجمهٔ آزاد: دکتر عین‌الله پاشا)

تاریخچهٔ مختصر احتمال

احتمال در ماقبل تاریخ آن

چنین به‌نظر می‌رسد که بشر از زمانهای بسیار دور به‌نقش شانس پی برده ولی در این اواخر آن را از لحاظ علمی مورد بررسی دقیق قرار داده است؛ که البته این خود یکی از نقاط ضعف تاریخ فرهنگ بشری است.

قمار که متکی برشانس است از زمانهای بسیار دور رایج و متداول بوده است. در حفاریهای مربوط به باستان‌شناسی، برخی وسایل و آثار مربوط به‌بازیهای شانسی مشاهده شده است. با این شواهد به‌نظر می‌رسد که نوعی تصور خام از احتمال در تصمیم‌گیری‌ها مؤثر بوده است. استفاده از شانس برای بعضی از مقاصد قضائی و فرهنگی متداول و عمل به‌آن در محاکمات مشکل معمول بوده است. مثلا در مواردی که تعیین مقصر بسیار مشکل می‌نمود عموماً به‌شانس توسل جسته و معتقد بودند که بااین روش قوای ماوراءالطبیعه دخالت نموده و مقصر معلوم خواهد شد. امروزه در مواردی که بی‌هیچ شکی نمی‌توان یك انتخاب را برانتخاب دیگر ترجیح داد. از شانس استفاده می‌شود. مثلا هیئت منصفه معمولا با قرعه انتخاب می‌شود، و در اغلب مسابقات برای شروع بازی از پرتاب سکه استفاده می‌کنند.

جامعه شناسان معتقدند که تکیه برشانش ناشی از آن است که جمیع عوامل مؤثر در یك تصمیم‌گیری را نمی‌توان یکجا در نظر گرفت. مثلا، در شرایطی که انسان قادر به‌تصمیم‌گیری نیست به‌طالع‌بینی، پیشگوئی، و... روی می‌آورد و از این طریق برشانس تکیه می‌زند. این قبیل کارها صرفاً نوعی تسکین برای کسانی است که به علت بیخبر بودن از حال و آینده خود در تلاطم‌اند.

اینطور به‌نظر می‌رسد که از زمانهای بسیار دور، شانس تأثیر زیادی در تکامل و بقا داشته است. بعضی از قبایل شکارگاههای خود را به‌تصادف انتخاب می‌کردند. اگرچه انتخاب تصادفی شکارگاهها در آن زمان بی‌اساس و بی‌محتوا جلوه می‌کرد ولی از اثرات آن‌اینکه لااقل از انهدام کامل شکارهای یك منطقه و یااحیاناً از برخورد‌های قبیله‌ای برسر شکارگاهها جلوگیری می‌نمود. حتی مشاهده شده است که در بعضی موارد انتخاب همسر نیز براساس شانس انجام می‌گرفته است، این عمل در جوامع آنروزی لااقل راهی برای تثبیت تنوع ژنها می‌توانست باشد.

علیرغم این همه کاربرد و اهمیت شانس در جوامع بشری، متفکرین معتبر تا قبل از عصر علوم جدید (علوم متکی بر تجربه) آن را یا انکار کردند و یا اگر قادر به انکار آن نبودند از لحاظ علمی قابل بحث نمی‌دانستند.

ارسطو[1] معتقد بود که شانس مجموعهٔ تمام چیزهائی است که بر فهم بشری پوشیده است. برای روشن ساختن این مطلب وی طی مثالی می‌گوید: هرگزاره‌ای در مورد فردای یك جنگ دریائی پس از اتمام آن یا راست خواهد بود یا دروغ و فعلا هیچ ارزش راستی براین گزاره نمی‌توان قائل شد؛ بنابراین، این گزاره به‌مجموعهٔ گزاره‌های «علمی» تعلق ندارد.

متفکرین اسکولاستیك را عقیده براین بود که‌وجود شانس نمی‌تواند سازگار با دخالت قوای ماوراءالطبیعه باشد. **توماس آکویناس**[2] معتقد بود که شانس چیزی جز تقارن و وحدت دو یا چند علت نیست. به‌عقیدهٔ وی‌مرموز جلوه دادن شانس تنها به‌این علت است که فهم بشری نمی‌تواند تمام علل را دریابد و تأثیرات متقابل آنها را

ادراک کند. در مثال معروفی می‌گوید: اربابی را درنظر بگیرید که دو خدمتکار دارد. به‌هرکدام از آنها جداگانه دستور می‌دهد در زمان معینی در مکان معینی باشند. از آنجائی که خدمتکاران از نقشه ارباب خبر ندارند این تقارن و برخورد در یك زمان و مکان را امری تصادفی تلقی می‌کنند و حال آنکه اگر آنها اطلاعات ارباب خود را می‌داشتند هیچگاه به توجیهات متکی بر شانس توسل نمی‌جستند.

در ادامهٔ همین طرز تفکر **سپینوزا**[3] ادعا کرد که هرچیزی بنابرضرورت طبیعت تعیین شده است و به‌طریق مشخص عمل می‌کند؛ نسبت دادن شانس به‌یك رویداد، صرفاً بیانگر نقص اطلاعات ما می‌باشد. **سپینوزا** همانند **آکویناس** شانس را بی‌اساس و موهوم می‌داند، به‌عقیدهٔ وی شانس چیزی جز ناآگاهی ما از حقایق نیست.

ناسازگاری شانس با مقولاتی نظیر ارادهٔ آزاد و مسئولیت وغیره، فیلسوف را از رسیدن به‌یك نتیجهٔ قطعی در زمینه شانس تقریباً محروم‌می‌سازد. بررسی ولومختصر در زمینهٔ این قبیل مقولات که به‌شانس مربوط می‌شوند خود نیاز به‌مقالات‌متعدد دارد که‌دراین مختصر نمی‌گنجد.

جالب توجه است که حتی متفکرینی که به‌شانس با دید منفی نگریسته‌اند به‌طور قابل ملاحظه‌ای اعتقاد به‌بعضی رویدادهای نامطمئن دارند و صرفنظر از نظریات مجردشان در مورد شانس جملگی مایل بوده‌اند اطمینانی که نسبت به‌وقوع یك رویداد نامطمئن دارند بطریقی اندازه‌گیری شود.

دلیل دید منفی فیلسوفان نسبت به‌شانس‌محققاً نتیجهٔ علمی است که از طریق نظری، و نه تجربی، به‌آن دست یافته‌اند. حتی این فیلسوفان برای کارها و آزمایش‌های تجربی ارزش علمی چندانی قائل نبودند. این طرز تفکر که مدت زیادی به‌محدود ماندن آگاهیهای بشری انجامید کمتر مورد توجه قرار گرفت و در نتیجه نظر فیلسوفان از توسعهٔ علوم تجربی و بخصوص روشهای آمار واحتمال جلوگیری به‌عمل آورد.

در قرون وسطی که کشفیاتی در ستاره‌شناسی، فیزیك، و طب به‌دست آمد، دیگر برای علوم آکادمیك جای آن نبود که نقش تجربه وداده‌های تجربی را انکار کنند. از اینجا نقطهٔ عطفی در علوم آغاز شد.

از جمله فیلسوفان بزرگی که دراین مقطع می‌توان از او یاد کرد **فرانسس‌بیکن**[4] است که نوشته‌های او بی‌شك بیشترین انتقاد را از روشهای علمی گذشتگان در بر دارد. اومتفکرین‌را دعوت به‌تغییر رویه ازروشهای علمی تجریدی به‌روشهای تجربی نمود و خواستار ابداع روشهائی شد که به‌کمك آنها بتوان داده‌های تجربی و نتایج به‌دست آمده از مشاهدات را تفسیر کرد. بدین‌جهت است که **بیکن** را پدر روشهای علمی تجربی که همان روش علوم امروزی است، می‌دانند.

با ترقی و توسعهٔ روشهای تجربی، توسعهٔ آمار و احتمال آغاز شد. لزوم یافتن میزانی برای اطلاعات‌ناقصی که از طریق مشاهدات مکرر حاصل می‌شود و تعبیراینکه چرا آزمایشهای مشابه منجر به‌نتایج یکسان نمی‌شوند از مثالهای اولیهٔ روشهای آماری واستدلال متکی براحتمال هستند.

لیکن لازم به‌تذکر است که محاسباتی که به‌طور صوری در احتمال آغاز شد مقدار خیلی کمی از آنها مربوط به‌علوم تجربی می‌شد. طی سالهای متمادی احتمال کلا اختصاص به‌محاسباتی در بازیهای شانسی داشته‌است. به‌همین دلیل است که شروع رسمی تاریخ احتمال مصادف با انتشار مقالاتی راجع به‌قمار در اواخر دورهٔ رنسانس در ایتالیا است.

آغاز تاریخ احتمال

تعیین زمان آغاز اولین بحثهای صوری ریاضی در احتمال بستگی نسبتاً زیادی‌به‌مفاهیم «ریاضی»، «صوری»، و «احتمال» دارد. اغلب نویسندگان **کاردانو** اولین نویسنده در احتمال معرفی می‌کنند. اثر او به‌نام «**کتاب بازیهای با تاس**»[6] تا سال ۱۶۶۳ یعنی تقریباً یك قرن پس از مرگ وی به‌چاپ نرسید.

گرچه این‌کار اولیه شامل تعدادی از اظهارنظرهای نادقیق دربارهٔ شانس و رویدادهای مختلف پرتاب یك تاس بود ولی این نظریات تأثیر منفی‌زیادی برنویسندگان جدی بعدی نگذاشت. شواهد زیادی در دست است که براساس آنها **کاردانو** یك ریاضیدان برجسته و معتبر به‌شمار نمی‌آمده است. کمی بعد از **کاردانو** جزوهٔ کوچك ولی دقیقی در مورد **بازیهای با تاس**[7] توسط **گالیله** نوشته شد که از لحاظ محتوا و دقت با کتاب **کاردانو** قابل مقایسه نبود.

کارهای اولیه در زمینه تئوری احتمال، مانند بسیاری از رشته‌های مختلف ریاضیات مدرن مدیون ریاضیدانان قرن هفدهم فرانسه است. در مکاتبات **بلز پاسکال**[8] و **فرما**[9] **مثالهای متعددی از استدلالهای بنیادی در زمینهٔ آنالیز ترکیبی و کاربرد آنها در محاسبهٔ** احتمالات ساده دیده می‌شود. تااین زمان هیچ نشانی از کاربرد اصول صوری در محاسبهٔ احتمال به‌چشم نمی‌-

خورد. **پاسکال** و **فرما** و همزمان بااینها نویسندگان دیگری که از اهمیت کمتری برخوردارند. به‌طور ضمنی قبول کرده بودند که تاسها همگن‌ساخته شده‌اند یا کارتها به تصادف انتخاب می‌شوند.

اولین اقدام دربررسی روشهای مطروحه دراحتمال، اگر نخواهیم که نام اصول برآنها نهیم، توسط عالم‌هلندی **کریستیانوس هویگنس**[10] تحت عنوان **«استدلال دربازی باتاس»**[11] درسال ۱۶۵۷ انجام‌گرفت. این‌نوشته مؤثرترین کار در احتمال بود که چندین دهۀ متمادی به‌عنوان اثری معتبر نیز باقی ماند. قدم بعدی که توجه بسیاری را برانگیخت در حدود سالهای ۱۷۰۰ برداشته شد.

انتشارات کلاسیك در زمینۀ احتمال از ابتدای‌قرن هیجدهم‌عبارتند از **«فن حدس‌زدن»**[12] اثر **جیمز برنولی**[13]، **«مقاله‌ای در آنالیز بازیها و شانس»**[14] اثر **دومونمور**[15]، **«دکترین شانس»**[16] اثر **دوموار**[17].

جیمز برنولی مسائل بنیادی زیادی را در احتمال مطرح و اغلب آنها را نیز خود حل کرد، کار عظیم وی «قانون ضعیف اعداد بزرگ»، برای حالتی است‌که‌امروزه آزمایشات برنولی نامیده می‌شود. او ایدۀ اصلی رشته‌های نامتناهی از آزمایشات مکرر را ارائه داد و اولین کسی بود که بین احتمال پیشامد (تعریف شده از روی اصول) و فراوانی نسبی وقوع آن پیشامد، در یك رشته از از آزمایشهای مکرر، فرق گذاشت.

دومونمور و **دوموآور** هردو تحت تأثیر کار **برنولی** قرارگرفتند و از آنالیز در تحقیقات خود در زمینۀ احتمال بهره جستند. **دومونمور** مسائل مختلفی را در رابطه با بازیهای شانسی مورد بحث قرار داد که اهمیت آنها در تنوع تکنیك‌های تحلیلی در مسائل احتمال است.

دوموآور که یك معترض فرانسوی بود به‌مناسبت لغو آزادی یك گروه سیاسی سویسی درسال ۱۶۸۵ سرزمین مادری خود را ترك گفت و درانگلستان مسکن گزید وتمام کارهایش را در انگلستان منتشر نمود. **دوموآور** تعریفات دقیق و معقولی ازمفاهیم استقلال پیشامدها، امید ریاضی و احتمال مشروط ارائه داد و همچنین تقریب نرمال و **پواسون** را برای توزیع دو جمله‌ای به‌دست آورد. علاوه براینها به‌دستور سترلینگك نیز دست یافت و بخوبی‌نشان داد که در عصر خود ریاضیدان کار آمدی است.

در نیمۀ دوم قرن هیجدهم جریان مداومی ازمطالب مهم از جمله **قضیۀ بیز** و مسئله **سوزن بوفون**[19] آغاز شد. کارهای **بوفون** در دو مقاله پس از مرگ وی در سالهای ۱۷۶۴ و۱۷۶۵ انتشاریافتند. **بوفون** که‌طبیعیدان ارزشمندی بود مسائل مختلفی را درارتباط با قمارمطرح کرد و عقیده داشت که علم احتمال می‌تواند به‌عنوان یك پادزهر قوی در مقابل کشش شیطانی قمار به‌کار رود مسئلۀ سوزن بوفون که باعث شهرت شده است، آغاز احتمال هندسی و شبیه‌سازی می‌باشد.

چهرۀ درخشان دورۀ بعدی احتمال **پیرسیمون دولاپلاس**[20] است. مقالۀ او تحت عنوان **«تئوری تحلیلی احتمال»**[21] بی‌شك یکی از کارهای عمده تا قرن بیستم است. علاوه براین وی مقالات ارزنده‌ای در زمینه‌های تئوری شانس، ستاره‌شناسی، وآنالیز ریاضی نوشته است.

بعضی از تاریخ‌نویسان ریاضی معتقدند که **لاپلاس** تحت تأثیر متقدمین یا معاصرین خود بوده‌است وکارهایش بسط افکار آنها است و اصالت ندارد. این اظهارنظرها اغلب شخصی بوده و دربارۀ آن قضاوت‌نهائی نمی‌توان کرد. البته او کارهای افرادی مانند **برنولی، دومونمور** و **دوموآور** را توسعه داد. وی همچنین بهرۀ زیادی از توسعۀ روزافزون هندسه و حساب دیفرانسیل و انتگرال برد. به‌هرحال چه کارهای وی اصیل باشند و یا توسعۀ کارهای دیگران، مقام **لاپلاس** در احتمال انکار نشدنی است. بعد از **لاپلاس** تا شروع قرن بیستم کارهای عمده و ایده‌های جدید در رابطه با روشهای آمار و آنالیز خطاهای مشاهده‌ای و ریاضیات آماری بوده است.

از آنجائی که قرن نوزدهم تحول علوم تجربی و پیشرفت ساخت اجتماعی و اقتصادی را در برداشت، به طور غیر منتظره‌ای بیشتر کارهای نظری که تا آن زمان در زمینۀ ریاضیات و به‌ویژه در احتمال انجام شده بود، به‌کار گرفته شد.

چنین پیشرفت سریع و نامحدودی از یك طرف و وجود برخی تناقضها در تئوری مجموعه‌ها از طرف دیگر، در نیمۀ اول قرن بیستم محققین ریاضی را برآن داشت تا با تجدید نظر در شاخه‌های مختلف ریاضی آنها را به‌صورت مجرد و براساس اصل موضوعی بیان نمایند.

علوم قدیمی و دقیق، مانند هندسه و حساب نیز از این شك و وسواس مصون نماندند و مجدداً با دید اصل موضوعی بررسی شدند، و از لحاظ سازگاری اصول، علیرغم اعتمادی که بعضی از دانشمندان به‌این علوم داشتند، مورد سئوال قرار گرفتند. علومی که در سده‌های اخیر توسعه یافته بودند از چنین اطمینانی برخوردار نبودند. بعد از تئوری مجموعه‌ها نوبت به‌احتمال رسید و هم از نظر اصل موضوعی و هم از نظر رابطه‌اش با علوم فیزیکی مورد توجه و دقت نظر قرار گرفت. این آغاز دوران احتمال مدرن است.

دوران احتمال مدرن

ریاضیدانان آغاز قرن بیستم بخوبی آگاه بودند که در احتمال عوامل تجربی بیشتر از علوم قدیمتر مانند هندسه و آنالیز دخالت دارند؛ حتی مفهوم ابتدائی «احتمال یك پیشامد» به‌نظر می‌رسید که بسیار گنگ و مبهم باشد. زیرا براساس «فراوانی وقوع حادثه‌ای در آزمایشات متوالی» تعریف شده بود. حتی در مدلهای ساده‌ای مانند انتخاب مهره از یك جعبه، یا پرتاپ سکه وغیره احتمالات براساس مفروضاتی از قبیل «خوب به‌هم زدن مهره‌ها»، «انتخاب تصادفی»، و «تقارن سکه» محاسبه می‌شدند که بوضوح معلوم نبود که آیا می‌توان چنین مفاهیمی را عملا تجربه کرد یا خیر و یااینکه آیا تئوری ریاضیات می‌تواند خود را از دست این قبیل مفروضات برهاند یانه.

اولین بحث جدی که دراین زمینه آغاز شد توسط ریچارد **فون‌میزس**[21] بود البته او نتوانست به‌یك دستگاه رضایتبخش از اصول موضوعه دست یابد. بهرصورت او آخرین نمایندهٔ معتبر از طرز تفکر احتمال بود که در بخشهای قبل به‌آنها اشاره شد. ریاضیدانان بزرگی که آغازگر آنان **لوبگ** بود هم خود را برتوسعهٔ مفهوم انتگرال گذاشتند و از این رهگذر، مفهوم تابع‌مجموعه‌ای و یا کلیتر به‌تئوری‌سنج دست یافتند. در نتیجهٔ این کشفیات، **کولموگوروف**[22] موفق به کشف بزرگ خود شد. او توانست احتمال را براساس اصول موضوعی در قالب تئوری سنج‌بنا نهد. کتاب او بنام «مبانی تئوری احتمال»[23] در آلمان به‌سال ۱۹۳۳ منتشر شد وپایهٔ بنای تئوری احتمال مدرن گردید. نتیجه‌ای که تئوری احتمال را تا حد زیادی از قیود عوامل تجربی رهانید «**قضیهٔ قانون اعداد بزرگ**» است. به‌موجب این قضیه، احتمالات موضوعی را حداقل برای آزمایشهائی که به‌طور مستقل و نامحدود قابل تکراراند، به‌کمك مفهوم حد می‌توان محاسبه کرد. این قضیهٔ اساسی ابتدا توسط **امیل بورل**[24] برای آزمایشهای برنولی بیان و اثبات گردید و سپس **کولموگوروف** آن را برای رشته‌هائی از متغیرهای‌تصادفی مستقل تعمیم داد.

از اواسط دهٔ ۱۹۳۰، بیشترتحقیقات بر «بستگی» پیشامدها و متغیرهای تصادفی تمرکز یافت. پیشقدمان این تحقیقات **دوموآور** و **لاپلاس** هستند که مسئلهٔ ورشکستگی قمارباز را مطرح کرده‌اند. مشخص‌ترین چهره‌ها در این زمینه آ. آ. **مارکوف**[25] می‌باشد که **زنجیرهای مارکوف** به‌نام وی نامگذاری شده است. مطالعه در انواع «بستگی»ها با تئوری فرایندهای تصادفی نقاط مشترك فراوان دارند.

تئوری فرایندهای تصادفی علاوه بربحث درانواع مختلف «بستگی»ها ایده‌های جدیدی راهمراه با مشکلات آن در ریاضی به‌ارمغان اورده است. دامنهٔ وسیع کاربردهای جالب تئوری فرایندهای تصادفی، حتی امروز، هم پایان ناپذیر به‌نظر می‌رسد.

*

یادداشتها

۱ـ Aristotle (۳۸۴ـ۳۲۲ قبل از میلاد)
۲ـ Thomas Aquinas (۱۲۲۵ـ۱۲۷۴ بعد از میلاد)
۳ـ Spinoza (۱۶۳۲ـ۱۶۷۷)
۴ـ Fransis Bacon (۱۵۶۱ـ۱۶۲۶)
۵ـ Cardano (۱۵۰۱ـ۱۵۷۶)
6- Liber de Ludo Aleae
7- On Outcomes in the Game of Dice
۸ـ Blaise Pascal (۱۶۲۳ـ۱۶۶۲)
۹ـ Fermat (۱۶۰۱ـ۱۶۶۵)
۱۰ـ Christianus Huygens (۱۶۲۹ـ۱۶۹۵)
11- De Rationciniis in Aleae Lude
۱۲ـ Ars Conjectandi (سال انتشار ۱۷۱۳)
۱۳ـ James Bernoulli (۱۶۵۴ـ۱۷۰۵)
۱۴ـ Essai d'Analyse sur les Jeux de Hasard (سال انتشار ۱۷۰۸)
۱۵ـ de Montmort (۱۶۷۸ـ۱۷۱۹)
16- Doctrine of chance
۱۷ـ de Moivre (۱۶۶۷ـ۱۷۵۴)
۱۸ـ Bayes (نیمهٔ دوم قرن هیجدهم)
۱۹ـ Buffon (نیمهٔ دوم قرن هیجدهم)
۲۰ـ Pierre-Simon de Laplace (۱۷۴۹ـ۱۸۲۹)
۲۱ـ Richard von Mises (۱۸۸۳ـ۱۹۵۳)
۲۲ـ A. N. Kolmogrov (۱۹۰۳ـ   )
23- Foundations of the theory of Probability
۲۴ـ Emile Borel (۱۸۷۱ـ۱۹۵۶)
۲۵ـ A. A. Markov (۱۸۵۶ـ۱۹۲۲).

ترجمه و تنظیم: میرزا جلیلی

قوای ماتریسها

مقدمه. روشهای مختلفی برای یافتن قوای صحیح ماتریسها وجود دارد؛ برخی از این روشها ذیلاً مورد بررسی قرار می‌گیرند. برای سهولت با ماتریسهای ۲ × ۲ شروع می‌کنیم؛ در صورت لزوم می‌توان آنها را تعمیم داد. فرض اینست که خواننده با مفاهیم مقدماتی ماتریسها و اعمال آنها آشنائی دارد. اصطلاحات و علائم همان است که در فصل سوم کتاب ریاضیات سال چهارم ریاضی و فیزیک آمده است.

قضیهٔ کیلی-هامیلتون درمحاسبهٔ قوای یک ماتریس

فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. بردار ویژهٔ متناظر با A، طبق تعریف، از معادلهٔ ماتریسی زیر بدست می‌آید:

$$AX = \lambda X,$$

که در آن λ مقدار ویژهٔ A است. معادلهٔ فوق را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

که پس از ضرب به صورت معادلهٔ همگن زیر در می‌آید:

$$\begin{cases}(a-\lambda)x + by = 0 \\ cx + (d-\lambda)y = 0\end{cases}$$

می‌دانیم که شرط وجود جواب نابدیهی برای دستگاه معادلات فوق اینست که

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

و یا

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

معادلهٔ فوق به معادلهٔ مشخصهٔ ماتریس A موسوم است.

اینک A^2 و $(a+d)A$ را حساب می‌کنیم؛ داریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & cb+d^2 \end{bmatrix},$$

$$(a+d)A = \begin{bmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{bmatrix}.$$

بسادگی ملاحظه می‌شود که

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0;$$

یعنی ماتریس A در معادلهٔ مشخصهٔ خود صدق می‌کند. این حکم به قضیهٔ کیلی-هامیلتون[1] موسوم است که در حالت کلی در مورد ماتریسهای $n \times n$ برقرار است، برای ملاحظهٔ اثبات آن می‌توان به کتابهای جبر خطی مراجعه کرد. اینک با استفاده از این قضیه به محاسبهٔ قوای ماتریسها می‌پردازیم.

فرض می‌کنیم که $a+d=e$ و $ad-bc=f$. بنابراین،

$$A^2 - eA + fI = 0.$$

از رابطهٔ فوق، A^2 را برحسب A و I محاسبه می‌کنیم:

$$A^2 = eA - fI.$$

در صورتی که طرفین رابطهٔ فوق را در A ضرب کرده و بجای A^2 مقدارش از خود همین رابطه قرار دهیم، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} A^3 &= eA^2 - fA \\ &= e(eA - fI) - fA \\ &= (e^2 - f)A - efI. \end{aligned}$$

بنابراین، A^3 برحسب A و I قابل محاسبه است. اگر طرفین رابطهٔ اخیر را در A ضرب کرده و همان عمل مذکور را انجام دهیم، خواهیم داشت:

$$A^4 = (e^3 - 2ef)A + (f^2 - e^2f)I.$$

باز هم ملاحظه می‌شود که A^4 برحسب A و I قابل محاسبه است. اگرهمین عمل را ادامه دهیم، هر قوهٔ طبیعی از A برحسب

A و I محاسبه خواهد شد. به عنوان مثال، فرض کنیم که

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

در اینجا $e = 5$ و $f = 10$. بنابراین،

$$\begin{aligned} A^4 &= (125 - 100)A + (100 - 250)I \\ &= 25A - 150I. \end{aligned}$$

در حالت خاصی که معادلهٔ مشخصه دارای ریشهٔ مضاعف باشد، محاسبات ساده‌تر می‌شود. در این حالت اگر $\lambda_1 = \lambda_2 = k$، آنگاه معادلهٔ مشخصه A چنین خواهد شد:

$$\lambda^2 - 2k\lambda + k^2 = 0.$$

بنابراین، به موجب قضیهٔ کیلی‌ـ‌هامیلتون،

$$A^2 - 2kA + k^2 I = 0,$$

و از اینجا

$$A^2 = 2kA - k^2 I.$$

اگر مثل قبل عمل شود، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A^3 &= 3k^2 A - 2k^3 I, \\ A^4 &= 4k^3 A - 3k^4 I, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

و به طور کلی قوهٔ nم ماتریس A به صورت زیر بدست می‌آید:

$$A^n = nk^{n-1}A - (n-1)k^n I \qquad (n \geqslant 2).$$

این رابطه به وسیلهٔ استقراء ریاضی بسادگی ثابت می‌شود.

با استفاده ازقضیهٔ کیلی‌ـ‌هامیلتون می‌توان A^{-1}، معکوس ماتریس A، را محاسبه کرد. دیدیم که

$$A^2 - eA + fI = 0.$$

طرفین رابطهٔ فوق را در A^{-1} ضرب می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$A - eI + fA^{-1} = 0,$$

بنابراین

$$A^{-1} = \frac{1}{f}\{eI - A\}.$$

به عنوان مثال، فرض می‌کنیم که

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

در اینجا $e = 5$ و $f = 10$. بنابراین

$$A^{-1} = \frac{1}{10}(5I - A);$$

یا

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

اینک می‌توان قوای طبیعی A^{-1} را به طریقی که فوقاً ذکر شد محاسبه کرد. بدین طریق، A^m به‌ازای هر m صحیح قابل‌محاسبه است.

ذیلاً روش دیگری را در محاسبهٔ قوای یک ماتریس مطرح می‌کنیم. این روش مبتنی برخواص بردارهای ویژه و مقادیر ویژه است. فرض کنیم که

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

ریشه‌های مشخصه [مقادیر ویژه] این ماتریس عبارتند از $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = 1$، و بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه بترتیب چنین‌اند:

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad Y = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

با این دو بردار ماتریس زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix};$$

هر بردار ویژه یک ستون U را تشکیل می‌دهد. اینک بسادگی ملاحظه می‌شود که

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

این بردار ویژه متناظر است با این مقدار ویژه

یا به طور کلی،

$$AU = UD,$$

که در آن D یک ماتریس قطری است که درایه‌های روی قطر اصلی آن ریشه‌های مشخصهٔ A هستند. از رابطهٔ فوق می‌توان بترتیب A^2، A^3، . . .، و A^n را بدست آورد. برای این منظور ملاحظه می‌کنیم که

$$A = UDU^{-1}$$

از اینجا،

$$\begin{aligned} A^2 &= UDU^{-1} \cdot UDU^{-1} \\ &= UD^2U^{-1}, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} A^3 &= UD^2U^{-1} \cdot UDU^{-1} \\ &= UD^3U^{-1}, \end{aligned}$$

و به همین ترتیب خواهیم داشت

$$A^n = UD^nU^{-1}.$$

چون D قطری است، D^n بسادگی محاسبه شده و طبق رابطهٔ فوق، A^n نیز محاسبه خواهد شد. برای محاسبهٔ D^n، ملاحظه می‌کنیم که

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D^2 = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 1^2 \end{bmatrix},$$

$$D^3 = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 1^3 \end{bmatrix}, \quad D^4 = \begin{bmatrix} 2^4 & 0 \\ 0 & 1^4 \end{bmatrix}, \ldots$$

بنا براین،

$$D^n=\begin{bmatrix}2^n & 0\\ 0 & 1^n\end{bmatrix}.$$

به عنوان مثال A^6 را بدست می‌آوریم:

$$A^6 = UD^6U^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^6 & 0\\ 0 & 1^6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}64 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}64 & 2\\ -64 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}190 & 126\\ -189 & -125\end{bmatrix}.$$

اینک می‌پردازیم به بیان یک روش کلی در محاسبهٔ قوای یک ماتریس که مجدداً با استفاده از قضیهٔ کیلی-هامیلتون صورت خواهد گرفت. مطابق آنچه که دیدیم،

$$A^2 - eA + fI = 0.$$

به موجب تساوی $A = UDU^{-1}$ [که بحث آن قبلاً گذشت] رابطهٔ فوق بصورت زیر درمی‌آید:

$$UDU^{-1}\cdot UDU^{-1} - eUDU^{-1} + fI = 0,$$

یا

$$UD^2U^{-1} - eUDU^{-1} + fI = 0.$$

اگر طرفین تساوی فوق را از طرف چپ در U^{-1} و از طرف راست در U ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$U^{-1}UD^2U^{-1}U - eU^{-1}UDU^{-1}U + fU^{-1}IU = 0,$$

یا

$$D^2 - eD + fI = 0,$$

یعنی، ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی‌آن ریشه‌های مشخصه است، در معادلهٔ مشخصه صدق می‌کند. از این حکم می‌توان در محاسبهٔ قوای ماتریسها استفاده کرد. به عنوان مثال، فرض می‌کنیم که

$$A=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

می‌خواهیم A^n را محاسبه کنیم. ریشه‌های مشخصه این ماتریس عبارتند از ۳ و ۱. به موجب آنچه که پیشتر ذکر شد A^n را می‌توان، طبق قضیهٔ کیلی-هامیلتون، برحسب A و I محاسبه‌کرد. فرض کنیم که

$$A^n = pA + qI.$$

چون ماتریس D هم در معادلهٔ مشخصه صدق می‌کند، به روش مشابه معلوم می‌شود که

$$D^n = pD + qI.$$

(باید توجه داشت ضرایب p و q در هر دو رابطه یکسانند).

$$D^n=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^n = p\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + q\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

از اینجا با مقایسهٔ درایه‌های ماتریسهای دو طرف تساوی فوق،

$$\begin{cases}3^n = 3p + q\\ 1^n = p + q.\end{cases}$$

بنا براین،

$$p = \frac{3^n - 1^n}{2},\; q = \frac{3 - 3^n}{2},$$

پس

$$A^n = \frac{3^n - 1}{2}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 1 & 0\end{bmatrix} + \frac{3 - 3^n}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

و بدین ترتیب مسئله حل می‌شود.

تمرین

۱. به استقراء ثابت کنید که

$$\begin{bmatrix}p & q\\ r & s\end{bmatrix}^n = k_n\begin{bmatrix}p - \lambda_1 & q\\ r & s - \lambda_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{bmatrix},$$

که در آن $k_n = \lambda_1^{n-1} + \lambda_1^{n-2}\lambda_2 + \lambda_1^{n-3}\lambda_2^2 \dots + \lambda_2^{n-1}$

(λ_1 و λ_2 ریشه‌های مشخصهٔ ماتریس $\begin{bmatrix}p & q\\ r & s\end{bmatrix}$ اند).

۲. بنا بر آنکه

$$M=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix},$$

مطلوبست محاسبهٔ M^5 و M^n.

۳. فرض کنیم که

$$p=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}.$$

مطلوبست محاسبهٔ P^n. همچنین حد P^n را وقتی که $n \to \infty$ محاسبه کنید.

۴. مطلوبست محاسبهٔ Q^6 و Q^n در صورتی که

$$Q=\begin{bmatrix}-\frac{1}{6} & 1\\ -\frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}$$

۵. اگر $A = \begin{bmatrix}-2 & -9\\ 1 & 4\end{bmatrix}$. به‌استقراء ثابت کنید‌که

$$A^n=\begin{bmatrix}1 - 3n & -9n\\ n & 1 + 3n\end{bmatrix}.$$

همچنین ماتریس $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}A^n$ را بدست آورید. (منظور از حد یک ماتریس یعنی ماتریس حاصل از حد درایه‌های آن).

۶. ثابت کنید که

$$\begin{bmatrix}a & b\\ ka & kb\end{bmatrix}^n = (a + kb)^{n-1}\begin{bmatrix}a & b\\ ka & kb\end{bmatrix}.$$

روش تکرار برای یافتن $\sqrt{۲}$ با استفاده از ماتریسها

ماتریس $\begin{bmatrix}۱&۲\\۱&۱\end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم و جذر ۲ را مثلاً عدد $g_0 = ۴$ حدس می‌زنیم، ماتریس ستونی $\begin{bmatrix}۴\\۱\end{bmatrix}$ را می‌نویسیم. در این صورت

$$\begin{bmatrix}۱&۲\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶\\۵\end{bmatrix}, \qquad g_1=\frac{۶}{۵}=۱/۲$$

اینک

$$\begin{bmatrix}۱&۲\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۶\\۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۶\\۱۱\end{bmatrix}, \qquad g_2=\frac{۱۶}{۱۱}\approx ۱/۴۵$$

$$\begin{bmatrix}۱&۲\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱۶\\۱۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳۸\\۲۷\end{bmatrix}, \qquad g_3=\frac{۳۸}{۲۷}\approx ۱/۴۰۷$$

$$\begin{bmatrix}۱&۲\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳۸\\۲۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹۲\\۶۵\end{bmatrix}, \qquad g_4=\frac{۹۲}{۶۵}\approx ۱/۴۱۵.$$

به عنوان یک تمرین جالب می‌توان ثابت کرد که رشتهٔ اعداد g_0، g_1، g_2، g_3، g_4، ... به $\sqrt{۲}$ میل می‌کند. (باید توجه داشت که بجای $g_0 = ۴$ هرعدد دیگری را می‌توان در نظر گرفت ولی برای اینکه در همان مراحل اول به تقریب مناسبی از $\sqrt{۲}$ دست یابیم، بهتر است این عدد را نزدیکتر به جذر تقریبی ۲ در نظر بگیریم؛ به عنوان مثال اگر بجای ۴ عدد ۱/۵ را انتخاب کنیم، در مرحلهٔ سوم به عدد ۱/۴۱۳ خواهیم رسید که از g_4 مذکور در مرحلهٔ چهارم مناسبتر است.)

روشی که در بالا بکار رفت وجه جالبی از مسئلهٔ یافتن مقادیر ویژه به روش تکرار است. در مثال فوق یکی از بردارهای ویژه عبارت خواهد بود از $\begin{bmatrix}\sqrt{۲}\\۱\end{bmatrix}$.

یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه به روش تکرار

مجدداً ماتریس $\begin{bmatrix}۱&۲\\۱&۱\end{bmatrix}$ را اختیار کرده، و بردار $\begin{bmatrix}۴\\۱\end{bmatrix}$ را به عنوان یکی از بردارهای ویژهٔ آن در نظر می‌گیریم [حدس می‌زنیم]. در این صورت،

$$\begin{bmatrix}۱&۲\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶\\۵\end{bmatrix}=۵\begin{bmatrix}۱/۲\\۱\end{bmatrix}.$$

بجای اینکه مانند قبل $\begin{bmatrix}۱&۲\\۱&۱\end{bmatrix}$ را در $\begin{bmatrix}۶\\۵\end{bmatrix}$ ضرب کنیم، آن را در $\begin{bmatrix}\frac{۶}{۵}\\۱\end{bmatrix}$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}۱&۲\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{۶}{۵}\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳/۲\\۲/۲\end{bmatrix}\approx ۲/۲\begin{bmatrix}\frac{۱۶}{۱۱}\\۱\end{bmatrix}\approx ۲/۲\begin{bmatrix}۱/۴۵\\۱\end{bmatrix},$$

و بهمین ترتیب

$$\begin{bmatrix}۱&۲\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{۱۶}{۱۱}\\۱\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}۳/۴۵\\۲/۴۵\end{bmatrix}\approx ۲/۴۵\begin{bmatrix}\frac{۳/۴۵}{۲/۴۵}\\۱\end{bmatrix}$$

$$\approx ۲/۴۵\begin{bmatrix}۱/۴۰۷\\۱\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}۱&۲\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱/۴۰۷\\۱\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}۳/۴۰۷\\۲/۴۰۷\end{bmatrix}\approx ۲/۴۰۷\begin{bmatrix}۱/۴۱۵\\۱\end{bmatrix}.$$

رشتهٔ ۵، ۲/۲، ۲/۴۵، ۲/۴۰۷، ... متقارب بوده و یکی از مقادیر ویژه را می‌دهد در حالی که حد رشتهٔ ۴، ۱/۲، ۱/۴۵، ۱/۴۰۷، ۱/۴۱۵، ... بردار ویژهٔ متناظر را خواهد داد. مقدار ویژهٔ دیگر از رابطهٔ $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ بدست خواهد آمد.

محاسبهٔ قوای ماتریسهای ۳ × ۳

روشی که برای محاسبهٔ توان،ماتریسهای ۲ × ۲ گفته شد به‌آسانی قابل تعمیم به ماتریسهای مراتب بالاست. به عنوان مثال، فرض می‌کنیم

$$X=\begin{bmatrix}۳&۲&۲\\۱&۴&۱\\-۲&-۴&-۱\end{bmatrix}.$$

می‌خواهیم X^n را پیدا کنیم مقادیر ویژهٔ این ماتریس از معادلهٔ $|X-\lambda I| = 0$ بدست می‌آید:

$$\begin{vmatrix}۳-\lambda&۲&۲\\۱&۴-\lambda&۱\\-۲&-۴&-۱-\lambda\end{vmatrix}=0$$

از اینجا، معادلهٔ $\lambda^۳ - ۶\lambda^۲ + ۱۱\lambda - ۶ = 0$ حاصل می‌شود که جوابهای آن عبارتند از

$$\lambda_1=۱,\quad \lambda_2=۲,\quad \lambda_3=۳.$$

بردار ویژهٔ متناظر با $\lambda_1 = ۱$ را $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ می‌گیریم. در این‌صورت

$$\begin{bmatrix}۳&۲&۲\\۱&۴&۱\\-۲&-۴&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=۱\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}.$$

یا

$$\begin{cases}۳x+۲y+۲z=x\\x+۴y+z=y\\-۲x-۴y-z=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+z=0\\x+۳v+z=0\\x+۲y+z=0\end{cases}$$

با فرض $y = 0$ خواهیم داشت، $z = ۱$ و $x = -۱$.
بنابراین بردار ویژه در این حالت چنین است:

$$\begin{bmatrix}-۱\\0\\۱\end{bmatrix}.$$

در حالتی که $\lambda = 2$،

$$\begin{bmatrix}3&2&2\\1&4&1\\-2&-4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},$$

$$\begin{cases}3x+2y+2z=2x\\x+4y+z=2y\\-2x-4y-4z=2z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2y+2z=0\\x+2y+z=0\\x+2y+3z=0,\end{cases}$$

با فرض $z=0$ خواهیم داشت، $y=1$ و $x=-2$. در این صورت بردار ویژه عبارت است از

$$\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}.$$

در حالتی که $\lambda = 3$،

$$\begin{bmatrix}3&2&2\\1&4&1\\-2&-4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},$$

$$\begin{cases}3x+2y+2z=3x\\x+4y+z=3v\\-2x-4y-z=3z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y+z=0\\x+y+z=0\\\frac{x}{2}+y+z=0,\end{cases}$$

با فرض $x=0$ خواهیم داشت، $z=1$ و $y=-1$. در این صورت بردار ویژه چنین می‌شود:

$$\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

برای پیدا کردن X^n از همان روشی که در مبحث قوای ماتریسهای ۲ × ۲ ذکر شد، استفاده می‌کنیم. برای این منظور می‌نویسیم، $XU=UD$، که در آن U و D مشابه به ماتریسهای مذکور در آن مبحث هستند. داریم

$$X^n = UD^nU^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}-1&-2&0\\0&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^n&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{bmatrix}\cdot U^{-1},$$

که در آن ستونهای U بردارهای ویژهٔ متناظر با مقادیر ویژه‌ای هستند که بترتیب درایه‌های روی قطر اصلی D را تشکیل می‌دهند. برای محاسبهٔ U^{-1} از روشهائی که قبلاً با آنها آشنا بودیم استفاده می‌کنیم؛ داریم

$$U^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&2\\-1&1&1\\-1&-2&1\end{bmatrix}.$$

بنابراین،

$$X^n=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&-2&0\\0&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^n&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\-1&1&1\\-1&-2&1\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&-2\times2^n&0\\0&2^n&-3^n\\1&0&3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\-1&1&1\\-1&-2&1\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1+2^{n+1}&-2(2^n+1)&-2(2^n+1)\\-2^n-3^n&2^n+2\times3^n&2^n-3^n\\1-3^n&2(1-3^n)&2+3^n\end{bmatrix}.$$

به طریق مشابه می‌توان بردارهای ویژهٔ یک ماتریس را به‌روش تکرار حساب کرد.

* * *

منبع

Timothy Brand and Alan Sherlok, *Matrices: Pure and Applied* (Contemporary Mathematics), Edward Arnold, London, 1970.

اسقاط نادرست! نتیجهٔ درست

در کسر زیر دو رقم ۶ را از صورت و مخرج آن اسقاط می‌کنیم:

$$\frac{26}{65}=\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5}=\frac{2}{5}.$$

نتیجهٔ بدست آمده درست است! چهار کسر (کوچکتر از واحد) دیگر که مخرجشان از ۱۰۰ کوچکتر است وجود دارند که به طریق فوق به یک کسر تحویلناپذیر تبدیل می‌شوند. آیا می‌توانید آنها را بیابید؟

تعمیم دهید

$$1^2+2^2+2^2=3^2,$$
$$2^2+3^2+6^2=7^2,$$
$$3^2+4^2+12^2=13^2,$$
$$4^2+5^2+20^2=21^2.$$

علیرضا جمالی

چند قضیه دربارهٔ توابع پیوسته (۲)

۱. مقدمه

در این مبحث هدف آنست که به اثبات این قضیه بپردازیم که هرگاه تابعی اکیداً صعودی (یا نزولی) بر بازه‌ای بسته پیوسته باشد، آنگاه اولاً تصویر این بازه با تابع مزبور بازه‌ای است بسته وثانیاً تابع معکوس موجود و بر بازهٔ اخیر پیوسته است. از این قضیه که متعاقب یک قضیهٔ مقدماتی ثابت خواهدشد، در وجود توابع معکوس مثلثاتی استفاده خواهیم کرد.

۲. قضیه‌ها

قضیهٔ ۱. فرض کنیم که f یک تابع اکیداً صعودی باشد که بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ را بروی بازهٔ بستهٔ $[\alpha, \beta]$ تصویر کند، یعنی $f([a, b]) = [\alpha, \beta]$. در این صورت f بر بازهٔ $[a, b]$ پیوسته است.

برهان. فرض کنیم x_0 نقطهٔ دلخواه و از این بعد ثابتی از (a, b) باشد. در این صورت، به موجب فرض

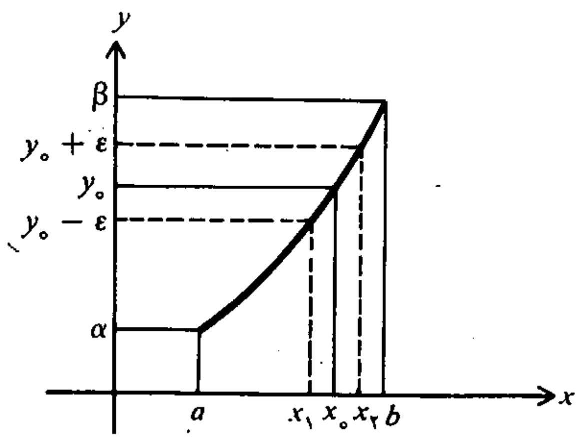
$$f([a, b]) = [\alpha, \beta],$$
$$y_0 = f(x_0) \in [\alpha, \beta].$$

ولی چون f بر $[a, b]$ اکیداً صعودی است، معلوم می‌شود که $y_0 \in (\alpha, \beta)$ (چرا؟).

فرض کنیم که $\varepsilon > 0$ دلخواه چنان باشد که $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \subset (\alpha, \beta)$. بـه موجب فرض $f([a, b]) = [\alpha, \beta]$، دو عضو از (a, b) مانند x_1, x_2 وجود دارد به طوری که $f(x_1) = y_0 - \varepsilon$ و $f(x_2) = y_0 + \varepsilon$. مطابق اکیداً صعودی بودن f، نتیجه می‌شود که $a < x_1 < x_2 < b$ (ملاحظه شود که $x_1 < x_0 < x_2$).

اینک فرض می‌کنیم که $\delta = \min\{x_0 - x_1, x_2 - x_0\}$ و x عضو دلخواهی از $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ باشد. دراین صورت،

$$x_1 < x_0 - \delta < x < x_0 + \delta < x_2.$$



(ش. ۱)

از اینجا،

$$f(x_1) < f(x) < f(x_2);$$

به عبارت دیگر،

$$y_0 - \varepsilon < f(x) < y_0 + \varepsilon.$$

یعنی، $|f(x) - y_0| < \varepsilon$. بنابراین f در x_0 پیوسته است، با استدلال مشابهی می‌توان بسهولت ثابت کرد که f در هر یک از نقاط $x = a$ و $x = b$ نیز پیوسته است. ■

قضیهٔ ۲. فرض کنیم که f بر $[a, b]$ پیوسته و اکیداً صعودی باشد، و $\alpha = f(a)$، $\beta = f(b)$. در این صورت،

(i) تصویر بازهٔ $[a, b]$ با f، بازهٔ $[\alpha, \beta]$ است؛

(ii) تابع معکوس f بر $[\alpha, \beta]$ موجود و بر این بازه پیوسته است.

برهان. (i) فرض کنیم که $Y = f([a, b])$. می‌خواهیم ثابت کنیم که $Y = [\alpha, \beta]$. فرض می‌کنیم که y عضو دلخواهی از Y باشد؛ بنابراین xای از $[a, b]$ هست به طوری که $y = f(x)$. گوئیم چون $a \leqslant x \leqslant b$ و f اکیداً صعودی است، $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$. به عبارت دیگر $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$. یعنی $y \in [\alpha, \beta]$. پس $Y \subseteq [\alpha, \beta]$ (۱).

اینک فرض می‌کنیم که $y \in [\alpha, \beta]$. بنابراین $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$. به موجب قضیهٔ مقدار متوسط [مذکور در شمارهٔ ۲ همین مجله]، cی بین a و b است که $y = f(c)$. بنابراین $y \in f([a, b])$، یعنی $y \in Y$. بالنتیجه، $[\alpha, \beta] \subseteq Y$ (۲). از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $Y = [\alpha, \beta]$.

(ii) به موجب قسمت (i)، $f([a, b]) = [\alpha, \beta]$. یعنی تابع $f: [a,b] \to [\alpha, \beta]$ تابعی پوششی است. از طرف دیگر به موجب اکیداً صعودی بودن f، معلوم می‌شود که f تابعی یک به یک است. بنابراین f یک تناظر یک به یک بین $[a, b]$ و $[\alpha, \beta]$، و لهذا دارای تابع معکوس است. معلوم است که $f^{-1}([\alpha, \beta]) = [a, b]$. گوئیم چون f^{-1} تابعی اکیداً صعودی است، از تساوی اخیر به موجب قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که f^{-1} بر $[\alpha, \beta]$ پیوسته است. ■

تبصره. (آ) با تبدیل «اکیداً صعودی» به «اکیداً نزولی» قضایای ۱ و ۲ برقرار می‌مانند.

(ب) قضیهٔ ۲ در مورد انواع بازه‌ها (اعم از متناهی یا نامتناهی) برقرار است. به عنوان مثال در حالتی‌که بازه به صورت (a, b) باشد، قضیهٔ ذیل را خواهیم داشت:

قضیهٔ ′۲. فرض‌کنیم‌که f بر (a, b) پیوسته واکیداً صعودی باشد،وبعلاوه $\alpha = \lim_{x \to a+} f(x)$ و $\beta = \lim_{x \to b-} f(x)$. درای‌نصورت،

(i) تصویر بازهٔ (a, b) با f بازهٔ (α, β) است؛

(ii) تابع معکوس f بر (α, β) موجود و بر این بازه پیوسته است. (ملاحظه کنید ممکن α و β متناهی یا نامتناهی باشد).

برهان این قضیه شبیه برهانی است که برای قضیهٔ ۲ ذکر شد.

۳. مثالها

توابع معکوس مثلثاتی. با توسل به قضیهٔ مهم فوق به اثبات وجود توابع معکوس مثلثاتی می‌پردازیم.

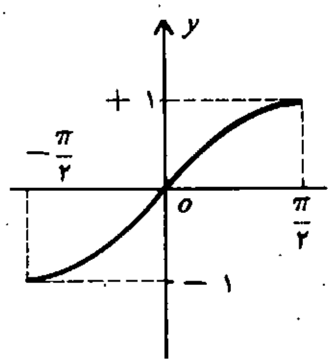
مثال ۱. می‌دانیم که تابع sin بر بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ پیوسته و اکیداً صعودی است. بنابراین، به موجب قضیهٔ فوق (با توجه به اینکه $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ و $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$)، اولاً تصویر بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ با تابع sin بازهٔ $[-1, 1]$ است، و ثانیاً تابع معکوس sin، یعنی $\sin^{-1}$ که آن را با $Arc\sin$ هم نشان می‌دهند، بر $[-1, 1]$ موجود و بر این بازه پیوسته است. بنابراین،

$$Arc\sin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$Arc\sin y = x \Longleftrightarrow y = \sin x$$

$$\left(-1 \leqslant y \leqslant 1,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

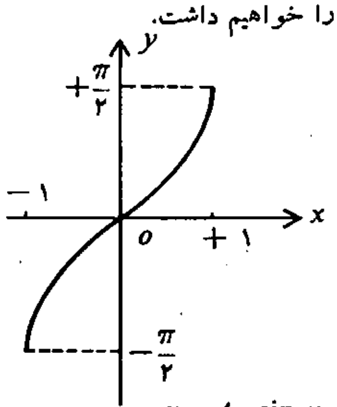
منحنی‌های نمایش توابع $y = \sin x$ و $x = Arc\sin y$ در دستگاه مختصات xoy برهم منطبق‌اند (ش. ۲)؛ ولی هرگاه بجای صورت اخیر، آن را به صورت $y = Arc\sin x$ در نظر بگیریم (واضح است که در این صورت $-1 \leqslant x \leqslant 1$ و $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$) آنگاه نقش x و y عوض شده و شکل ۳ را خواهیم داشت.



$x = Arc\sin y$

یا $y = \sin x$

(ش. ۲)



$y = Arc\sin x$

یا $x = \sin y$

(ش. ۳)

توضیح اینکه منحنی‌های نمایش $y = \sin x$ و $y = Arc\sin x$ نسبت به نیمساز ربع اول قرینه‌اند.

مثال ۲. تابع cos بر بازهٔ $[0, \pi]$ اکیداً نزولی و پیوسته است؛ بنابراین با استفاده از قضیهٔ مذکور (با ملاحظات ذیل) دارای تابع معکوس پیوسته است.

گوئیم چون $\cos 0 = 1$ و $\cos\pi = -1$ تصویر بازهٔ $[0, \pi]$ با تابع cos بازه $[-1, 1]$ است. بنابراین تابع

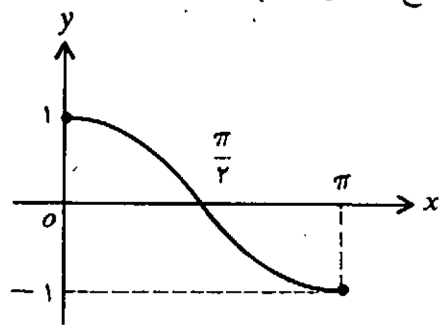
معکوس cos، یعنی $\cos^{-1}$ که آن را با $Arc\cos$ نیز نشان می‌دهند، بر $[-1,1]$ موجود و بر این بازه پیوسته است. بنا براین،

$$Arc\cos : [-1,1] \to [0,\pi],$$

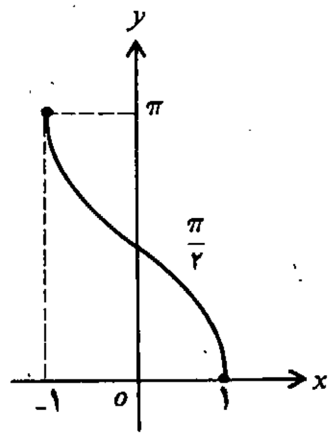
$$Arc\cos y = x \Leftrightarrow y=\cos x$$

$$(-1\leqslant y\leqslant 1 \text{ و } 0\leqslant x\leqslant\pi).$$

منحنی‌های نمایش توابع $y=\cos x$ و $y=Arc\cos x$ در شکلهای ۴ و ۵ نشان داده شده‌اند (این منحنیها نیز نسبت به نیمساز ربع اول قرینه‌اند).



$y=\cos x$ یا $x=Arc\cos y$ (ش. ۴)



$x=\cos y$ یا $y=Arc\cos x$ (ش. ۵)

مثال ۳. تابع tg بر بازهٔ $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ اکیداً صعودی و پیوسته است. بنا براین به موجب قضیهٔ مذکور در تبصرهٔ فوق تابع معکوس وجود خواهد داشت. گوئیم چون

$$\lim_{x\to\pi/2-} \operatorname{tg} x = +\infty \text{ و } \lim_{x\to -\pi/2+}\operatorname{tg} x=-\infty،$$

تصویر بازهٔ $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ با تابع tg بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ است.

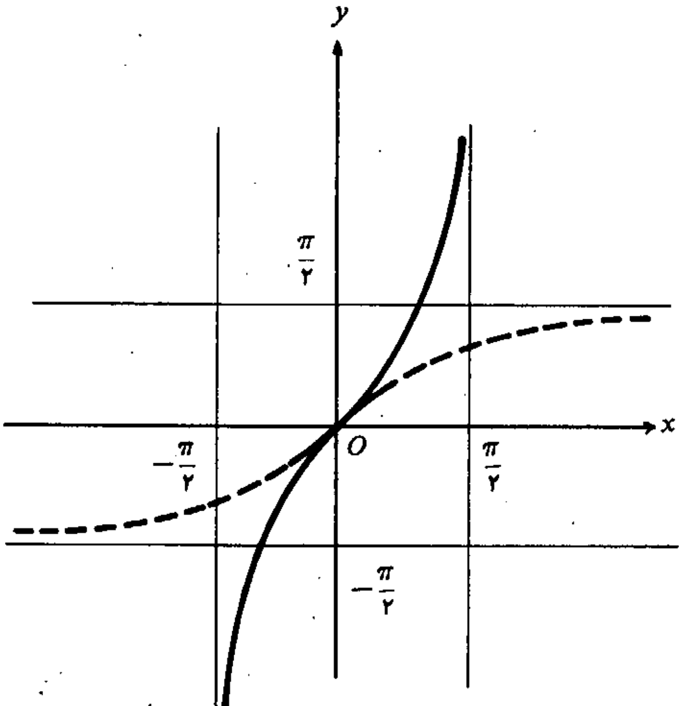
بنا براین تابع معکوس tg، یعنی tg^{-1} که آن را $Arc\operatorname{tg}$ نیز نشان می‌دهند، بر $(-\infty,+\infty)$ موجود و بر این بازه پیوسته است. بنا براین،

$$Arc\operatorname{tg} : (-\infty,+\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),$$

$$Arc\operatorname{tg} y = x \Longleftrightarrow \operatorname{tg} x = y$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

منحنی‌های نمایش توابع $y=\operatorname{tg} x$ و $y=Arc\operatorname{tg} x$ در یک دستگاه مختصات نشان داده شده‌اند (شکل ۶).



(ش ۶) $y=Arc\operatorname{tg} x,\ y=\operatorname{tg} x$

تمرین. با اختیار بازه‌ای مناسب، در وجود تابع معکوس cotg بر این بازه بحث کنید.

*

تعمیم قضیهٔ مورلی

مقدمه

● صورت کلاسیک قضیهٔ مورلی به صورتی که در شمارهٔ پیش به چاپ رسید به حدی معمول و متداول است که تقریباً همهٔ علاقه‌مندان هندسهٔ اقلیدسی آن را دیده یا شنیده‌اند. از طرف دیگر، چون درک صورت ساده و زیبای آن ــ با اندک معلوماتی در هندسه ــ برای مبتدیان میسر است، طالبین فراوانی خواستار اثبات آنند. ولی چنانکه در شمارهٔ قبل ملاحظه گردید، اثبات آن چندان هم سهل نیست و بسادگی به ذهن نمی‌رسد. به همین دلیل بود که در شماره پیش اقدام به انتشار آن کردیم. دراین میان آقای حسین غیور (عضوهیئت تحریریهٔ مجله) تقبل زحمت نموده و آن را به صورت مقدماتی و معمول که قابل فهم همگان باشد تنظیم نمودند. در حین تنظیم این مقاله، مجموعه مقالاتی از انجمن معلمین ریاضی انگلستان [۲] (از انتشارات دانشگاه کمبریج) که حاوی مقاله‌ای در زمینهٔ قضیهٔ مورلی بود، توجه مشارالیه را جلب کرد. ایشان ضمن توجه به ایراد اساسی برهان مذکور در این مقاله، از تعمیم بکار رفته در آن سود جسته و قضیه را رأساً برای سه مثلث متساوی‌الاضلاع حادث اثبات نمودند. این مقاله آمادهٔ چاپ بود که نکته‌ای در باب قضیهٔ مورلی که در مقالهٔ آقای امیدعلی کرم‌زاده [مندرج در همین شماره] آمده بود، توجه ایشان را بیش از پیش به خود معطوف داشت، و آن اینکه برای مثلث مفروض ۲۷ مثلث مورلی پدید می‌آید. ایشان با تبحر خاصی که در هندسه دارند و با کوشش فراوانی که رنج آن را فقط محققین واقعی علم تحمل می‌کنند، برهانی مبتنی بر برهان سادهٔ قدیمی که در شمارهٔ قبل ذکر شد اقامه نمودند که نشان می‌دهد ۱۸ مثلث مورلی همواره متساوی‌الاضلاع است. توضیح اینکه در باب این هجده مثلث مقاله‌ای در یک منبع خارجی [۱] (چاپ ۱۹۳۸) مندرج است که به سبب عدم دسترسی استفاده از آن مقدور نبوده است و راه حلی که ملاحظه خواهید کرد نتیجهٔ تحقیقات مستقیم نویسندهٔ مقاله است.

سردبیر

مقدمات عمومی

قبل از تعمیم قضیهٔ مورلی اشاره‌ای می‌شود به زاویه‌های جهتدار واقع در صفحه‌ای که جهت مثبت دوران در آن مشخص شده است.

۱ــ **زاویهٔ جهتدار.** اندازهٔ زاویهٔ جهتدار BAC که با نماد $\angle BAC$ نشان داده می‌شود، مقدار مثبت یا منفی دورانی است که ضلع AB را بر AC منطبق کند. معیار برابری زاویه‌ها براساس ۳۶۰° صورت می‌گیرد؛ یعنی دو زاویه درصورتی برابرند که اختلاف آنها $360^\circ k$ باشد. اندازهٔ اصلی زاویهٔ جهتدار که به صورت $Pr\angle BAC$ نوشته می‌شود، اندازهٔ جبری زاویهٔ جهتدار است در فاصلهٔ $(-180^\circ, 180^\circ]$؛ از این تعریف نتیجه می‌گیریم که $Pr\angle BAC = -Pr\angle CAB$، و به طور کلی $\angle BAC = -\angle CAB$.

۲ــ **زاویهٔ تقاطع دو خط.** اندازهٔ زاویهٔ تقاطع دو خط AB و AC که با نماد $\measuredangle BAC$ نشان داده می‌شود، مقدار مثبت یا منفی دورانی است برای اینکه خطی که از A و B می‌گذرد بر خطی که از A و C می‌گذرد منطبق شود. معیار برابری زاویهٔ تقاطع دو خط براساس ۱۸۰° استوار است. اندازهٔ اصلی زاویهٔ تقاطع دو خط AB و AC که به صورت $Pr\measuredangle BAC$ نوشته می‌شود، اندازهٔ آن در فاصلهٔ $[0, 180^\circ)$ است. در اینجا نیز $\measuredangle BAC = -\measuredangle CAB$.

۳ــ **زاویهٔ بدون جهت.** اندازهٔ زاویهٔ بدون جهت BAC که به صورت $\widehat{BAC}$ یا $\widehat{CAB}$ نشان داده می‌شود. یکی از اندازه‌های اصلی مثبت یا صفر این زاویه است.

تبصرهٔ ۱. زاویه‌های جهتدار را به صورتهای ذیل نیز نشان می‌دهند:

$$\angle BAC = (AB, AC) + 360^\circ k$$
$$\measuredangle BAC = \angle (AB, AC) + 180^\circ k,$$
$$\measuredangle (D, D') = \angle (D, D') + 180^\circ k,$$

که در رابطهٔ اخیر، $\measuredangle (D, D')$ مقدارمثبت یامنفی دورانی‌است که خط D را موازی D' قرار دهد.

تبصرهٔ ۲. گاهی از اوقات برای سهولت، زاویهٔ جهتدار را با همان نمادی که برای اندازه یا اندازهٔ اصلی آن وضع کردیم نشان خواهیم داد.

۴- احکام مربوط به زاویه‌های جهتدار. دربارهٔ زاویه‌های جهتدار احکام زیر را یادآوری می‌کنیم:

۴.۱. زاویه‌های حول یک نقطه. اگر A، B، C، D، و O نقطه‌های غیرواقع بر یک خط راست باشند آنگاه

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD = \angle AOD.$$

۴.۲. زاویه‌های مثلث. اگر A، B، و C نقطه‌های غیرواقع بر یک خط باشند آنگاه $Pr \angle ABC$، $Pr \angle BCA$، و $Pr \angle CAB$ جهت یکسان دارند و حاصلجمع آنها $\pm 180^\circ$ است.

۴.۳. زاویه‌های چند ضلعی. اگر A، B، C، ...، M، و N، n نقطهٔ واقع در یک صفحه باشند آنگاه

$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDE + \ldots + \angle MNA + \angle NAB = m;$$

که در آن، هرگاه n زوج باشد، $m = 0$ و هرگاه n فرد باشد، $m = \pm 180^\circ$

۵. نیمساز زاویهٔ جهتدار. نیمساز زاویهٔ جهتدار $\angle BAC$ خطی است مانند AM که در تساوی زیر صدق کند.

$$\sphericalangle BAM = \frac{1}{2} \angle BAC.$$

از این تعریف نتیجه می‌شود که

$$\sphericalangle BAM = \frac{1}{2} Pr \angle BAC + 180^\circ k.$$

بنابراین، نیمساز زاویهٔ جهتدار یک خط نامحدود است.

نیمساز زاویهٔ جهتدار دو خط $\sphericalangle BAC$ خطی است مانند AM به طوری که

$$\sphericalangle BAM = \frac{1}{2} \sphericalangle BAC.$$

از تساوی $\sphericalangle BAC = Pr \angle BAC + 180^\circ k$، با توجه به رابطهٔ فوق، نتیجه می‌شود که

$$\sphericalangle BAM = \frac{1}{2} Pr \angle BAC + 90^\circ k.$$

بنابراین زاویهٔ جهتدار دو خط دو نیمساز عمود بر هم دارد. زاویهٔ جهتدار نیمخط و خط مانند زاویهٔ جهتدار دو خط، دو نیمساز عمود برهم دارد. نیمساز زاویهٔ خارجی زاویهٔ $\angle BAC$ نیمساز زاویهٔ مجانب آنست. به موجب این تعریف هرگاه AD و AD' بترتیب نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ BAC باشند، خواهیم داشت:

$$\sphericalangle BAD = \frac{1}{2} Pr \angle BAC + 90^\circ.$$

$$\sphericalangle BAD = \frac{1}{2} Pr \angle BAC.$$

۶- سه‌ساز* زاویهٔ جهتدار. سه‌ساز زاویهٔ جهتدار $\angle BAC$ خطی است مانند AD به طوری که

$$\sphericalangle BAD = \frac{1}{3} \angle BAC.$$

برای تعیین سه سازهای زاویهٔ $\angle BAC$ تساوی فوق به‌صورت گستردهٔ زیر می‌نویسیم:

$$\sphericalangle BAD = \frac{1}{3} (Pr \angle BAC + 360^\circ k).$$

از این رابطه، سه سه‌ساز AD_1، AD_2، و AD_3 برای زاویهٔ $\angle BAC$ به شرح زیر بدست می‌آید: سه‌ساز AD_1 که سه‌ساز اول نامیده می‌شود، خط نامحدودی است که در تساوی $\sphericalangle BAD_1 = \frac{1}{3} Pr \angle BAC$ صدق می‌کند. AD_2 و AD_3 سه‌سازهای دوم و سوم ازدوران AD_1 به اندازهٔ 120° و 240°، در جهت زاویهٔ $Pr \angle BAC$ مشخص می‌شوند. بنابراین،

$$\sphericalangle BAD_2 = \frac{1}{3} Pr \angle BAC + 120^\circ \varepsilon,$$

$$\sphericalangle BAD_3 = \frac{1}{3} Pr \angle BAC - 120^\circ \varepsilon,$$

که در آن ε مساوی $+1$ یا -1 است، برحسب اینکه $Pr \angle BAC$ مثبت یا منفی باشد. سه‌ساز زاویهٔ جهتدار دو خط AB و AC، خطی است مانند AD که در تساوی $\sphericalangle BAD = \frac{1}{3} \sphericalangle BAC$ صدق کند. در اینجا نیز از بسط طرف دوم این تساوی سه‌ساز AD_1، AD_2، و AD_3 بدست می‌آید، و همینطور برای زاویهٔ جهتدار نیمخط با خط.

۷- دایره. اگر M نقطهٔ غیرمشخصی از دایرهٔ مفروضی

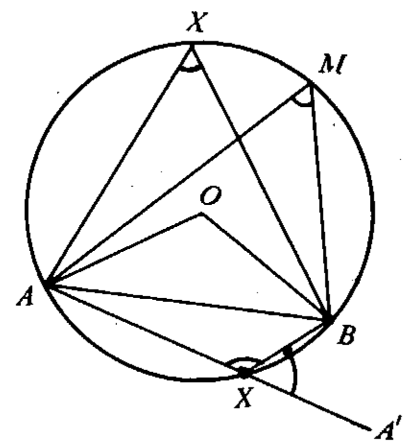
به مرکز O باشد، و A، B دو نقطهٔ معین از این دایره باشند، آنگاه:

$$A\widehat{M}B = \frac{1}{۲} A\widehat{O}B = \alpha.$$

این تساوی را با توجه به تعریف زاویهٔ جهتدار دو خط می‌توان به‌صورت کلی زیر نوشت:

$$\measuredangle AMB = \alpha$$

(با معیار ۱۸۰°). اگر X نمایندهٔ نقطهٔ دلخواهی از این دایره باشد آنگاه در حالتی که X و M در یک طرف AB باشند، به موجب ویژگیهای زاویه‌های محاطی $A\widehat{X}B = A\widehat{M}B$ و در حالتی که X و M در دو طرف AB باشند، به موجب خواص چهارضلعی‌های محاطی $A'\widehat{X}B = A\widehat{M}B$ (شکل زیر). از دو تساوی اخیر، به ازای هر نقطهٔ X از دایره رابطهٔ زیر بدست می‌آید:



$$\measuredangle AXB = \measuredangle AMB = \alpha.$$

به عکس اگر این تساوی برقرار باشد، ثابت می‌شود که X نقطه‌ای است از دایرهٔ AMB. بنابرآنچه که گفته شد دایرهٔ AMB را می‌توان مجموعهٔ نقطه‌هائی مانند X دانست که $\measuredangle AXB = \measuredangle AMB = \alpha$. از این‌رو دایره را به صورت زیر هم مشخص می‌کنند:

$$\{X: \measuredangle AXB = \alpha\}.$$

از آنچه گفته شد قضیهٔ زیر برای چهار نقطهٔ غیرواقع بر یک خط از صفحه عاید می‌شود:

قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه چهار نقطهٔ A، B، C، و D متعلق به یک دایره باشند آنست که

$$\measuredangle ABC = \measuredangle ADC.$$

(علائمی که تا اینجا در مورد زوایای جهتدار و زوایای تقاطع دو خط بکار رفت، مأخوذ از مقالهٔ ر. ک. لینس[1] تحت عنوان «زاویه‌ها، دایره‌ها، و قضیهٔ مورلی» مندرج در مرجع [۲] است.)

مقدمات تعمیم قضیهٔ مورلی

۸- مثلث در صفحهٔ جهتدار. می‌دانیم صفحه‌ای را که در آن جهت مثبت دوران مشخص باشد، صفحهٔ جهتدار گویند. انتخاب جهت مثبت برای صفحه اختیاری است و طبق معمول، جهت از راست به چپ ناظر (جهت دایرهٔ مثلثاتی) را جهت مثبت فرض می‌کنیم.

۸.۱. جهت مثلث. فرض کنیم ABC مثلثی در صفحهٔ جهتدار باشد و متحرکی محیط مثلث را از A به B و از B به C و از C به A دور بزند. اگر جهت دوران موافق جهت صفحه باشد، جهت مثلث مثبت و در غیر این صورت منفی تعریف می‌شود. در مثلث ABC با جهت مثبت اندازهٔ اصلی زاویه‌های $\angle BAC$، $\angle CBA$، و $\angle ACB$ مثبت و به A، B، و C نموده می‌شود؛ در این صورت اندازهٔ اصلی سه زاویهٔ دیگر $\angle CAB$، $\angle ABC$، و $\angle BCA$ منفی و مساوی $-A$، $-B$، $-C$ است.

۸.۲. سه سازهای زاویه‌های مثبت و منفی سه رأس A، B، و C با زاویهٔ جهتدار تقاطع اضلاعی که دو بدو از این راسها می‌گذرد بترتیب به D_A، D_B، و D_C، و در حالت منفی به D_{-A}، D_{-B}، و D_{-C} نشان داده می‌شود. هر سه‌ساز برحسب اینکه از مرتبهٔ ۱ یا ۲ یا ۳ باشد، در سمت راست بالای آن علامت $'$، $''$، و $'''$ قرار می‌دهیم. (در این مقاله مثلث ABC در تمام حالتها جهت مثبت دارد.)

