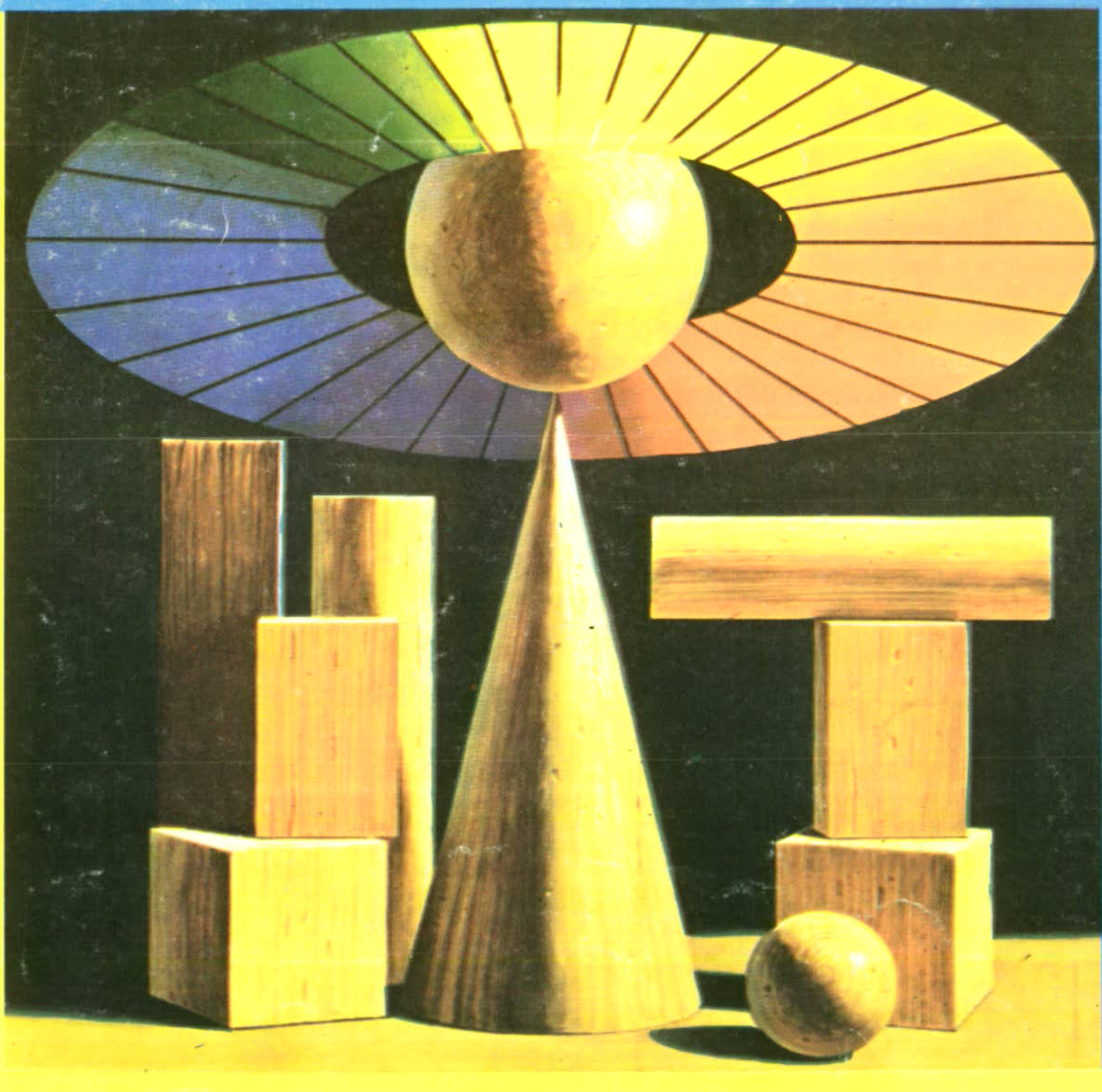
رشد آموزش ریاضی

سال هفتم ـ زمستان ۱۳۶۹ ـ شمارهٔ مسلسل ۲۸

بها: ۱۰۰ ریال



بسم‌الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یکبار از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی منتشر می‌شود هدف از انتشار این مجله اعتلای دانش ریاضی دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلّم است. علاوه بر این ایجاد ارتباط متقابل بین معلّمین ریاضی و دفتر تحقیقات، به منظور تبادل تجارب، ارائه روشهای جدید آموزش ریاضی، معرفی جنبه‌های تاریخی، فلسفی، کاربردی ریاضیات در سطح پیش دانشگاهی است.هیأت تحریریه از مشارکت و همکاری همهٔ علاقه‌مندان بویژه دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان در ارائه مقالاتی در زمینه‌های زیر استقبال می‌کند:

الف) آموزش ریاضی (طرح و بررسی آموزش ریاضی، بویژه آموزش ریاضی در دوره‌های پیش دانشگاهی).

ب) تاریخ ریاضی (مشتمل بر سیر تحول مفاهیم ریاضی، شرح و احوال ریاضیدانان و کارهای علمی آنها، بویژه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی).

ج) فلسفه ریاضی (تبیین مفاهیم ریاضی، ریاضیات چیست، بررسی مکاتب ریاضی، بررسی ارتباط تاریخ و فلسفه ریاضی).

ریاضی کاربردی (مشتمل بر مباحثی در زمینه‌های آنالیز عددی، کامپیوتر و برنامه‌ریزی، تحقیق در عملیات، آمار و احتمال).

د) سایر مباحث ریاضی (مشتمل بر مقالات مختلفی در زمینه‌های مختلف، ارائه راه‌حلهای مختلف برای مباحث ریاضی، ارائه مسائل نمونه).

رعایت نکات زیر در مورد مقالات ارسالی ضروری است:

۱) مقالات ارسالی باید در چهارچوب اهداف فوق و با سبکی مشابه با سبک مقالات چاپ شده در رشد ریاضی باشد و در سطحی عرضه شوند که ضمن داشتن محتوی مطلوب دارای کیفیت عرضه مطلوب هم باشند؛

۲) مقالات باید با خط خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) و به صورت یک سطر در میان و با در نظر گرفتن جای کافی در حاشیه تهیه شود و صفحات به طور دقیق شماره‌گذاری شود؛

۳) فهرست مراجع مقاله به طور کامل و در دو قسمت فارسی و خارجی و به ترتیب الفبایی و طبق استاندارد مقالات علمی درج شود؛

۴) مقالات ترجمه شده از زبانهای خارجی همراه با متن اصلی ارسال شود؛

۵) مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور به چاپ رسیده باشد؛

۶) رد یا قبول و حک و اصلاح و ویراستاری مقالات به عهدهٔ هیأت تحریریه است.

سال هفتم ـ زمستان ۱۳۶۹ ـ شمارهٔ مسلسل ۲۸

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

رشد آموزش ریاضی

نشریهٔ گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تلفن ۴ ـ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۵۰)

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر دانش‌پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. جهت ارتقاء کیفی آن نظرات ارزنده خود را به صندوق پستی تهران ۳۶۳ ـ ۱۵۸۵۵ ارسال فرمائید.

سردبیر: دکتر محمدحسن بیژن‌زاده
مدیر داخلی: میرزا جلیلی
صفحه‌آرا: محمد پریسای

نقش ریاضیات در زندگی بشر و شناخت طبیعت

قسمت اول

دکتر غلامرضا دانش‌ناروئی

پرسشی که کراراً به‌وسیله دانش‌آموزان، دانشجویان و حتی دبیران مطرح می‌شود این است که چرا ریاضیات می‌خوانیم؟ و یاچرا ریاضیات تا این حد تدریس می‌شود؟ و یا چرا ریاضیات باید مورد توجه هر محصلی باشد؟ و یا اصولا ریاضیات چه نقشی در زندگی روزمره دارد؟ این پرسشی است که همیشه مطرح بوده است و متاسفانه پاسخ قانع کننده‌ای که بتوان آن را در یك جمله یا در یك عبارت خلاصه کرد نمی‌توان داد. هدف ما در این مقاله و مقالات بعدی پاسخ به این پرسش است.

شاید عمده‌ترین انگیزهٔ مطالعه و گسترش ریاضیات و نخستین دلیل برای اهمیت دادن به‌آن به‌کار گرفتن این دانش در مطالعهٔ طبیعت به‌منظور شناخت محیط زیست و بهره‌برداری از آن در جهت زندگی بهتر وراحت‌تر باشد. هوایی که استنشاق می‌کنیم و یا پاکیزگی آن و نیز شرایط جوی که همراه می‌آورد در زندگی روزانه ما اهمیت دارد. آب طبعاً یکی از عوامل مهم حیات است، هم از نظر استفاده از آن درمصرف روزانه، کشاورزی و دریانوردی و هم از دیدگاه یك‌منبع عظیم غذایی، از اهمیت ویژه‌ایی برخوردار است. زمین منبع تولید مواد غذایی و مواد اولیهٔ صنعتی است و برای ما ارزش حیاتی دارد. برای زندگی متعادل و سالم و بهره‌برداری از موهبت‌های خدادادی نیاز به تندرستی و بهداشت خوب و شرایطی که آن را بهبود بخشد داریم. در جدال انسان برای رسیدن به این هدفها ریاضیات نقش اساسی داشته و به حد زیادی مورد استفاده قرار گرفته است.