۸.۳. زاویهٔ قطبی سه‌ساز. زاویهٔ قطبی سه‌ساز مفروض، زاویهٔ جهتدار تقاطع ضلع اول زاویه با آن سه‌ساز است. زاویهٔ قطبی سه‌سازهای نظیر D_A، D_B، و D_C را به α، β، و γ نشان می‌دهیم. بنابراین، علامت زاویهٔ قطبی سه‌سازهای نظیر D_A برحسب اینکه از مرتبهٔ اول یا دوم یا سوم باشد، α'، α''، و α''' است؛ همین‌طور برای β و γ. از تعریف سه‌ساز، سه دستور زیر برای زاویه‌های قطبی α، β، و γ از مثلث ABC بدست می‌آید:

$$\alpha = \measuredangle BAD_A = \frac{1}{۳}\angle BAC$$
$$= \frac{A}{۳} + ۱۲۰^\circ(۰, ۱, -۱) + ۱۸۰^\circ k,$$

$$\beta = \measuredangle CBD_B = \frac{1}{۳}\angle CBA$$
$$= \frac{B}{۳} + ۱۲۰^\circ(۰, ۱, -۱) + ۱۸۰^\circ k,$$

$$\gamma = \sphericalangle ACD_c = \frac{1}{3}\angle ACB$$
$$= \frac{C}{3} + 120°\,(0,\ 1,\ -1) + 180°k.$$

اگر α، β، و γ زاویهٔ قطبی سه سازهای زاویه‌های تقاطع اضلاع دو بدو باشند در طرف دوم تساویهای فوق بجای ۱۲۰° عدد ۶۰° را قرار می‌دهیم.

۸.۴. خواص زاویه‌هـای قطبی سه‌سازهای مثلث. از سه دستور فوق بسادگی می‌توان تساویهای بند الف و ب را به شرح ذیل نتیجه گرفت.

(الف) $3\alpha = A,\ 3\beta = B,\ 3\gamma = C;$

در این تساویها معیار برای زوایا ۳۶۰° و برای زاویه‌های تقاطع اضلاع ۱۸۰° است. هرگاه جهت مثلث منفی باشد، طرفهای دوم با علامت — شروع می‌شود.

(ب)

I. برحسب اینکه هـر سه‌ساز از سه رأس مثلث هم‌مرتبه یا ناهم مرتبه باشند، مجموع زاویه‌های قطبی آنها با معیار ۱۸۰° مساوی ۶۰° است.

در حالتی که سه‌سازها هم‌مرتبه‌اند، سه تساوی ذیل حاصل می‌شود.

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 60°,\ \alpha'' + \beta'' + \gamma'' = 60°$$
$$\alpha''' + \beta''' + \gamma''' = 60°.$$

در حالتی که سه‌سازها هم‌مرتبه نباشند، شش تساوی ذیل حاصل است که شمارهٔ ترتیب ممکن سه علامت ′، ″، و ‴ روی α، β، و γ است.

$$\alpha' + \beta'' + \gamma''' = 60°, \qquad \alpha' + \beta''' + \gamma'' = 60°,$$
$$\alpha'' + \beta' + \gamma''' = 60°, \qquad \alpha'' + \beta''' + \gamma' = 60°,$$
$$\alpha''' + \beta' + \gamma'' = 60°, \qquad \alpha''' + \beta'' + \gamma' = 60°.$$

II. مجموع زاویه‌های قطبی سه‌ساز از سه رأس مثلث که دو سه‌ساز از یک مـرتبه و سه‌ساز دیگر از مرتبهٔ قبلی باشد، با معیار ۱۸۰° مساوی ۶۰° — است.

$$\alpha''' + \beta' + \gamma' = -60°, \quad \alpha' + \beta'' + \gamma'' = -60°,$$
$$\alpha' + \beta''' + \gamma' = -60°, \quad \alpha'' + \beta' + \gamma'' = -60°,$$
$$\alpha' + \beta' + \gamma''' = -60°, \quad \alpha'' + \beta'' + \gamma' = -60°,$$
$$\alpha'' + \beta''' + \gamma''' = -60°,$$
$$\alpha''' + \beta'' + \gamma''' = -60°,$$
$$\alpha''' + \beta''' + \gamma'' = -60°.$$

III. مجموع زاویه‌های قطبی سه ساز از سه رأس مثلث که دو سه‌ساز از یک‌مرتبه و سه‌ساز دیگر از مـرتبهٔ بعدی باشد، با معیار ۱۸۰° مساوی صفر است.

$$\alpha'' + \beta' + \gamma' = 0, \qquad \alpha''' + \beta'' + \gamma'' = 0,$$
$$\alpha' + \beta'' + \gamma' = 0, \qquad \alpha'' + \beta''' + \gamma'' = 0,$$
$$\alpha' + \beta' + \gamma'' = 0, \qquad \alpha'' + \beta''' + \gamma''' = 0,$$
$$\alpha' + \beta''' + \gamma''' = 0,$$
$$\alpha''' + \beta' + \gamma''' = 0,$$
$$\alpha''' + \beta''' + \gamma' = 0.$$

طرف اول ۲۷ تساوی که برای زاویه‌هـای قطبی سه‌سازها گفته شد، حالتهـای ممکن عبـارت $\alpha + \beta + \gamma$ به ازای علامتهای ′، ″، و ‴، است کـه به هر یک از سه جزء α، β، و γ تعلق می‌گیرد.

۸.۵. تشکیـل مثلث مـورلی. از تـقاطـع سه‌سازهـای D^n_A، D^m_B، و D^p_C بـترتیب بـا سه‌سـازهـای D^m_{-B}، D^p_{-C}، و $D^{(n)}_{-A}$ سه نقطهٔ C'، A'، و B' بدست مـی‌آید (n، m، و p بیان‌کننـدهٔ مـرتبـهٔ سه‌ساز است). مثلث $C'A'B'$، مثلث مـورلـی نظیر سه‌سازهای $(D_A\ D_B\ D_C)$ از مثلث ABC را برای رعایت اختصار، مثلث مورلی $(D_A\ D_B\ D_C)$ و $(D_A\ D_B\ D_C)$ را سه‌سازهای سازنده (یـا به اختصار سازنده) مثلث مـورلـی $A'B'C'$ گـوئیم مثلث مورلی $(D_A\ D_B\ D_C)$ را بـا روش نمـادی زیر می‌توان مشخص کرد.

$$C'\,(D^n_A \times D^m_{-B}),\quad A'(D^m_B \times D^p_{-C}),\quad B'(D^p_C \times D^n_{-A})$$

تبصره. نماد فوق را با تغییر موضع عنصرهای آن می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$B'(D_{-A} \times D_C),\ A'(D_{-C} \times D_B),\ C'(D_{-B} \times D_A).$$

از ایـن نماد طبق تعریف مثلث مورلی بـه این نتیجه می‌رسیم. $A'C'B'$ مثلث مـورلی نظیـر $(D_{-A}\ D_{-C}\ D_{-B})$ است. مثلث مـورلی $(D_{-A}\ D_{-C}\ D_{-B})$ همـان مثلث مورلی $D_A\ D_B\ D_C$ است با این تفاوت که جهت آن تغییر کرده است.

۸.۶. تعداد مثلثهای مورلی. طبـق تعـریف تشکیل مثلث مورلی تعـداد این مثلثها بـه اندازهٔ تعداد سه‌سازهـای سازندهٔ $(D^n_A\ D^m_B\ D^p_C)$ است کـه در آن وضع A، B، و C ثـابت و n، m، و p که مرتبهٔ سه‌سازهای نظیر را با علامتهای ′، ″، و ‴ تعیین می‌کنند، حالتهای ممکن متفاوت را به خود می‌گیرد. شمارهٔ این سازنده‌ها بـه اندازهٔ شمارهٔ ترکیبهای زاویه‌های قطبی نظیر آنها در عبـارت $\alpha + \beta + \gamma$ است کـه در بند (ب) از ۸.۴ مورد بررسی واقع شد. بنابراین شمارهٔ مثلثهای مورلی ۲۷ است. ۲۷ سازندهٔ $D^n_A\, D^m_B\, D^p_C$ به سه دسته تقسیم می‌شوند:

(الف) ۹ سازندهٔ از سه‌سازهای هم‌مرتبه یا ناهم‌مرتبه که مجموع زاویه‌های قطبی آنها ۶۰° است. خواهیم دید که جهت مثلثهای نظیر این سازنده‌ها با جهت مثلث مفروض یکسان است.

(ب). ۹ سازنده از سه سازهائی که دو تا از آنها دارای یک مرتبهٔ مشترک و سومی دارای مـرتبهٔ قبلی آن دو است. در این حالت مجموع زاویه‌های قطبی سازنده‌ها ۶۰° — است، و جهت مثلثهای مورلی نظیر برخلاف جهت مثلث مفروض است.

(ج). ۹ سازنده از سه‌سازهائی‌که دو تا یک مرتبهٔ مشترک دارند و سومی مرتبهٔ بعدی آن را داراست. دراین حالت مجموع زاویه‌هـای قطبی سازنده‌هـا صفر است. دایز[2] در ۱۹۳۸ برای مثلث مفروض ۲۷ مثلث مورلی پیدا کرد که ۱۸ عدد از آنهـا متساوی‌الاضلاع است [۱].

قضیهٔ مورلی

از ۲۷ مثلث مورلی ۱۸ مثلث که مجموع زاویه‌های قطبی سه‌سازهای سازنـدهٔ آنها با معیار $180°$ مساوی $\pm 60°$ است متساوی‌الاضلاع می‌باشد. از این ۱۸ مثلث ۹ مثلث که مجموع زاویه‌های قطبی سازنده‌های آنهـا $60°$ است بـا مثلث مفروض هم جهت و بقیه در خلاف جهت آن می‌باشند.

برهان. اساس این برهان مبتنی بر بـرهان مقدماتی است که در شمـارهٔ قبل مجله درج گردید؛ بـا این تفاوت کـه در آن اندازهٔ جبری بکار رفته و بـرای همهٔ حالتها بـا جزئی تفاوت صدق می‌کند. رسم شکل برای ۱۸ مثلث مورلی مـورد بحث، با دربرگرفتن تمام حالتها، به ۷ شکل تقلیل پیدا کرده که اگر محض رعایت حال مبتدیان نبود، از این ۷ شکل ۳ شکل هم قابل حذف بود. برای درک دقیق برهان ابتدا به شکل ۱ تـوجه کنید و بعد به سایر شکلها.

(۱). جهت مثلث ABC را مثبت (مـوافق جهت دایـرهٔ مثلثاتی) و زاویهٔ A را حاده فرض می‌کنیم. سه‌سازهای دو زاویهٔ $\angle BCA$ و $\angle CBA$ را رسم کرده و نقطهٔ تقـاطع آنها، A' را تعیین می‌کنیم. سه‌سازهای دو زاویهٔ ACB و ABC را رسم کرده و O نقطهٔ تقاطع آنها را مشخص می‌کنیم. چون نقطهٔ O در اثبات قضیه نقش اساسی دارد و در حالت خـاصی کـه زاویهٔ A قائمه باشد برای بعضی حالتهـا وجود ندارد، از ابتدای کار زاویهٔ A را حاده اختیار کردیم. بدیهی است که این فرض به‌کلیت برهان لطمه نمی‌زند، زیرا هر مثلث لااقل دارای دو زاویهٔ حاده است.

(۲). CA' و BA' بترتیب نیمسازهای دو زاویهٔ $\sphericalangle BCO$، $\sphericalangle CBO$، و BA' و BO نیمسازهـای دو زاویـهٔ $\sphericalangle CBO$ و $\sphericalangle A'BA$ است. زیرا از دو فرض $\sphericalangle BCA' = \frac{1}{3}\sphericalangle BCA$ و $\sphericalangle OCA = \frac{1}{3}\sphericalangle BCA$ با توجه به تساوی

$$\sphericalangle BCA' + \sphericalangle A'CO + \sphericalangle OCA = \sphericalangle BCA,$$

نتیجه می‌شود که

$$\sphericalangle BCA' = \sphericalangle A'CO = \sphericalangle OCA = \frac{1}{3}\sphericalangle BAC.$$

بهمین ترتیب برای BA' و BO تساوی ذیل بدست می‌آید.

$$\sphericalangle BCA' = \sphericalangle A'CO = \sphericalangle OCA = \frac{1}{3}\sphericalangle CBA.$$

(۳). نقطهٔ O را به A' وصل می‌کنیم. چون A' (عطف به شمارهٔ قبل) نقطهٔ تقـاطع نیمسازهـای دو رأس B و C از مثلث OBC است، OA' نیمساز زاویهٔ $\sphericalangle BOC$ می‌باشد. زیرا، هرگاه درمثلث مفروض یکی از دونیمساز زاویهٔ یک رأس را بایکی از دو نیمساز زاویهٔ نظیر رأس دیگر قطع کنیم نقطهٔ تقاطع یکی از چهار مرکـز دایرهٔ محاطی مثلث بوده و خطی که آن را به رأس سوم وصل مـی‌کند یکـی از دو نیمـساز زاویـهٔ نظیر رأس سوم خواهد شد.

(۴). از A' دو خـط Δ و Δ' را رسم می‌کنیم که با OA' زاویهٔ $30°$ بسازند. بدیهی است کـه این دو خط نسبت به OA' قرینه‌اند. OB و OC را که نیز نسبت به OA' قرینه‌اند در نظر می‌گیریم؛ OB خطهای Δ و Δ' را بتـرتیب در C' و C''، و OC خطهای Δ و Δ' را در B'' و B' قطع می‌کند (ش. ۱). بااین عمل B' و C' نسبت به OA' قرینه‌اند، و همین طـور B'' و C''؛ و در نتیجه دومثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'C'$ و $A'B''C''$ پدید می‌آید کـه در دو جهت مختلف قرار گرفته‌اند. و $C'(AC' \times D_{-B})$، $B'(D_C \times AB')$، $A'(D_B \times D_{-C})$ و ...

(۵). دو نقطهٔ D و D' قرینه‌های A' نسبت به OC و OB را تعیین کرده و آنها را بترتیب به B' , C' وصل می‌کنیم تا خط شکستهٔ $D'C'B'D$ حـاصل شود. از این دو تقارن و اینکه OA' محور تقـارن مثلثهای متساوی‌الاضلاع است، بسادگـی می‌توان دریافت که خـط شکستهٔ $D'C'B'D$ منتظـم است و OA' محور تقارن آن می‌باشد:

$$D'C' = C'B' = B'D\,,\ \angle D'C'B' = \angle C'B'D;$$

و همین‌طور خط شکستهٔ $D'C''B''D$ دارای این ویژگیها است.

(۶). از دو مثلث متساوی‌الاضلاعی کـه در (۴) بدست آوردیم مثلثی را که جهت آن با جهت مثلث ABC یکسان است، مثلاً مثلث $A'B'C'$ را، در نظر می‌گیریم و اثبات قضیه را برای ۹ حالتی که در آن $\alpha+\beta+\gamma = 60°$ است، دنبال می‌کنیم. سپس برهان را دربارهٔ مثلث $A'B''C''$ که جهت‌آن مخالف جهت مثلث مفروض است برای ۹ حالت دیـگر ادامه می‌دهیم. بـرای اثبات اینکه $A'B'C'$ مثلث مورلی است باید نشان دهیم که AC' و AB' سه‌سازهای هم‌مرتبه از دو زاویهٔ مثبت و منفی نظیر رأس A می‌باشند. برای این منظور باید ثابت کنیم که دایرهٔ محیطی خط شکستهٔ $D'C'B'D$ از A می‌گذرد و بـرای اثبات این حکم باید اندازهٔ زاویه‌هـای $\sphericalangle BOC$ و زاویه‌هـای چند ضلعی منتظم و بالاخره دوزاویهٔ $\sphericalangle D'B'D$ و $\sphericalangle D'C'D$ را برحسب α، β، و γ حساب کنیم؛ و نشان دهیم که دو زاویهٔ اخیر با $\sphericalangle BAC$ برابرند.

محاسبهٔ $\measuredangle BOC$. چون OB و OC بترتیب سه‌سازهای $\angle ABC$ و $\angle ACB$ می‌باشند، $\measuredangle ABO = -\beta$ و $\measuredangle ACO = \gamma$. در مثلث OBC این رابطه بین زاویه‌های تقاطع ضلعها برقرار است.

$$\measuredangle BOC + \measuredangle OCB + \measuredangle CBO = 0,$$

$$\begin{aligned}\measuredangle BOC &= \measuredangle BCO + \measuredangle BOC \\ &= (3 \measuredangle BCA + \measuredangle ACO) \\ &\quad + (\measuredangle OBA + \measuredangle ABC) \\ &= (-3\gamma + \gamma) + (\beta - 3\beta) \\ &= -2(\gamma + \beta).\end{aligned}$$

چون $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$، نتیجه می‌شود که

$$\measuredangle BOC = 2\alpha + 60^\circ$$

محاسبهٔ زاویهٔ خط شکستهٔ $\measuredangle C'B'D$. در مثلث $OC'B'$ رابطهٔ بین زاویه‌های راستای سه ضلع را نوشته و با توجه به دو تساوی $\measuredangle OB'C' = \measuredangle B'C'O$ و $\measuredangle C'OB' = \measuredangle BOC$، این تساوی حاصل می‌شود:

$$\measuredangle C'B'O = \frac{1}{2} \measuredangle BOC = \alpha + 30^\circ + 90^\circ k,$$

$$\measuredangle C'B'O = \measuredangle C'B'C = \measuredangle C'B'A' + \measuredangle A'B'C.$$

چون مثلث $A'B'C'$ هم‌جهت با مثلث ABC و در جهت مثبت صفحه است، $\measuredangle C'B'A' = 60^\circ$ و از اینرو داریم:

$$\measuredangle C'B'O = 60^\circ + \measuredangle A'B'C.$$

نتیجه می‌شود که

$$\measuredangle A'B'C = \alpha - 30^\circ + 90^\circ k,$$

چون D قرینهٔ A' نسبت به CB' است،

$$\measuredangle A'B'D = 2\measuredangle A'B'C = 2\alpha - 60^\circ,$$

$$\begin{aligned}\measuredangle C'B'D &= \measuredangle C'B'A + \measuredangle A'B'D \\ &= 60^\circ + 2\alpha - 60^\circ = 2\alpha,\end{aligned}$$

$$\measuredangle C'B'D = \measuredangle D'C'B' = 2\alpha.$$

محاسبهٔ $\measuredangle D'B'D$. در مثلث $D'B'C'$ که دو زاویهٔ مساوی دارد، چون مانند مثلث $OC'B'$ عمل کنیم نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\measuredangle D'B'C' &= \frac{1}{2} \measuredangle D'C'B' \\ &= \frac{1}{2}(2\alpha + 180^\circ k) = \alpha + 90^\circ k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\measuredangle D'B'D &= \measuredangle D'B'C' + \measuredangle C'B'D \\ &= \alpha + 90^\circ k + 2\alpha = 3\alpha + 90^\circ k.\end{aligned}$$

چون OA' محور تقارن خط شکسته است،

$$\measuredangle D'B'D = \measuredangle D'C'D = 3\alpha + 90^\circ k.$$

چون همواره $\angle D'AD = \angle BAC\ 3\alpha$، از این تساوی و تساوی اخیر به ازای $k = 0$ دو تساوی ذیل بدست می‌آید.

$$\angle D'B'D = \measuredangle D'AD,\ \measuredangle D'C'D = \measuredangle D'B'D.$$

از این تساوی عطف به بند ۷ مقدمات عمومی، ثابت می‌شود که پنج نقطهٔ A، D'، C'، B'، و D بر یک دایره‌اند.

(۷). این قسمت مربوط به دو حالتی است که زاویهٔ قطبی سه‌سازهای سازندهٔ آنها در تساوی $\alpha + \beta + \gamma = \pm 60^\circ$ صدق می‌کند. برای اینکه ثابت کنیم $A'C$ و AB' سه‌سازهای هم‌مرتبه از دو زاویهٔ $\angle BAC$ و $\angle CAB$ هستند، از پنج نقطه دایره‌ای می‌گذرانیم. در این دایره کمانهای نظیر سه وتر $D'C'$ و $C'B'$ و $B'D$ با هم برابرند، بنابراین زاویه‌های محاطی که اضلاعشان از دو سر این وتر بگذرد مساوی یا مکمل یکدیگرند. در همه حالتها این تساویها برقرار است:

$$\begin{aligned}\measuredangle D'AC' &= \measuredangle C'AB' = \measuredangle B'AD \\ &= \frac{1}{3}(\measuredangle D'AC' + \measuredangle C'AB' + \measuredangle B'AD) \\ &= \frac{1}{3}\measuredangle D'AD = \frac{1}{3}\measuredangle (A + 180^\circ k)\end{aligned}$$

$$(1)\ \measuredangle BAC' = \frac{A}{3} + 60^\circ k,$$

$$\begin{aligned}\measuredangle DAB' &= \measuredangle B'AC' = \measuredangle C'AD' \\ &= \frac{1}{3}(\measuredangle DAB' + \measuredangle B'AC' + \measuredangle C'AD') \\ &= \frac{1}{3}\measuredangle DAD'.\end{aligned}$$

و همین‌طور

$$(2)\ \measuredangle CAB' = \frac{1}{3}\measuredangle CAB = \left(-\frac{A}{3} - 60^\circ k\right).$$

عدد دلخواه k در هر دو تساوی (۱) و (۲) یکی است. اگر k به پیمانهٔ ۳ برابر ۰ یا ۱ − یا ۱ + باشد سه سازهای مربوطه یعنی AC' و AB' سه سازهای مرتبهٔ یک یا دو یا سه از زاویه‌های $\measuredangle BAC$ و $\measuredangle CAB$ می‌باشند.

(۸). برهان را دربارهٔ مثلث $A'B''C''$ که جهت آن مخالف جهت مثلث مفروض است برای ۹ مثلثی که مجموع زاویه‌های قطبی سازنده‌های آنها -60° است، عیناً مانند حالت قبل عمل می‌کنیم. این شباهت به اندازه‌ای کامل است که تکرار آن بی‌مورد است. برای ۹ مثلث مورلی‌که مجموع زاویه‌های قطبی سازنده‌ها با معیار 180° صفر است. عملیات بند (۶) را با فرض $\alpha + \beta + \gamma = 0$ در دو حالت که جهت مثلث مورلی موافق یا مخالف جهت مثلث باشد انجام می دهیم. به نتیجهٔ

$$\measuredangle DB'D' = 3\alpha \pm 90^\circ + 90^\circ k$$

می‌رسیم یعنی ۵ نقطهٔ D'، C'، B'، D، و A مگر در حالتهای

خاص بر یک دایره نیستند. بنابر این بطور کلی مثلث متساوی الاضلاع $A'B'C'$ مثلث مورلی ABC نمی‌باشد.

نتیجه. از بند (۴) برهان قضیهٔ مورلی به این نتیجه می‌رسیم که هرگاه سه‌سازهای سازندهٔ دو مثلث مورلی هم نام و هم مرتبه باشند، این دو مثلث در رأس نظیر این دو سه‌ساز با هم مشترکند و راستای دو ضلع از دو مثلث که از این رأس می‌گذرد برهم منطبق می‌باشد. برای مثال، در شکل (۱) مثلثهای نظیر $D'_AD'_BD'_C$ و $D'''_AD'_BD'_C$ در رأس A' مشترکند و راستای $A'B'$ و $A'C'$ بترتیب بر راستای $A'C''$ و $A'B''$ منطبق است. از آنچه گفته شد به این نتیجه می‌رسیم: در هر ۱۸ مثلث متساوی‌الاضلاع مورلی راستای اضلاع موازی و منطبق است.

محاسبهٔ ضلع مثلث مورلی در تمام حالتها

در ۹ حالت اول که مجموع زاویه‌های قطبی سازنده‌ها ۶۰° است، AB' و AC' را از دو مثلث $AB'C$ و $AC'B$ به کمک قضیهٔ سینوسها که برای زاویهٔ تقاطع اضلاع مثلث نوشته می‌شود، به شرح زیر محاسبه می‌کنیم؛ آنگاه $B'C'$ را از مثلث $A'B'C'$ با قضیهٔ کسینوسها بدست می‌آوریم.

$$\frac{AB'}{\sin\gamma} = \pm\frac{AC}{\sin\sphericalangle CB'A},$$

از اینجا

$$\frac{AB'}{\sin\gamma} = \frac{۲R\sin ۳\beta}{\sin(\gamma+\alpha)}$$

با توجه به اینکه در این حالتها $\alpha+\beta+\gamma = ۶۰^\circ$،

$$AB' = \pm ۸R\sin\beta\sin\gamma\sin(۶۰^\circ+\gamma)$$

(*)

$$AC' = \pm ۸R\sin\beta\sin\gamma\sin(۶۰^\circ+\gamma)$$

در دو تساوی بالا، با توجه به اینکه در ۹ مثلث هرسه‌ساز هم مرتبه یا ناهم مرتبه‌اند، علامت طرف دوم در هر دو تساوی + یا − است.

$$B'C'^۲ = (AC' - AB')^۲ = ۱۶R^۲\sin^۲\beta\sin^۲\gamma$$
$$[\sin^۲(۶۰^\circ+\beta) + \sin^۲(۶۰^\circ+\gamma)$$
$$- ۲\sin(۶۰^\circ+\beta)\sin(۶۰^\circ+\gamma)\cos\alpha].$$

$$\frac{B'C'^۲}{۱۶R^۲\sin^۲\beta\sin^۲\gamma} = \frac{۱-\cos(۱۲۰^\circ+۲\beta)}{۲} + \frac{۱-\cos(۱۲۰^\circ+۲\gamma)}{۲} -$$
$$\cos\alpha\,[\cos(\beta-\gamma) - \cos(۱۲۰^\circ+\beta+\gamma)],$$

$$\frac{B'C'^۲}{۱۶R^۲\sin^۲\beta\sin^۲\gamma} = ۱ - \cos(۱۲۰^\circ+\beta+\gamma)$$
$$\cos(\beta-\gamma) -$$
$$\cos\alpha\,[\cos(\beta-\gamma) - \cos(۱۲۰^\circ+\beta+\gamma)].$$

ولی،

$$\cos(۱۲۰^\circ+\beta+\gamma) = \cos(۱۲۰^\circ+۶۰^\circ-\alpha)$$
$$= -\cos\alpha;$$

بنابراین،

$$B'C'^۲ = ۱۶R^۲\sin^۲\beta\sin^۲\gamma\sin^۲\alpha.$$

در ۹ مثلثی‌که $\alpha+\beta+\gamma = -۶۰^\circ$، چون نظیر آنچه که گفته شد عمل کنیم دو تساوی (*) به صورت ذیل درمی‌آیند:

$$AB' = \pm ۸R\sin\beta\sin\gamma\sin(۶۰^\circ-\beta),$$
$$AC' = \pm ۸R\sin\beta\sin\gamma\sin(۶۰^\circ-\gamma).$$

در اینجا نیز با توجه به اینکه دو سه‌ساز نظیر دو رأس هم‌مرتبه و سه‌ساز نظیر رأس سوم مرتبهٔ مادون آنها را دارد، علامت دو طرف تساوی با هم + یا − است. و چون مانند قبل عمل کنیم، به این نتیجه می‌رسیم که

$$B'C'^۲ = ۶۴R^۲\sin^۲\alpha\sin^۲\beta\sin^۲\gamma$$

پس برای هردو حالت داریم:

$$B'C' = \pm ۸R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

چون در دستور فوق به جای α، β، و γ نظیر آنها را برحسب $\frac{A}{۳}$، $\frac{B}{۳}$، و $\frac{C}{۳}$ قرار دهیم و علامت طرف دوم را طوری اختیارکنیم که حاصل مثبت باشد، زاویه‌های مثلث مفروض بدست می‌آید. ■

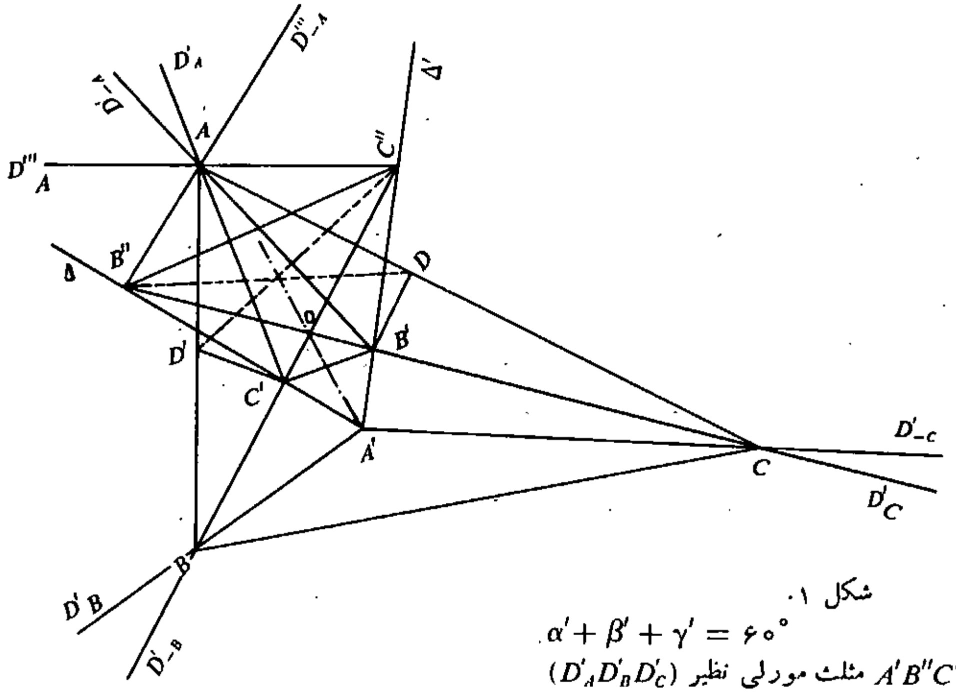
مراجع

1. Dobbs, W. J Morley's Triangle: *Math. Gazette*, February 1938.
2. Lyness, R. C., Angles, Circles and Morley's Theorem: Mathematical Reflections, Cambridge University Press, 1970

یادداشتها

• ـ اصطلاح **سه‌ساز** را (بجای تثلیث کن زاویه)، آقای جمالی سردبیر مجله وضع کرده‌اند.

۱- R.C. Lyness
۲- W.J. Dobbs



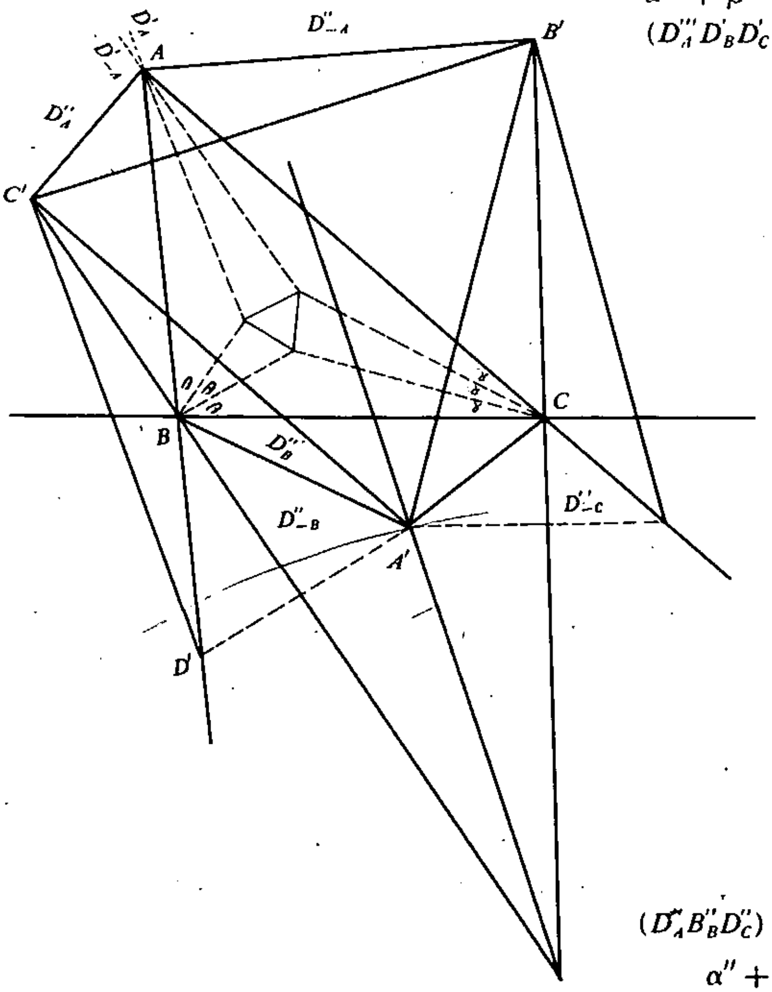
شکل ۱

$\alpha' + \beta' + \gamma' = ۶۰^\circ$

$A'B''C'$ مثلث مورلی نظیر $(D'_A D'_B D'_C)$

$\alpha''' + \beta' + \gamma' = -۶۰^\circ$

$A'B''C'$ مثلث مورلی نظیر $(D'''_A D'_B D'_C)$

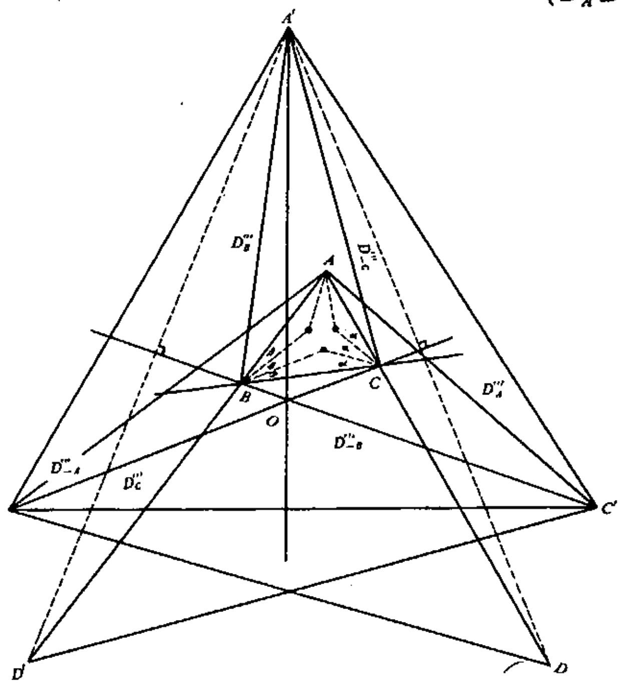


شکل ۲ مثلث مورلی نظیر $(D'''_A B''_B D''_C)$

$\alpha'' + \beta'' + \gamma'' = ۶۰^\circ$

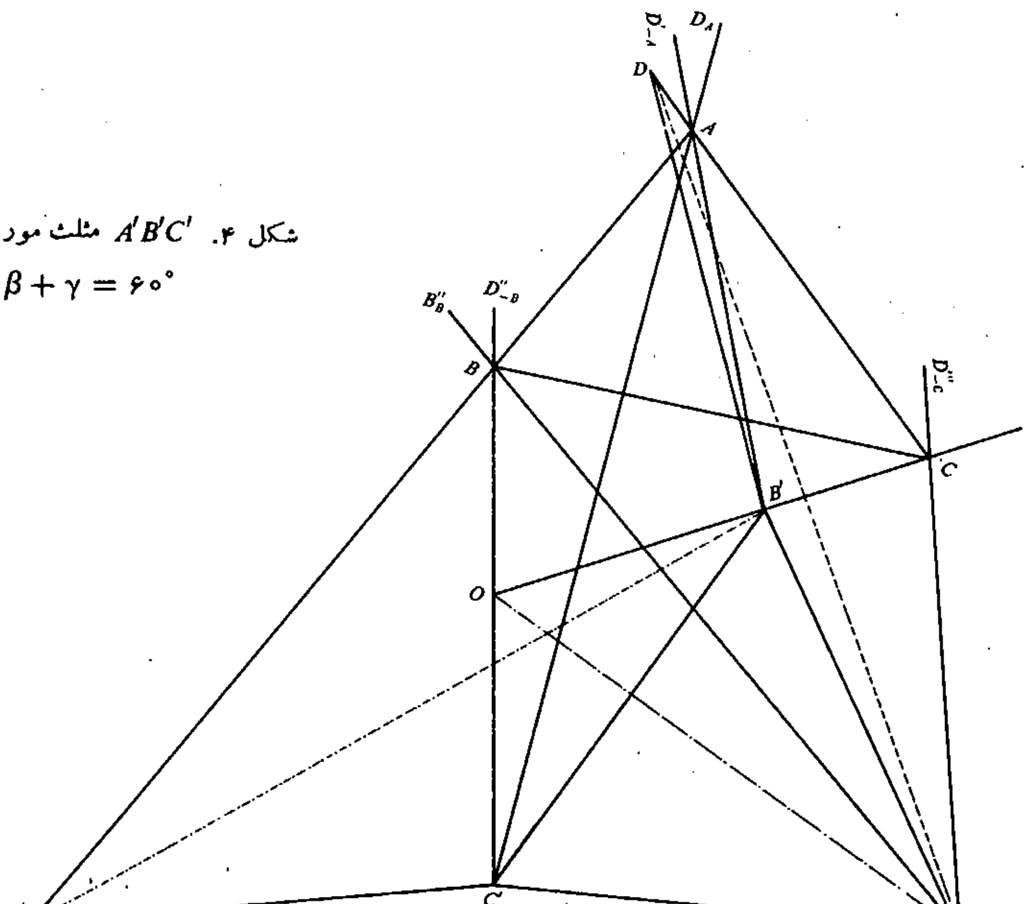
شکل ۳. مثلث مورلی نظیر $(D'''_A D'''_B D'''_C)$