در تمدن امروزی ما استفاده عملی آن در صنعت به حد اعجاب‌آوری رسیده است. کافی است به ماشینها، قطارها، هواپیماها، کشتی‌ها، موشك‌ها، سینماها، رادیو و تلویزیون، تلفن و دیگر وسایل مخابراتی، محصولات فراوان و وسایل مفید خانگی (یخچال، اجاق‌گاز، برق و...) نگاه کنیم تا بدانیم در طراحی و دستیابی به‌اینها ریاضیات چه نقش اساسی بازی کرده است.

قابل رقابت بودن فرآورده‌های صنعتی و کشاورزی، استفادهٔ درست از منابع طبیعی و جلوگیری از بهره‌برداری بی‌رویه از آنها مورد توجه جوامع مختلف است و به آن اهمیت فراوان می‌دهند. سعادت همهٔ مابستگی دارد به‌اینکه کارها نظم اقتصادی پیدا کنند و مدیریت صحیح داشته باشند. ارتباط، یکی از نیازهای ضروری هر جامعه است و از این رو سیستمهای ارتباطی و ترابری خوب لازم است و در واقع شبکه توزیع درست مورد نیاز است. روشن است که کارآیی در هر یك از زمینه‌ها فایده مستقیم در معیارهای زندگی انسان دارد.

بسیاری از پرسشهای پیچیدهٔ بیولوژیکی، دارویی و پزشکی امروزه پاسخ خود را در ریاضیات جستجو می‌کنند. ریاضیات است که در این موارد کمك ارزنده‌ای می‌نماید (مثلا، روشهای تأثیر یك دارو و نحوهٔ پخش آن در بدن از طریق ریاضی بیان می‌شود و در استفاده از ماشینهای کلیه از ریاضی کمك می‌گیرند). ریاضیات در تشخیص امراض نقش اساسی بازی می‌کند؛ زیرا پیشرفت بسیاری از امراض مسری و مزمن مانند سرطان، اختلالات مغزی و امراض قلبی از یك مرحله به مرحلهٔ دیگر طوری است که

می‌توان آنها را به صورت عددی بیان کرد و از طریق ریاضی مورد مطالعه قرار داد.

ریاضیات در زمانهای مختلف از جنبه‌های متفاوت مورد علاقه و مطالعه قرار گرفته است که ریشهٔ اصلی آنها را می‌توان در ساختار جوامع، نیازها و ارزشهای حاکم بر آنها در مقاطع خاصی از زمان جستجو کرد.

در عصر حاضر که رشد عظیم تکنولوژی (که خود مدیون ریاضیات است) موجب تحولات عظیمی درزندگی انسان شده است و زندگی‌های سادهٔ اولیه جای خود را به‌زندگی پیچیدهٔ ماشینی‌داده‌اند، ریاضیات بیش‌از پیش جای خود را در تمام شئون اجتماعی و صنعتی باز کرده است و بشر ناچار است برای یافتن پاسخهای لازم و مناسب به پرسشهای پیچیدهٔ خود به ریاضیات (به معنی اعم کلمه) پناه ببرد.

به‌طور کلی امروزه ریاضیات باید از جنبه‌های زیر مورد توجه قرار گیرد:

۱ـ یك ابزار: یعنی‌از دید کاربردی که ارزش و ضرورت آن روز به روز در جوامع کنونی بیشتر احساس می‌شود.

۲ـ یك زبان: یعنی وسیله‌ای برای نمایش دانش، توصیف، تجزیه وتحلیل و انتقال آن که ضرورت آن به مناسبت گنگ و نارسا بودن زبانهای معمولی غیر قابل انکار است.

۳ـ یك زمینهٔ تربیتی: به‌منظور پرورش و نظم فکری و بالابردن قدرت اندیشه و استدلال منطقی و نیز رشد قوهٔ خلاقیت ذهن. شاید این جنبه مهمترین هدف از تدریس ریاضی در مدارس باشد.

۴ـ یك موضوع: برای اینکه علاقه می‌آفریند و لذت می‌بخشد، ریاضیات ارزش مطالعهٔ فی‌نفسه و مستقل از کاربرد دارد. این جنبه، **آزادی‌اندیشه** را از قید زمان و مکان طلب می‌کند: زیرا در بسیاری موارد مطالعات در خارج از فضای سه‌بعدی و درفضاهای آفریده شدهٔ ریاضی‌دان صورت می‌گیرد. به‌طوری که خواهیم دید بیشتر مفاهیم مهم ریاضی که امروزه و پس از گذشت قرنها کاربرد زیادی پیدا کرده‌اند از همین جنبه مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

از آنجایی که زبانهای معمولی غالباً مبهم می‌باشند این زبانها برای مطالعات علمی‌نارسا و نامناسب‌هستند. به‌همین دلیل دانشمندان در طول‌تاریخ تلاش کرده‌اند زبانهایی بیافرینند که بتوان به‌کمك آنها داده‌ها و اطلاعات را به‌طور دقیق و خالی از هرگونه ابهامی نمایش دهند و در عین حال مفاهیم را با اختصار تمام بیان کنند. اولین و ساده‌ترین زبان حساب است. در این زبان الفباء عبارت است از ارقام یك تا نه و صفر (که درجوامع مختلف با نمادهای متفاوت نشان داده می‌شوند)و $+$، $-$، $\times$، $:$، $\sqrt{}$، ....، که با دستورهای خاص در مجاورت هم قرار می‌گیرند و طبق قراردادهای مشخص به‌آنها معنی بخشیده می‌شود. دومین زبان، که توسیع یافته اولی است، زبان جبر است که الفبای آن علاوه بر الفباء بالا، شامل حروف نیز می‌شود و گرامر خاص خودش را دارد. هندسه نیز زبان دیگری است که‌الفباء آن نقطه، خط و صفحه هستند و با گرامر و اصول ویژهٔ خودش در پژوهشهای علمی به‌کار می‌رود. ما از همهٔ اینها، زبان منطق وزبانهای دیگر ریاضی به‌طور عام به‌نام زبان ریاضی یاد می‌کنیم.

برای حل مسائل و یافتن پاسخ به سؤالات مطرح شده اولین قدم آن‌است که‌آن‌مساله یا سؤال را به‌صورت‌ریاضی درآوریم یعنی اطلاعات را به‌زبان ریاضی توصیف کنیم و روابط موجود

پس‌از اجرای این مرحله است که مساله را می‌توان با ابزار ریاضی که همان اصول و قضایا باشند تجزیه و تحلیل نموده و پاسخ لازم را پیداکنیم.

این مرحله‌ای است که بسیار مهم است و اگر آموزش ریاضی، نتواند محصل را برای این مرحله آماده کند کار از همان‌آغازنادرست‌است وبدانجا می‌کشد که محصل در حل‌مسائل ناتوان و نسبت به‌ریاضی بدبین شود، و در حقیقت برداشت درستی از تحصیل ریاضی خود نکند. برای اینکه اهمیت این مطلب روشن شود به‌نظرات برخی از دانشمندان بزرگ توجه کنید:

لئونارد داونچی: هیچ دانشی را نمی‌توان دانش واقعی دانست مگرآنکه به‌صورت ریاضیات متجلی شود.

گالیله: اصول ریاضیات الفبای زبانی است که خداوند جهان را به آن زبان نوشته است و بدون کمك‌آنها درك یك کلمه هم غیر ممکن است و انسان تنهابیهوده در راهروهای‌تاریك و پرپیچ و خم سرگردان است.

راجربیکن: ریاضیات کلید دروازه علوم است. غفلت از ریاضیات به‌همه دانشها لطمه می‌زند، زیرا کسی که ریاضی نمی‌داند علوم دیگر را نمی‌تواند درك کند و اشیاء دیگر جهان را بشناسد و بدتر از آن کسانی که این گونه نادانند نمی‌توانند جهالت خود را درك کنند و در نتیجه به‌فکر علاج آن نیز نیستند.

کانت: در هر بخش از علوم فیزیکی (به‌معنی عام) تنها آن قدرعلم واقعی است که در آن ریاضی وجود دارد (یعنی علوم منهای ریاضی یعنی هیچ).

نقش‌ریاضیات از دید تربیتی‌بسیار مهم و با ارزش است و بدون شك باید مهمترین هدف از تدریس ریاضی در مدارس باشد. همان‌طور که برای ساختن بدن سالم نیاز به ورزشهای فیزیکی داریم و همان‌گونه که می‌توان با تمرینهای خاص قسمتهای مختلف بدن را پرورش داد تا از توانایی ویژه‌ای (یا بیشتری) برای انجام کارهای معینی برخوردار شویم

و یا مقاومت بیشتری در برابرامراض گوناگون پیدا کنیم، **مغز انسان** نیز به **تمرین و ورزش خاص** خود نیاز دارد تا در زمینه‌های مختلف ساخته شود. یکی از وظایف مغز استفاده از آن برای انبار کردن اطلاعات (حافظه) است. بالا بردن قدرت حافظه برای نگهداری داده‌ها امری است ضروری که از طریق حفظ کردن و تمرینهای مخصوص حاصل می‌شود. از آنجایی که بسیاری ازدرسهای‌مدارس ما تنها، از دید آموزشی، این نقش را بازی می‌کنند نیازی به‌اینکه‌در دروس‌ریاضی تأکید زیادی به‌این مهم شود نیست (ولی متأسفانه بسیاری از معلمین ریاضی ما تنها به‌این قسمت اکتفا می‌کنند!) و باید انرژی و وقت را صرف وظایف دیگر مغز بکنیم.

وظیفهٔ دیگر مغز نحوهٔ استفاده صحیح و به‌موقع از این اطلاعات در برخورد با موقعیتهای جدید است، که خود مستلزم توانایی لازم برای تجزیه و تحلیل داده‌ها و یاپیوند دادن آنها به یکدیگر است تا اطلاعاتجدیدی‌به‌دست آورد و همواره‌بر ذخیرهٔانبار بیفزاید. به‌عبارت دیگر این قدرت خلاقه ذهن است که وجه تمایز انسان با حیوان می‌باشد و بدون شك مهمترین وظیفه مغز است. توانایی در این قسمت است که انسان را قادر می‌سازد دربرخورد با مسائل و مشکلات جدید چگونه از دانش قبلی خود (از انبار داده‌ها) استفاده کند و راه‌حل مناسب را پیدا نماید و یا جلوتر از زمان حرکت‌کند و پیش‌بینی لازم را برای نتایج کار خاصی بنماید و یا درکارها برنامه‌ریزی کند و آنها را با نظم خاص دنبال نماید تا به هدف از پیش‌مشخص شده خود دست یابد. در بالا بردن و کارآئی این وظیفه و دادن توان لازم به مغز، ریاضی است که نقش اساسی را بازی می‌کند. بزرگترین فایده ریاضیات در دوره‌های دبستان و دبیرستان (که مغز در حال رشد و شکل گرفتن است) همین جنبه است. در حقیقت مسائل و تمرینهای فکری ریاضی در این دوره‌ها ورزش لازم برای پرورش این وظیفه مغز هستند. شکی نیست که اهمیت این ورزش از ورزش‌های بدنی به‌مراتب بیشتر است چون اینها سازنده اندیشه و فکر سالم هستند که عامل تعیین کننده شخصیت اجتماعی است. همین جنبهٔ ریاضی است که افراد تحصیل کرده را از افراد عامی متمایز می‌سازد و به آنهاتوانایی‌می‌دهد با مشکلات روزمره به‌طور منطقی برخورد کنند و آنها را به‌طور معقولانه حل نمایند.

اگر معلمی به‌هر دلیلی در رسیدن به‌این هدف یعنی برداشت‌درست‌تربیتی از ریاضی تعلل ورزد وظیفه اصلی خود را انجام نداده است. محصلی هم که توانایی لازم را در این قسمت به دست نیاورد نه‌تنها توفیقی درتحصیل ممکن است پیدا نکند بلکه در زندگی اجتماعی نیز از طریق‌راههای سالم پیروزی چشمگیری نخواهد داشت. ریاضیات غذای مغز است و اگر این غذا حساب شده و منظم در دوران جوانی انسان به‌آن نرسد رشد لازم را نخواهد کرد و ناتوان و رنجورخواهد ماند بطوری که درمان آن شاید هیچ وقت مقدور نباشد.

برای روشن شدن بیشتر موضوع، تاریخ را ورق می‌زنیم تا ببینیم در دوره‌های مختلف‌هدف ازمطالعه‌ریاضی چه بوده است و بزرگان ریاضی و دانشمندان برجسته چه برداشتی ازآن داشته‌اند و چگونه ریاضی را به‌خدمت گرفته‌اند.

برای مصریان قدیم ریاضی با دو جنبه کاملا متفاوت تدریس می‌شده است. یکی جنبه عملی آن و دیگری جنبه زیباشناسی (هنری). اولی به منظور پرورش افراد شایسته در امور کشاورزی، بازرگانی، معماری وکنترل محیط زیست مورد توجه بوده و دومی از جهت لذتی که بشر از اندیشیدن در اعداد، اشکال هندسی، نظم اندیشه و کوشش در کشف روابط بین ویژگی‌های اشیاء می‌برده است.

یونانیان قدیم تاکید بیشتری روی جنبهٔ دوم داشتند و تقریباً جنبهٔ اول، صرفنظر از کارهای ارشمیدس، نادیده گرفته می‌شد. در این دوره **هندسه** بر بقیهٔ دانشها پیشی گرفت و نشانهٔ تشخص گردید و کارهای عملی به عهده بردگان گذاشته شد.

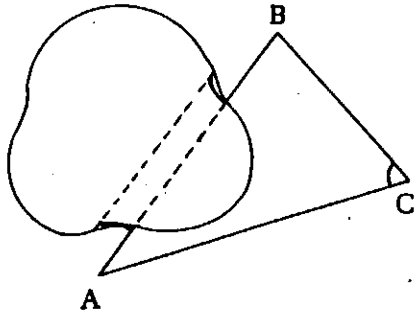
دانشمندان یونانی تلاش زیادی را برای شناخت جهان هستی آغاز کردند و تأکید بر **قدرت استدلال** در تعیین ماهیت جهان داشتند و بر آزادی اندیشه‌اصرار می‌ورزیدند. حقیقتاً‌این یونانیهای قرن۴، ۵، ۶ قبل از میلاد بودند که کشف کردند **که چگونه و تا چه اندازه استدلال ریاضی درزندگی مهم و مؤثر** است. نظر یونانیها اساساً ساده و به‌صورت زیر است:

انسان طبیعت را مشاهده می‌کند و متوجه می‌شود که اشکال ساده معینی از قبیل خط ،مثلث، دایره به‌کرات در طبیعت دیده می‌شوند. اجسام آسمانی کروی هستند. به‌نظر می‌رسدکه نور با خط مستقیم حرکت می‌کند، رویهٔ دریاچه‌ها مسطح است، دیوارهای یك ساختمان مستطیل هستند. عدد وکمیت نیز به‌کرات به‌وسیلهٔ دسته‌ها و اندازهٔ اشیاء به‌ذهن خطور می‌کند. یونانیان به‌جهت حضور مفاهیم عدد و اشکال هندسی در طبیعت مطالعهٔ آنها را با ارزش می‌دانستند. گرچه این واقعیت یك کشف مهمی بود، کشف بعدی یونانیان حتی بیشتر با اهمیت بود. آنها مشاهدهٔ کردند که واقعیتهای معینی درباره این مفاهیم واضح و اساسی وجود دارند: دوایر با انتخاب یك مرکز و یك شعاع مشخص می‌شوند؛ هر دو زاویه قائمه همیشه برابرند و... . چرا نباید واضح‌ترین این واقعیتها را انتخاب کنیم و ببینیم با استدلال چه چیزهایی از آنها نتیجه می‌گیریم؟ یقیناً اگر واقعیتهای جدیدی

نقش ریاضیات در زندگی بشر و شناخت طبیعت

را بتوان نتیجه گرفت این واقعیتها را می‌توان در مورد تمام اشیاءفیزیکی که دارای آن ویژگی‌های اساسی اولیه هستند به‌کار گرفت. مثلا اگر بتوان با استدلال نشان داد که مساحت یك دایره برابر است با عدد π در مجذور شعاع، آنگاه مساحت هر قطعه زمین دایره‌ای شکل نیز برابر است با عدد π در مجذور شعاع. علاوه براین، شاید با استدلال بتوان به واقعیتهای جدیدی دست یافت که با مشاهدهٔ‌تنها مقدور نباشد. این چکیدهٔ کشف‌بزرگ یونانیان است که شاید بزرگترین کشفی باشد که بشر تاکنون کرده است. هندسه اقلیدسی زاییدهٔ تلاش بیشتر برای‌اندازه‌گیری مساحت‌قطعات زمین می‌باشد در صورتی که حساب و جبر نتیجهٔ کوشش بشر در شمردن و اداره کردن احشام، محصولات، پول و سایر دارایی‌ها بوده‌است. ولی ترکیب جبر مقدماتی و هندسه ساده، یعنی مثلثات، به‌بشر توانایی آن را داد که از دانش جهان زیرپای خود بگذرد و به‌دانش جهان بسیار دور و بالای‌سرش برسد (جهانی که تجربه در آن راه نبود). بشر تنها به‌کمك‌همین‌ریاضیات مقدماتی توانست اندازه‌ها و فواصل بین کرات آسمانی را به‌دست آورد و توجیه سیستماتیکی و منطقی از حرکات اسرارآمیز ومعماوار و به‌ظاهر نامنظم اجسام‌سرگردان‌آسمانی بنماید. جالبتر آن که دانش به‌دست آمده از این طریق درباره اجسام آسمانی به مراتب بیشتر از دقیق‌ترین اطلاعات بشر درباره اشیاء جهان اطرافش به وی چیز آموخت که ما در اینجاوارد بحث آن نمی‌شویم.