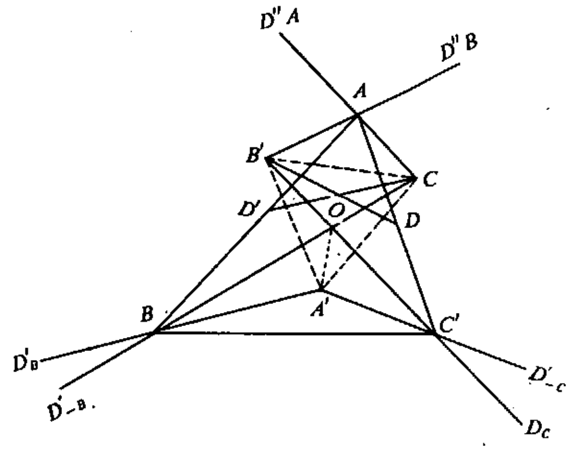
$\alpha + \beta + \gamma =$ ۶۰°



شکل ۴. $A'B'C'$ مثلث مورلی $(D'_A D''_B D''_C)$

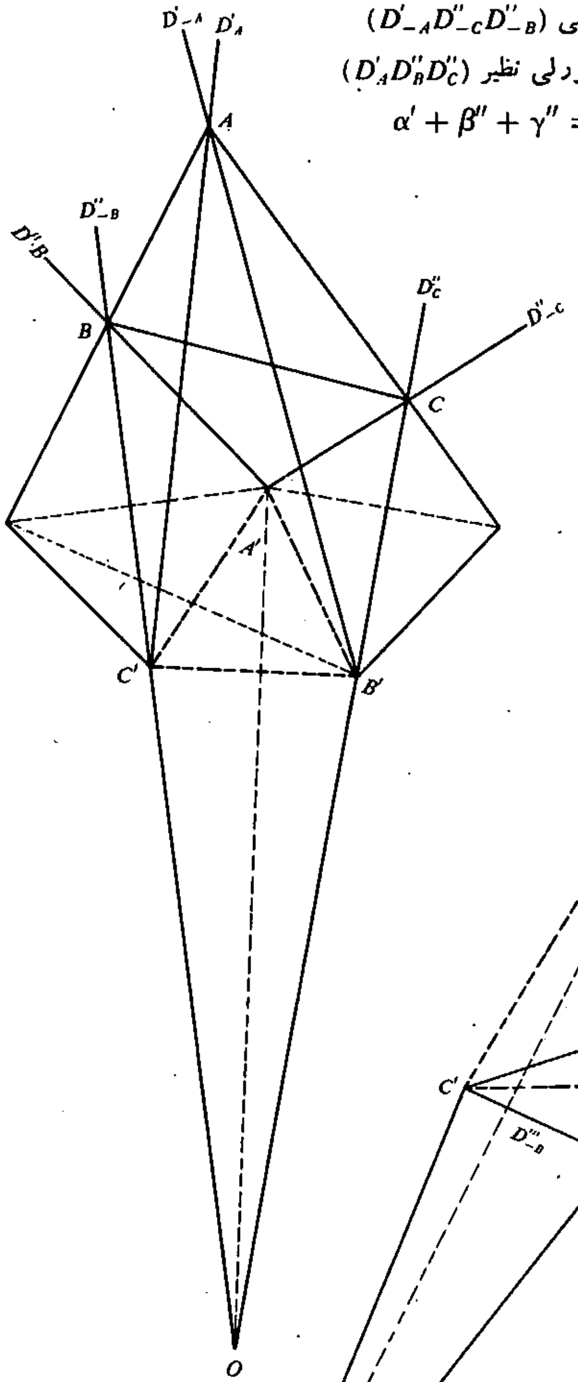
$\alpha + \beta + \gamma =$ ۶۰°





شکل ۵. $A'B'C'$ مثلث مورلی نظیر $(D'''_A D'_B D'_C)$

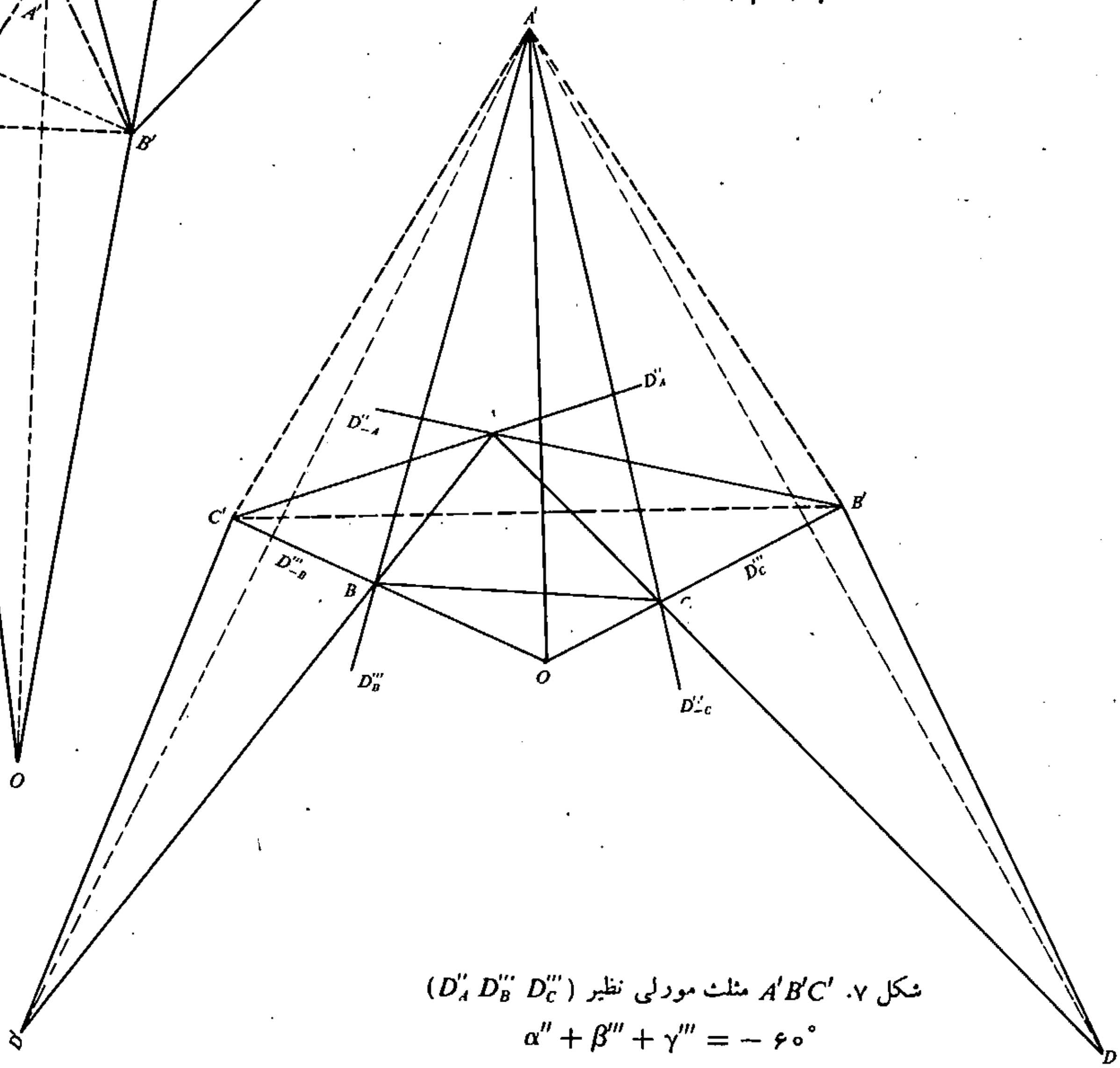
$$\alpha''' + \beta' + \gamma' = -60^\circ$$



شکل ۶. مورلی $(D'_{-A}D''_{-C}D''_{-B})$

$(D'_A D''_B D''_C)$ مثلث مورلی نظیر $A'B'C'$

$$\alpha' + \beta'' + \gamma'' = -60^\circ$$



شکل ۷. $A'B'C'$ مثلث مورلی نظیر $(D''_A\ D'''_B\ D'''_C)$

$$\alpha'' + \beta''' + \gamma''' = -60^\circ$$

جواد لآلی

ورودی تازه بر نامساویها و اتحادهای مثلثاتی

۱. مقدمه

ریاضیاتی که در مدارس ما تدریس می‌شود شامل جبر، هندسه، مثلثات، آنالیز و غیره است، و برای هر یک از این مواد مرزبندی خاصی وجود دارد. در ابتدای امر این مرزبندی به خاطر گسترش علم ریاضی و مفاهیم متنوع آنست، و در مرحلهٔ بعد منظور از آن ارائهٔ دقیق مفاهیم ریاضی و بررسی موضوعات مقدماتی آن است تا آنکه تعریفات گفته شده بخوبی درک و تفهیم گردند. ولی در ریاضیات عالی چنین نیست و دانشجو می‌تواند برای حل مسئله یا تمرینی از مفاهیم موضوعات گوناگون ریاضی استفاده نماید. ما برای اینکه به محدودهٔ این مرزبندی برسیم باید تصور ذهنی از رشته‌های ریاضی داشته باشیم.

اعمال ریاضی که با تعداد متناهی مرحله انجام می‌پذیرد، مانند محاسبهٔ یک دترمینان، و یا جمع n جملهٔ متوالی یک تصاعد حسابی، و غیره، به جبر تعلق دارد. ولی آنجا که تصاعد حسابی یا هندسی می‌تواند تا بینهایت جمله جمع گردد، از قلمروی جبر خارج شده و به‌آنالیز مربوط می‌شود. معمولاً یکی از مشخصه‌های آنالیز آنست که برمفهوم حد استوار است. بنا به عرف و عادت مرسوم، آنالیز دلالت بر مبانی نسبتاً صوری‌تر (و یا پیشرفته‌تر) همراه با توجه بیشتر به مبانی ریاضیات و تأکید بیشتری براستنتاج منطقی می‌کند. به عنوان مثال، قضیهٔ دو جمله‌ای $(a+b)^n$ در صورتی که n یک صحیح مثبت باشد، یک قضیهٔ جبری است ولی همین‌که n یک عدد حقیقی دلخواهی می‌شود، به عنوان یک قضیهٔ آنالیز مورد بررسی و تحقیق قرار می‌گیرد. هندسه موضوعی جدا از آنالیز و دارای اصول موضوعهٔ خاص خود می‌باشد و اولین درس ریاضی است که براساس اصول موضوعهٔ خود بسط و گسترش یافته است. تنها تأثیر هندسه بر دروس دیگری نظیر آنالیز و غیره بکارگیری اشکال و زبان هندسی جهت توجیه و درک مفاهیم بیشتر آنست. یکی از شاخه‌های هندسه مثلثات است. مثلث یک شکل سادهٔ هندسی و اولین چند ضلعی بسته از خطوط راست است و دارای خواص خاص خود می‌باشد که مستلزم بررسی مبحث جداگانه‌ای موسوم به مثلثات گردیده است. موضوعاتی که در مثلثات مورد بررسی و تحقیق قرار می‌گیرد به دو قسمت کاملاً مجزا تقسیم می‌شود: ابتدا حل مثلث که شامل موضوعاتی مربوط به اضلاع، زاویه، ارتفاع، و غیره است و دیگری خواص توابع مثلثاتی که این موضوع تشکیل یک نوع هندسهٔ عملی را می‌دهد، و از آن نتایج جالبی از قبیل

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

حاصل می‌گردد که بررسی چنین موضوعاتی متعلق به آنالیز است. اصولاً در مثلثات، به عنوان یک درس مقدماتی، توابع سینوس و کسینوس را به صورت نسبت طولهای اضلاع در یک مثلث تعریف می‌کنند ولی در آنالیز این‌گونه توابع، توابعی هستند برحسب متغیر x که با استفاده از سریهای نامتناهی به صورت فوق تعریف شده و سپس از آنها نتایج مأنوس سینوس و کسینوس نتیجه می‌شود.

با توجه به آنچه که مقدمهٔ ذکر شد، ذیلاً هدف ما این خواهد بود که با بکار بردن روابط و نامساویهای جبری مسائلی چند در هندسه و مثلثات (حل مثلث) طرح و حل کنیم.

۲. نامساویها در یک مثلث

با توجه به اصول موضوعهٔ اعداد حقیقی، اگر a یک عدد حقیقی دلخواهی باشد، $a^2 \geqslant 0$؛ و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $a = 0$. اینک اگر در این نامساوی عبارت جبری $xa_i - b_i$ را که درآن $i = 1, 2, \dots, n$، بجای

a قرار داده و n نامساوی حاصل را با هم جمع کنیم، نامساوی ذیل حاصل می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n}(xa_i-b_i)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)x^2-2\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)x+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\geqslant 0,$$

که به‌ازای هر x حقیقی برقرار است. با فرض اینکه $A=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$، $B=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$، و $C=\sum_{i=1}^{n}b_i^2$، نامساوی ذیل را خواهیم داشت که به ازای هرعدد حقیقی x برقرار است:

$$Ax^2-2Bx+C\geqslant 0,$$

و چنانکه می‌دانیم این نامساوی به ازای هر x حقیقی وقتی برقرار است که مبین آن (یعنی Δ') نامثبت و ضریب جملهٔ پیشرو (یعنی A) مثبت باشد. مثبت بودن A بدیهی است، بنابراین باید $\Delta'=B^2-AC\leqslant 0$، یعنی

$$B^2\leqslant AC.$$

از اینجا نامساوی مهم ذیل حاصل می‌شود که به نامساوی کوشی-شوارتز-بونیاکوفسکی مشهور است:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right). \tag{1}$$

در نامساویها شرط تساوی از اهمیت خاصی برخوردار است. در این نامساوی تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که عددی مانند x موجود باشد به طوری که $a_i=xb_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ [ثابت کنید]. اینک اگر به ازای هر i طبیعی که $1\leqslant i\leqslant n$، $b_i\neq 0$ آنگاه تساوی در (۱) فقط و فقط وقتی برقرار می‌گردد که

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

برای مزید اطلاع، ضمناً توضیح می‌دهیم که نامساوی (۱) را می‌توان از اتحاد جبری ذیل که به اتحاد لاگرانژ موسوم است نتیجه گرفت:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)-\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}(a_kb_j-a_jb_k)^2.$$

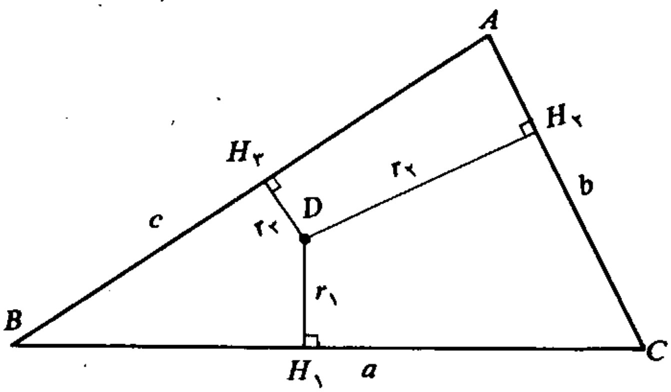
حال برمی‌گردیم به موضوع اصلی بحث؛ فرض می‌کنیم که D نقطهٔ دلخواهی در داخل مثلث ABC و r_1، r_2، و r_3 بترتیب فاصلهٔ D از اضلاع BC، AC، و AB این مثلث باشد. همچنین فرض می‌کنیم که a، b، و c طول اضلاع، و r، و R بترتیب شعاع دایره‌های محیطی و محاطی این مثلث باشند. بنابراین

$$ar_1+br_2+cr_3=2S=2Pr,$$

که در آن S مساحت و P نصف محیط این مثلث است. اینک اگر x، y، و z سه عدد حقیقی مثبت باشند، بنابر نامساوی (۱)،

$$\left(\frac{x}{r_1}+\frac{y}{r_2}+\frac{z}{r_3}\right)(ar_1+br_2+cr_3)\geqslant(\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz})^2, \tag{2}$$

$$(xr_1^2+yr_2^2+zr_3^2)\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right)\geqslant(ar_1+br_2+cr_3)^2. \tag{3}$$



چون $ar_1+br_2+cr_3=2S$،

$$\frac{x}{r_1}+\frac{y}{r_2}+\frac{z}{r_3}\geqslant(\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz})^2/2S, \tag{4}$$

$$xr_1^2+yr_2^2+zr_3^2\geqslant 4S^2/\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right); \tag{5}$$

و تساوی در نامساویهای (۴) و (۵) فقط و فقط وقتی برقرار است که

$$\frac{ar_1^2}{x}=\frac{br_2^2}{y}=\frac{cr_3^2}{z},\quad \frac{xr_1}{a}=\frac{yr_2}{b}=\frac{zr_3}{c}. \tag{6}$$

باید توجه داشت که نامساویهای (۲) و (۳) به ازای همهٔ مقادیر مثبت مجاز r_1، r_2، و r_3 برقراراند؛ و اهمیت نامساویهای (۴) و (۵) در این است که به‌ازای هر سه عدد حقیقی مثبت x، y، و z برقرار هستند. بنابراین، در حالت خاصی که $(x,y,z)=(a,b,c)$، از نامساویهای (۴) و (۵) و تساوی (۶) مسئلهٔ ذیل حاصل می‌شود:

مسئلهٔ ۱. فرض کنیم که D یک نقطهٔ داخلی مثلث ABC، و r_1، r_2، و r_3 بترتیب فواصل نقطهٔ D از اضلاع BC، AC، و AB این مثلث باشند. در این صورت

$$\frac{a}{r_1}+\frac{b}{r_2}+\frac{c}{r_3}\geqslant\frac{a+b+c}{r}=\frac{2P}{r}, \tag{7}$$

$$ar_1^2+br_2^2+cr_3^2\geqslant r^2(a+b+c)=2Pr^2; \tag{8}$$

و تساوی فقط و فقط برقرار است که نقطهٔ D مرکز (محل تلاقی سه عمود منصف) مثلث ABC باشد.

اینک فرض می‌کنیم که h_a، h_b، و h_c (ارتفاعات مثلث ABC باشد. با قراردادن (h_a, h_b, h_c) و $\left(\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}\right)$ بجای (x, y, z) بترتیب در نامساویهای (۴) و (۵) مسئلهٔ جالب ذیل نتیجه می‌شود:

مسئلهٔ ۲. بامفروضات مسئلهٔ ۱،

$$(9)\qquad \frac{h_a}{r_1}+\frac{h_b}{r_2}+\frac{h_c}{r_3}\geqslant 9,$$

$$(10)\qquad \frac{r_1^2}{h_a}+\frac{r_2^2}{h_b}+\frac{r_3^2}{h_c}\geqslant r;$$

تحت چه شرایطی در نامساویهای (۹) و (۱۰) تساوی برقرار می‌شود.

با توجه به‌دو مسئلهٔ فوق می‌توان با بکارگیری نامساویهای فوق، نامساویهای جدیدی بدست آورد. ■

۳. اتحادهای مثلثاتی

فرض کنیم که $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$؛ با ترکیب صورت و مخرج و بالعکس روابط جبری حاصل می‌شود. به عنوان مثال، اگر λ و μ دو عدد حقیقی دلخواهی باشند که در عین حال صفر نباشند، هریک ازکسور فوق برابراست با $\frac{\lambda a+\mu c}{\lambda b+\mu d}$. اینک حکم فوق را در مورد یک اتحاد مثلثاتی بکار می‌بریم، بنابراین،

$$(11)\qquad \operatorname{cotg}\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{\sin A}=\frac{\sin A}{1-\cos A}=\frac{\lambda(1+\cos A)+\mu\sin A}{\lambda\sin A+\mu(1-\cos A)}.$$

با انتخاب زوجهای $(1, 1)$، $(1, -1)$، $(\sin B, \cos B)$، و $(\cos B, \sin B)$ بترتیب بجای (λ, μ) در (۱۱)، اتحادهای ذیل نتیجه می‌شوند:

مسئلهٔ ۳. اتحادهای مثلثاتی ذیل به ازای جمیع مقادیر A و B برقرار است:

$$(12)\qquad \operatorname{cotg}\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A+\sin A}{1-\cos A+\sin A}=\frac{1+\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A-1},$$

$$(13)\qquad \operatorname{cotg}\frac{A}{2}=\frac{\cos B+\cos(A-B)}{\sin B+\sin(A-B)}=\frac{\sin B+\sin(A+B)}{\cos B-\cos(A+B)}.$$

در اینجا می‌توان اتحادهای مشابهی با استفاده از اتحاد مثلثاتی ذیل بدست آورد:

$$\sec A+\operatorname{tg} A=\frac{1+\sin A}{\cos A}=\frac{\cos A}{1-\sin A}.$$

کاربرد عکس احکام فوق بستگی به این امر دارد که کسر $\frac{a\lambda+c\mu}{b\lambda+d\mu}$ فقط و فقط وقتی مستقل از λ و μ است که $ad=bc$؛ در چنین حالتی این کسر مساوی هر یک از کسور $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ است.

مسئلهٔ ۴. کسر $F=\frac{\sin B+\cos(B-A)}{\cos B+\sin(B-A)}$ را خلاصه کنید.

برای خلاصه کردن کسر فوق، ابتدا آن را به این صورت می‌نویسیم:

$$F=\frac{\cos B\cos A+\sin B(1+\sin A)}{\cos B(1-\sin A)+\sin B\cos A}.$$

گوئیم چون $\cos^2 A=(1-\sin A)(1+\sin A)$،

$$F=\frac{\cos A}{1-\sin A}=\frac{1+\sin A}{\cos A}=\sec A+\operatorname{tg} A,$$

و این نمایش اختصاری F است. ■

۴. تمرین

۱. فرض کنیم که D یک نقطهٔ داخلی مثلث ABC، و r_1، r_2، r_3 بترتیب فواصل نقطهٔ D از اضلاع BC، AC، و AB این مثلث باشند. هر یک از نامساویهای ذیل را ثابت کنید. در هر یک ازآنها تساوی تحت چه شرایطی برقرار می‌شود؟

$$h_a r_1^2+h_b r_2^2+h_c r_3^2\geqslant\frac{8S^2}{a^2+b^2+c^2},$$

$$\frac{1}{r_1h_a}+\frac{1}{r_2h_b}+\frac{1}{r_3h_c}\geqslant\frac{1}{r^2}.$$

۲. بنابر آنکه (a_i, b_i, c_i) اضلاع، و r_i، R_i، و P_i بترتیب شعاع دایره‌های محاطی و محیطی و نصف محیط دو مثلث باشند $(i=1, 2)$، ثابت کنید که

$$\sqrt{\frac{P_1}{r_1R_1}\times\frac{P_2}{r_2R_1}2}\geqslant 3\left(\frac{1}{\sqrt{a_1a_2}}+\frac{1}{\sqrt{b_1b_2}}+\frac{1}{\sqrt{c_1c_2}}\right);$$

وتساوی فقط وفقط وقتی برقراراست که دو مثلث متساوی‌الاضلاع باشند.

همچنین ثابت کنید که برای سه مثلث نامساوی ذیل‌برقرار است:

$$\sqrt{\frac{P_1}{r_1R_1}\times\frac{P_2}{r_2R_2}\times\frac{P_3}{r_3R_3}}\geqslant 9\left(\frac{1}{\sqrt{a\;a_2a_3}}+\frac{1}{\sqrt{b_1b_2b_3}}+\frac{1}{\sqrt{c_1c_2c_3}}\right).$$

۳. ثابت کنید که به ازای هر سه عدد مثبت a، b، و c که $a+b+c=1$،

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)\geqslant 8;$$

سپس شرایطی را تعیین کنید که نامساوی فوق به تساوی تبدیل گردد. اینک بنابر آنکه A، B، و C زوایای یک مثلث باشند، ثابت کنید که

$$\operatorname{cotg}\frac{A+B}{2}\operatorname{cotg}\frac{B+C}{2}\operatorname{cotg}\frac{C+A}{2}$$

$$\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\right)\left(\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)$$

$$\left(\operatorname{cotg}\frac{C}{2}+\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\right)\geqslant 8,$$

$$(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B)(\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C)(\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}A)$$
$$\leqslant -8\operatorname{tg}(A+B)\operatorname{tg}(B+C)\operatorname{tg}(C+A);$$

سپس نوع مثلثی را تعیین کنید که هر دو نامساوی تبدیل به تساوی گردند.

۴. اولاً ثابت کنید که در هر مثلث،

$$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}\cdot\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}.$$

ثانیاً به‌کمک روابط فوق اتحادهای ذیل را نتیجه بگیرید:

$$\frac{\sin(A-B+C)}{\sin(A-B)+\sin C}=\frac{(a^2-b^2)\cos C+C^2\cos(A-B)}{a^2-b^2+c^2}$$

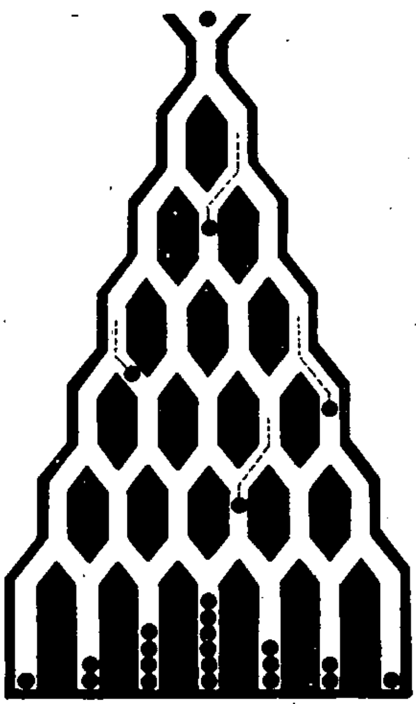
$$\frac{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{c\sin\frac{A-B}{2}+(a+b)\cos\frac{C}{2}}{a+b+c}.\ \blacksquare$$

منابع

1. The Mathematical Gazette, Volume 60, Number 411, March 1978.
2. Mathematics Magazine, Volume 48, Number 4, September 1975 & Volume 52, Number 5, Nomber 1976.

توزیع دو جمله‌ای با $p=q=\frac{1}{2}$

یک مدل تجربی برای نشان دادن توزیع دو جمله‌ای با $p=\frac{1}{2}$، $q=\frac{1}{2}$. توپها از یک سراشیبی به پائین لغزانده می‌شوند و در مسیر خود به موانعی که با چند ضلعیهای سیاه نشان داده شده‌اند، برخورد می‌کنند. در برخورد با هرمانع، توپ با احتمال ۱/۲ به سمت راست یا سمت چپ می‌رود. در شکل زیر، احتمالهای رسیدن به محفظه‌های پائین بترتیب عبارتند از:



۱/۶۴، ۶/۶۴، ۱۵/۶۴، ۲۰/۶۴، ۱۵/۶۴، ۶/۶۴، ۱/۶۴

بدین‌ترتیب، صورت کسرها سطر ششم مثلث پاسکال را تشکیل می‌دهند. این مدل تجربی توسط گالتون ابداع شده است.

دکتر علیرضا مدقالچی

یک روش مقدماتی برای محاسبه $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

مقدمه. کسانی که آشنائی مختصری با ریاضیات عالی دارند می‌دانند که به کمک سری فوریهٔ تابع مناسبی می‌توان $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ را محاسبه کرد. در این مقاله با تلفیق دو مسئله از مرجع [۱] به روش نسبتاً ساده‌تری این حاصلجمع محاسبه خواهد شد. این مسائل در دو فصل جداگانه مرجع اخیر آمده است. در خاتمه ملاحظات تاریخی وروش اویلر را برای محاسبهٔ حاصلجمع اخیر ارائه خواهیم داد. برای ارائهٔ روش مقدماتی محاسبهٔ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ تنها نیاز به اطلاعات اولیه در تئوری اعداد مختلط است.

مقدمتاً یادآوری می‌کنیم که هر عدد مختلط به صورت $Z = a + ib$ است که در آن a و b اعداد حقیقی‌اند و $i^2 = -1$. هر عدد مختلط را می‌توان به صورت $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ نوشت که r را قدر مطلق و θ را شناسهٔ Z می‌نامند. قضیهٔ زیر یکی از خواص مربوط به قوهٔ طبیعی این اعداد است:

قضیهٔ ۱. به ازای هر عدد طبیعی n،

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

برهان. اثبات به استقراء است. به ازای $n = 1$، حکم بدیهی است. فرض می‌کنیم $n \geqslant 1$ و

$$(\cos\theta + i\sin n\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

در این صورت

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= (\cos n\theta + i\sin n\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta\\ &\quad + i(\cos n\theta\sin\theta + \sin n\theta\cos\theta)\\ &= \cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta.\end{aligned}$$

نتیجه. با توجه به قضیهٔ ۱ و بسط دو جمله‌ای نیوتن ـ خیام، داریم

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k\cos^{n-k}\theta\,(i\sin\theta)^k = \cos n\theta + i\sin n\theta, \tag{1}$$

که در آن $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. با توجه به روابط $i^2 = -1$، $i^3 = -i$، $i^4 = 1$، ...، و به طورکلی $i^{4k} = 1$، $i^{4k+1} = i$، $i^{4k+2} = -1$ و $i^{4k+3} = -i$ و اینکه اجزای حقیقی و موهومی رابطهٔ (۱) باید با هم برابر باشند، خواهیم داشت.

$$\sin n\theta = C_n^1\sin\theta\cos^{n-1}\theta - C_n^3\sin^3\theta\,\mathrm{con}^{n-3}\theta + \dots \tag{2}$$

طرف دوم رابطهٔ (۲) دارای تعدادی متناهی جمله است یعنی جمله‌ها تا جائی ادامه پیدا می‌کنند که قوهٔ sin منتها برابر n باشد. از رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود که

$$\sin n\theta = \sin^n\theta\,(C_n^1\operatorname{cotg}^{n-1}\theta - C_n^3\operatorname{cotg}^{n-3}\theta + \dots). \tag{3}$$

در رابطهٔ (۳) فرض می‌کنیم که $n = 2m + 1$، رابطهٔ زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}\sin(2m+1)\theta = \sin^{2m-1}\theta\,(&C_{2m+1}^1\operatorname{cotg}^{2m}\theta\\ &- C_{2m+1}^3\operatorname{cotg}^{2m-2}\theta\\ &+ \dots + (-1)^{m-1}C_{2m+1}^{2m+1})\end{aligned} \tag{4}$$

اینک معادلهٔ درجهٔ m م زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}P_m(x) = C_{2m+1}^1x^m - C_{2m+1}^3x^{m-1}\\ + \dots + (-1)^{m-1}C_{2m+1}^{2m+1} = 0.\end{aligned}$$

این معادله دارای m ریشه است [۳]. از طرفی معادلهٔ

$$\begin{aligned}C_{2m+1}^1\operatorname{cotg}^{2m}\theta - C_{2m+1}^3\operatorname{cotg}^{2m-2}\theta\\ + \dots + (-1)^{m-1}C_{2m+1}^{2m+1} = 0,\end{aligned}$$

دارای ریشه‌های متمایز $\theta_k = \frac{k\pi}{2m+1}\ (k = 0, 1, 2, \dots, m)$ است؛ زیرا اگر در رابطهٔ (۴) بجای θ مقادیر اخیر را قرار دهیم طرف اول برابر صفر می‌شود (البته بدیهی است که $\sin^{2m+1}\frac{k\pi}{2m+1} \neq 0\ (k = 0, 1, 2, \dots, m)$). از اینجا معلوم می‌شود که به ازای هر عدد طبیعی k که $1 \leqslant k \leqslant m$، اعداد $x_k = \operatorname{cotg}^2\frac{k\pi}{2m+1}$ جمیع ریشه‌های معادلهٔ $P_m(x) = 0$ را بدست می‌دهد. بنابراین،

$$\sum_{k=0}^{m} x_k = \frac{C_{2m+1}^3}{C_{2m+1}^1} = \frac{(2m+1)!}{3!(2m-2)!}\Big/\frac{(2m+1)!}{1!(2m)!} = \frac{m(2m-1)}{3}.$$

از اینجا،

$$(5)\quad \sum_{k=0}^{m} \mathrm{cotg}^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3}.$$

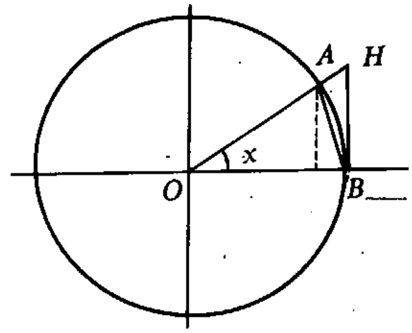
به همین ترتیب حاصلجمع مربعات ریشه‌ها از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$(6)\quad \sum_{k=0}^{m} \mathrm{cotg}^4 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)(4m^2+10m-9)}{45}.$$

قضیهٔ ۴. اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ آنگاه $\sin x < x < \mathrm{tg}\, x$.

برهان. اگر دایرهٔ مثلثاتی (به شعاع واحد) را در نظر بگیریم، مساحت قطاع OAB برابر $\frac{x}{2}$ و مساحات هر یک از مثلثهای OAB و OHB بترتیب برابر $\frac{1}{2}\sin x$ و $\frac{1}{2}\mathrm{tg}\, x$ است (شکل زیر). لهذا،

$$(7)\quad \sin x < x < \mathrm{tg}\, x$$



نتیجه. اگر طرفین نامساوی (۷) را مجذور کرده وسپس معکوس کنیم. خواهیم داشت:

$$(8)\quad \mathrm{cotg}^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \mathrm{cotg}^2 x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

اینک در نامساوی (۸)، بجای x مقادیر

$$x_k = \frac{k\pi}{2m+1} \; (k = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

را قرار می‌دهیم:

$$(9)\quad \mathrm{cotg}^2 \frac{k\pi}{2m+1} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \times \frac{1}{k^2} < 1 + \mathrm{cotg}^2 \frac{k\pi}{1m+2} \; (k = 1, 2, \ldots, m).$$

اگر طرفین نامساوی (۹) را با هم جمع کنیم، نتیجه می‌شود که

$$(10)\quad \sum_{k=1}^{m} \mathrm{cotg}^2 \frac{k\pi}{2m+1} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < m + \sum_{k=1}^{m} \mathrm{cotg}^2 \frac{k\pi}{2m+1}.$$

از اینجا، با استفاده از رابطهٔ (۵) داریم

$$\frac{m(2m-1)\pi^2}{3(2m+1)^2} < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < \left(m + \frac{m(2m-1)}{3}\right) \frac{\pi^2}{(2m+1)^2} = \frac{2m(m+1)\pi^2}{3(2m+1)^2}$$

به حدگیری از طرفین نامساوی فوق (وقتی که $m \to \infty$)، معلوم می‌شود که

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

ملاحظات تاریخی. یک روش محاسبهٔ این حاصلجمع به توسط اویلر ارائه شده است. اویلر با ارائهٔ روشی، جوابی درست برای این حاصلجمع بدست آورد و بدین‌وسیله لایبنیتز و برنولی را شکست داد [۴]. ما نخست این روش را تشریح می‌کنیم و سپس به تحلیل مختصری از آن می‌پردازیم. اویلر ابتدا معادلهٔ ذیل را در نظر می‌گیرد:

$$(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) = 0$$

ضریب جملهٔ پیشروطرف اول آن یعنی ضریب x^n برابر ۱ وریشه‌هایش برابر x_1، x_2، ...، و x_n است. از بسط طرف اول این معادله یک بسجملهٔ درجهٔ nم حاصل‌خواهد شد. فرض‌کنیم‌که

$$(11)\quad (x - x_1(x - x_2)\cdots(x - x_n) \equiv x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ضریب x در طرف اول اتحاد اخیر برابر است با

$$A = (-1)^{n-1}(x_2x_3\cdots x_n + x_1x_3\cdots x_n + \cdots + x_1x_2\cdots x_{n-1}),$$

همچنین جملهٔ ثابت طرف اول برابر است با

$$(-1)^n x_1x_2\cdots x_n$$

از اینجا با توجه به اتحاد (۱۱)،

$$x_2x_3\cdots x_n + x_1x_3\cdots x_n + \cdots + x_1x_2\cdots x_{n-1} = (-1)^{n-1}a_1,$$

$$x_1x_2\cdots x_n = (-1)^n a_0.$$

از تقسیم طرفین روابط فوق، نتیجه می‌گیریم‌که

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = -\frac{a_1}{a_0}.$$

درصورتی که $a_0 = 1$، نتیجهٔ ذیل را خواهیم داشت:

$$(12)\quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n} = -a_1$$

اویلر با استفاده از این رابطه بـه نتیجهٔ مطلوب دست می‌یابد. برای این منظور معادلهٔ $\sin x = 0$ را در نظر می‌گیرد.