در بین ریاضی‌دانان این دوره دو نفر بیشتر از دیگران درمطالعه‌جغرافی و نجوم سهیم‌اند. اولی هیپارکوس (قرن دوم پیش از میلاد) و دومی بطلمیوس (قرن دوم بعداز میلاد)است که‌کارهای‌اولی‌را توسعه داد. ریاضیاتی که این دو برای مطالعات خود آفریدند امروزه «مثلثات» نامیده می‌شود. این نظر جدید در اینجا قابل ملاحظه است، نه‌تنها به‌خاطر سادگی‌اش بلکه به‌خاطر کاربرد پردامنه‌اش نیز از اهمیت فراوانی برخوردار است. در واقع روشهای مثلثاتی که برای به‌دست آوردن واقعیتهای به‌ظاهرحصول‌ناپذیر مانند فاصلهٔ زمین از خورشید و اندازه آن به‌مراتب ساده‌تر از اثبات هندسی مساحت دایره است (در این روشها تنها نسبتهای مثلثاتی که بر اساس تشابه مثلثهای قائم‌الزاویه بنا شده به‌کار رفتند). امکان دیگری که دانشمندان گذشته از آن محروم‌بودند ابزار قابل ذکری است که **«برای اندازه‌گیری زاویه‌ای»** در دورهٔ این دو دانشمند باستان ساخته شد. نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های مختلف به وسیلهٔ این دو محاسبه شد و به‌صورت کتاب در آمد (جدولهای امروزی اساساً همانهایی‌است‌که اینها انجام‌داده‌اند). علاوه بر محاسبات نجومی نسبتهای مثلثاتی در حل مسائل روی زمین نیز کمك فراوانی نموده است. هرون مهندس و ریاضی‌دان یونانی (قرن‌اول بعد از میلاد) با نشان‌دادن‌قدرت‌مثلثات همکارانش را به‌شگفتی واداشت. وی به‌آنها نشان داد که چگونه با استفاده از نسبتهای مثلثاتی می‌توان یك تونل را در زیر یك کوه با آغاز همزمان عملیات از دو طرف‌کند و به‌این ترتیب از نظر وقت و انرژی صرفه‌جویی کرد.



بطلمیوس قدرت مثلثات را آن قدر می‌دانست که معتقد بود:

«جهان را می‌توان برحسب مثلثهای قائم‌الزاویه قابل لمس کرد.»

پس از گذشت قرون سیاه فعالیت حدود قرن دهم میلادی ریاضیدانان اسلامی و در راس آنها ایرانیان، هندی‌ها و چینی‌ها حساب و جبر را توسعه دادند. در این دوره جنبه کاربردی بیشتر مورد توجه قرار گرفت که غالبا در زمینه‌های بازرگانی، معماری و دریانوردی بود. به‌عبارت دیگر ریاضیات بیشتر از دید یك‌ابزار کار مورد مطالعه قرار گرفت.

در دورهٔ رنسانس‌عقایدیونانیان مجدداً مورد توجه قرار گرفت و جبر و نظریهٔ معادلات توسعه یافت. به‌نظر دانشمندان این دوره، مانندیونانیان، ریاضیات کلید مطالعه در رفتارطبیعت بود و به‌این ترتیب مطالعهٔ در طبیعت یك هدف اصلی شد و اعتماد و اعتقاد به‌استدلال افزایش یافت و ریاضیات به‌عنوان مطمئن‌ترین وسیله برای‌کسب دانش پذیرفته شد. دورهٔ‌رنسانس‌شاهد تبدیل اروپا از یك جامعهٔ اشرافی و بردگی به جامعهٔ بازرگانان.

صنعتکاران، زحمتکشان آزاد، صاحبان صنایع بود. این تحول موجب شد افراد عادی در یادگیری و کسب مهارتها و دانش (که تا آن زمان مخصوص اشراف و کلیسا بود) شرکت کنند و از آنجا پایهٔ مدارس عمومی گذاشته شود.

بهره‌برداری از معادن زغال‌سنگ و فلزات، فلزکاری، کوزه‌گری و شیشه سازی، بافندگی، رنگ‌آمیزی، چاپ، نقشه‌برداری و اسلحه‌سازی و... مسائل فنی خاص خود را به‌وجود آوردند. هنرمندان، معماران، جواهرسازان، بیناکاران، طراحان عدسی‌ها، دریانوردان، داروسازان و پزشکان مشکلات و مسائل ویژهٔ خود را مطرح کردند. استفاده از نیروی آب، باد و فشار هوا که با روشهای منظم‌تری صورت می‌گرفت پرسشهای جدیدی را موجب شدند. در همهٔ این موارد بازرگانان و صنعتگران در جستجوی یافتن راههائی بودند که فرآورده‌های خود را بهبود بخشند تا هم بتوانند رقابت کنند و هم سود خود را افزایش دهند. مسائل حیاتی و اساسی که تمدن در حال تغییر این دوره با آن روبرو شد سبب گردید پژوهشهای جدیدی در علوم و ریاضیات صورت گیرد و موجب گردید بستگی بیشتری بین این دو به‌وجود آید. به‌این‌ترتیب ریاضیات و علوم که در عهد یونانیان بیشتر مختص ستاره‌ها بود مجدداً به زمین برگردانده شد و در پایان قرن شانزدهم ریاضیات‌نه‌تنها شامل حساب، هندسه، موسیقی و نجوم بود بلکه ستاره‌شناسی، اندازه‌گیری احجام، هواشناسی، نور، جغرافی، نقشه‌برداری دریائی، مکانیك، نیروی مغناطیسی، معماری، مسائل نظامی و نقشه‌برداری را دربر گرفت.

قرن هفدهم شاهد آغاز علوم جدید بود. در این دوره با کارهای نیوتون، لایبنیتز، پاسکال‌ودیگران پایهٔ‌موضوع‌های عملی گذاشته شد (دریانوردی در این دوره بیشتر از همه مورد توجه بود). کارهای این دوره منجر به‌ابداع حساب دیفرانسیل و انتگرال شد که ابزار اصلی انقلاب صنعتی قرن هیجدهم و بسط سریع روشهای‌عملی گردید.

انقلاب فرانسه، در پایان قرن هیجدهم مهمترین اثر را بر ریاضیات گذاشت. ریاضیات مهندسی بیشتر مورد توجه قرار گرفت و در نتیجه موجب تأسیس‌پلی‌تکنیك پاریس‌گردید. در این دوره تربیت مهندس خوب و لایق در رأس هدفهای تدریس ریاضی بود.

در قرن ۱۹، مکانیك مقدماتی نیوتون موجب شد که مهندسین‌بتوانند فشار را در یك سازه محاسبه کنند و ماشین‌آلات را طراحی نمایند.

اگرچه‌طرح‌مسائل‌صنعتی، بازرگانی، دریانوردی و نظامی موجب شکوفائی دانش ریاضی و علوم‌گردیدواستفاده‌های زیادی به‌جامعه بشریت رساند، ولی نباید این‌طور استنباط شود که ریاضیات و علوم خود را از آن به‌بعد کاملا ملزم به‌مسایل عملی کردند و در خدمت مهندسین قرار گرفتند. مطالعه کارهای بزرگ **دکارت، گالیله** و **نیوتون** نشان می‌دهند که رابطهٔ زیادی بین مسائل صنعتی و موضوعات علمی و ریاضی که آنها دنبال کردند دیده نمی‌شود، اگرچه این موضوعات از مسائل موجود آن زمان الهام گرفته‌شده در نوشته‌های دکارت در موضوع‌های ریاضی، نور، هواشناسی و کیهان‌شناسی مسائل‌کاربردی مطرح‌نمی‌شود. نیوتون در کتاب معروفش Principia بندرت از مسایل دریانوردی یاد می‌کند. علاقه دکارت در مطالعهٔ نور یقیناً از کاربردهای جدید و جالب عدسی‌ها در تلسکوپ و میکروسکوپ سرچشمه می‌گرفت و مطالعهٔ نیوتون در حرکت ماه برای بهبود بخشیدن روشهای مکان‌یابی در دریاها صورت گرفت.

باید توجه داشت که ریاضی‌دانان و متفکرین بزرگ در جستجوی‌کشف حقایق ریاضی به‌مراتب بیشتر از حل مسائل عملی بوده‌اند **و این یك‌اشتباه محض است اگر فکر کنیم آنها خود را موظف می‌دانستند تا کار خود را محدود به مفاهیمی بکنند که اثر مستقیم یا غیر مستقیم بر سایر علوم و مسایل روزمره زندگی داشته است.** بسیاری از ریاضی‌دانان موضوع خود را صرفاً به‌خاطر علاقه به‌آن دنبال می‌کرده‌اند و می‌کنند و به‌نظر آنها مطالعه و تحقیق در موضوع یك مبارزه فکری است که دارای ارزشی به‌مراتب بالاتر از پول و قدرت و... است.

اینشتاین می‌گوید: **انگیزهٔ کارهای علمی من آرزوی من در شناخت‌اسرار طبیعت است و بس و نه احساس دیگری.** علایق من به‌عدالت اجتماعی و تلاش برای بهتر کردن شرایط زندگی بشر کاملا مستقل از علاقه‌های پژوهشی من هستند.

ویژگی دیگری که در کارهای ریاضی‌دانان بزرگ دیده می‌شود این است که هر نوع مسأله‌ای، عملی یا نظری، می‌تواند یك زمینهٔ پژوهشی ایجاد کند و ریاضیدانان صرفاً آن را به‌سبب علاقهٔ ذاتی‌دنبال می‌کنند. بااین وصف، نتایج به‌دست آمده ممکن است برای معاصرین آنها یا نسل‌های‌آینده بی‌اندازه با ارزش باشد. یونانیان اولین کسانی بودند که ایده‌هائی‌دنبال کردند که کاربردهای آنی نداشتند. یك مثال کلاسیك مقاطع مخروطی است‌که ۱۵۰۰ سال پیش از آنکه کپلر بیضی را در نجوم و گالیله سهمی را در حرکت پرتابی به‌کار گیرد یونانیان این منحنی‌ها را کاملا بررسی کرده بودند و به این ترتیب راه را برای پیشرفتهای این دو هموارنموده‌بودند. علاقه اصلی یونانیان در مطالعهٔ این منحنی‌ها این بود که مسائل مربوط به ساختن اشکال، دوبرابر نمودن مکعب و تثلیث زاویه را حل کنند. هندسه‌های نااقلیدسی مثال دیگری است از

موضوعی که به‌قصد استفاده در علم و صنعت بررسی نشد. صدها محققی که در جستجوی پیدا کردن جانشینی برای اصل توازی اقلیدس بودند کارشان را به‌این منظور که هندسهٔ اقلیدسی را اصلاح کنند شروع‌نکردند و حتی تصور یك هندسهٔ جدید را، که بعدها مسیر ریاضی و علوم را عوض کرد نمی‌کردند. علاقهٔ آنها اساساً به‌خاطر این بود که ساختمان هندسه را کامل‌تر کنند. **متجاوز از صدسال** بعد اینشتاین حداکثر بهره‌برداری را ازاین‌هندسه‌ها در ارائه نسبیت‌کرد.جای هیچ‌گونه شکی نیست که کار آفرینش چنین، هندسه‌ای، که خود نبوغ گاوس را می‌طلبید، و به‌کار گرفتن آن در یك نظریهٔ جدید فیزیکی خارج از حیطهٔ قدرت یك فرد بوده است.

یکی دیگر از مفاهیم ریاضی که **قرنها قبل از کاربرد** صرفاً به‌خاطر نفس خودش مورد مطالعه قرار گرفت حساب در مبنای دو بود .این مبنا لایبنیتز ریاضیدان و فیلسوف مذهبی قرن هفدهم را سخت تحت تأثیر قرار داد. وی دریافت که در این مبنا تنها نمادهای «۰» و «۱» برای نوشتن اعداد لازمند. وی در این حساب، تصویر و اثبات آفرینش را می‌دید. به‌نظر وی «۱» نمایندهٔ خداوند و«۰» نمایندهٔ هیچ‌بود. خداوندتمام‌موجودات را از هیچ خلق کرد درست همانطور که اثر «۱» بر «۰» تمام اعداد را می‌آفرینند. این موضوع آن‌قدر موجب خوشحالی لایبنیتز شد که آن را به منظور مسیحی کردن امپراطور چین‌به آن کشور فرستاد. موضوع‌دیگری‌که در این رابطه قابل ذکر است نیروی مغناطیس می‌باشد که در خارج از حوزهٔ حواس است ولی اثرات واقعی آن را نمی‌توان منکر شد. ماکسول بیش از صد سال پیش‌به‌کمك‌ریاضیات دریافت که برق و مغناطیس صرفاً دو سیمای مختلف نیروی مغناطیسی هستند. در آن زمان کسی نتوانست پیش‌بینی‌کند که این نظریه منجر به ساختن رادیو، تلویزیون و دستگاههای مخابراتی مدرن امروز بشود. کارهای ماکسول بر کارهای فاراده بنا شد. قبل از فاراده نیروهای برق‌ومغناطیس دو نیروی متمایز به‌شمار می‌آمدند که هیچ‌گونه ارتباطی بین آنها متصور نبود. فاراده نشان داد که این دو نیرو متمایز نیستند و در اصل یکی‌هستند. یك جسم مجهز به‌بار الکتریکی اگر ساکن باشد نیروی الکتریکی و اگر متحرك باشد نیروی مغناطیسی تولید می‌کند و این‌یکی از **بزرگترین‌کشفیات فیزیك در طول تاریخ بوده است.** ولی‌از آنجائی‌که برق ومغناطیس قابل رؤیت نیستند فاراده دریافت که تفکر فیزیکی وی را به سرمنزل مقصود نخواهد رساند. وی به‌نقطه‌ای رسید که فیزیك برای فیزیکدان بسیارمشکل می‌شود و برای نجات خود ریاضیات را طلب می‌کند. کارهای ریاضی ماکسول این معما را حل کرد و به طور نظری نشان داد که میدان مغناطیسی، یعنی، ترکیبی از برق متغیر و میدان مغناطیسی فاصلهٔ طولانی‌تری را در فضا طی خواهدکرد. قابل ذکر است که ماکسول فاراده را به‌جلو برد و خواست بداند که به جای حرکت یکنواخت اجسام با بار الکتریکی اگر حرکت با شتاب همراه باشد چه وضعی پیش خواهد آمد. با کمال تعجب (به‌طور نظری)دریافت که چنین جسمی باید تشعشعات مغناطیسی ساطع کند. هرتز در سال ۱۸۸۷ یعنی حدود ۲۵ سال بعد از پیش‌بینی ماکسول این امواج را ایجاد کرد و آنها را در فاصلهٔ دور دریافت نمود. البته این‌امواج چیزی جز امواج رادیوئی نیست که امروز از آن‌حداکثر استفاده را می‌کنیم بدون اینکه وجود فیزیکی آنها را حس کنیم.

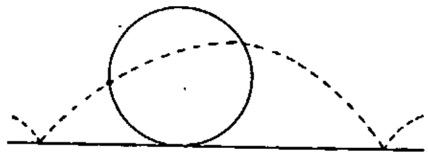
حرکت سیارات، حرکت نور و حرکت پرتابی دلایل روشنی برای مطالعه دارند ولی حرکت یك شیئی آویزان به‌یك طناب و عقب و جلو رفتن مکرر آن به‌نظر نمی‌رسد غیر از سرگرمی دلیل دیگری برای جلب توجه داشته باشد. گالیله تاب خوردن‌لامپها را از طناب‌های‌آویزان درکلیسامشاهده کرده بود و با استفاده از نبض‌خودش دریافت که مدت رفت و آمد کامل‌لامپ بستگی به‌طول طناب ندارد. وی این بررسی را صرفاً به‌خاطر ارضای نفس خودش انجام داد و زمان رفت و آمد را محاسبه کرد. سالها بعد از مطالعهٔ گالیله در پاندول که می‌خواست دلیل حرکت آن را بداند وی یك ساعت پاندولی را طراحی کرد و از شاگردانش خواست آن را بسازند.

در حدود ۱۵ سال بعد، هگنز، که مستقلا روی این موضوع کار می‌کرد، ساعتی ساخت که بیشتر مورد قبول واقع‌شد. ازآنجایی‌که‌ساعتهای پاندولی در کشتیهای در حال‌حرکت در دریاهای متلاطم درست کار نمی‌کردند، جستجو برای یك ساعت[1] فنری سالها بعد از گالیله و هگنز ادامه پیدا کرد.