می‌دانیم بنا به بسط تیلور،

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

ریشه‌های معادلهٔ $\sin x = 0$ عبارتند از

$$x_k = k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

بنابراین ریشه‌های معادلهٔ

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = 0,$$

عبارتند از $x_k = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

با تقسیم طرفین معادلهٔ (۲۰) به x و فرض $x^2 = y$ خواهیم داشت:

$$1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots = 0$$

معلوم است که ریشه‌های معادلهٔ فوق اعداد π^2، $4\pi^2$، $9\pi^2$، ... می‌باشند. از طرفی طرف اول این معادله یک «بسجملهٔ نامتناهی» است که جملهٔ ثابت آن (یعنی a_0) برابر ۱ است. بنابراین به قیاس آنچه گفته شد، بر طبق رابطهٔ ۱۲،

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \dots = -\frac{-1}{3!},$$

و بالنتیجه،

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

اویلر با مهارت خاص خویش این جواب درست را برای $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ بدست آورد. معهذا این نتیجه‌گیری، یعنی گذر از یک معادلهٔ درجهٔ nم به یک معادلهٔ نامتناهی امروزه مورد قبول نیست. به عبارت دیگر، از نظر منطقی دارای اشکال است و چنین استنتاجی مستلزم ارائهٔ روشهای دقیق و برهان کافی برای محاسبهٔ این حاصلجمع است.

مراجع

1. Apostol, Tom. M., *Mathematical Analysis*: Addison–Wesley, Publishing Company.
2. Burkill, J.C., *A First Course in Mathematical* Analysis, (1962), Cambridge University Press.
3. Lang, S. *Algebra*, (1972). Addison–Wesley, Publishing Company.
4. Sandheimer, E. & Rogerson, A., *Numbers and Infinity*, (1981), Cambridge University Press.

نیگل مک کان

کثیرالجملهٔ زیر را درنظر می‌گیریم

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

که در آن ضرایب اعداد مختلط و کثیرالجمله از درجهٔ n است $(n \geqslant 2)$.

معادله دارای n ریشهٔ (مختلط) است، که آنها را به α_1، α_2، ...، و α_n نشان می‌دهیم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n).$$

پس از ضرب پرانتزها، و مساوی قرار دادن ضرایب x^{n-1} و x^{n-2} در دوطرف تساوی بسهولت روابط معروف بین ریشه‌ها و ضرایب کثیرالجمله بدست می‌آید، یعنی

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \underset{(i<j)}{\alpha_i\alpha_j} + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_2}{a_0}.$$

میانگین ریشه‌های کثیرالجمله را به μ نشان می‌دهیم. بنابراین

$$\mu = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n} = -\frac{a_1}{na_0},$$

که نشان می‌دهد چگونه میانگین ریشه‌های $f(x)$ برحسب ضرایب a_0، a_1 کثیرالجملهٔ $f(x)$ بدست می‌آید.

حال واریانس ریشه‌های $f(x)$ را به σ^2 نشان می‌دهیم. بنابراین

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}{n} - \mu^2$$

با توجه به اینکه

$$(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)^2 = (\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2) + 2(\alpha_1\alpha_2 + \dots + \alpha_i\alpha_j + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n),$$

خواهیم داشت

$$n^2\mu^2 = \sigma^2 + n\mu^2 + 2\left(\frac{a_2}{a_0}\right).$$

از اینرو

$$\sigma^2 = (n-1)\mu^2 - \frac{2a_2}{na_0} = \frac{(n-1)a_1^2}{n^2 a_0^2} - \frac{2a_2}{na_0}.$$

با استفاده از این فرمول، واریانس ریشه‌های $f(x)$ برحسب

میانگین و واریانس ریشه‌های یك کثیرالجمله

ضرایب a_0، a_1، و a_2 کثیرالجملهٔ $f(x)$ بدست می‌آید. درحقیقت

$$\frac{a_1}{a_0} = -n\mu \text{ و } \frac{a_2}{a_0} = \frac{n(n-1)}{2}\left(\mu^2 - \frac{\sigma^2}{n-1}\right),$$

کثیرالجمله را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$f(x)=a_0\left\{x^n - n\mu\, x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\left(\mu^2-\frac{\sigma^2}{n-1}\right)x^{n-2}+\cdots\right\}, \quad (*)$$

که درآن μ میانگین ریشه‌ها و σ^2 واریانس آنها می‌باشد.

جالب اینجاست که ببینیم در وضع میانگین و واریانس ریشه‌های $f(x)$، وقتی‌که مشتقات متوالی آنرا تشکیل می‌دهیم، چه پیش می‌آید. اگر از عبارت $(*)$ $n-1$ بار مشتق بگیریم، خواهیم داشت: $f^{(n-1)}(x)=a_0\{n!\,x-n\mu\,(n-1)!\}$، که ریشهٔ آن μ است، بعبارت دیگر ریشهٔ $f^{(n-1)}(x)$ میانگین ریشه‌های $f(x)$ است. از اینرو $f^{(n-1)}(x)$ را می‌توان همچنین با $n-r-1$ بار مشتق‌گیری از $f^{(r)}(x)$ بدست آورد $(1 \leqslant r \leqslant n-1)$. بالنتیجه ریشهٔ $f^{(n-1)}(x)$ یعنی μ_r، میانگین ریشه‌های $f^{(r)}(x)$ است. بنابراین

$$\mu = \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{n-1},$$

یعنی:

میانگین ریشه‌های $f(x)$ ومشتق‌های متوالی آن جملگی مساویند. از نظر هندسی می‌توان گفت که مرکز ریشه‌های $f(x)$ منطبق است بر مرکز ریشه‌های مشتق‌های متوالی $f(x)$.

در مورد واریانس به ریشه‌های معادلهٔ $f^{(n-2)}(x)$ توجه می‌کنیم داریم

$$\begin{aligned}f^{(n-2)}(x) &= a_0\left\{\frac{n!}{2}x^2 - n\,\mu\,(n-1)!\,x + \frac{n(n-1)}{2}\left(\mu^2-\frac{\sigma^2}{n-1}\right)(n-2)!\right\}\\ &= \frac{a_0 n!}{2}\left\{x^2 - 2\mu\, x + \left(\mu^2 - \frac{\sigma^2}{n-1}\right)\right\},\end{aligned}$$

و ریشه‌های آن عبارتند از:

$$\mu \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}.$$

ملاحظه می‌کنیم که میانگین ریشه‌های $f^{(n-2)}(x)$، μ است. و واریانس آنها، یعنی σ^2_{n-2}، برابر است با

$$\sigma^2_{n-2} = \frac{\left(\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}\right)^2 + \left(\mu-\frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}\right)^2}{2} - \mu^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}.$$

اگر واریانس ریشه‌های $f^{(r)}(x)$ را به σ_r^2 نشان دهیم $(1 \leqslant r \leqslant n-2)$، خواهیم داشت

$$\sigma^2_{n-2} = \frac{\sigma_r^2}{n-r-1}.$$

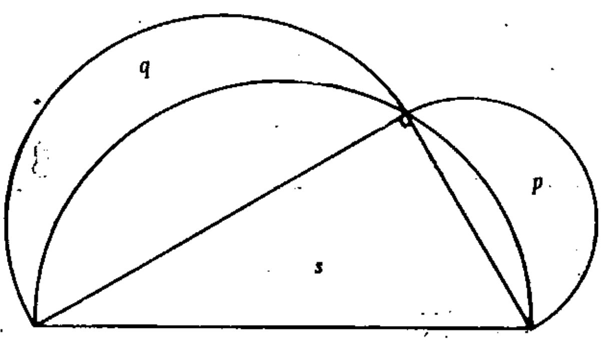
بنابراین رابطهٔ بین واریانس‌های ریشه‌های مشتق‌های متوالی $f(x)$، بصورت زیر است

$$\frac{\sigma^2}{n-1} = \frac{\sigma_1^2}{n-2} = \frac{\sigma_2^2}{n-3} = \cdots = \sigma^2_{n-2}.$$

ترجمهٔ رضا شهریاری

از مجلهٔ

Mathematical Spectrum, Vol. 16, 1983/84, No 1. *The Mean and Variance of the Roots of a Polynomial* by NIGEL McCANN.



$s = p + q$

هلالین بقراط

مسائل

۱ (الف)ـ ثابت کنید $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ یک عدد گنگ است.

(ب)ـ عدد حقیقی b را یک عدد جبری نامیم درصورتی‌که ریشهٔ یک چند جمله‌ای با ضرایب صحیح باشد یعنی در معادله‌ای مانند $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ که در آن n عدد طبیعی و a_0، a_1، ...، a_{n-1} و a_n اعداد صحیح می‌باشند صدق کند. با توجه به این تعریف ثابت کنید که $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ یک عدد جبری است.

(کنکور تشریحی ۶۳)

۲ تابع f با ضابطهٔ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & (x > 0) \\ \dfrac{1+x}{1-x} & (x \leqslant 0). \end{cases}$$

مفروض است.

(الف)ـ ثابت کنید که این تابع همه جا پیوسته است؛

(ب)ـ ثابت کنید این تابع در نقطهٔ $x=0$ دارای مشتق نیست.

(کنکور تشریحی ۶۳)

۳ از ۲۴ محصول کارخانه‌ای ۲ عدد از نوع A و ۱۶ عدد از نوع B و بقیه از نوع C می‌باشند. سه کالا به‌تصادف انتخاب می‌کنیم؛ مطلوبست احتمال آنکه حداقل دو کالا از یک نوع باشند.

(کنکور تشریحی ۶۳)

۴ نقاط $P(x_1y_1)$ و $Q(x_2,y_2)$ چنان‌اند که قوت نقطهٔ M وسط PQ نسبت به دایرهٔ $x^2+y^2=R^2$ برابر $\frac{1}{2}(x_1x_2+y_1y_2-R^2)$ است، ثابت کنید مجموع قوتهای نقاط P و Q نسبت به این دایره برابر صفر است.

(کنکور تشریحی ۶۲)

۵ معادلهٔ یک دسته دایره را بنویسید که پایهٔ آن محور xها بوده و قوت مبدأ مختصات نسبت به هر عضو آن ۴ باشد؛ سپس از مجموعهٔ دایره‌های به معادلهٔ $x^2-2\alpha x+y^2+4=0$ دایره‌ای را مشخص کنید که با دایره به معادلهٔ $x^2+(y-1)^2=4$ زاویهٔ $60°$ بسازد.

(امتحان نهائی ـ خرداد ۶۳)

۶ اولاً، در تابع $y=\frac{ax^3+b}{x^2}$، اعداد a و b را طوری تعیین کنید که $M(2,3)$ نقطهٔ مینیموم آن باشد.

ثانیاً، جدول تغییرات تابع $y=\frac{x^3+4}{x^2}$ را تعیین کرده و منحنی C نمایش هندسی آن را رسم کنید.

ثالثاً، در عدهٔ نقاط تلاقی و علامت طولهای نقاط تلاقی خط D به معادلهٔ $y=m(x+1)-1$ با منحنی C برحسب مقادیر مختلف m بحث کنید.

رابعاً، اگر x_1، x_2، و x_3 ریشه‌های معادلهٔ $(m-1)x^3+(m-1)x^2-4=0$ باشد، m را طوری تعیین کنید که داشته باشیم:

$$x_1^2(1+x_1)+x_2^2(1+x_2)+x_3^2(1+x_3)=\frac{1}{3}.$$

خامساً، مساحت سطح محصور بین C و خطوط $y=x$، $x=2$، و $x=\lambda\ (>2)$ را حساب کرده و حد این مساحت را وقتی که $\lambda\to+\infty$ بدست آورید.

(امتحان نهائی ـ خرداد ۶۳)

۷ فرض کنیم که Z مجموعهٔ اعداد صحیح باشد. در Z دو عمل $\oplus$ و $\odot$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a\oplus b=a+b-1,\quad a\odot b=a+b-ab \quad (a,b\in Z).$$

ثابت کنید که $(Z,\oplus,\odot)$ یک حلقهٔ تعویض‌پذیر با عضو واحد است. عضو خنثا نسبت به عمل $\oplus$ چیست؟

۸ تابع زیر مفروض است

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\leqslant x_0) \\ ax+b & (x>x_0). \end{cases}$$

a و b را چنان تعیین کنید که f در x_0 مشتق‌پذیر باشد.

۹ مثلث ABC مفروض است.

(الف)ـ نقطه‌ای را (داخل) این مثلث تعیین کنید که حاصلجمع فواصل آن از سه ضلع مثلث مینیموم باشد.

(ب)ـ نقطه‌ای را (داخل) این مثلث تعیین کنید که حاصلجمع فواصل آن از رئوس این مثلث مینیموم باشد.

۱۰ فرض می‌کنیم که $a^2>b$؛ ثابت کنید تابع y که با رابطهٔ

$$xy+a(x+y)+b=0$$

مشخص شده است بر هر بازه‌ای که شامل $x = -a$ نیست اکیداً نزولی است. تابع معکوس آن را تعیین کنید. مسئله را در حالت خاصی که $a = 0$ حل کنید.

۱۱ نامساوی ذیل در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای چند جواب است.

$$|x| + |y| < 100?$$

(در اینجا دو جواب (x, y) و (y, x) درصورتی که $x \neq y$، متمایز شمرده می‌شوند.)

۱۲ ثابت کنید که

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\dots\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

۱۳ معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید:

$$\text{(i).}\quad arc\cos x\sqrt{3} + arc\cos x = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{(ii).}\quad arc\sin\frac{3x}{5} + arc\sin\frac{4x}{5} = arc\sin x.$$

۱۴ جمیع جوابهای دستگاه معادلات زیر را که در شرط $0 < x < 2\pi$ و $\pi < y < 2\pi$ صدق می‌کنند، پیدا کنید.

$$\begin{cases} |\sin x|\sin y = -\frac{1}{4} \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

۱۵ اگر x، y، z، و n اعدادی طبیعی باشند و $n \geqslant z$ آنگاه تساوی $x^n + y^n = z^n$ نمی‌تواند برقرار باشد (حالت خاص قضیهٔ فرما).

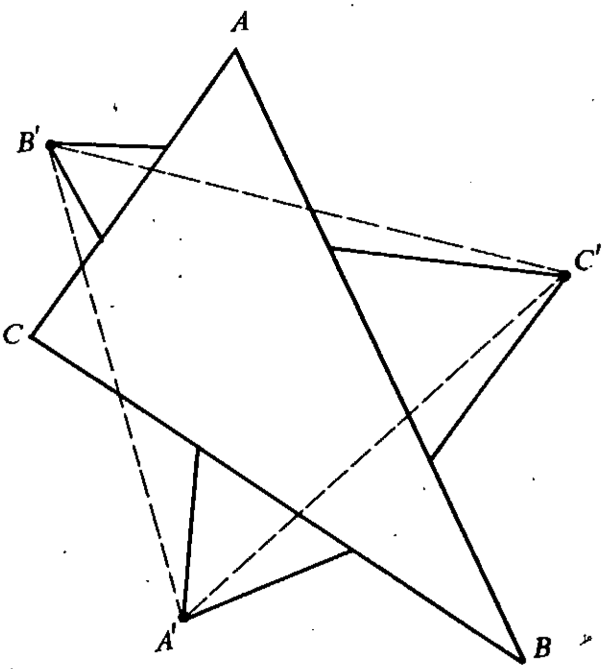
۱۶ فرض کنیم که ABC مثلث دلخواهی باشد که $A = 60°$. بدون استعانت از مثلثات ثابت کنید که مساحت این مثلث از دستور ذیل محاسبه می‌شود:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}[a^2 - (b-c)^2].$$

مسئله را در حالتی که $\widehat{A} = 120°$ حل کنید

(جواب $S = \frac{\sqrt{3}}{12}[a^2 - (b-c)^2]$)

۱۷ مثلث دلخواه ABC مفروض است. هرسه ضلع آن را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و مطابق شکل زیر روی پاره خطهای



میانی مثلثهای متساوی‌الاضلاعی بنا می‌کنیم. ثابت کنید مثلث $A'B'C'$ یک مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۱۸ فرض کنیم که تابع ناصفر $f: R \to R$ در شرایط ذیل (به ازای هر x و y از R) صدق کند

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$
$$f(xy) = f(x)\,f(y).$$

ثابت کنید که $f(x) \equiv x$.

۱۹ ابتدا ثابت کنید که

$$\int_0^\pi x\,f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx;$$

سپس با استفاده از این حکم، انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

۲۰ ثابت کنید که به ازای هر n طبیعی، عددی طبیعی مانند x وجود دارد به طوری که

$$(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}.$$

۲۱ اگر $x + y \geqslant 0$ آنگاه

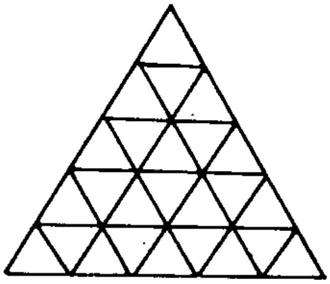
$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leqslant \frac{x^n + y^n}{2} \qquad (n \in N).$$

۲۲ عبارت زیر را محاسبه کنید

$$(۹ + ۴\sqrt{۵})^{۱/۳} + (۹ - ۴\sqrt{۵})^{۱/۳}.$$

۲۳ شخصی برای خرید به یک فروشگاه رفت و چهار قلم جنس خرید. هنگام پرداخت قیمت اشیاء خریداری شده بجای آنکه در ماشین حساب خود دگمهٔ جمع را بزند اشتباهاً دگمهٔ ضرب را زد. اتفاقاً جواب بدست آمده همان مبلغی بود که فروشنده از وی مطالبه می‌کرد. درصورتی که مجموع قیمت اجناس ۷/۱۱ باشد مطلوبست قیمت هر یک از این اقلام.

۲۴ در شکل زیر مثلثی متساوی‌الاضلاع مفروض است که قاعدهٔ آن به ۵ قسمت مساوی تقسیم شده است، چنانکه ملاحظه می‌شود تعداد شش ضلعهای منتظم متمایزکه در داخل آن قراردارند برابر ۶ است. اینک طول قاعدهٔ این مثلث را به طور کلی n می‌گیریم. مطلوبست تعیین عدهٔ شش ضلعیهای منتظم واقع در آن.



۲۵ فرض کنیم که $A(n)$ مجموعهٔ جمیع اعداد اولی باشد که n را عاد می‌کنند. در این صورت

(آ). اگر $q|n$ آنگاه $A(q) \subseteq A(n)$؛

(ب). اگر q و r بترتیب مقسوم‌علیه مشترک و مضرب مشترک دلخواهی از m و n باشند، ثابت کنید که

$$A(q) \subseteq A(m) \cap A(n),$$
$$A(m) \cup A(n) \subseteq A(r);$$

(پ). ثابت کنید که

$$A((m, n)) = A(m) \cap A(n)$$

که در آن (m, n) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک m و n است؛

(ت). ثابت کنید که

$$A([m, n]) = A(m) \cup A(n),$$

که در آن $[m, n]$ کوچکترین مضرب مشترک m و n است.

حل مسائل

۱ــ یک مجموعهٔ ۶ عضوی با یک عمل بنویسید که دارای خاصیت گروه آبلی باشد. صحت ادعای خود را ثابت کنید. (کنکور تشریحی، ۶۲)

حل. برای این منظور در مجموعه

$$G = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$$

عمل $\oplus$ را چنین تعریف میکنیم:

به‌ازای هر a و b از G، $a \oplus b$ یعنی باقیماندهٔ $a+b$ بر ۶.

با عمل $\oplus$ جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

$\oplus$	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۰	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۱	۱	۲	۳	۴	۵	۰
۲	۲	۳	۴	۵	۰	۱
۳	۳	۴	۵	۰	۱	۲
۴	۴	۵	۰	۱	۲	۳
۵	۵	۰	۱	۲	۳	۴

بسادگی دیده می‌شود که $(G, \oplus)$ یک گروه آبلی ۶ عضوی است: زیرا،

(i). G نسبت به عمل $\oplus$ بسته است؛

(ii). عمل $\oplus$ شرکتپذیر است (تحقیق کنید)؛

(iii). $(G, \oplus)$ عضو خنثا دارد. ۰ عضو خنثای این گروه است؛

(iv). هرعضو G دارای عکس است. یعنی به ازای هر a از G، عددی مانند b از G هست که $a + b$ بر ۶ قابل قسمت است. مثلاً، عکس ۳، سه و عکس ۵، یک است.

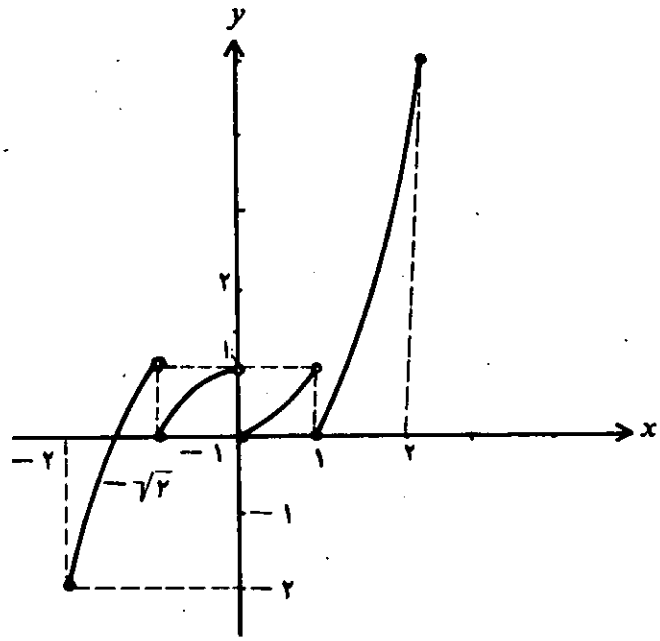
(v). گروه $(G, \oplus)$ تعویضپذیر (آبلی) است (ثابت کنید). ■

۲ــ منحنی نمایش تغییرات تابع $f(x) = x|x| - [x]$ را در فاصلهٔ $-۲ \leqslant x \leqslant ۲$ رسم‌کنید. (کنکور تشریحی، ۶۲)

حل. برای رسم نمودار تابع در $[-۲, ۲]$، گوئیم

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱ & (۱ \leqslant x \leqslant ۲) \\ x^۲ & (۰ \leqslant x < ۱) \\ -x^۲ + ۱ & (-۱ \leqslant x < ۰) \\ -x^۲ + ۲ & (-۲ \leqslant x < -۱). \end{cases}$$

بنابراین،



۳ـ مشتق چپ و مشتق راست تابع $f(x)=x|x-1|$ را در نقطهٔ $x_0=1$ پیدا کنید. آیا تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است؟ (امتحان نهائی، شهریور ۶۲)

حل. برای یافتن مشتق چپ و راست تابع مذکور در $x_0=1$، تعریف این مشتقات را بکار می‌بریم. داریم

$$f'(x_0-)=\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 1-}\frac{x|x-1|-0}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{-x(x-1)}{x-1}=-1,$$

$$f'(x_0+)=\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 1+}\frac{x|x-1|-0}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{x(x-1)}{x-1}=1.$$

چون $f'(x_0-)\neq f'(x_0+)$، تابع f در نقطهٔ $x_0=1$ دارای مشتق نیست. ■

۴ـ ثابت کنید که حاصلضرب فاصله‌های هر نقطه از هذلولی از دو خط مجانب آن مقداری است ثابت.
(امتحان نهائی، شهریور ۶۲)

حل. فرض می‌کنیم $M(X, Y)$ نقطه‌ای از هذلولی به معادلهٔ زیر باشد

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

می‌دانیم معادلهٔ مجانبهای این هذلولی چنین است:

$$bx\pm ay=0.$$

فاصلهٔ $M(X, Y)$ از این مجانبها را بدست آورده، در هم‌ضرب می‌کنیم:

$$d=\pm\frac{bX+aY}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{bX+aY}{c},$$

$$d'=\pm\frac{bX-aY}{c},$$

$$dd'=\pm\frac{b^2X^2-a^2Y^2}{c^2}=\pm\frac{\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}}{\frac{c^2}{a^2b^2}}.$$

چون $M(X, Y)$ نقطه‌ای از هذلولی است، عطف به معادلهٔ هذلولی $dd'=\pm\frac{a^2b^2}{c^2}$. چون d و d' هردو مثبت‌اند، $dd'=\frac{a^2b^2}{c^2}$. ■

۵ـ تابع $f: R\to R$ دارای این خاصیت است که به ازای هر عدد حقیقی x، $|f(x)|\leqslant x^2$؛ مقدار $f'(0)$ (مشتق f در نقطهٔ ۰) را محاسبه کنید. (R مجموعهٔ اعداد حقیقی است)
(مسابقهٔ ریاضی استان اصفهان، ۲۰ خرداد ۶۲)

حل. برای حل، کافی است تعریف مشتق را در نقطهٔ $x_0=0$ بکار بریم. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که $f(0)=0$ (چرا؟) بنابراین،

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}. \qquad (1)$$

ولی، به‌ازای هر x ناصفر از R،

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\frac{|f(x)|}{|x|}\leqslant\frac{x^2}{|x|}=|x| \qquad (2)$$

به موجب (۲)، از (۱) نتیجه می‌شود که $f'(0)=0$ ■

۶ــ R و r به ترتیب شعاعهای دایـرهٔ محیطی و محاطی مثلث و d اندازهٔ فاصلهٔ مرکز دو دایره است.

(آ). ثابت کنید کـه بین R، r، و d همواره رابطهٔ زیـر برقرار است:

$$d^{2} = R(R - 2r) \qquad \text{(رابطهٔ اویلر)}$$

(ب). اگر دو دایره بـه شعاعهای R و r و خط مرکـزی (خط‌المرکزین) d را رسم کنیم و از نقطهٔ A از دایرهٔ محیطی دو مماس بردایرهٔ کوچکتر رسم کنیم تا آن را در B و C قطع کند. ثابت کنید که وتر BC بردایرهٔ کوچکتر مماس است.

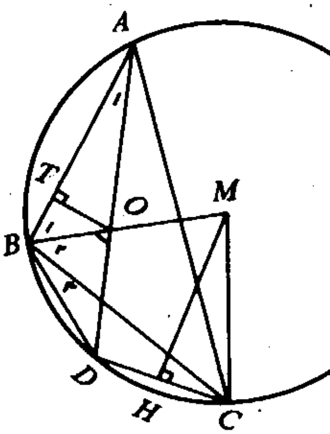
حل.

(آ). اثبات رابطهٔ اویلر. O مرکز دایـرهٔ محاطی مثلث و M مرکز دایرهٔ محیطی آنست (شکل زیر). خط AO کمان BC را نصف مـی‌کـند و BO نیمساز زاویـهٔ ABC است. در مثلث DBO، $DB = DO$؛ زیرا

$$\widehat{BOD} = \widehat{A}_{1} + \widehat{B}_{1}, \qquad \widehat{DBO} = \widehat{B}_{2} + \widehat{B}_{3};$$

ولی طرف دوم این دو تساوی با هم مساویست، زیرا $\widehat{B}_{1} = \widehat{B}_{2}$ و $\widehat{A}_{1} = \widehat{B}_{3}$ (چرا؟). بنابراین $\widehat{DBO} = \widehat{BOD}$ و $DB = DO$.
از آنچه گفته شد، نتیجه می‌گیریم

$$DB = DO = DC$$



بعد از این مقدمه از M عمود MH را بر DC فرود می‌آورده و از O خط OT را بـر AB عمود می‌کنیم. دو مثلث HMC و TAO با هم متشابهند؛ زیرا

$$\widehat{HMC} = \frac{1}{2}\widehat{DMC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{A}_{1}.$$

از تشابه این دو مثلث بـا توجه به اینکه $r = OT$ شعاع دایرهٔ محاطی و $MC = R$ شعاع دایرهٔ محیطی است نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{MC}{AO} = \frac{HC}{OT},$$
$$AO \cdot HC = MC \cdot OT,$$
$$AO \cdot OD = 2Rr.$$

از طرفی،

$$AO \cdot OD = R^{2} - OM^{2},$$

از دو تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم

$$OM^{2} = d^{2} = R^{2} - 2Rr.$$

(ب). از فرض $d^{2} = R(R - 2r)$ نتیجه می‌شود

$$R^{2} - OM^{2} = 2Rr,$$
$$AD \cdot OD = OA' \cdot OD' = (R - OM)(R + OM) = R^{2} - OM^{2}.$$

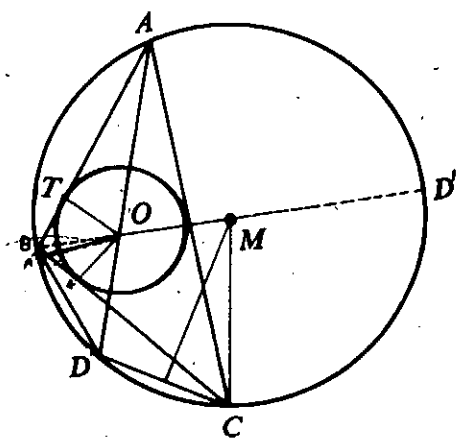
از این دو تساوی نتیجه می‌گیریم که

$$AO \cdot OD = 2Rr. \qquad (1)$$

مانـنـد حالت اول از تشابـه مثلثهای AOT و MCH نتیجـه می‌گیریم

$$AO \cdot DC = 2Rr. \qquad (2)$$

از تساویهای (۱) و (۲) نتیجـه می‌شود $DO = DC = DB$. از مثلث متساوی‌الساقین DBO نتیجـه می‌شود OB نیمساززاویهٔ ABC است (چرا؟) و در نتیجـه اگـر OK را بـر BC عمود عمـود کنیـم، $OK = OT$ و BC بـر دایـرهٔ (O, r) مماس است. ■



۷ــ کره‌ای بـه شعاع R مفروض است. مطلوبست تعیین ارتفاع مخروطی کـه براین کره محیط بـوده و کمترین حجم را داشته باشد.

حل. برای تعیین ارتفاع مخروط مطلوب، ارتفاع آن را h و شعاع قاعده‌اش را r می‌گیریم. بعلاوه، مطابق شکـل، فرض می‌کنیم که $AM = l$. اگـر V را حجم این مخـروط بگیریم، خواهیم داشت:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^{2} h.$$

از طرف دیگر، به موجب تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه AMC و AON، داریم

$$\frac{r}{R}=\frac{h}{l},$$

یا

$$r=\frac{Rh}{l}$$

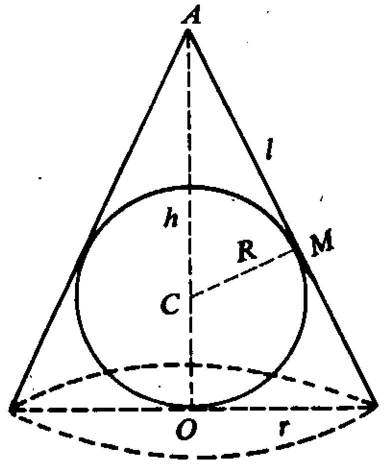
ولی از مثلث قائم‌الزاویهٔ ACM،

$$l^2=(h-R)^2-R^2=h^2-2Rh.$$

بنابراین، $r=\dfrac{Rh}{\sqrt{h^2-2Rh}}$ و بالنتیجه،

$$V=\frac{1}{3}\pi\,\frac{R^2h^3}{h^2-2Rh}. \qquad (*)$$

چنانکه ملاحظه می‌شود حجم مخروط تابعی است از ارتفاع آن، یعنی $V=V(h)$ (توجه شود که R ثابت است). بنابراین برای پیدا کردن کمترین مقدار V، از $(*)$ برحسب h مشتق می‌گیریم.



$$V'=\frac{1}{3}\pi R^2\,\frac{h^4-4Rh^3}{(h^2-2Rh)^2}.$$

اینک ریشه‌های مشتق را بدست می‌آوریم. ریشه‌های معادلهٔ $V'=0$ عبارتند از $h=0$ و $h=4R$. بدیهی است که $h=0$ نمی‌تواند جواب مسئله باشد. اگر جواب $h=4R$ را در $V''(h)$ امتحان کنیم، معلوم می‌شود که

$$V''(4R)>0.$$

بنابراین $h=4R$ جواب مطلوب است. ■

۸– مینیموم تابع $f(x)=\max\{2|x|,|1+x|\}$ را تعیین کنید.

حل. برای تعیین اینکه به ازای چه xهائی $|1+x|\geqslant 2|x|$ یا $|1+x|<2|x|$ کافی است ابتدا معادلهٔ $2|x|=|1+x|$ را حل کنیم. بسهولت معلوم می‌شود که جوابهای این معادله عبارتند از $x=-\frac{1}{3}$ و $x=1$. اینک ملاحظه می‌کنیم که

$$f(x)=\begin{cases}-2x & \left(x<-\frac{1}{3}\right)\\ x+1 & \left(-\frac{1}{3}\leqslant x<1\right)\\ 2x & (1\leqslant x).\end{cases}$$

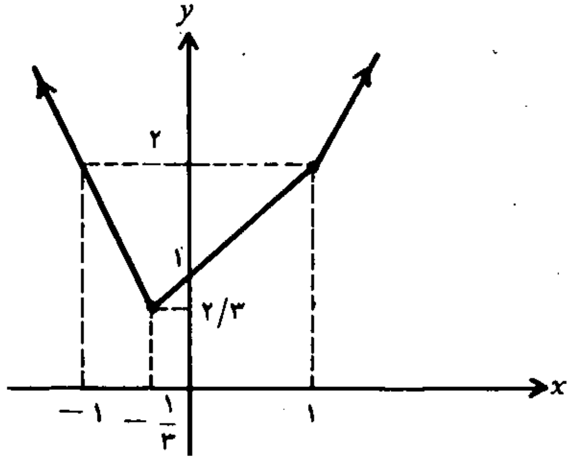
بسادگی معلوم می‌شود که این تابع بر R پیوسته است، و در همهٔ نقاط به استثناء $x=-\frac{1}{3}$ و $x=1$ مشتق‌پذیر است. ضابطهٔ مشتق f چنین است:

$$f'(x)=\begin{cases}-2 & \left(x<-\frac{1}{3}\right)\\ 1 & \left(-\frac{1}{3}<x<1\right)\\ 2 & (1<x).\end{cases}$$

از اینجا،

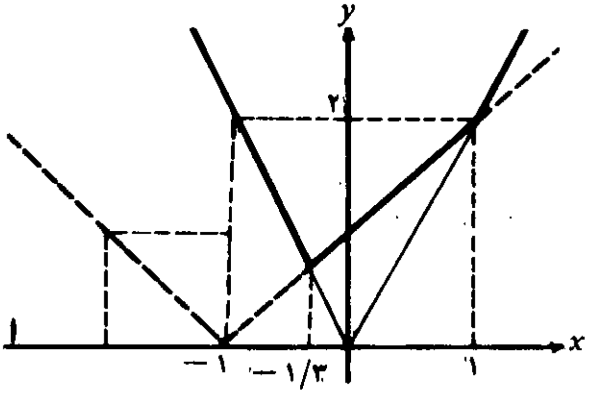
x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{2}{3}$	↗	2	↗	$+\infty$

بالنتیجه، نمودار تابع فوق چنین می‌شود:



چنانکه از جدول فوق [یا نمودار f] معلوم است، مینیموم $f(x)$ مساوی $\frac{2}{3}$ است. اینک به طریق دیگری می‌پردازیم به رسم نمودار تابع $f(x)$.