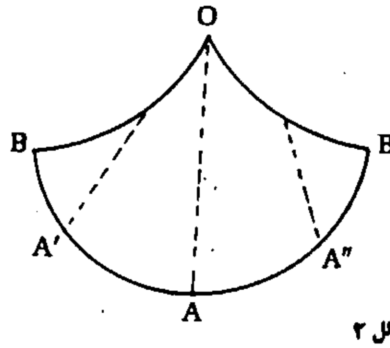
چون دورهٔ تناوب حرکت یك‌پاندول تا حدودی بستگی به‌دامنهٔ تاب دارد (به‌دلیل‌وابستگی‌آن به‌شتاب‌ثقل زمین). هگنز به‌این فکر افتاد منحنی پیدا کند که در طول آن یك شیئی طوری تاب بخورد که دورهٔ تناوب آن ثابت بماند و بستگی به‌دامنهٔ نوسان نداشته‌باشد. برحسب اتفاق منحنی را که، هگنزلازم داشت، **سالها قبل مورد مطالعه عمیق** بسیاری از ریاضی‌دانان قرار گرفته بود. جالب اینجا است که این منحنی اساساً **به‌عنوان یك مبارزهٔ ذهنی مورد مطالعه قرار گرفته بود!** این منحنی همان است که آن را سیکلوئید می‌نامیم و از حرکت یك نقطه ثابت واقع بر یك دایره (مثلا چرخ اتومبیل) که بر روی زمین می‌غلطد بدست می‌آید.

مهمترین خاصیت این منحنی دراین است که اگر آن را وارونه کنیم و جسمی در طول آن تحت تأثیر نیروی جاذبه بلغزد، مستقل از اینکه نقطهٔ

آغاز کجا باشد زمان رسیدن آن به پایین‌ترین نقطه و زمان به‌سمت بالا رفتن به بالاترین نقطه قرینهٔ آن برابر است. هگنز از این‌ویژگی ریاضی‌این منحنی استفاده کرد و آن را در مورد پاندول به‌کار گرفت و یك ساعت دقیق ساخت. هگنز پاسخ خود را به این ترتیب یافت: فرض کنیم OB و OC دو قوس سیکلوئیدی برابر باشند و OA نخی باشد که وزنه‌ای به آن در A بسته شده باشد. وقتی OA تاب می‌خورد قسمتی از نخ دور این قوس می‌پیچد و بقیه آن بحالت کشیده باقی می‌ماند (تحت نیروی جاذبه). هگنز ثابت کرد که اگر طول OA دو برابر ارتفاع سیکلوئید باشد آنگاه مکان هندسی نقطه A نیز خود یك‌سیکلوئید است. به‌این ترتیب راهی پیدا کرد که شیئی را وادارکند درطول‌سیکلوئید حرکت کند و پاندول کامل را طراحی کرد.



شکل ۱



شکل ۲

این مثال و مثالهای دیگر یاد شده به‌خوبی نشان می‌دهند که چگونه موضوعی که صرفاً به‌خاطر کنجکاوی ذهن و بدون چشم‌داشت جنبهٔ عملی و کاربردی مورد مطالعه قرار گرفته بود بعدها کاربرد پیدا کرد و در صنعت مورد استفاده قرار گرفت.

ادامه دارد

کتابهای ریاضی

کمك آموزشی (جنبی)

در خارج و در ایران

تنظیم از: میرزا جلیلی

شما اگر یکی از مجلات خارجی را که برای مدارس و معلمین یك کشور انتشار می‌یابد، مثلا «Mathematics in School» که در انگلستان چاپ می‌شود، و به دفترمجلهٔ رشد ریاضی می‌رسد، مطالعه کنید در لابه‌لای صفحات هر شماره آن[1] معرفی کتابهای ریاضی جدیدالانتشار از مؤسسات مختلف را می‌بینید. مثلا، در جلد ۱۸ شماره۲ زمستان ۱۹۸۹ مجله مذکور کتب زیر تبلیغ شده است:

1- SSMG Maths [2]
2- Foundation Maths.
3- Challenging Maths.
4- Struggle Mathematics for Lower attainer.
5- Help your child with maths.
6- Understanding the mathematics teacher
7- Modelling with Projectiles
8- Assessing Mathematical attainment
9- Mathematical eye

از توضیحات مربوط به هرکتاب نکات زیر استنباط می‌شود:

الف ــ کتابهای ردیف ۱و۲و۳ کتبی است که مطابق

برنامه تنظیمی دفتر برنامه‌ریزی وزارت آموزش و پرورش آن کشور تدوین یافته است. از توضیحات درباره هر کدام روشن می‌شود که هیچ یك، تقلید یا بدل دیگری نیست. هر کدام با روش ابتکار و تحقیق خاص خود یك برنامه یکسان را پیاده کرده‌اند و هر سه‌سری یك هدف را می‌پوشاند.

ب- کتاب ردیف ۴ کتابی است که با همان اهداف برای دانش‌آموزان ضعیف مدارس تنظیم شده است و نحوهٔ برخورد با مطالب و روش ارائه آن با کتابهای قبلی کاملا متفاوت است.

ج- کتاب ردیف ۵ کتابی است که برای راهنمایی والدین تنظیم شده و به‌آنها یاد می‌دهد که چگونه به فرزندان خود ریاضی بیاموزند، و یا به‌آنها در درس ریاضی کمك کنند روش ارائه مطالب و ورود به هر مطلب با کتابهای قبلی متفاوت و خاص والدین است.

د- کتاب ردیف ۶ کتابی است برای معلمین ریاضی که آنها را هدایت می‌کند که چگونه به دانش‌آموزان خود ریاضی یاد دهند و روش تدریس خود را پیشرفت دهند تا در حرفه خود موفق باشند.

ه - ردیف ۷ کتابی است که مدلهای حرکت پرتابی را تشریح می‌کند و فرمولهای درس مکانیك را به‌صورت مدل خارجی ارائه می‌دهد.

و - ردیف ۸ کتابی است که در نحوهٔ ارزشیابی از مطالبی که دانش‌آموزان یاد می‌گیرند و به‌کارگیری نتیجه ارزشیابی در تجدید نظر در روش تدریس یا کتاب و برنامه را مورد بررسی قرار می‌دهد.

ز- کتاب ردیف ۹ که با یك برنامهٔ تلویزیونی‌همراه است و یا به‌عبارت دیگر یك برنامهٔ تلویزیونی همراه با یك کتاب است نحوهٔ آموزش بحثهای مختلف ریاضی را مستقل از ترتیب برنامه و هر مبحث را مستقل از مبحث دیگر آموزش می‌دهد. مثل اندازه‌گیری، مساحت، آمار، دایره و خواص آن، مثلث و خواص آن، ... در این‌مجموعه روشهای تجسمی و ملموس در آموزش به کار گرفته شده و از اشیاء زندگی روزمره برای یاد دادن مفاهیم ریاضی استفاده کرده است. مثلا از حبه‌های قند موجود در بازار که هرکدام تقریباً دارای ابعاد یك سانتیمتر است و جعبهٔ این قندها برای معرفی، سانتیمتر مکعب، دسی‌متر مکعب و مترمکعب استفاده کرده است و چنین توضیح داده است که اگر یك مترمکعب از این حبه‌های قند رویهم چیده شود ارتفاع آن کمی از قله اورست بلندتر خواهد شد و اگر آنها را روی زمین فرش کنیم یك زمین بازی تنیس را می‌پوشاند و تعداد حبه‌ها یك میلیون می‌باشد. (متر مکعب برابر یك میلیون سانتیمتر مکعب است).

در یك کشوری مثل انگلستان، در ماه دهها مجله ریاضی انتشار می‌یابد و هر مجله دهها کتاب جدیدالتالیف ریاضی را معرفی می‌کند. یعنی ماهانه صدها کتاب کمکی و جنبی برای بهبود آموزش ریاضی در مدارس چاپ و منتشر می‌شود.

همهٔ این کتابها با استفاده از تحقیق و با اهداف زیر تنظیم می‌شوند:

۱- ریاضی را با مسائل روزمره چنان عجین می‌کنند که دانش‌آموز توجه کند که برای زندگی کردن در جامعه نیاز به‌یادگیری ریاضی دارد. به عبارت دیگر سعی می‌شود انگیزه یادگیری در او ایجاد و تقویت شود و به فراگیری ریاضی علاقمند شده و برای این درس ارزش قائل شود.

۲- با روش تحقیق و پی‌گیری در مدارس تجربی، ساده‌ترین راه را برای آموزش یك مفهوم ریاضی یا یك قضیه کشف و ارائه می‌دهند طوری که **هم معلم در انتقال مطلب احساس آرامش و راحتی کند و هم دانش‌آموز در گرفتن مطلب احساس ترس و نگرانی و یا احیانا یاس نکند.**

۳- روش ارائه شده در کتابها طوری است که معلمین را در بکار گرفتن وسائل کمك آموزشی و استفاده از روشهای تجسمی و عینی تشویق می‌نماید. مثلا در آموزش احتمال توصیه می‌کند که معلم مثلا، دو مکعب که برروی آن اعداد ۱ تا۶ حك شده است را به‌کلاس ببرد و از دانش‌آموزان بخواهد در پرتاب آنها احتمال آمدن مجموع ۷ را محاسبه کنند.