طریقهٔ رسم نمودار تابع f. برای این منظور نمودار هر یک از توابع $g(x) = 2|x|$ و $h(x) = |1 + x|$ در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



طول نقاط تلاقی نمودارهای توابع $g(x)$ و $h(x)$ از معادلهٔ $|1 + x| = 2|x|$ بدست می‌آید، که دارای جوابهای $x = 1$ و $x = -\frac{1}{3}$ است. معلوم است که $f(1) = 1$ و $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$. از روی نمودارهای $g(x)$ و $h(x)$. با توجه به اینکه $f(x) = max\,\{g(x), h(x)\}$، می‌توان بسادگی نمودار $f(x)$ را رسم کرد (توضیحات بیشتر به عهدهٔ خواننده است.)

۹ـ به چند طریق می‌توان ۷ نامهٔ غیرمتمایز را در ۴ پاکت پست کرد (به طوری که هیچ پاکتی خالی نماند)؟

حل. کار توزیع نامه‌ها را در پاکتها، در دو مرحله انجام می‌دهیم. ابتدا یک نامه را در هر پاکت قرار می‌دهیم تا هیچ پاکتی خالی نماند، این کار به علت غیر متمایز بودن نامه‌ها تنها به یک صورت امکان‌پذیر است. اگر ۳ نامهٔ باقیمانده را بتوان به a صورت بین پاکتها توزیع کرد، جواب مسئله طبق اصل ضرب عبارت خواهد بود از $a \times 1 = a$. برای محاسبهٔ a، یعنی تعداد حالاتی که می‌توان ۳ نامه را در ۴ پاکت توزیع کرد، ۳ مهره را (که هنگام نوشتن آنها را با علامت o نشان خواهیم داد) در نظر گرفته نامه‌ها به هر طریق ممکن در طرفین و در بین مهره‌ها قرار می‌دهیم. سپس نامه‌های طرف چپ مهرهٔ اول را در پاکت اول، نامه‌های بین مهرهٔ اول و مهرهٔ دوم را در پاکت دوم (و بهمین ترتیب الی آخر) قرار می‌دهیم. به ازای هر نامه‌ای که در یکی از جاهای فوق قرار می‌گیرد، یک علامت | بین مهره‌ها می‌گذاریم؛ مثلاً $o||o|o$ به این معنی است که در پاکت اول هیچ نامه‌ای قرار نگرفته (البته از ۳ نامهٔ مرحلهٔ دوم)، در پاکت دوم دو نامه ـ علاوه بر یک‌نامهٔ مرحلهٔ قبل ـ و در پاکت سوم هم یک نامه قرار گرفته و در پاکت چهارم نیز نامه‌ای از سه نامهٔ جدید قرار نگرفته است. اینک اگر جمیع حالتهای ممکن را در نظر بگیریم، ملاحظه می‌شود که تعداد راههائی که می‌توان ۳ نامه را در ۴ پاکت توزیع و سپس آنها را پست کرد عبارتست از همهٔ طرق قرار گرفتن سه علامت | و سه علامت o در کنار یکدیگر؛ ولی تعداد اینها عبارتست از $\frac{6!}{3!3!}$ (اگر همهٔ علامتها متمایز بودند تعداد جایگشتها $6!$ می‌شد ولی چون سه علامت | و سه علامت o به هر ترتیبی می‌توانند هر یک بین خود جا عوض کنند بدون اینکه تغییری در وضعیت مورد نظر ایجاد کنند باید $6!$ را به $3! \times 3!$ تقسیم کرد). بنابراین،

$$a = \frac{6!}{3!3!} = \binom{6}{3} = \binom{4 + 3 - 1}{3} = \binom{4 + 3 - 1}{4 - 1}.$$

به طور کلی اگر بخواهیم m نامه را بین n پاکت (بدون اعمال شرط خالی نماندن هیچ پاکتی) توزیع کنیم، می‌توانیم عین استدلالی فوق را برای ۳ نامه و ۴ پاکت تکرار کرده ملاحظه کنیم که تعداد حالتهای ممکن عبارتست از

$$\binom{m + n - 1}{n - 1} = \binom{m + n - 1}{m} \qquad (*)$$

که فرمول ترکیب با تکرار نامیده می‌شود. اگر بخواهیم هیچ پاکتی خالی نماند، ابتدا n تا از نامه‌ها را $(m > n)$ برداشته یکی در داخل هر پاکت قرار می‌دهیم و باقیمانده (یعنی $m - n$ نامه) را مطابق فرمول (*) بین n پاکت توزیع می‌کنیم. تعداد حالتهای ممکن در این صورت عبارت است از

$$\binom{(m - n) + n - 1}{n - 1} = \binom{m - 1}{n - 1}.$$

پس m نامه را می‌توان به $\binom{m-1}{n-1}$ صورت بین n پاکت توزیع کرد به طوری که هیچ پاکتی خالی نماند. ■

۱۰ـ بنابرآنکه معادلهٔ درجه دوم

$$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - a)(x - c) = 0$$

دارای ریشهٔ مضاعف باشد، بدون استعانت از مبین آن، ثابت کنید که $a = b = c$.

حل. فرض کنیم که

$$f(x) = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - a)(x - c)$$

گوئیم از اینکه $f(x) = 0$ دارای ریشهٔ مضاعف است،

$f(x) = k(x-\alpha)^2$. از طرفی با توجه به تعریف $f(x)$،

$$[(x-a)(x-b)(x-c)]' = f(x) = k(x-\alpha)^2;$$

از اینجا،

$$(x-a)(x-b)(x-c) = \frac{k}{3}(x-\alpha)^3 + \lambda.$$

تساوی بالا باید به ازای هر x برقرار باشد. به ازای $x=a$، $x=b$، و $x=c$ بترتیب خواهیم داشت:

$$\frac{k}{3}(a-\alpha)^3 + \lambda = 0,$$
$$\frac{k}{3}(b-\alpha)^3 + \lambda = 0,$$
$$\frac{k}{3}(c-\alpha)^3 + \lambda = 0.$$

از اینجا،

$$a-\alpha = b-\alpha = c-\alpha.$$

بنابراین $a=b=c$. ■

● برای مسئلهٔ فوق راه حلهای دیگری هم به توسط خوانندگان ارائه شده است که صورت تنقیح شدهٔ آنها ذیلاً می‌آید:

راه حل اول. گوئیم اعداد a، b، و c نمی‌توانند دو بدو متمایز باشند؛ زیرا در غیر این صورت به طریقی که خواهد آمد به تناقض می‌رسیم. فرض کنیم که این اعداد دو بدو متمایز باشند. بی‌آنکه خللی به کلیت استدلال وارد شود فرض می‌کنیم که $a<b<c$، و تابع

$$g(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$$

را در نظر می‌گیریم. این تابع در بازهٔ $[a,b]$ در شرایط قضیهٔ رل صدق می‌کند. بنابراین نقطه‌ای مانند ξ_1 هست که $a<\xi_1<b$ و $g'(\xi_1)=0$. بهمین ترتیب، این تابع در بازهٔ $[b,c]$ نیز در شرایط این قضیه صدق می‌کند. بنابراین نقطه‌ای مانند ξ_2 هست که $b<\xi_2<c$ و $g'(\xi_2)=0$. ولی

$$g'(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c);$$

بنابراین ξ_1 و ξ_2 ریشه‌های متمایز معادلهٔ $g'(x)=0$اند (چرا؟). این ممکن نیست، زیرا معادلهٔ $g'(x)=0$ بنا به فرض دارای ریشهٔ مضاعف است. از این تناقض معلوم می‌شود که اعداد a، b، c نمی‌توانند دو بدو متمایز باشند. بنابراین حداقل یک زوج از آنها باید مساوی باشند. مثلاً $a=b$ (این فرض از کلیت برهان نمی‌کاهد). از اینجا معادلهٔ مفروض به صورت زیر درمی‌آید:

$$(x-a)^2 + 2(x-a)(x-c) = 0,$$

یا

$$(x-a)(3x-a-2c) = 0.$$

چون معادلهٔ اخیر دارای ریشهٔ مضاعف است، $a = \frac{a+2c}{3}$ بنابراین $c=a$ و برهان کامل می‌شود.

حل از: امیراکبری مجدآبادنو (تهران)

راه حل دوم. این روش مبتنی بر این حکم است: «فرض کنیم که در معادلهٔ درجهٔ دوم

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C = 0$$

ضریب x^2 (یعنی A) مثبت باشد. اگر به ازای عددی مانند α داشته باشیم $f(\alpha)<0$، آنگاه معادلهٔ فوق دارای دو ریشهٔ متمایز است.» (چرا؟).

اینک معادلهٔ درجهٔ دوم ذیل را در نظر می‌گیریم.

$$(*)\qquad f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) = 0.$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$f(a) = (a-b)(a-c),$$
$$f(b) = (b-a)(b-c),$$
$$f(c) = (c-a)(c-b).$$

گوئیم حداقل یکی از اعداد $f(a)$، $f(b)$، $f(c)$ باید صفر باشد. زیرا در غیر این صورت، با توجه به اینکه $f(a)\,f(b)\,f(c)<0$، لازم می‌آید که یکی از اعداد فوق منفی باشد؛ و این ممکن نیست، زیرا ضریب معادلهٔ درجهٔ دوم (*) مثبت است و معادله دارای ریشهٔ مضاعف. پس حداقل یکی از اعداد مذکور باید صفر باشد، مثلاً $f(a)=0$. در این صورت

$$(a-b)(a-c) = 0.$$

بنابراین $a=b$ یا $a=c$. در هر حالت مانند راه حل اول، برهان را به پایان می‌رسانیم.

حل از: علی‌اکبر جعفری (گلپایگان)
محمود بهروش (بروجرد)

راه حل سوم. این روش مبتنی بر این حکم است: «اگر معادلهٔ درجهٔ دوم $f(x)=0$ دارای ریشهٔ مضاعف باشد، آنگاه معادلات $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ دارای ریشهٔ مشترکند.» (چرا؟). با توجه به اینکه

$$f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c),$$

خواهیم داشت

$$f'(x) = 6x - 2(a+b+c).$$

از حل این معادله، جواب $x = \frac{a+b+c}{3}$ بدست می‌آید که

ضمناً باید جواب معادلهٔ $f(x)=0$ هم باشد. بنابراین

$$\left(\frac{a+b+c}{3}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{3}-b\right)+\left(\frac{a+b+c}{3}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{3}-c\right)+\left(\frac{a+b+c}{3}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{3}-c\right)=0.$$

از اینجا،

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0,$$

یا

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(c-a))=0.$$

از رابطهٔ اخیر معلوم می‌شود که $a=b=c$. ■

حل از: علی‌اکبری جعفری (گلپایگان)
محمود بهروش (بروجرد)
امیراکبری مجدآبادنو (تهران)

۱۱. انتگرال معین زیر را محاسبه کنید:

$$I=\int_0^{\pi/2}\log(\sin x)\,dx.$$

حل. برای محاسبهٔ انتگرال فوق، تغییر متغیر $x=2y$ را اعمال می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\pi/4}\log(\sin 2y)(2dy)\\&=2\int_0^{\pi/4}\log(2\sin y\cos y)\,dy\\&=2\left[\frac{\pi}{4}\log 2+\int_0^{\pi/4}\log(\sin y)\,dy+\int_0^{\pi/4}\log(\cos y)\,dy\right].\end{aligned}$$

اینک در انتگرال $\int_0^{\pi/4}\log(\cos y)\,dy$ تغییر متغیر $y=\frac{\pi}{2}-x$ را اعمال می‌کنیم:

$$\int_0^{\pi/4}\log(\cos y)\,dy=-\int_{\pi/2}^{\pi/4}\log(\sin x)\,dx.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}I&=\frac{\pi}{2}\log 2+2\int_0^{\pi/4}\log(\sin y)\,dy+2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\log(\sin x)\,dx\\&=\frac{\pi}{2}\log 2+2\int_0^{\pi/2}\log(\sin x)\,dx\\&=\frac{\pi}{2}\log 2+2I.\end{aligned}$$

از اینجا، $I=-\frac{\pi}{2}\log 2$. ■

۱۳ـ ابتدا ثابت کنید که عبارت $\cos(n\,Arc\cos x)$ کثیرالجمله‌ای است از درجهٔ n برحسب x. سپس این کثیرالجمله را به عوامل درجهٔ اول تجزیه کنید. با استفاده از آن ثابت کنید که

$$\sin\frac{\pi}{4n}\sin\frac{3\pi}{4n}\cdots\sin\frac{(2n-1)\pi}{n}=\frac{1}{\sqrt{2^n B}};$$

که در آن،

$$B=\begin{cases}1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n} & (2\mid n),\\ 1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n-1} & (2\nmid n).\end{cases}$$

حل. برای اثبات، از دستور موآور در اعداد مختلط استفاده می‌کنیم. به موجب این دستور، به ازای هر n طبیعی

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

اگر بر طبق دستور دوجمله‌ای طرف اول رابطهٔ فوق را بسط دهیم و اجزاء حقیقی طرفین را با هم مساوی قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$(*)\quad \cos n\theta=\cos^n\theta-\binom{n}{2}\sin^2\theta\cos^{n-2}\theta+\binom{n}{4}\sin^4\theta\cos^{n-4}\theta+\cdots+A,$$

که در آن

$$A=\begin{cases}(-1)^{n/2}\sin^n\theta & (2\mid n),\\ (-1)^{(n-1)/2}\binom{n}{n-1}\sin^{n-1}\theta\cos\theta & (2\nmid n).\end{cases}$$

اینک برای حل مسئله فرض می‌کنیم که $Arc\cos x=\theta$. بنابراین، $x=\cos\theta$ و از اینجا $\sin^2\theta=1-x^2$. پس بر طبق $(*)$،

$$\begin{aligned}(**)\quad \cos(n\,Arc\cos x)&=\cos n\theta\\&=x^n-\binom{n}{2}(1-x^2)\,x^{n-2}\\&\quad+\binom{n}{4}(1-x^2)^2\,x^{n-4}\\&\quad+\cdots+A;\end{aligned}$$

که در آن A همانست که قبلاً ذکر شد ولی این‌بار عبارتی است برحسب قوای طبیعی x. واضحست که طرف دوم رابطه اخیر کثیرالجمله‌ای است از درجهٔ n برحسب x.

به منظور تجزیهٔ کثیرالجملهٔ $\cos(n\,Arc\cos x)$ به عوامل درجهٔ اول کافی است ابتدا ریشه‌های آن را تعیین کنیم. گوئیم هرگاه $\cos(n\,Arc\cos x)=0$,

آنگاه $n\,Arc\cos x = (2k-1)\frac{\pi}{2}$، که در آن k عدد صحیح دلخواهی است. اینک هرگاه k مقادیر $1, 2, \ldots, n$ را اختیار کند برای x، n مقدار دو بدو متمایز ذیل حاصل می‌شود:

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{2n},\ x_2 = \cos\frac{3\pi}{2n}, \ldots,$$
$$x_n = \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}$$

(چرا xها دو بدو متمایزند؟). بنابراین،

$$\cos(n\,Arc\cos x) = B\left(x-\cos\frac{\pi}{2n}\right)\left(x-\cos\frac{3\pi}{2n}\right)\cdots\left(x-\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right),$$

که در آن، B ضریب جملهٔ پیشرو کثیرالجملهٔ $\cos(n\,Arc\cos x)$ است (جملهٔ پیشرو یعنی جملهٔ متضمن x^n). با توجه به (**)، B بسادگی بدست خواهد آمد:

$$B = \begin{cases} 1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n} & (2\mid n), \\ 1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n-1}{n} & (2\nmid n). \end{cases}$$

اینک برای استخراج نتیجهٔ مطلوب طرفین تجزیهٔ فوق را به ازای $x=1$ محاسبه می‌کنیم. خواهیم داشت

$$1 = B\left(1-\cos\frac{\pi}{2n}\right)\left(1-\cos\frac{3\pi}{2n}\right)\cdots\left(1-\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right).$$

با استفاده از دستور $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$، نتیجهٔ مطلوب حاصل خواهد شد. ■

۱۴ــ فرض کنیم که تابع پیوستهٔ $f: R \to R$ چنان باشد که به ازای هر x و y از R،

$$f(x+y) = f(x)+f(y)$$

ثابت کنید که عددی حقیقی مانند a هست به طوری که $f(x)=ax$.

حل. اولاً ثابت می‌کنیم که $f(0)=0$. گوئیم

$$f(x) = f(x+0) = f(x)+f(0),$$

بنابراین $f(0)=0$ (۱). ثانیاً اگر x عدد حقیقی دلخواهی باشد آنگاه

$$0 = f(0) = f(x-x) = f(x+(-x)) = f(x)+f(-x);$$

از اینجا، به ازای هر x دلخواه، $f(-x) = -f(x)$ (۲). ثالثاً اگر x عدد حقیقی دلخواهی باشد، به استقراء ثابت می‌شود که به ازای هر n طبیعی، $f(nx) = nf(x)$ (۳) (ثابت کنید). اینک با فرض $x=1$، از (۳) نتیجه می‌شود که $f(n) = nf(1)$ (۴). از روابط (۱) (۲)، و (۴) به سادگی معلوم می‌شود که به ازای هر m صحیح،

$$f(m) = mf(1). \qquad (5)$$

اینک فرض می‌کنیم که q یک عدد طبیعی دلخواه باشد، با توجه به رابطهٔ (۳)،

$$f(1) = f\left(q\times\frac{1}{q}\right) = qf\left(\frac{1}{q}\right);$$

از اینجا، $f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q}f(1)$ (۶). از روابط (۵) و (۶) نتیجه می‌شود که به ازای هر عدد گویا مانند $\frac{p}{q}$،

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1) \qquad (7)$$

برای تکمیل حل مسئله، نظیر روابط (۵) و (۷) را به ازای هر عدد گنگ دلخواه بدست خواهیم آورد. برای این منظور، فرض می‌کنیم x عدد گنگ دلخواهی باشد. گوئیم به ازای هر n طبیعی، در بازهٔ $\left(x-\frac{1}{n}, x\right)$ عدد گویائی مانند $\frac{p_n}{q_n}$ وجود دارد. بدیهی است که $\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n} = x$، و از طرفی به موجب رابطهٔ (۷)، $f\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{p_n}{q_n}f(1)$. چون f پیوسته‌است،

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = f\left(\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{p_n}\right) = f(x),$$

بنابراین

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}f(1) = xf(1).$$

یعنی به ازای هر x گنگ

$$f(x) = xf(1). \qquad (8)$$

برطبق روابط (۷) و (۸) معلوم می‌شود که رابطهٔ اخیر به ازای هر x حقیقی برقرار است. بنابراین کافی است که $a = f(1)$.

تبصره. شرط پیوستگی تابع f در همهٔ نقاط R لازم نیست، و کافی است که f در یک نقطه پیوسته باشد. زیرا ازفرض

$$\forall x\, \forall y\, (f(x+y) = f(x)+f(y)), \qquad (*)$$

بلافاصله می‌توان پیوستگی آن را در هر نقطه نتیجه گرفت. برهان چنین است: فرض کنیم که f در نقطهٔ y_0 پیوسته باشد و x_0 یک نقطهٔ دلخواه از R. ε را عدد مثبت مفروضی می‌گیریم. به موجب پیوستگی f در y_0، عدد مثبتی مانند δ وجود دارد که

به ازای هر x که $|x - y_0| < \delta$،

$$|f(x) - f(y_0)| < \varepsilon.$$

اینک هرگاه $|x - x_0| < \delta$ آنگاه چون $|(x - x_0 + y_0) - y_0| < \delta$، خواهیم داشت

$$|f(x - x_0 + y_0) - f(y_0)| < \varepsilon;$$

و این به موجب (*) معادل است با

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

یعنی f در x_0 پیوسته است. ■

۱۵- تابع

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} x & (|x| \leqslant 1) \\ |x - 1| & (|x| > 1), \end{cases}$$

مفروض است.

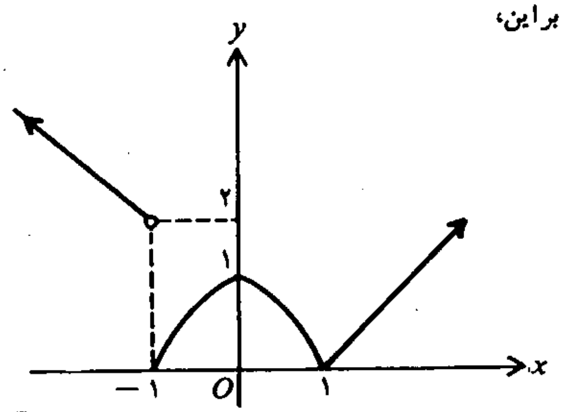
اولاً، نمودار آن را رسم کنید و در پیوستگی آن بر R بحث کنید.

ثانیاً، مجموعهٔ نقاطی را که f' در آن نقاط موجود است مشخص کرده و نمودار f' را رسم کنید.

حل. با توجه به تعریف f، معلوم می‌شود که

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} x & (-1 \leqslant x \leqslant 1) \\ x - 1 & (x > 1) \\ 1 - x & (x < -1), \end{cases}$$

بنابراین،



بدیهی است که به دلیل پیوستگی هریک از توابع $\cos \frac{\pi}{2} x$، $1 - x$، و $x - 1$ به ترتیب در بازه‌های $(-1, 1)$، $(1, +\infty)$، و $(-\infty, -1)$، تابع $f(x)$ براجتماع این بازه‌ها پیوسته است. اینک به تحقیق در پیوستگی این تابع در هر یک از نقاط $x = 1$ و $x = -1$ می‌پردازیم. ملاحظه می‌کنیم که

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \cos \frac{\pi}{2} x = 0,$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x - 1) = 0.$$

از این دو رابطه با توجه به اینکه $f(0) = 0$، معلوم می‌شود که f در $x = 1$ پیوسته است. از طرفی

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \cos \frac{\pi}{2} x = 0,$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (1 - x) = 2.$$

چون حدود چپ و راست متمایزند، نتیجه می‌شود که f در $x = -1$ پیوسته نیست. بنابراین f بر $R - \{-1\}$ پیوسته است.

در مورد قسمت ثانیاً مسئله ملاحظه می‌کنیم که f بر هر یک از بازه‌های $(-1, 1)$، $(1, +\infty)$، و $(-\infty, -1)$ دارای مشتق است. کافی است در نقاط $x = 1$ و $x = -1$ به تحقیق در مشتق‌پذیری آن بپردازیم. گوئیم چون f در $x = -1$ پیوسته نیست، در این نقطه مشتق‌پذیر نخواهد بود. در نقطهٔ $x = 1$، باید در وجود حد زیر بحث کرد:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

برای این منظور حد چپ و راست را در نظر می‌گیریم.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{\sin \frac{\pi}{2} (1 - x)}{x - 1} = -\frac{\pi}{2},$$

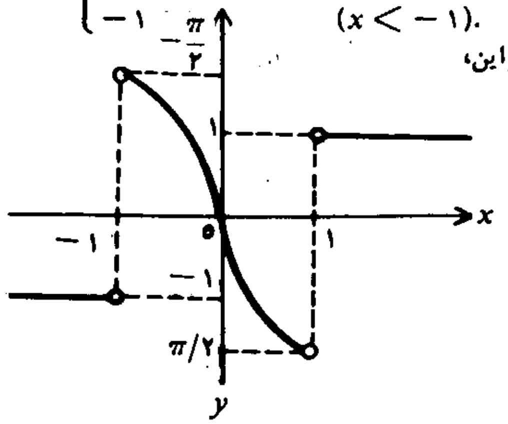
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{(1 - x) - 0}{x - 1} = -1$$

چنانکه ملاحظه می‌شود حدود چپ و راست متمایزند؛ بنابراین f در نقطهٔ $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست. از اینجا، مجموعهٔ نقاطی که f در آن نقاط دارای مشتق است عبارتست از $R - \{-1, 1\}$.

برای رسم نمودار f' ابتدا باید ضابطهٔ آن را مشخص کنیم. ملاحظه می‌شود که

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} x & (-1 < x < 1) \\ 1 & (x > 1) \\ -1 & (x < -1). \end{cases}$$

بنابراین،



۱۷ـ دایره‌ای به شعاع R مفروض است، محیط این دایره را به وسیلهٔ نقاط A، B، ...، و L به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و نقطه‌ای دلخواه مانند M روی این دایره اختیار می‌کنیم. ثابت کنید که (آ). حاصلجمع مربعات فواصل نقطهٔ M از هر یک از نقاط A، B، ...، و L مستقل از انتخاب نقطهٔ M است؛

(ب). مطلوبست حاصلجمع مربعات اقطار و اضلاع کثیرالاضلاع منتظم $AB\ldots L$.

حل (روش هندسی). فرض می‌کنیم $ABCD\ldots L$ چند ضلعی منتظم به مرکز O و شعاع R باشد. طول ضلع چند ضلعی را a، ارتفاع (سهم) آن را r، و نصف زاویهٔ مرکزی آن را α فرض می‌کنیم. اگر M نقطهٔ دلخواهی از دایرهٔ محیطی چند ضلعی روی کمان AB باشد، در مثلث MAB با توجه به اینکه $\widehat{AMB}$ منفرجه است خواهیم داشت.

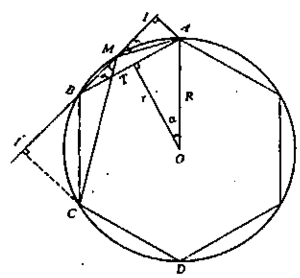
$$AB^2 = MA^2 + MB^2 + 2MB \cdot MI, \qquad (1)$$

و در مثلث MBC که زاویهٔ $B\widehat{M}C$ حاده و مساوی α است،

$$BC^2 = MB^2 + MC^2 - 2MB \cdot BI'. \qquad (2)$$

با توجه به شکل می‌توان دریافت $AMI \sim AOT$. (دو مثلث قائم‌الزاویه یک زاویهٔ حادهٔ مساوی دارند) و $CMI' \sim AOT$. بنابراین،

$$\frac{MI}{OT} = \frac{AI}{AT}$$



یا $MA = \frac{2r\,AI}{AB}$. از اینجا با استفاده از (۱) خواهیم داشت:

$$AB^2 = MA^2 + MB^2 + \frac{8r}{a} S_{MBA},$$

که در آن S_{MBA} مساحت مثلث MBA است. به همین طریق، رابطهٔ (۲) به صورت ذیل درمی‌آید:

$$BC^2 = MB^2 + MC^2 - \frac{8r}{a} S_{MBC}.$$

به طریق مشابه، برای CD، ...، و LA خواهیم داشت:

$$CD^2 = MC^2 + MD^2 - \frac{8r}{a} S_{MCD},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$LA^2 = ML^2 + MA^2 - \frac{8r}{a} S_{MLA}$$

از جمع تساویهای فوق معلوم می‌شود که

$$na^2 = 2(MA^2 + MB^2 + \cdots + ML^2) - \frac{8r}{a}(-S_{MBA} + S_{MBC} + S_{MCD} + \ldots + S_{MLA}).$$

در این تساوی عبارت داخل پرانتز اخیر مساوی S، مساحت چند ضلعی منتظم است، بنابراین با توجه به اینکه $S = \frac{1}{2}nar$،

$$na^2 = 2(MA^2 + MB^2 + \cdots + ML^2) - \frac{8r}{a}\,\frac{nar}{2}$$

یا

$$MA^2 + MB^2 + \cdots ML^2 = \frac{na^2}{2} + 2nr^2.$$

ولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ATO،

$$R^2 = r^2 + \frac{a^2}{4},$$

بنابراین

$$MA^2 + MB^2 + \cdots + ML^2 = 2nR^2.$$

حل (روش مثلثاتی). با توجه به شکل،

$$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cos(\pi - \alpha),$$

یا

$$AB^2 = MA^2 + MB^2 + 2MA \cdot MB \cos\alpha.$$

از طرفی

$$S_{MAB} = \frac{1}{2} MA \cdot MB \sin(\pi - \alpha),$$

بنابراین $MA \cdot MB = \frac{2S_{MAB}}{\sin\alpha}$. از اینجا، با توجه به رابطهٔ (*) خواهیم داشت:

$$AB^2 = MA^2 + MB^2 + 4\,\mathrm{cotg}\,\alpha\, S_{MAB}.$$

و به همین ترتیب

$$BC^2 = MB^2 + MC^2 - 4\,\mathrm{cotg}\,\alpha\, S_{MBC},$$

$$CD^2 = MC^2 + MD^2 - 4\,\mathrm{cotg}\,\alpha\, S_{MCD}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$LA^2 = ML^2 + MA^2 - 4\,\mathrm{cotg}\,\alpha\, S_{MLA}$$

از جمع تساویهای فوق،

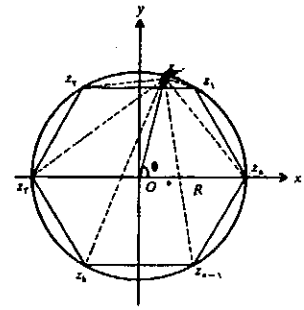
$$na^2 = 2(MA^2 + MB^2 + \cdots + ML^2) - 4S\,\mathrm{cotg}\,\alpha,$$

که در آن S مساحت چند ضلعی $ABCD\ldots L$ است. با توجه به اینکه $S = \frac{1}{2}nar$ و $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{2r}{a}$،

$$na^2 = 2(MA^2 + MB^2 + \cdots + ML^2) - 4nr^2$$

از اینجا، با استفاده از رابطهٔ $R^2 = r^2 + \frac{a^2}{4}$، خواهیم داشت:

$$MA^2 + MB^2 + \cdots + ML^2 = 2nR^2.$$



حل (با استفاده از خواص اعداد مختلط)

می‌دانیم که اعداد مختلط

$$z_k = R\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$$

$(k = 1, 2, 3, \dots, n)$، رئوس یک n ضلعی منتظم‌اند. اینک نقطهٔ دلخواه z را روی محیط دایره (به شعاع R) در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که صورت مثلثاتی عدد مختلط z به صورت ذیل باشد

$$z = R(\cos\theta + i\sin\theta).$$

برای حل مسئله کافی است عبارت $\sum_{k=1}^{n}|z - z_k|^2$ را محاسبه کنیم. ملاحظه می‌شود که

$$\begin{aligned} z - z_k &= R\left[\left(\cos\theta - \cos\frac{2k\pi}{n}\right) + i\left(\sin\theta - \sin\frac{2k\pi}{n}\right)\right] \\ &= 2R\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\theta}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{k\pi}{n}\right) - i\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{k\pi}{n}\right)\right]. \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} |z - z_k|^2 &= 4R^2\sin^2\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2R^2\left[1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{n} - \theta\right)\right] \end{aligned}$$

از اینجا،

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}|z - z_k|^2 &= 2nR^2 - \sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2k\pi}{n} - \theta\right) \\ &= 2nR^2 - \cos\theta\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n} \\ &\quad - \sin\theta\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{n}. \end{aligned}$$

به محاسبه معلوم می‌شود که

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n} = \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{n} = 0,$$

بنابراین،

$$\sum_{k=1}^{n}|z - z_k|^2 = 2nR^2$$

درصورتی که z به یکی از نقاط z_k منطبق [illegible]هم رابطهٔ فوق برقرار می‌ماند. اینک برای محاسبهٔ [illegible] اقطار و اضلاع این n ضلعی منتظم، فرض می‌کنیم [illegible]ب به هر یک از نقاط z_1، z_2، ...، و z_n منطبق شود. [illegible] از آنچه گفته شد،

$$\sum_{k=1}^{n}|z_i - z_k|^2 = 2nR^2 \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

از اینجا،

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|z_i - z_k|^2 = 2n^2R^2$$

حاصلجمع فوق عبارتست ازحاصلجمع مربعات اقطار واضلاع n ضلعی که در آن مربع هرضلع دوبار به حساب آمده است(چرا؟) بنابراین حاصلجمع مطلوب عبارت است از

$$S = 2n^2R^2 - 2(|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + \dots + |z_{n-1} - z_n|^2).$$

با توجه به اینکه

$$|z_{i-1} - z_i|^2 = 4R^2\sin^2\frac{\pi}{n} \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

معلوم می‌شود که

$$S = 2n^2R^2 - 8nR^2\sin^2\frac{\pi}{n}. \blacksquare$$

تشکر

خوانندگان ارجمندی که [illegible] می‌آید، حل صحیح اغلب مسائل [illegible] دفتر مجله ارسال داشته‌اند. [illegible] آرزوی توفیق، از همکاری [illegible] صمیمانه تشکر می‌نماید.

آقایان **محمود بهرو[illegible]** **علی‌اکبر جعفری** (گلپایگان) [illegible] **مجددآبادنو** (تهران)، و [illegible] (بیرجند).

توضیح اینکه موضوع مسئله [illegible] آتیه به صورت مسئله‌ای مستقل [illegible] چون تاکنون راه حلی برای مسئلهٔ [illegible] است، این مسئله به مسابقه گذاشته [illegible]

درباره‌ٔ اعداد اول

در بین اعداد طبیعی بـزرگتر از یک (یعنی اعداد ۲، ۳، ۴، . . .) اعدادی وجـود دارند کـه تنها بر یک و خـود قـابل قسمت‌اند؛ ایـن اعداد را اعداد اول می‌نامند. اعداد اول مبنائی برای همهٔ اعداد طبیعی است، به ایـن معنی کـه هر عدد طبیعی بصورت حاصلضرب قوائی از اعداد اولی است که مقسوم‌علیه‌های این عددند. به‌عنوان مثال، $۵ . ۳ . ۲^۳ = ۶۰$. نخستین هفت عدد اول متمایز عبـارتند از: ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، و ۱۷. اینک این سؤال پیش می‌آید کـه آیا این رشته از اعداد مختوم است یا اینکه الی غیرالنهایه ادامه دارد؛ به عبارت دیگر آیا بزرگترین عدد اول وجود دارد یا نه. جواب اینست که بزرگترین عدد اول وجود ندارد. ایـن موضوع از عصر طلائی یونـانیان مکشوف بوده، و به توسط اقلیدس در سه قرن قبل از میلاد به ثبوت رسیده است. استدلال وی بی‌اندازه ساده ومبرهن است وهنوز هم تازگی خود را حفظ کرده است. پس از اثبات نامتناهی بودن مجموعهٔ اعداد اول، سؤالاتی دیگر در مـورد این اعـداد مطرح می‌شود؛ به بعضی از آنها پاسخ داده شده، ولی برخی همچنان بی‌جواب باقی مانده‌اند. در اینجا، چند نمونه از این سؤالات مورد بررسی قرار می‌گیرند، و ضمناً برهان اقلیدس نیز ارائه خواهد گردید.

معلوم نیست که مفهوم اول برای اولین‌بار در چـه زمانی مطرح شده است، و چه مدتی سپری گشته تا از مطالعه در خواص اولیهٔ چنین اعدادی بـه نـامتناهی بودن آن پی برده شود. شاید پس از نخستین ملاحظات تجربی و نیز مطالعهٔ عملی در خواص اعدادی چون ۲، ۳، ۱۱، و ۱۷، این سؤال طبعاً پیش آمده است.