۴- روش ارائه شده در کتاب‌ها طوری است که معلم را تشویق می‌کند که **در تدریس خود دانش‌آموزان کلاس را نیز شرکت بدهد،** در کتاب یادآور شده است که این کتاب برمبنای بحث بین معلم و دانش‌آموز و بحث بین خود دانش‌آموزان تنظیم شده است لذا کتاب وقتی مفید واقع می‌شود که معلم از این روش پیروی کند.

۵- مطالب ارائه شده در کتاب به‌نحوی است که **روح تحقیق، کشف و انتقاد را در دانش‌آموز ایجاد و پرورش می‌دهد**مثلا بسط $(a+b)^2$ را آموزش‌می‌دهد وبعد از دانش‌آموز می‌خواهدجوابهای $(a-b)^2$ یا $(a+b+c)^2$ یا $(a+b)^3$ را پیدا نماید.

۶- هر کتاب هدف خاصی را دنبال می‌کند و برای دسته یا گروه خاصی از نظر سنی یا مشاغل اجتماعی تنظیم شده است لذا، یك کتاب نسخه‌ای نیست که به درد هر مریضی بخورد.

۷- روش کتاب‌ها طوری است که معلم و دانش‌آموز به‌مراحل آموزش ریاضی یعنی **مفهوم و درك، محاسبه و تکنیك، مهارت و سرعت، عمل و کاربرد** هدایت می‌کند. لذا مطالب تکراری، تمرینهای متشابه و یکنواخت کمتر

ارائه می‌شود و هر مطلب و هر تمرین در رابطه با آموزش یکی از این مراحل است.

۸ـ روش هر کتاب و هدف آن این است که یادگیری ریاضی را آسان و تشویق نماید یعنی در دانش‌آموز ایجاد جرقه برای یادگیری ریاضی کند طوری که دانش‌آموز با مطالعه کتاب علاقمند شود و خود به‌دنبال تحقیق و کشف مطلب جدید برود. به عبارت دیگر، کتاب در او ایجاد عطش و تشنگی برای یادگیری ریاضی نماید که این عطش علاقه به‌مطالعه و یادگیری را در او ایجاد و تقویت کند.

نویسندگان این کتابها، بیشتر دارای دکترا و یا لیسانس در آموزش ریاضی و یا حداقل متخصص در این زمینه هستند و یا به‌صورت گروهی با عده‌ای از همکاران خود در یك زمینه تحقیق می‌کنند و نتیجهٔ تحقیق را برای استفادهٔ عموم منتشر می‌کنند. اغلب اعضاء این گروه دبیران با سابقه، مسئولین گروه ریاضی یك دبیرستان یا دانشکده ریاضی و یا کسانی هستند که سالها با آموزش ریاضی در مدارس و دانشگاهها سروکار دارند.

کتابهای ریاضی جنبی در ایران

در جهانی که هرسال هزارها کتب جدید ریاضی با مطالب نو منتشرمی‌شود و یا هزاران‌ساعت درآزمایشگاهها و مدارس صرف تحقیق یافتن بهترین شیوه و راه آموزش می‌گردد متاسفانه هنوز ما به مسائل سنتی و یکنواخت و روشهای قدیمی و تکرار آنها پرداخته‌ایم و یك مطلب ریاضی سنتی را با بیانهای گوناگون و جمله‌پردازیهای مختلف عرضه می‌داریم. هر هفته چندین کتاب ریاضی کمك‌درسی به‌گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف‌جهت تأئید و اجازه چاپ می‌رسد که در همهٔ آنها دو هدف زیر دنبال می‌شود:

۱ـ گذر از مرحله کنکور،

۲ـ آشنایی با مسائل مشکل و پیچیدهٔ ریاضی

و عناوین آنها معمولا به‌صورتهای زیر است:

ـ ریاضیات ویژهٔ دانش‌آموزان دبیرستان؛

ـ ریاضیات ویژهٔ کنکور دانشگاهها و مدارس عالی کشور؛

ـ ریاضیات ویژهٔ دانش‌آموزان شرکت کننده در کنکور پزشکی؛

ـ از پایه تا کنکور،

ـ هزار نکته آموختنی برای کنکور،

ـ هزار و یك مسأله مفید برای دانش‌آموزان و دانشجویان،

. . . .

محتوای این کتابها

۱ـ خلاصهٔ دروس کتابهای دبیرستان است‌که بعضاً مطالب به‌صورت دست و پا شکسته، حذف و بریده شده و بدون استدلال ارائه شده است. تصور نویسنده آناست که ریاضیات باید آن قدر خلاصه شود که به اندازهٔ یك کپسول در آید و خواننده با خوردن آن از بحران کنکور بگذرد.

۲ـ مسائل حل شده که عیناً مسائل کتاب است و یا مسائل مشابه با تغییر اعداد آنهاست.

۳ـ دویست یا سی‌صد تست کنکور که با روح تستهای استاندارد بین‌المللی مغایرت دارد و در گزینه‌ها یك جواب درست وجود دارد و بقیه جوابها هیچ‌گونه ارتباطی با هم یا با جواب درست ندارند.

۴ـ حل تستهای آزمون سراسری سالهای اخیر دانشگاهها (که اخیراً مد شده است).

۵ـ بعضی مطالب دست و پا شکسته از ریاضیات عمومی دانشگاهها که در کتابهای دبیرستانی نیست.

۶ـ حل مسائل امتحانات نهایی ۱۰ یا ۱۵ سال گذشته مدارس.

۷ـ حل یك سری مسائل پیچیده و مشکل کتابهای ترجمه شده از روسی

۸ـ مسائل و مطالبی که در کتابهای ریاضی ۴۰ سال پیش آمده است. به‌عبارت دیگر بیشتر این کتابها «کتابهای دستی»[۲] است. تبلیغات روی جلد طوری است که هر کسی به‌هر شکلی با ریاضیات سروکار داشته باشد عنوان آن شاملش می‌شود و عنوانها طوری انتخاب شده‌اند که هرکس در انتخاب و خرید دچار وسوسه می‌شود. با مطالعهٔ این‌گونه کتابها در دانش‌آموز این فکر به‌وجود می‌آید که:

الف ـ ریاضیات یعنی مجموعه‌ای ازدستورالعملها و قواعد که باید آن‌قدر خوانده شود تا حفظ گردد و سپس مثل درس تاریخ جواب داده شود.

ب ـ ریاضیات یعنی حل مسائل پیچیده و بغرنج که یادگیری آن از عهدهٔ عدهٔ خاصی که نبوغ و استعداد ذاتی دارند برمی‌آید نه‌همگان و افراد عادی.

و هر دوی این تصور مغایر با هدفهای آموزشی ریاضی است و نه‌تنها به بهبود آموزش ریاضی در کشور کمك نمی‌کند بلکه عامل نگران‌کننده برای آموزش‌صحیح نیز می‌باشد.

ما به‌مطالعه مطالب نو و جدید علاقمندی نشان نمی‌دهیم و تلاشی برای ابتکار و نوآوری نداریم و با این کار خود یعنی ارائه مطالب تکراری و مشابه بچه‌ها را نیز از ابتکار باز می‌داریم. چه دانش‌آموزان با خواندن این

کتابها و مطالب یکنواخت فکر می‌کنند همهٔ ریاضیات همین است و بس و بدین شکل به‌طور ناخودآگاه ما روح خلاقیت و اکتشاف و انتقاد را در آنها از بین می‌بریم.

خصوصیات دیگر این کتابها

۱ــ مطالب همهٔ کتابها تکراری، مشابه و نظیر هم، و اغلب اقتباس از یکدیگر است مثلا یك نفر تصمیم‌گرفته است که مسائل و مطالب مهم کتابهای ریاضی ترجمه شده از روسی را جمع‌آوری‌کند و اسمی‌برای آن انتخاب نماید. دیگری فکر می‌کند که همهٔ این مطالب مورد نیاز نیست. و از آن گلچینی انتخاب می‌کند و اسم دیگری روی آن می‌گذارد و ...

مطالب این کتابها آن‌قدر تکراری است که مثلا شما در همهٔ آنها اتحادها و نامساوی‌های معروف زیــر را می‌بینید:

الف ــ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)$
$(a^2+b^2+c^2-ab-ac=bc)$

ب ــ $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$

ج ــ $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=$
$(a-b)(b-c)(a-c)$

د ــ $\frac{a}{b}+\frac{b}{\alpha}\geqslant 2 \qquad a>0 \quad b>0$

هـ ــ $a^2+b^2+c^2>ab+ac+bc$

و ــ $\sqrt{(a+b)(c-d)}\geqslant\sqrt{ac}+\sqrt{bd}$

ز ــ $(a+b)(b+c)(c+d)\geqslant 8abc$

و یا شامل تستهای مشابهی است که از هم گرفته شده و یا از یك منبع استفاده کرده‌اند و یا حل‌ها شامل تکنیك و روشهائی است‌که گاهی‌پایه‌و ریشه علمی‌ندارد و اغلب در حالات خاص درست می‌باشند. در این کتابها هدف‌های آموزشی به‌آن صورتی که در کتابهای خارجی ذکر شد وجود ندارد و آنها از هر نوع نوآوری، روش تازه، مطالب ابتکاری و تحقیق در آموزش بی‌بهره‌اند[4].