برهان ذیل– برای اثبات نامتناهی بودن رشتهٔ اعداد اول– هنوز هم از ساده‌ترین برهانها در این زمینه است. فرض کنیم که چنین نباشد. در این صورت، عدد اولی مانند p وجود دارد که از هر عدد اول دیگر بزرگتر است. اینک عدد $m = p! + ۱$ را در نظر می‌گیریم؛ این عدد بر هیچ عدد اول کوچکتر از p قابل قسمت نیست. بنابراین m خود یک عدد اول است و بزرگتر از p می‌باشد. ولی این یک تناقض است؛ زیرا p بـزرگترین عدد اول فرض شده بود. ایـن نتیجهٔ زیبا و ظریف اقلیدس، که ضمناً برهانش بسیار هم ساده است، یکی از اولین نمـونهٔ برهانهای مشهور ریاضی است که به طریقهٔ برهان خلف صورت گرفته است. پس از بـررسی این حکم، سئوالات تـازه‌ای مطرح می‌شود، و پاسخ به این سؤالات منجر به نتایج و ملاحظات دیگری می‌گردد. به‌عنوان مثال، با بکار بـردن مفهوم «فاکتوریل» می‌توان متقاعد شد کـه همواره یک رشتهٔ «بقدر کافی طولانی» از اعداد طبیعی متوالی کـه اول نباشند وجـود دارد. در واقع، بـه ازای هر n مفروض می‌تـوان n عدد متوالی، با در نظر گرفتن اعداد طبیعی $n! + ۲$، $n! + ۳$، . . .، و $n! + n$، بدست آورد؛ این اعـداد جملگی مرکب (یعنی غیراول)‌اند. زیـرا اولی بـر ۲، دومی بر ۳، . . .، و n می بر n قابل قسمت است.

هرگاه موضوع را قدری بیشتر تعقیب کنیم، به شگفتی این اعداد و خصیصهٔ مسائل مربوط به آن پی خـواهیم برد: متدرجاً مسائل جدید مطرح می‌شوند، و این مسائل، مسائل جدید دیگری را پیش می‌آورند که عموماً پاسخ به بعضی از آنها چندان هم ساده نیست.

اینک با علم بـه اینکه رشتهٔ اعداد اول نـامتناهی است، می‌خواهیم فراوانی آنها را پیدا کنیم. در حقیقت، آیـا می‌توان یک تقریب بـرای $\pi(n)$، یعنی عدهٔ اول کمتر از n (بزرگ)، پیدا کرد. می‌توان ثابت کرد که $\pi(n)$ به ازای nهای بقدر کافی بزرگ تقریباً برابر است با $n/\log n$، کـه بدین معنی است کـه نسبت $\pi(n)$ به $n/\log n$، به ازای nهای بقدر کافی بزرگ، به ۱ نزدیک ونزدیکتر می‌شود. این مشهورترین قضیه‌در باب (توزیع) اعـداد اول است کـه نخستین بار بـه تـوسط **ژ. آدامار**[1] و **دولا واله‌پوسن**[2] در ۱۸۹۶ ثابت شد. برهانهای اولیهٔ این قضیهٔ نسبتاً دشوار ومتضمن مفاهیم مشکل و در سطح عالی آنالیز ریاضی، یعنی تئوری توابع تحلیلی، است. تنها در همین سالیان اخیر بود که یک برهان مقدمـاتی (البته، طـولانی و پیچیـده) به توسط **پ. اردوش**[3]، و **آ. سلبرگ**[4] ارائه شد. این برهان ترکیبیات و مفاهیم حسابی را بکار می‌گیرد و مستلزم اطلاعـاتی از توابع تحلیلی نیست.

از بین مسائل معـروف اعداد اول، مقدماتی‌ترین آنهـا مسئلهٔ ذیل است: در مـورد اعداد طبیعی زوج به امتحان ملاحظه شده است که قابل نمایش بـه صورت حـاصلجمع دو عدد اول است. **ک. گولدباخ**[5] ریاضیدان آلمانی حالت کلی را حدس زد. یعنی بـه حدس اظهار داشت کـه هر عدد طبیعی زوج قـابل نمایش به‌صورت حاصلجمع دو عدد اول است. تا عصر حاضر این حدس به یقین مبدل نشده است و ریاضیدانان موفق به اقامهٔ برهان بـرای آن نشده‌اند. صحت این حکم بـرای اعداد طبیعی زوج کوچکتر از $۱۰^۸$ محقق شده است[6]. با بکار بردن ماشینهای الکتریکی محاسبه، می‌توان آمارهائی فـراهم آورد برای نشان دادن اینکه بـه چند طریق می‌توان یک عدد زوج مـانند $۲n$ به

صورت حاصلجمع دو عدد اول نوشت؛ عدهٔ طرق با بزرگ شدن n بزرگ می‌شوند. در حال حاضر ریاضیدان روسی، **ا. م. وینوگرادوف**[7]، ثابت کرده است که هر عدد طبیعی فرد بقدر کافی بزرگ، قابل نمایش به صورت حاصلجمع سه عدد اول است!

فرمولی که به وسیلهٔ آن بتوان هر عدد اول بقدر کافی بزرگ را بدست آورد، وجود ندارد. البته عباراتی در دست است که از روی آن می‌توان عده‌ای از اعداد اول را تعیین کرد. به عنوان مثال فرمول اویلر $N = x^۲ + x + ۴۱$، به ازای $x = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۳۹$، اعداد اول متمایزی بدست می‌دهد. ولی معلوم نیست که به ازای یک تعداد نامتناهی از xها، این عبارت (یعنی N) یک عدد اول است یا نه. حتی وجود کثیرالجمله‌ای برحسب x (از درجهٔ بالاتر از یک) که تعداد نامتناهی از اعداد اول را به ازای مقادیر طبیعی x بدست دهد، هنوز محقق نیست؛ البته، کثیرالجمله‌هائی از درجهٔ اول (به عنوان مثال، مانند $۱ + ۲x$) وجود دارد، ولی این امر برای درجات بالاتر از یک معلوم نیست. همچنین معلوم نیست که تعدادی نامتناهی از اعداد اول دوقلو، یعنی اعداد اولی که تفاضل آنها ۲ باشد (مانند ۱۱ و ۱۳؛ ۲۹ و ۳۱ و غیره) وجود دارد یا نه.

اینها نمونه‌هائی هستند از مسائلی ساده در اعداد اول که بطور طبیعی مطرح می‌شوند و اگر چه صورت ظاهری آنها ساده بنظر میرسد، اثبات آنها غالباً دشوار است و این امکان وجود دارد که با معلومات ریاضی عصر ما ثابت نگردند!

اما در مورد حکمی که اخیراً ذکر شد، اطلاعاتی در دست است. به عنوان مثال، معلوم گشته که رشتهٔ اعداد اول به صورت $۴k + ۱$ و $۴k + ۳$ نامتناهی است. به طور کلی ثابت شده است که در تصاعد حسابی $ak + b$، که در آن a و b نسبت بهم اولند و $k = ۱, ۲, ۳, \ldots$، یک تعداد نامتناهی عدد اول وجود دارد؛ و این قبیل اعداد اول در مجموعهٔ اعداد اول دارای فراوانی $۱/\varphi(a)$ است (($\varphi(a)$ یعنی عدهٔ اعداد اول کوچکتر از a و متباین با آن)[8]. مثالهای مذکور مبین نمونه‌هائی از تفکرات ریاضی، و ادامهٔ آن در طول تاریخ است: ریاضیدانان ابتدا در خواص رشته‌ای متناهی از اعداد (اولین و اساسی‌ترین اشیاء ریاضی) تحقیق می‌کنند و سپس این خواص را در مورد یک تعداد نامتناهی از اعداد مورد بررسی قرار می‌دهند. از همان دوران نضج ریاضیات، تعمیم یکی از اهم مشخصه‌های عمدهٔ ریاضیات بوده است و ریاضیدانان همواره براین امر اصرار می‌ورزیدند. **ل. کرونکر**[9] اظهار داشته است که «خداوند اعداد صحیح را آفرید و بشر باقی ریاضیات را».

***

مقتبس از مقالهٔ نخست کتاب زیر

Mark kac and Stanislaw M. Ulam, *Mathematics and Logic*, Retrospect and Prosects, Frederick A. Praeger, Publishers, 1968.

ع. جمالی

یادداشتها

(۱) **ژاک آدامار** (Jacques Hadamard)، ۱۸۶۵–۱۹۶۳، ریاضیدان فرانسوی، استاد دانشگاه سوربون (از ۱۹۰۰) و کولژ دوفرانس، و عضو آکادمی علوم (۱۹۱۲).

(۲) **دولاواله ـ پوسن** (de la Valleé-Poussin)، ۱۸۶۶–۱۹۶۲، ریاضیدان بلژیکی، استاد دانشگاه لوون (۱۸۹۲)، و عضو آکادمی سلطنتی بلژیک.

(۳) **پول اردوش** (P. Erdős).

(۴) **آتله سلبرگ** (A. Selberg).

(۵) **کریستیان گولدباخ** (Christian Goldbach)، ۱۶۹۰–۱۷۶۴، ریاضیدان آلمانی، استاد ریاضیات و مورخ آکادمی علوم سن پطرز بورگ.

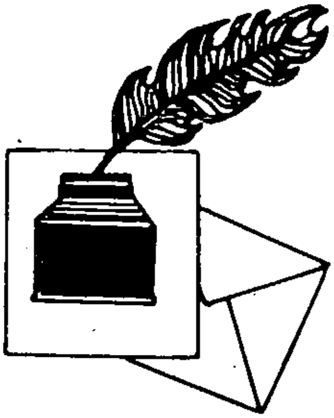
(۶) تاریخ طبع کتاب مرجع، مربوط به سال ۱۹۶۸ است و یقیناً پس از گذشت چندین سال، بجای عدد $۱۰^۸$، عدد بزرگتری (بوسیلهٔ ماشینهای الکتریکی محاسبه) پیدا شده است.

(۷) **ایوان ماتویویچ وینوگرادوف** (Ivan Matveïevitch Vinogradov)، ۱۸۹۱–، ریاضیدان معاصر روس، عضو آکادمی علوم اتحاد جماهیر شوروی و عضو وابستهٔ آکادمی علوم بسیاری از ممالک دیگر.

(۸) فرض می‌کنیم که $\pi_a(n)$ نشان دهندهٔ اعداد اول کوچکتر از n در تصاعد حسابی $ak + b$، ($k = ۱, ۲, ۳\ldots$)، باشد. در این صورت، $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi_a(n)}{\pi(n)} = ۱/\varphi(a)$.

(۹) **لئوپولد کرونکر** (Leopold Kronecker)، ۱۸۲۳–۱۹۸۱، ریاضیدان آلمانی، از علمای بزرگ تئوری اعداد در قرن نوزدهم، مؤسس تئوری وسیع اعداد جبری.

نامه‌ها



*** آقای مصطفی مدیرروستا ، تهران**

درمورد تابع وایرشتراس که در همهٔ نقاط پیوسته و در هیچ نقطه مشتق‌پذیر نیست ، باید به اطلاع برسانیم که این تابع از معروفترین توابع آنالیز مقدماتی و یکی از مثالهای نقض مشهور ریاضی است . وایرشتراس با عرضهٔ چنین تابعی در ۱۸۷۲ ریاضیدانان معاصر خود را دچار شگفتی ساخت : ضابطهٔ تابع مذکور که بر مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف شده ، چنین است :

$$\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \sin 2^{n} \pi x.$$

این تابع همه‌جا پیوسته است و هیچ‌جا مشتق‌پذیر نیست . برهان ادعای مذکور مستلزم اطلاعات پیشرفته‌ای در آنالیز مقدماتی است . در فرصت مناسب ، طی مقاله‌ای این تابع و چگونگی ساختن آن را بیان خواهیم داشت .

*** آقای محسن حبیبی راد (مربی ریاضی) ، تهران**

مایهٔ خوشوقتی است که در پیشبرد این خدمت فرهنگی اظهار علاقه نموده اید . باید به عرض برسانیم که مسئولین مجله از افراد شائق کمال استقبال را می کند . همانگونه که مطلع هستید در شمارهٔ دوم مجله طی " دعوت به همکاری " ضوابط مقالات و مطالب ریاضی مشخص گردیده است . ضمنا "می توانید با ملاحظهٔ مندرجات سه شمارهٔ این مجله ، هماهنگی لازم را در ارسال مقالات معمول دارید .

*** آقای رضا متالهی (مدرس مرکز تربیت معلم) ، اردکان یزد**

از ارسال دو مسئلهٔ هندسه تشکر می کنیم . لازم به توضیح است که راه حلهای هندسی این مسائل مشکل ومعماگونه است . این قبیل مسائل از نظر آموزشی متضمن فایدهٔ آموزشی نیستند . حل این مسائل را می توان به طریقهٔ مثلثاتی از دانش آموزان خواست که در آن از روابط مثلثاتی در مثلث استفاده می شود . در شماره‌های آتی از این مسائل در قسمت مثلثات استفاده خواهد شد .

*** آقای سید محمدرضا هاشمی موسوی (دیپلمهٔ فیزیک ــ ریاضی) ، تهران**

همانطور که حدس زده اید ، محیط بیضی تابعی است از a و b (نصف قطرهای اصلی بیضی) ، ولی نه تابعی که شما بدست آورده اید . در واقع محیط بیضی تابعی است از a و b به‌صورت انتگرال (بیضوی)

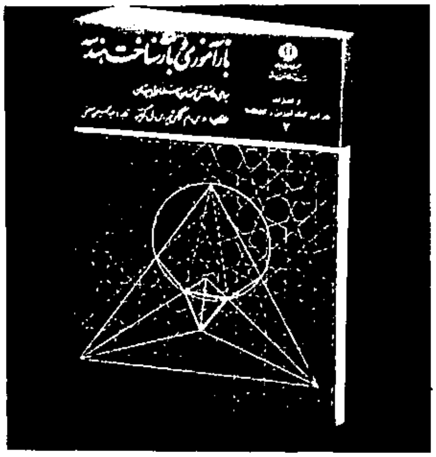
$$s = 4a \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t}\, dt$$

که در آن $k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$. این انتگرال به وسیلهٔ توابع مقدماتی قابل محاسبه نیست و می توان مقدار آن را به تقریب (مثلا "به روش سیپمسون) محاسبه کرد .

شما با این پشتکار و علاقه‌ای که به ریاضیات دارید ، ابتدا باید ریاضیات را در سطح عالیتری تحصیل کنید و سپس به دنبال مسائل مشهور ریاضی بروید . در هرصورت تلاش شما چه در به دست آوردن دستور محیط بیضی و چه در تربیع دایره قابل تحسین است .

*** آقای محمد حسین فلاح نژاد (هنرجو) ، ساری**

صورت مطلب ارسالی شما درباره‌ٔ چگونگی رسم بیضی مبهم است و معلوم نیست نقاط تلاقی میانه‌های کدام مثلثها ست که تشکیل بیضی می دهند . صورت مسئله را دقیقا "بنویسید تا معلوم شود که شکل حاصل از اجتماع این نقاط بیضی است یا شبه‌بیضی . در کتابهای هندسهٔ ششم ریاضی دوره‌های گذشته ، روشهایی برای رسم بیضی ارائه شده است که با دانستن قضایای مربوطه به‌سادگی قابل فهم است .



بازآموزی و بازشناخت هندسه (۲۳۰ صفحه)؛
مؤلفین: ه. س. م. کوکس‌تیر [و] س. ل. گریتزر؛
مترجم: عبدالحسین مصحفی؛
از انتشارات: دفتر امور کمك آموزشی و کتابخانه‌ها (وزارت آموزش و پرورش)؛
چاپ اول، بهار ۱۳۶۳.

کتاب بازآموزی و بازشناخت هندسه کتابی است در زمینهٔ هندسه که‌مؤلفین صاحب نام، در وهلهٔ اول آن را به دلیل کمبودهای ناشی از کم توجهی مسئولین برنامه‌ریز درسی کشورشان نسبت به‌هندسه، منتشر نموده‌اند؛ ضمناً از این رهگذر خواسته‌اند به‌بهترین وجهی جنبه‌های درخشان هندسهٔ اقلیدسی را ترسیم‌کنند. مؤلفین در مقدمهٔ کتاب ضمن اشاره به‌توانائیها و زیبائیهای خاص هندسه و اهمیت ویژهٔ آن‌درآموزش ریاضی وطریقه‌های استدلال، آن را مناسبترین مدخل برای علوم معرفی کرده و به تشریح موقعیت و پیشرفتهای آن پرداخته‌اند.

شاید به‌طریقی بتوان اعتبار کتاب را (بی‌مراجعه به‌متن) در اشراف و بصیرت یکی از مؤلفین برجستهٔ آن در موضوعات ومسائل هندسه یافت؛ **نام‌آشنای‌کوکس‌تیر** ، هندسه‌دان بلامنازع و صاحب آثار معروف در هندسه، بی‌گمان براهمیت این کتاب خواهد افزود.

کتاب اصلی به زبان انگلیسی، تحت‌عنوان Geometry revisited، منتشر شده و مترجم آن را از روی ترجمهٔ فرانسوی به‌فارسی برگردانده است. این کتاب مشتمل بر شش بخش به‌قرار ذیل است: **نقطه‌ها و خطهای وابسته به‌مثلث، برخی ویژگیهای دایره، نقطه‌های بریك استقامت، تبدیلات، آشنائی با هندسهٔ انعکاسی، آشنائی با هندسهٔ تصویری**؛ ضمناً علاوه بر پیشگفتار مؤلفین، بخشی تحت‌عنوان **راهنماییها و حل تمرینها** بدان منضم است. در بخشهای مختلف کتاب برخی از قضایای معروف هندسه به‌تناسب موضوع مورد بحث آمده است، از آن جمله، قضیهٔ بریانشن، قضیهٔ فوئرباخ، قضیهٔ پترسن ــ اسکوت، و قضیهٔ مورلی. کتاب مذکور از این حیث که مشتمل برمجموعه‌ای از قضایای معروف واساسی هندسه، و نیز به‌جهت اینکه حاوی تمرینات متعدد است‌حائزاهمیت بوده ومی‌تواند مورداستفاده علاقه‌مندان‌هندسه قرارگیرد.

از اقدامات قابل توجه ناشر این بوده که به‌منظور ارائهٔ کتاب کاملتری در هندسه (برای‌خوانندگان ایرانی)، آن را دراختیار آقای **حسین غیور** ــ که تبحر ایشان در هندسه مورد تصدیق جامعهٔ ریاضی ایران است ــ قرار داده وایشان عنداللزوم نکات تکمیلی لازم را بر متن افزوده‌اند. در اینجا به‌منظور نقد و بررسی دقیقتری از این کتاب، اظهارنظر عالمانهٔ ایشان را که درمقدمهٔ ناشر مذکور است، جهت مزید اطلاع خوانندگان عیناً نقل می‌کنیم:

ــ «در کتاب بازآموزی و بازشناخت هندسه با نکته‌های جالب مفاهیم تازه‌ای برخورد می‌کنیم. از این قرار:

۱ــ دخالت دادن اعداد مثبت و منفی در مساحت شکلها در هندسهٔ مسطحه، دنبالهٔ کارهایی که **شال** ریاضیدان نامی فرانسه دربارهٔ خط و زاویه انجام داده

اشت. این عمل حکمهای راجع به‌مساحتها را کلیت می‌دهد و از تأثیر شکل در آنها می‌کاهد. برای مثال اگر P نقطه‌ای از صفحهٔ مثلث ABC باشد، دربارهٔ مساحتهای علامت‌دار همواره تساوی زیر برقرار است.

$S(PAB) + S(PBC) + S(PCA) = S(ABC)$؛

۲ــ جفتهای نقطه‌های جداساز؛

۳ــ انحراف انعکاسی؛

۴ــ تعریف مقاطع مخروطی به‌عنوان قطبی‌معکوس دایره که بدین وسیله می‌توان بعضی از خواص مهم دایره را در مقطعهای مخروطی تعمیم داد.

اما باعث تعجب است که دراین کتاب نسبتهای همساز و ناهمساز و دستگاه آنها در محاق فراموشی افتاده و فقط در فصل نقطه‌های جدا ساز به‌نسبت ناهمساز اشاره‌ای شده و تعریف آن برای چهار نقطه در صفحه تعمیم داده شده است. با تأثیر گسترده وجالبی که این نسبتها و دستگاه آنها در هندسه دارد، حذف آنها موجب نقائصی است که فهرست‌وار به‌بعضی از آنهااشاره می‌شود:

۱ــ بااینکه در متن کتاب گاه مسائلی پیش پاافتاده به‌عنوان قضیه مطرح شده اما بسیاری ازقضیه‌های معروف هندسه از قلم افتاده است مانند خاصیت مهم چهارضلعی کامل که در آن هرقطر به‌وسیلهٔ دو قطر دیگر به‌توافق تقسیم می‌شود.

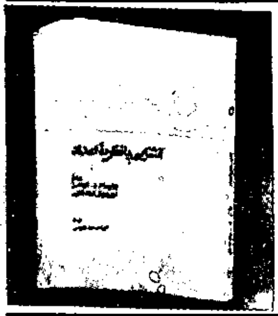
۲ــ تبدیل تعریف قطبی نقطه نسبت به‌دایره به مبنای نسبت همساز، که علاوه بردایره شامل دو خط و مقطعهای مخروطی نیز می‌شود به‌تعریفی به‌مبنای انعکاس که فقط برای دایره درست است.

۳ــ تبدیل برهانهای ساده وکوتاه بانسبت ناهمساز برای قضیه‌های پاپوس، پاسکال، بریانشن و... به برهانهای مفصل و پیچیده که چند صفحهٔ کتاب به‌شرح آنها اختصاص داده شده است.

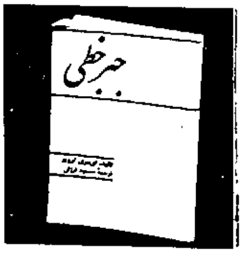
با اینهمه، مطالعهٔ کتاب به‌وسعت دید خواننده در هندسه می‌افزاید و جالب توجه و حائز اهمیت است، و کمبودهای یاد شده شاید به‌این جهت پیش آمده است که مؤلفان دانشمند کتاب فقط در نظر داشته‌اند که هموطنان خود را به‌هندسه آشنا سازند».

کتابهای تازه

● آشنائی با نظریهٔ اعداد (قسمت اول)
ویلیام و. آدامز، لری‌جوئل گولدشیتن
ترجمهٔ محمد آدینهٔ نارنجانی
مرکز نشر دانشگاهی
تهران، ۱۳۶۲، ۲۵۰ صفحه، ۴۲۰ ریال.



● جبر خطی
ای مری تروپر
ترجمهٔ مسعود فرزان
انتشارات سروش
تهران، ۱۳۶۳ (چاپ‌اول)، ۲۱۱ صفحه، ۳۰۰ ریال



● حساب‌دیفرانسیل وانتگرال وهندسهٔ‌تحلیلی‌جدید(جلد۱)
ریچارد ا. سیلورمن
ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده
انتشارات علمی و فنی
تهران، ۱۳۶۳ (چاپ اول)، ۴۶۴ صفحه، ۱۱۶۰ ریال

گزارشی از پنجمین کنگره آموزش ریاضی (استرالیا)

● **توضیح.** در شهریورماه ۶۳ هیئتی از سازمان پژوهش متشکل از کارشناسان گروه ریاضی دفتر تحقیقات و تنی چند از مؤلفین کتابهای ریاضی، به منظور شرکت در پنجمین کنگرهٔ جهانی آموزش ریاضی که در استرالیا برگزار شده بود عازم آن کشور شدند. این‌کنگره از تاریخ ۲ لغایت ۹ شهریور در شهر آدلاید آن کشور ادامه داشت. هیئت اعزامی سازمان پژوهش دربارهٔ این کنگره و ره‌آوردهای آن گزارشی تهیه کرده‌اند که قسمت اول آن ذیلا از نظر خوانندگان خواهد گذشت. این هیئت پس‌از پایان کنگرهٔ مذکور، به‌منظور ملاقات با مقامات وزارت آموزش و پرورش ژاپن، جهت تبادل تجارب و آراء، عازم این کشور شدند که گزارش آن متعاقباً به‌اطلاع خوانندگان خواهد رسید.

قسمت اول

کنگرهٔ آموزش ریاضی‌که اکنون مهمترین‌گردهمائی جهانی در آموزش ریاضی است هر ۴ سال یک‌بار تشکیل می‌شود. کنگره‌های گذشته به ترتیب در لیون (فرانسه) هامبورک (آلمان)، سوتمپتون (انگلستان) و وبرکلی (آمریکا) برگزار شده‌اند. در پنجمین کنگره که در شهر آدلاید (استرالیا) برگزار شد حدود ۱۸۰۰ نفر از معلمین ریاضی در سطوح مختلف از دبستان گرفته تا دانشگاه شرکت کرده بودند که در بین شرکت‌کنندگان چندتن از اساتید و محققین معروف ریاضی و آموزش ریاضی نیز حضور داشتند. محل برگزاری جلسات کنگره در دانشگاه آدلاید بود، جز سخنرانیهای عمومی که در سالن شهر برگزار می‌شد. جلسات کمیته‌ها و سخنرانیها از ساعت ۸٫۳۰ صبح شروع می‌شد و تا ساعت ۹ بعداز ظهر بدون وقفه ادامه پیدا می‌کرد و تنها یک ساعت در صبح و یک ساعت در عصر تنفس داده می‌شد. این کنگره به قول رسانه‌های گروهی استرالیا، یکی از فعالترین و منظم‌ترین و مفیدترین گردهمائی علمی در سطح جهان بوده است. برنامه‌ریزی این کنگره از حدود ۱۰ ماه قبل از برگزاری آن انجام شده بود و سخنرانان و مسئولین کمیته‌ها تعیین و برنامهٔ کار کنگره سازماندهی شده بود. این برنامه‌ها به شرح ذیل بود:

(الف). سخنرانیهای عمومی

۱. پرفسور **یوبیراتان دامیارسیو**[1] (برزیل): مبانی اجتماعی فرهنگی آموزش ریاضی.

۲. پرفسور **جرمی کیل ـ پاتریک**[2] (آمریکا): انعکاس و تراجع.

۳. پرفسور **رنفری‌پات**[3] (استرالیا): ریاضیات گسسته.

۴. پرفسور **ژان پی‌یرکاهان**[4] (فرانسه): اندازه‌گیریها و ابعاد.

این سخنرانیها در سالن شهر برگزار شد. از سخنرانیهای عمومی و سخنرانیهای مفید، تحقیقاتی ۴۴ نوار تهیه شده است.

(ب). گروههای موضوعی[5]

این سلسله برنامه‌ها در ۷ گروه اصلی که هر گروه به‌کمیته‌های فرعی متعددی تقسیم می‌شدند سازماندهی‌شده بود. هریك ازشرکت‌کنندگان موظف بودندکه به‌انتخاب خودشان دریك گروه‌شرکت وفعالیت‌داشته‌باشند واین‌انتخاب قبلا با مکاتبه انجام شده بود. در هر گروه موضوع‌خاصی مورد بحث و تحقیق قرار می‌گرفت. این گروهها به شرح ذیل بود:

ریاضیات برای همه. شامل کمیته‌های فرعی: ریاضیات برای همه؛ آموزش درتنگناها؛ ریاضیات درمتن؛ آموزش ریاضی در کشورهای جهان سوم.

زندگی حرفه‌ای معلمین. شامل کمیته‌های فرعی: استفاده از تحقیق؛ آموزش ضمن خدمت معلمین؛ آموزش معلمین در «حل مسئله»؛ نقش کامپیوتر در آموزش ضمن خدمت؛ تکنولوژی و روشهای تدریس در حل مسئله؛ معلم مفیدشدن؛ مسائل‌مربوط به‌اولین سال‌آموزش معلم‌ریاضی؛ مسائل اجتماعی و فلسفی زندگی معلم.

نقش تکنولوژی درآموزش ریاضی. شامل کمیته‌های فرعی: بحث در برنامه‌ریزی؛ الگوریتم و برنامه‌ریزی تلویزیون، ویدئو و فیلم؛ فعالیتهای کلاسی؛ آموزش معلمین متفرقه.

تئوری تحقیق و عمل در آموزش. شامل کمیته‌های فرعی: ریاضیات دورهٔ ابتدائی؛ ریاضیات‌پیش‌از دانشگاه؛ اعداد کسری و منطق؛ جبر؛ آمار و احتمال؛ هندسه؛ حل مسئله؛ جنبه‌های البائی و فرآیندی ریاضیات؛ مطالعات مربوط به کلاس؛ روشهای تدریس؛ روحیه طراحی درس.

برنامه‌ریزی آموزشی. شامل کمیته‌های فرعی: فرآیند برنامه‌ریزی آموزشی؛ نقش معلم در برنامه‌ریزی آموزشی؛ وجود تمایز برنامه‌های آموزشی؛ برنامه‌ریزی آموزشی بعنوان یك فرایند تاریخی؛ نقش هدایت‌کننده در برنامه‌ریزی آموزشی.

کاربرد و مدلسازی. شامل کمیته‌های فرعی: هدف نقش و دورنما؛ موضوع برنامه‌ریزی تحقیق روانشناسی؛ منابع شامل تکنولوژی؛ مدارس ابتدائی و راهنمایی؛ مدارس متوسطه و عالی؛ کالج و دانشگاه آموزش معلمین و بزرگسالان.

حل مسئله. شامل کمیته‌های فرعی: شروع کار در حل مسئله؛ حل مسئله در برنامه‌ریزی؛ حل مسئله و دنیای خارج؛ آموزش معلم برای حل مسئله؛ تحقیق و پیشرفت در حل مسئله؛ تحلیل تفصیلی از ارائهٔ حل مسئله؛ تکنولوژی و روش تدریس حل مسئله؛ مسابقات حل‌مسئله؛ حل مسئله چیست؟

در این گروه موضوعی ۵ کارگاه برای حل‌مسئله ترتیب داده شده بود.

لازم به توضیح است که هرکمیتهٔ فرعی حداقل ۴ جلسه داشت و علاوه برتوضیحات رئیس کمیته که درآن زمینهٔ خاص صاحبنظر بود، هرکمیته بین ۱۰ـتا ۱۶ سخنران داشت که نتیجهٔ کارهای تحقیقاتی خود راعرضه می‌کردند و گاهی مطالب به بحث گذاشته می‌شد. برخی از کمیته‌های فرعی خود به زیر کمیته‌هائی تقسیم می‌شدند که برای جلوگیری از تطویل کلام از بیان آنها خودداری می‌شود.

(ج). گروههای کار[6]

این سلسله برنامه‌ها در گروه‌کار اصلی تنظیم شده بود و هرگروه خود به‌کمیته‌های فرعی تقسیم می‌شد در هریك از جلسات این گروهها موضوعاتی به بحث‌گذاشته می‌شد و بیشتر وضع آموزش ریاضی و مسائل جاری آن در کشورهای مختلف مورد بررسی قرار می‌گرفت. هریك از اعضاء هیئت اعزامی سازمان پژوهش در یکی از گروهها شرکت کردند و به تناسب موضوع گروه مسئلهٔ برنامه‌ریزی آموزشی، تغییر کتابهای ریاضی، آموزش معلمین در سالهای بعد از انقلاب را توضیح دادند که عموماً مورد توجه واقع می‌شد. برنامه‌ریزی این گروهها به شرح زیر بود.

سالهای اولیهٔ کودك. موضوعات مورد بحث زیر گروهها: استعداد و توانائی یادگیری ریاضیات درسالهای اولیهٔ کودك؛ پیشرفت برنامه‌ریزی فعال در سالهای اولیهٔ کودك؛ نقش حل مسئله در ریاضیات کودکان؛ نقش تکنولوژی در ریاضیات کودکان؛ نقش زبان در ریاضیات کودکان؛ آموزش مربیان کودکان بعنوان معلم ریاضی؛ پیشرفت ریاضی درکودکان اقلیتهای جامعه؛ نقش وسائل فیزیکی در آموزش ریاضی کودکان.

یادداشتها

۱- Ubiraton D'Ambrorio (Bratil)
۲- Jeremy Kilpatrick (USA)
۳- Rean-Pierre Kahone (France)
۴- Jean-Pierre Kahane (Fance)
۵- Theme Group
۶- Action Group

مدارس ابتدائی. موضوعات مورد بحث درکمیته‌ها: محاسبه با اعداد طبیعی؛ کسرهای متعارفی، اعشاری و نسبتها؛ حل مسئله؛ هندسه در ابتدائی؛ جبر در ابتدائی؛ استفاده از میکروکامپیوتر و ماشین حساب در مدارس ابتدائی؛ منابع و روشها.

مدارس راهنمائی. موضوعات موردبحث درکمیته‌ها:

مدارس راهنمائی. موضوعات مورد بحث در کمیته‌ها: متغیرها و تعمیمها؛ ریاضیات رسمی؛ ابزار و تکنولوژی؛ تدریس ریاضی و خصوصی‌کردن یادگیری؛ رابطهٔ بین نمادها و وضعیتهای فیزیکی؛ رشد تصور در ریاضی؛ حافظه در ریاضیات؛ فشردگی درسی؛ موضوعات انتخابی.

مدارس متوسطه. موضوعات مورد بحث در زیر گروهها: محاسن و معایب برنامه‌ریزی متمرکز؛ ارزشیابی در مدارس متوسطه؛ تفاوتهای روشهای آموزش ریاضی در کشورهای مختلف جهان؛ کامپیوتر در مدارس متوسطه؛ عکس‌العملهای کشورهای مختلف جهان نسبت به‌کمبود معلم ریاضی درمدارس متوسطه؛ برنامه‌ریزی ریاضیات متوسطه از دید گزارشهای تازه؛ کشورهای پیشرفته چه توصیه‌ای برای معلمین ریاضی‌کشورهای جهان‌سوم دارند؛ ریاضیات مدارس متوسطه برای کسانی که ادامهٔ تحصیل آکادمیك نمی‌دهند؛ هندسه در مدارس متوسطه برنامه‌ریزی، محتوای فعلی و تغییراتی که باید در آن داده شود.

دوره‌های ترشیری[7] (بین دبیرستان و دانشگاه). موضوعات مورد بحث در زیر گروهها: ریاضیات برای استفاده‌کنندگان غیر تخصصی؛ ریاضیات نظری؛ ایجاد درسهای جدید؛ هنر بکاربردن ریاضیات کامپیوتر در ریاضیات ترشیری؛ برخوردهای ریاضیات متوسطه.

در این گروه کار سخنرانیهائی بوسیله چند نفر از محققین آموزش ریاضی از کشورهای انگلستان اندونزی، سودان، و هلند برگزار گردید.

آموزش قبل از خدمت معلمین. موضوعات موردبحث در زیر گروهها: آماده‌سازی شامل ریاضی وآموزش‌ریاضی برای معلمین دوره‌های مختلف (دبستان ــ و مربیان راهنمائی)؛ استفاده از مشاهدات وارزشیابی در تدریس ریاضی؛ ارزشیابی دانش‌آموز و برنامه‌های آموزشی آماده سازی با استفاده از رسانه‌های گروهی؛ استفاده از کامپیوتر و ماشین حساب؛ استفاده از کاربردهای ریاضی؛ تألیر کتاب درسی و آموزش ریاضی تربیت مدرس برای معلمین ریاضی.

آموزش بزرگسالان. بررسی امکانات و فرصتها برای آموزش بزرگسالان.

(د). مباحث‌زمینه‌ای وگروههای تحقیق. سازماندهی این گروهها به ترتیب زیر بود:

۱ــ ارزشیابی (امتحانات؛ ارزیابی). شامل جلسات: آیندهٔ برنامه‌ریزی و تجزیه و تحلیلی دربارهٔ ان؛ آیندهٔ فرایندهای کلاس درس؛ کارهای انجام شده دانش‌آموزان؛ جنبه‌های فرهنگی ارزشیابی در آموزش ریاضی؛ آزمایش برگزاری امتحانات غیر استاندارد؛ امتحانات نهائی؛ پیشرفت تئوری و تمرین هردرس.

۲ــ مسابقات ریاضی. شامل جلسات: طرح‌سئوالات مسابقات ریاضی ملی کشورها؛ گسترش مسابقات در مقاطع مختلف تحصیلی؛ المپیاد بین‌المللی ریاضی.

۳ــ آموزش هندسه. شامل جلسات: تجدید نظر در پیشرفت آموزش هندسه از چهارمین کنگرهٔ ریاضی، هندسه با دید ریاضی برای دانش‌آموزان قوی؛ دید تازه دربارهٔ تصور طفل از فضا.

رابطه بین تاریخ و فن آموزش ریاضی. شامل جلسات: مقدمه‌ای برطرح I.S.G.H؛ هدف وساختمان آن (طرح آموزش تاریخ ریاضی درمدارس)؛ تاریخ ریاضیات برای دانش‌آموزان با استعداد؛ چه نوع اسناد تاریخی ریاضی را باید در مدارس مطرح کرد؛ طرح ارتباط هنر و تاریخ ریاضی در کلاس.

۵ــ زبان و ریاضیات. شامل جلسات: مقدمه‌ای برآموزش ریاضی و زبان و گزارشهایی در این زمینه: ریاضی کتبی؛ ریاضی شفاهی؛ آموزش ریاضی با زبان دوم.

۶ــ گروه بین‌المللی مطالعات برای روانشناسی آموزش ریاضی. شامل جلسات: ما از تجزیه و تحلیل کار دانش‌آموزان و مصاحبه با آنها چه می‌آموزیم؟ مثالی از مفهوم عددنویسی، جمع و تفریق در مراحل اولیه‌آموزش؛ چگونه مفاهیم دانش‌آموز باهم برخورد پیدا می‌کنند؟ طبیعت ریاضی؛ فکر، تحلیل، اعمال، ارائه، کشف، استدلال.

۷ــ فلسفه‌آموزش واحدها ومقیاسات. شامل‌جلسات: تحقیق و دستور آموزش ریاضی ضمن حل مسائل برای کودکان ۷ تا ۱۲ ساله؛ همکاری میان محققین ومعلمین ریاضی در زمینهٔ تحقیقی «ریاضی برای همه» کار وتماس با معلمین برای پیداکردن (انجام) یك‌راه آموزش صحیح؛ حل مسائل در اطفال ۹ تا ۱۳ سال؛ تحقیق و تربیت معلم؛ توسعه همکاری در تولید و بکاربردن مواد کمك آموزشی در آموزش کودکان ۵ تا ۶ سال.

۸ــ تئوری‌آموزشی ریاضی. شامل‌جلسات: مقدمه‌ای برتئوری آموزش ریاضی و ارائهٔ طریقها برمبنای بعضی

اصول موجود؛ آیا یك مبنای تئوری برای آموزش‌ریاضی که در ارتباط با تحقیق پیشرفت و تمرین درس باشد وجود دارد؟ ارائه و بحث روی اصول و مبانی موجود آموزشی.

۹ـ آموزش آمار. شامل جلسات: توسعهٔ فرهنگ آماری در مدارس؛ آمار در دروس غیر ریاضی (۱۶ تا۱۹ سال)؛ کاربردها، مطالعات استثنائی و مدلسازی درآموزش آمار؛ الهام کامپیوتری یك روش قوی در آموزش مفاهیم آمار واحتمال.

۱۰ـ ریاضی و زنان. زن و ریاضی بعنوان یك موضوع روز؛ فراهم آوردن تغییرات در شرکت بیشتر زنان در ریاضی؛ زن و فرهنگ و ریاضیات.

(ه). عرضهٔ پروژه‌ها. کسانی که در یك زمینهٔ خاصی، تحقیقاتی داشته و یا پروژهٔ خاصی در قسمتی از آموزش ریاضی داشتند با برنامه‌ریزی قبلی، کار خود را ارائه می‌دادند. در این جلسات انجمنهای معلمین ریاضی کشورهای مختلف نیز خلاصه فعالیتهای انجمن وکارهای تحقیقی در زمینه آموزش ریاضی وانتشارات انجمن توضیح می‌دادند.

(و). سخنرانیهای فردی. علاوه برموضوعاتی که‌به طور متوالی در چند جلسه ادامه پیدا می‌کرد و درگروهها سازماندهی شده بود فرصتهایی نیز برای سخنرانیهای فردی درموضوعات مختلف و مورد علاقه شرکت‌کنندگان‌و در زمینهٔ آموزش ریاضی پیش‌بینی شده بود. این سخنرانیها در برنامه‌های ۲۰ دقیقه‌ای انجام می‌شد و هر ۴ یا ۵ نفر در یك جلسه دوساعتی در موضوعات نزدیك بهم صحبت می‌کردند. به‌علت‌کثرت سخنرانیها در هرزمان در حدود ۱۰ جلسه به‌طور موازی انجام می‌شد که برای جلوگیری از اطناب کلام تنها به‌ذکر چند تیتر سخنرانی می‌پردازد: کاوش در توابع و عضوهای یکانی، مبارزه علیه «عدم علاقه به ریاضی»؛ تجزیه و ساختن اتحادهای مثلثاتی: روش تبدیلات در رسم نمودار توابع: فلوچارت‌ها بعنوان یك وسیلهٔ آموزشی؛....

تا خواننده به وسعت کنگره و تعدد و کثرت‌جلسات توجه نکند، چگونگی کار کنگره واهمیت آن روشن نمی‌شود. کار ما در این سفر معرفی این کنگره و کارهای که انجام می‌دهد به جامعه ریاضی ایران و مهمتر از آن‌توجه دادن مسئولین به‌اهمیت آموزش در مدارس است. همین اندازه که «**آموزش ریاضی در مدارس**» در سطح بین‌المللی مطرح است دلالت براهمیت آن دارد. وقت آن رسیده است که دست‌اندرکاران آموزش ریاضی، وزارت آموزش و پرورش، وزارت علوم، دانشگاهها، انجمن ریاضی ایران، انجمن ریاضی دبیران، مقدمات تحقیق‌در زمینه‌های مختلف آموزش ریاضی را فراهم نمایند. در بعضی از کمیسیونهای پنجمین کنگره ریاضی کشورهایی بودند که در یك زمینهٔ خاص، مثلا «حل مسئله» برای سنین ۶ تا ۱۱، سه هزار صفحه مطالب تحقیقاتی ارائه می‌دادند یا گروه استرالیائی برای «حل مسئله و دنیای خارج» دوهزار صفحه مطالب تحقیقاتی داشتند. در هر کدام از کمیسیونها مطالبی که مورد بحث بود، چندین کشور در آن زمینه‌ها تحقیق نموده و نتایج تحقیق خودرا به‌کمیسیونها ارائه می‌دادند. خوشبختانه هرکدام ازاعضای گروه اعزامی سازمان پژوهش در کمیسیونهای که‌شرکت داشتند کارهای انجام شده در ایران را که شامل مراحل برنامه‌ریزی، تألیف، آموزش معلمین بود تشریح و توضیح دادند و کتابهای ابتدائی را عرضه داشتند همچنین درمحل پذیرش و سالن اجتماعات، کتابهای ابتدائی را با زیرنویس انگلیسی به معرض نمایش گذاشته شد. خوشحالیم که بعرض برسانیم که **کارهای انجام شده در شورای ریاضی دفتر تحقیقات با آنچه در سطح بین‌المللی جریان دارد هم‌آهنگی داشته و بقول معروف کاملا روی خط مستقیم بوده است،** و شرکت در این کنگره دید بسیار روشنی نسبت به آموزش ریاضی، برنامه‌ریزی و تألیف به ما داده است.

بخصوص در برنامه‌ریزی هندسه، که نه در این برنامه‌ریزی بلکه در برنامه ریزی قبلی نیز ما دچار سردرگمی بودیم توصیه‌های خوبی به‌همراه آوردیم که‌در اختیار شورا قرار خواهد گرفت. در کمیسیون بررسی آموزش ریاضی در کشورهای جهان سوم به مطالب زیر توجه کردیم بررسی ساعات تدریس هفتگی؛ طول ساعت کلاس؛ دروس مواد تدریس؛ آیابرنامه‌ریزی بهتر است مرکزی باشد یا غیر مرکزی؟ آیا مطالب ریاضی در هر کلاس دبیرستان در یك کتاب باشد یا چند کتاب؟ چه مدار مطالب ریاضی دردبیرستان آموزش داده شود؟ آمار و احتمال در دبیرستان؟ جبر و آنالیز در دبیرستان؟ که دیدهای مختلف گرفتیم‌که در برنامه‌ریزی به‌آن توجه‌خواهد شد. در کمیتهٔ کاربرد و مدلسازی در ریاضی، مطالب بیشتر جنبه‌های تکنیکی و فنی داشت که در شورای برنامه‌ریزی مطرح گردید. همچنین از کمیتهٔ آموزش ریاضی در ابتدائی A[۷]، مطالب آموزش ریاضی در مقطع ابتدائی، به ارمغان آورده شد که امید است در بازسازی و هم‌آهنگی کتابهای ابتدائی مورد استفاده قرار گیرد.

(ادامه دارد)

۷ـ Tertiory

اخبار گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف

● در شهریور ماه ۶۳ کلاسهای بازآموزی برای دبیران ریاضی مناطق هفتگانهٔ محروم با همکاری دفتر آموزش ضمن خدمت در مرکز تربیت معلم شهید بهشتی برگزار شد. در این دوره کتابهای ریاضی دورهٔ اول و دوم دبیرستان توسط مؤلفان و کارشناسان گروه ریاضی بررسی گردید، و به همهٔ شرکت کنندگان کتابهای ذیل داده شد.

۱ــ کتابهای ریاضی سال اول ودوم دبیرستان،

۲ــ کتاب تصاعد و لگاریتم (تألیف آقای غلامحسین مصحفی)،

۳ــ کتاب نظریهٔ مجموعه‌ها (ترجمهٔ آقای محمود مهدیزاده).

● کلاسهای باز آموزی مدرس راهنمای ریاضی با همکاری دفتر آموزش ضمن خدمت در دبیرستان خدمات ولی‌عصر از تاریخ ۱۸ر۶ر۶۳ به‌مدت ۱۰ روز تشکیل شد.

● شورای برنامه‌ریزی دورهٔ دبیرستان پس‌از تعطیلات تابستان از تاریخ ۶۳/۶/۳۱ فعالیت مجدد خود را آغاز کرد.

● جلسهٔ هماهنگی کتابهای ریاضی ابتدائی برای بازسازی و یکنواخت‌کردن کتابهای ریاضی ابتدائی از روز دوشنبه ۶۳/۷/۱۶ باشرکت مؤلفین‌کتابهای ابتدائی و کارشناسان دفتر تحقیقات تشکیل گردید. این جلسه‌فعلا هفته‌ای یك روز تشکیل می‌شود.

● شورائی جهت تألیف‌کتاب آموزش ریاضی‌دبستان برای مراکز تربیت معلم تشکیل شد. اعضا این شورا عبارتند از:

۱ــ برادر محمود بهروش(دبیر ریاضی‌از بروجرد)،

۲ــ برادر علی اکبر جعفری (دبیر ریاضی از گلپایگان)،

۳ــ برادر علی اصغر دانشفر (دبیر ریاضی از دامغان).

قرار شد تا پایان سال جاری تألیف کتاب را به‌اتمام رسانند.

● کتاب آزمایشی ریاضی سال اول راهنمائی برای مدارس تجربی تألیف شد، و کلاسهای بازآموزی دبیران این مدارس از تاریخ ۶۳/۶/۳۱ در سازمان پژوهش تشکیل گردید. دبیران راهنمائی در این کلاس زیرنظر مؤلفین روش آموزش کتاب را فرا خواهند گرفت. این کتاب پس‌از تجربه در این کلاسها و بازسازی کامل در سال تحصیلی ۶۵ــ۶۴ در سراسر کشور تدریس خواهد شد.

(بقیهٔ) ریز مواد ریاضی دورهٔ سه سالهٔ راهنمایی

برنامه‌ریزی ریاضی دورهٔ سه سالهٔ راهنمایی در پائیز سال ۱۳۶۱ درشورای برنامه‌ریزی دفتر تحقیقات (گروه ریاضی) شروع شد. در این شورا عده‌ای از اساتید ریاضی دانشگاهها و مدرسین ریاضی مراکز تربیت معلم ودبیران ریاضی دورهٔ متوسطه و راهنمایی شرکت داشتند. کار برنامه‌ریزی شورای مذکور تا اواخر پائیز سال ۱۳۶۲ ادامه داشت. ریز مواد ریاضی دورهٔ سه سالهٔ راهنمایی‌که توسط این شورا تهیه شده بود، طی نشریهٔ شمارهٔ ۱۲۷ به‌اطلاع‌همهٔ گروههای‌آموزشی ریاضی ودبیران دورهٔ راهنمایی رسید. پس ازبررسی نظرات و پیشنهادات رسیده ازطرف‌گروهها، کار تألیف‌کتابهای ریاضی راهنمایی‌آغاز شد.

ریز مواد هندسه‌دورهٔ راهنمائی

هندسه در دورهٔ راهنمایی‌دنبالهٔ هندسهٔ دورهٔ ابتدائی است. و هدف از تدریس آن یاددادن هندسهٔ اصل موضوعی اقلیدسی نیست بلکه، فرض آشنائی دانش‌آموز با مفاهیم هندسی و کاربرد و محاسبات ساده مربوط به آنهاست. مطالب هندسه در این دوره به صورت قضیه و اثبات بیان نمی‌شود. بلکه استدلالها، با روش تجربی و شهودی ارائه خواهند شد. توجه به صورتجلسه‌ها و رهنمودهای شورا در طول تألیف ضروری است.

۱ــ یادآوری مطالب هندسه از ابتدائی (سعی شود تا آنجا که مطالب به مفاهیم هندسی از قبیل زاویه، توازی، تعامد و غیره مربوط می‌شود تا حدودی کاملتر از ابتدائی بیان شود ولی مطالب دیگری در قالب تمرینهای ساده ارائه شود).

۲ــ بیان این مطالب که خطوط موازی و متساوی الفاصله هربار خط را که یك سر آن روی خط‌اول‌وسر دیگر آن‌روی خط آخرباشد به‌قطعات مساوی تقسیم می‌کند (به روش شهودی و تجربی).

کاربرد الف ــ تقسیم یك پاره‌خط به‌قطعات‌مساوی؛

کاربرد ب ــ بیان تجربی قضیهٔ تالس در مثلث (در حالتی که اضلاع به نسبت دو عدد صحیح تقسیم شوند).

۳ــ رسم مثلث در حالات مختلف و بیان ضمنی تساوی دو مثلث در هریك از آن حالتها (از دانش‌آموزان خواسته شود مثلثی را که با سه ضلع داده شده روی مقوا رسم کنند و ببرند و با روی هم قرار دادن آن مثلها تساوی دو مثلث در حالت سه ضلع نتیجه‌گیری شود و همین کار برای حالات دیگر عمل شود). نشان دادن اجزاء مساوی نظیر به‌نظیر در دو مثلث مساوی.

۴ــ رسم عمود بر یك خط از نقطه‌ای خارج یا روی آن خط (به‌صورت تجربی، دانش‌آموزان توجه کنند که از آن نقطه بیش از یك خط عمود نمی‌توان رسم کرد). فاصلهٔ یك نقطه از یك خط.

۵ــ عکس قضیهٔ تالس با روش تجربی و شهودی.

۶ــ رسم یك زاویهٔ مساوی بازاویهٔ معلوم به‌کمك نقاله یا خط‌کش و پرگار و نشان دادن تساوی زاویهٔ رسم شده با زاویهٔ مفروض به‌کمك کپی‌برداری و انطباق.

۷ــ رسم عمود بر یك پاره خط از نقطهٔ وسط آن به‌وسیلهٔ گونیا و هدایت دانش آموز به درك مفهوم و تعریف عمودمنصف یك پاره خط و رسیدن به این‌خاصیت که هر نقطه واقع بر عمود منصف یك پاره خط، از دو سر آن پاره خط به‌یك فاصله است و برعکس (با روش تجربی و توجه به‌بندهای ۱ تا ۴ صورتجلسهٔ شمارهٔ ۱۳۵ شورای ریاضی).

۸ــ رسم یك مثلث قائم‌الزاویه در حالات مختلف و بیان ضمنی تساوی دو مثلث در هریك از آن حالتها (با تجربهٔ نظیر رسم مثلث‌های غیر مشخص، و نشان دادن تساوی دو مثلث قائم‌الزاویه).

۹ــ رسم عمود منصف یك‌پاره خط به کمك خط‌کش و پرگار (عمود منصف بودن خط رسم شده را می‌توان با استفاده از بند قبل، تساوی مثلثها، نشان داد).

۱۰ــ رسم نیمساز یك زاویه با کمك نقاله وهدایت دانش‌آموز به درك مفهوم و تعریف نیمساز و رسیدن به این خاصیت که هر نقطه روی نیمساز یك زاویه، از دو ضلع زاویه به‌یك فاصله است و برعکس (با روش تجربی و توجه به صورتجلسه شمارهٔ ۱۳۵ شورای ریاضی).

۱۱ــ رسم نیمساز یك زاویه با کمك خط‌کش و پرگار (نیمساز بودن خط رسم شده را می‌توان با استفاده از تساوی مثلثها نشان داد).

۱۲ــ بیان این مطلب که مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است‌و نشان‌دادن‌آن‌باروش‌تجربی؛ نتیجه‌گیری این که اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی مثلث برابر است با مجموع زوایای داخلی غیر مجاور آن.

۱۳ــ یادآوری و تکمیل خواص مهم چهار ضلعی‌ها و دستور محاسبهٔ مساحت ومحیط‌هریك از آنها ازابتدائی.

۱۴ــ یادآوری دایره و اوضاع یك نقطه و یك‌دایره از ابتدائی؛ وضع یك خط نسبت به‌یك دایره و نتیجه‌گیری تجربی اینکه فاصلهٔ مرکز دایره از هر خط مماس بر آن برابر با شعاع دایره است؛ رسم چند دایره‌مماس‌بر یك خط در نقاط مختلف‌آن؛ رسم دایره‌هائی که مراکز آنها روی نیمساز یك زاویه واقع است و بردو ضلع زاویه مماسند. (مفهوم حدی مماس بر دایره به شکل‌بازی و ریاضی آورده شود بدین صورت که خطی دایره را در نقاط A و B قطع می‌کند، اگر فرض کنیم این خط به خط مماس بر دایره در نقطهٔ B تبدیل می‌شود).

۱۵ــ معرفی کمان یك درجه، از طریق تقسیم‌دایره به ۳۶۰ قسمت مساوی و نشان دادن کمانهای یك درجه روی یك نقاله. نشان دادن اینکه کمانهای یك درجه‌روی دایره‌هائی با شعاعهای مختلف از لحاظ طول متفاوتند؛ نشان دادن اینکه اندازهٔ هر زاویهٔ مرکزی بر حسب درجه با اندازهٔ کمان روبرویش برابر است. کاربرد این‌مطالب در استفاده از نقاله برای رسم یك زاویهٔ معلوم.

۱۶ـ تقسیم دایره به ۳، ۴، ۶، و ۸ قسمت مساوی و معرفی چند ضلعیهای منتظم.

۱۷ـ رسمهای هندسی با ترتیبی ساده که در گچ‌بری، منبت‌کاری، آهنگری بکار برده می‌شوند (مطالب رسم با تناسب درس هندسه در سه کلاس توزیع شود).

۱۸ـ قضیهٔ فیثاغورث؛ قضیهٔ هرضلع‌زاویهٔ‌قائمه‌واسطهٔ هندسی است بین وتر و تصویرش بر وتر؛ قضیهٔ ارتفاع وارد بر وتر واسطهٔ هندسی است بین دو قطعهٔ جدا شده روی وتر (همه به صورت تجربی و با کمك کاغذ‌شطرنجی).

۱۹ـ مفهوم تشابه با استفاده از کاغذ شطرنجی و شکلهای بزرگ شده با مثالها و تمرینهای کافی.

۲۰ـ ترسیم دو مثلث متشابه در حالات مختلف و نتیجه‌گیری ضمنی حالات تشابه دو مثلث (دو مثلث‌متشابه داده شود و از دانش‌آموزان خواسته شود که با خط‌کش و نقاله اضلاع و زوایای دو مثلث‌را اندازه بگیرند و خود حالات مختلف تشابه دو مثلث را کشف کنند.)

۲۱ـ هندسهٔ تبدیلاتی: تقارن مرکزی و محوری؛ انتقال و دوران (مطالب دورهٔ ابتدائی یادآوری و تکمیل شود و مطالب اغلب به صورت تجربی، بازی و ریاضی یا ترسیمات هندسی آورده شود).

۲۲ـ هندسهٔ مختصاتی: پیدا کردن مختصات نقاط داده شده در صفحهٔ مختصات (روی کاغذ شطرنجی)؛ پیدا کردن نقاطی که مختصات آنها داده شده است در صفحهٔ مختصات؛ پیدا کردن نقاط یك جدول، به صورت‌مقابل، روی صفحهٔ مختصات.

Y	X
۱	۲
۲	۳
۳	۵
۵	۷
۷	۱-
۳	۲

(مثالهائی از جدولهائی مانند اندازه‌گیری‌درجهٔ حرارت، افزایش جمعیت؛ روی مثالهای گسسته دقت و سعی شود مطالب در حدود ۴ یا ۵ صفحه نوشته شود.)

۲۳ـ مثالهائی از جدولهائی نظیر:

X		Y
۱		۵
۲		۷
۳	×۲+۳	۹
۴		۱۱
۵		۱۳

X		Y
۱		۲
۲		۴
۳	×۲	۶
۴		۸
۵		۱۰

۲۴ـ معادله‌ای مانند $Y = ۲X + ۱$ داده و از دانش آموزان خواسته شود که با توجه به جدول طرف چپ‌جدول طرف راست را تکمیل کند و نمودار آن را رسم نماید.

X		Y
۱		
۲		
۳	→	
۴		
۵		

۲۵ـ همچنین از دانش‌آموزان خواسته شود که‌خودش یك مثال مانند بالا بزنند و به طریق تجربی مشاهده کنند که نقاط به‌دست آمده روی یك خط راست واقع است و نتیجه اینکه تمام نقاطی که مختصات آنها در رابطه $Y = ۲X + ۱$ صدق می‌کند روی نمودار خط است وبرعکس.

۲۶ـ رسم نمودار و معادله از نوع فوق.

۲۷ـ شیب خط مستقیم: رسم یك خط که شیب آن و یك نقطه‌اش در دست است (با ترسیم هندسی).

۲۸ـ هندسهٔ فضائی: یادآوری و تکمیل‌مفاهیم مکعب مستطیل، مکعب، استوانه، مخروط و ساختن آنها پیدا کردن دستور محاسبهٔ سطح و حجم هریك از آنها.

۲۹ـ معرفی کره به اختصار و دستور محاسبهٔ‌سطح و حجم آن به‌طور شهودی.

برنامهٔ آمار و احتمال در دورهٔ سه‌سالهٔ راهنمائی

هدف

هدف از قرار دادن بخشی دربارهٔ احتمال و آمار در کتابهای دورهٔ سه سالهٔ راهنمائی، آشنا نمودن دانش‌آموزان با مفاهیم اصلی و اولیهٔ احتمال و آمار می‌باشد. این آشنا نمودن باید به گونه‌ای صورت گیرد که دانش‌آموز نیاز به مطالعهٔ این علم را احساس نماید. بنابراین، ارائه مطالب نباید بدون مقدمه و خشك و یا با مثالهای تصنعی که تنها جنبهٔ بازی یا تفنن دارد صورت بگیرد، بلکه مثالها باید تا حد امکان واقعی و از کاربردهای روزمره بوده و هماهنگ با سطح فکر و معلومات دانش‌آموز باشند.

آشنائی با آمار و احتمال می‌توانـد بـا شروع از مثالهای ساده از کلاس چهارم دبستان (یا شاید زودتر) آغاز شود و در دورهٔ راهنمائی این آشنائی شکل جدی‌تری به‌خود بگیرد. اظهار نظر قطعی در مورد اینکه در کدام سال‌یا سالهای دورهٔ راهنمائی این مطالب گنجانیده شود، نیاز به مطالعه و دقت بیشتری دارد و عوامل گوناگونی در آن مؤثر می‌باشند. از جمله هماهنگی با محتوای سایر مطالب کتاب و سطح ارائهٔ مطالب از عوامل مؤثر می‌باشند. ولی بهر حال می‌توان پیشنهاد نمود که در کل دورهٔ سه ساله راهنمائی حدود ۳۰ صفحه به مطالب‌راجع به‌آمار واحتمال اختصاص داده شود که حدود ۵ صفحهٔ آن درسال اول راهنمائی، ۱۰ صفحه در سال دوم راهنمائی و ۱۵ صفحه در سال سوم راهنمائی می‌باشد.

فهرست مطالب

احتمال و آمار دردورهٔ سه‌سالهٔ راهنمائی

الف ــ سال اول: (حدود ۵ صفحه)

نمودارهای آماری: نمودار میله‌ای، نمودار ستونی، نمودار خط شکسته و نمودار دایره‌ای (جنبهٔ ترسیمی‌دارد).

(در این قسمت تنها تأکید در نمایش واقعیت‌حاصل از ارقام به‌صورت اشکال هندسی است).

ب ــ سال دوم: (حدود ۱۰ صفحه)

احتمال: پدیدهٔ تصادفی، پیشامد تصادفی، مفهوم احتمال، تعریف کلاسیك احتمال، حل مسائل متنوع بـا استفاده از تعریف کلاسیك احتمال، محاسبهٔ احتمال بـا استفاده از اشکال هندسی.

(کلیه مطالب فوق با مثالها و کاربردهای روزمره بیان می‌گردد).

ج ــ سال سوم: (حدود ۱۵ صفحه)

آمار: فواید جمع‌آوری آمار، نمونـه‌گیـری، رسم نمودارها (نمودار میله‌ای: نمودار ستونی، نمودار خط شکسته و نمودار دایره‌ای) برای داده‌های حاصل از نمونه‌ــ گیری محاسبهٔ میانگین، میانه و نتیجه گیریهای ساده.

(کلیهٔ مطالب فوق با مثالها و کاربردهای روزمره بیان می‌گردد).

آشنائی با مفاهیم توپولوژیکی و هندسهٔ زمین

هدف

هدف از این قسمت را به‌طور خلاصه می‌توان‌چنین بیان نمود:

۱ــ تقویت احساس شهودی دانش‌آموزان از طریق ارائه و بررسی مفاهیم توپولوژیکی از قبیل تـبدیلات توپولوژیکی و شبکه‌های قابل پیمایش. لازم به‌یادآوری است که زمینهٔ بسیار مقدماتی‌تر بعضی از این مفاهیم مانند شبکه‌های قابل‌پیمایش در کتب ابتدائی‌جدیدبه‌عنوان سرگرمی ذکر گردیده است. البته در ایـن قسمت نیـز مطالب در حد سرگرمی و تمرینات شهودی آورده می‌شود که در ضمن آن بطریقی تجربی ــ آماری بعضی از خواص آنها توسط دانش‌آموز کشف می‌گردد. (مانند اینکه هرگاه یك شبکه بیش از دو رأس فرد داشته باشد قابل‌پیمایش نیست).

۲ــ آشنایی مقدماتی با هندسه زمین که در زندگی روزمره در وسایل ارتباط جمعی و علوم دیگر مانـنـد جغرافیا بدان نیاز می‌باشد مانند معرفی مدارات، نصف‌ــ النهارات طول و عرض جغرافیائی، مدل منظومه شمسی و بیان مسافت‌های بزرگ که به اعداد بزرگ و طریقهٔ نوشتن آنها نیاز می‌باشد(کاربرد اعداد بزرگ در بیان مسافت‌های سماوی).

فهرست مطالب

الف ــ آشنائی با مفاهیم توپولوژیکی به طریقی شهودی

۱ــ نواحی و مرزها (تمرین در مورد تعداد نواحی و تعداد مرزهای اشکال آورده می‌شود).

۲ــ تبدیلات توپولوژیکی: به‌عنوان تبدیلاتی که با تغییرات روی یك جسم به استثنای اتصال و برش انجام می‌شود معرفی می‌گردد. سپس به‌عنوان تمرین از دانش‌ــ آموزان خواسته می‌شود تا بین یك سری تبـدیلات معین نمایند تا کدامیك تبدیلات توپولوژیکی هستند.

۳ــ معرفی شبکه‌ها، معرفی رأس و قوس‌های یك شبکه، رئوس زوج و رئوس فرد، شبکه‌های قابل‌پیمایش.

شبکه غیر قابل پیمایش
(تعداد رأس‌های فرد ۴)
شبکه قابل پیمایش
(تعداد رأس فرد ۲)

سپس به‌عنوان تمرین تعدادی شبکه ذکر می‌شود که دانش‌آموز در هر مورد باید تعداد رأس‌های زوج و تعداد رأس‌های فرد را بشمرد و در آخر حدس بزند که چه موقع شبکه‌ای قابل پیمایش است.

به عبارت دیگر از دانش‌آموز خواسته می‌شود (پس

از انجام تمرینات متنوع) تا رابطهٔ تعداد رئوس، تعداد نواحی، و تعداد قوس‌ها را دریابد (رابطهٔ اولر $V+R=A+2$).

ب- منظومهٔ شمسی

شامل معرفی مدل منظومهٔ شمسی (تصویری از منظومهٔ شمسی که به‌یك نسبت اقطار خورشید و سیارات کوچك شده است) با بیان فاصلهٔ خورشید تا سیارات.

نسبت قرص سیارات (مثلا اینکه نسبت مساحت دایرهٔ عظیمهٔ زمین چند برابر مساحت قرص‌ماه است).

ج- آشنایی با زمین

۱- معرفی دایره‌های عظیمه.

۲- معرفی مرکز زمین، قطب‌های شمال و جنوب، مدارات و نصف‌النهارات، استوا، و محیط زمین.

۳- طول قوس (بیان مسافت‌های سطحی زمین بر حسب زاویهٔ مرکزی)

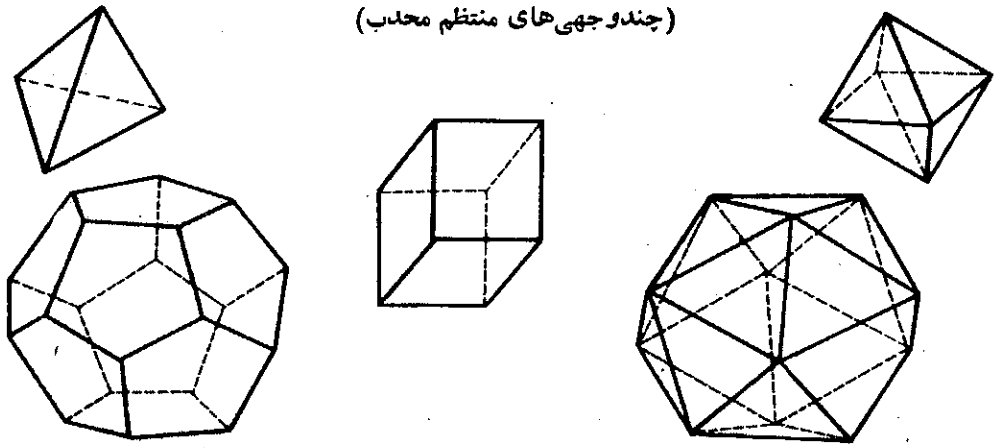
۴- معرفی عرض جغرافیائی و نصف‌النهارگرینویچ (با توجه به شکل‌های رنگی و واضح در کتاب و مدل‌های عینی انجام می‌گیرد).

۵- طریقهٔ محاسبهٔ عرض جغرافیائی یك منطقه: این کار به‌توسط دانش‌آموزان و به نحوی ساده و عملی‌انجام می‌گیرد. (اثبات قضیهٔ مربوطه، چنانچه امکانش باشد در سال سوم گفته می‌شود وگرنه به‌بیان صورت آن اکتفا می‌گردد).

توضیح- می‌توان مطالب قسمت الف را در یك سال (مانند سال اول) و بقیه مطالب (ب‌وج) را که بهم‌مربوط است در سال دوم یا سال سوم یکجا ذکر نمود.

اجسام افلاطونی

(چندوجهی‌های منتظم محدب)



نام	عدهٔ وجوه	عدهٔ رئوس	عدهٔ یالها
چهاروجهی (هرم)	۴	۴	۶
شش‌وجهی (مکعب)	۶	۸	۱۲
هشت‌وجهی	۸	۶	۱۲
دوازده وجهی	۱۲	۲۰	۳۰
بیست‌وجهی	۲۰	۱۲	۳۰

اگر F عدهٔ وجوه، V عدهٔ رئوس، و E تعداد یالهای چندوجهی باشد آنگاه $F+V=E+2$ (رابطهٔ اویلر).

دعوت به همکاری

خواستارانی که مایل بـه همکاری با این مجله هستند، می‌توانند پیشنهادات و مقالات خود را در هر یك از زمینه‌های ذیل به آدرس مجله، تهران: خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شهید موسوی (شمارهٔ ۴) وزارت آموزش و پرورش، دفتر مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، ارسال دارند.

(آ) آموزش ریاضی (طرح و بررسی مسائل آموزش ریاضی به طور اعم، و آموزش ریاضی در مدارس کشور به‌طور اخص).

(ب) تاریخ ریاضیات (مشتمل بر ملاحظات تاریخی مفاهیم ریاضی و سیر تطوری و تکاملی آنهـا، شرح احوال ریاضیون و کارهای علمی آنها، به ویژه ریاضیدانان اسلامی و ایرانی).

(پ) فلسفهٔ ریاضی (ریاضیات چیست، موقعیت کنونـی ریاضیات، معرفی و بررسی مکاتب فلسفی مختلف ریاضی، و...).

(ت) سایر مباحث و مسائل ریاضی (ناظر به معرفـی مفاهیمی بنیادی در شعبات مختلف ریاضی، ارائهٔ مسائل نمونه در ریاضیات، و ...).

تبصره

۱ــ مقالات باید حتی‌المقدور در سطحی عرضه شوند کـه قابل فهم و استفادهٔ دبیران ریاضی، دانشجویـان، و دانش‌آموزان ریاضی بوده، در عین حال از کیفیت مطلوبی نیز برخوردار باشند (این مقالات باید ناظر بـه اهداف آموزشی بوده و از جنبه‌های بدآموزی ریاضیات تکنیکی و ماشینی مبرا باشند)

۲ــ مقالات باید روی کاغذ سفید به قطع A۴ (حداکثر در ۱۵ صفحـه) با خط خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) به صورت یك سطر درمیان و با رعایت فاصلهٔ مناسب از طرفین کاغذ (۳ سانتیمتر) نوشته و ارسال شود. زیر عنـاوین، لمها، قضیه‌هـا، خط ممتد، و زیر کلمات و جملاتی که مورد تأکید است، خط مقطع کشیده شود.

۳ــ صفحات بـه طور دقیق شماره‌گذاری شود. صفحهٔ اول صرفا به نام و نشانـی مؤلف یا مؤلفین (مترجم یا مترجمین) اختصاص یابد و درصفحهٔ دوم فقط عنوان مقاله درج شود. اشکال، جداول، نمودارها، ... به دقت رسم و علامتگذاری شده و مواضع آنها در مقاله دقیقا مشخص شود.

۴ــ فهرست منابع و مآخذی که در تدوین مقاله مورد استفاده واقع شده در دو قسمت فارسی و بیگانه به ترتیب قاموسی مشخص شده و ضمیمه مقاله گردد.

۴ــ مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور چاپ شده باشد.

۶ــ مقالات ترجمه شده از زبانهای بیگانه باید همراه با متن اصلی ارسال شود.

۷ــ رد یا قبول مقاله و همچنین ویراستاری آن بـه عهدهٔ هیئت تحریریهٔ مجله است.

Roshd , Magazine of Mathematical Education. Vol. 1. No. 2, Summer 1984 ,

Mathematics Section ,274 BLDG No. 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave., Tehran, Iran.

A Publication of Ministry of Education, Islamic Republic of Iran.

شانزدهمین کنفرانس
ریاضی کشور
۸ تا ۱۱ فروردین ۱۳۶۴
دانشگاه تربیت معلم
دانشسرای عالی زاهدان
گروه ریاضی
هم‌زمان با شانزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی کشور،
دومین مسابقهٔ ریاضی دانش آموزان ممتاز سال چهارم ریاضی
دبیرستانهای کشور.
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
باهمکاری انجمن ریاضی ایران و اداره کل آموزش و پرورش سیستان و بلوچستان