نویسندگان این کتابها

ــ آقای محتــرمی، لیسانسیه یــا غیر لیسانسیه، متخصص یا غیر متخصص یك ترم در یك کلاس خاص، مثلا هنرستان درس داده و چون دانش‌آموزان هنرستان‌وقت کمتری برای مطالعه داشته‌اند ناگزیر مطالب برای آنها جمع‌آوری و بطوز مختصر و با بیان ضعیف‌تری ارائه‌کرده است. معلم برای این کلاس خاص و تحت شرایط موجود از روی کتب درسی جزوه‌ای تهیه کرده است و بعد از مدتی فکر می‌کند وقتی این جزوه در اینجا و تحت این شرایط مورد قبول واقع شود و یا احیاناً کارساز باشد حتماً جایش در بازار خالی است؟ و به‌فکر می‌افتد که‌جزوه را به‌کتاب تبدیل کند جزوه‌ای که فقط‌محتوای خلاصه‌شده کتابهای درسی دبیرستان است و احیاناً خالی از اشتباه هم نیست.

ــ یا دانشجوئی چند شاگرد خصوصی‌را درس می‌دهد و مطالبی از کتابهای درسی و کتبی که در بازار موجود است گردآوری می‌کند و احیاناً شاگردان او در امتحان یا کنکور توفیقی به‌دست می‌آورند. به‌فکرش می‌رسد که این جزوه باید نسخه‌ای برای همهٔ کنکوردهندگان باشد و به فکر چاپ آن می‌افتد و فراموش می‌کند که در شروع کار، او این مطالب را از کتابهای دیگران‌جمع‌آوری‌کرده و این کتابها هم‌اکنون در بازار موجود است. ولی چون او با خط خود این مطالب را نوشته است فکر می‌کند که این یك تألیف جدید و مناسب حال همه است.

همکار دبیری در یك شهرستان یا در یك مدرسه یا در یك آموزشگاه از روی کتب درسی و کتابهای در دسترس جزوه می‌گوید و اتفاقاً در آن کلاس یا شهرستان آن جزوه گل می‌کند بلافاصله او به‌این فکرمی‌افتدکه اگر این جزوه کتاب شود خیلی از مشکلات‌دانش‌آموزان‌کنکوری را حل می‌کند و چاپ آن مفید و خدمتی‌خواهد بود و توجه ندارد که جزوه یك معلم یا یك کلاس ممکن است اصلا به درد معلم یا کلاس دیگر نخورد. خود جزوه نیز خلاصه درسهای کتب درسی است.

ــ در بین درخواست کنندگان مجوز چاپ کتب جنبی اغلب افراد کاسب‌پیشه نیز دیده می‌شوند که بدون هیچ پروائی دنبال کسب هستند. کار اینها جمع‌آوری مسائل امتحانات داخلی مناطق تهران، استانها، مسائل امتحانات نهائی مقاطع ابتدائی، راهنمائی و دبیرستان، جمع‌آوری تستهای‌کنکور سراسری ودانشگاه‌آزاد وگلچین مسائل و تستهای کتب موجود در بازار است عجب آنکه این آقایان نویسنده حل‌المسائل فیزیك، شیمی و تهیه کننده مطالب و تستهای زبان خارجه و ادبیات نیز می‌باشند. اینگونه کتابها مملو از اغلاط علمی است و واقعاً مطالعه آنها برای دانش‌آموزان سم است. بعضی از این کتابها بدون مجوز و به‌صورت تایپ و پلی‌کپی و با کیفیت بسیارپائین از نظر چاپ‌که مطالعه آنها به‌چشم بچه‌ها نیز لطمه می‌زند جلو دانشگاه تهران به قیمت گزاف به‌فروش می‌رسد و هیچگونه کنترلی برای جلوگیری از آنها وجود ندارد.

بارقه امید

در میان این بازار آشفته و این وضع نابسامان وجریان نامطلوب جای بسی خوش‌وقتی است که اخیراً مرکز نشر

دانشگاهی اقدام به‌ترجمه و نشر یك سری کتابهای پیش دانشگاهی مفیدی نموده است که کاری است درخور تقدیر و از نظر آموزش اصول ریاضی بسیار مؤثر است. در زیر نمونه‌ای از این کتابها آمده است

۱ـ آشنایی با نابرابریها از بکن‌باخ ـ تلمین، ترجمه محمدحسن افقهی

۲ـ اعداد گویا و گنگ از ایوان‌تولیا، ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا

۳ـ ریاضیات انتخاب چگونه بدون شمارش بشماریم، ایوان نیون ترجمه علی عمیدی و بتول جذبی.

۴ـ مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا جلد ۱ از چارلزت سالکیند ترجمه سیدحسین جوادپور ومحمد قزل ایاق

۵ـ مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا از همان نویسنده جلد ۲ ترجمه علی امانی

۶ـ مسائل مسابقات ریاضی مجارستان

۷ـ حساب دیفرانسیل و انتگرال چیست؟ و ـ و شور ترجمه محمدحسن مهدوی اردبیلی

۸ـ مسائل المپیاد بلژیك ترجمهٔ آقای عبدالحسین مصحفی

۹ـ مسائل مسابقات المپیاد بین‌المللی ترجمه دکتر قاسم وحیدی اصل

. . . .

اصولا همهٔ کتب ریاضی ترجمه شده به وسیلهٔ مرکز نشر اعم از پیش‌دانشگاهی و غیره برای مطالعه دبیران و دانش‌آموزان بسیار مفید و سودمند است[۵]. و خرید و مطالعه آنها را توصیه می‌کنیم.

پیشنهاد برای بهبود اوضاع

۱ـ چون کتابهای ریاضی خوب که درکشورهای خارجی نوشته می‌شود اغلب از مراحل مختلف تجربه و تحقیق می‌گذرد و اصولا هدف‌دار هستند لذا ترجمهٔ این‌گونه کتابها از انگلیسی، فرانسه، آلمانی، روسی می‌توانـد بسیار مفید واقع شود. به‌ویژه اگر یك سری از کتابهای دبیرستانی این کشورها عیناً به فارسی برگردانده شود می‌تواند در **فرهنگ ریاضی دبیرستانی‌کشور ما** تحول به وجود آورد. همان کاری که ترجمهٔ کتب ریاضی مرکز نشر در دانشگاهها کرده است.

باید دقت کرد که این کتابها از تنوع زیاد برخوردار باشند و همه حل‌المسائل و تکنیك حل مسأله نباشند و یا فقط از یك کشور خاص انتخاب نشده باشند.

۲ـ کتابهای جنبی و کمك درسی برای دبیـران و دانش‌آموزان باید به‌وسیلهٔ مؤلفین و درموقع تنظیم کتب جدید صورت گیرد و به‌صورتی در اختـیار دبیـران و دانش‌آموزان قرار گیرد.

۳ـ دفتر کمك آموزشی سازمان پژوهش نیز کتـب جدید آموزش ریاضی در مقاطع ابتدایی، که همه ساله صدها جلد در دنیا منتشر می‌شود، ترجمه و در اختیار معلمین ابتدایی قرار دهد چه معلمین ابتدایی واقعاً بـه این‌گونه کتابها نیاز دارند، همچنین این دفترچاپ‌کتابهای جنبی و کمك درسی دبیرستان را نیز به‌عهده بگیرد. البته کارهائی در این زمینه صورت گرفته است که امید است سرعت بیشتری بگیرد.

۴ـ کتاب دستی همراه با تست کنکـور و اشـاره و راهنمایی به‌قوانین تست زدن باید از طرف اداره گزینش وزارت فرهنگ و آموزش عالی و با استفاده از خزانه سئوالات گذشته انجام پذیرد.

۵ـ تستهای سالهای اخیر کنکور سراسری در انتهای کتابهای ریاضی دبیرستان آورده شود که این کار در مورد کتابهای جبر و آنالیز انجام گرفته است و در مورد سایر کتب ریاضی نیز مطلب تحت بررسی است.

ـکتب درسی مدارس عموماً شامل مطالب لازم، تمرینات کافی و تست می‌باشد و همان طور که مسئولین آزمون سراسری کشور همه ساله اظهار می‌دارند سؤالات کنکور نیز از مطالب کتابهای درسی خواهد بود لذا یادگیری کامل مطالب کتابهای درسی در موفقیت دانش‌آموزان در کنکور نقش اساسی را دارد.

اگر احیاناً نارسائیهای جزئی نیز در کتـب درسی موجود باشد شایسته است به‌وسیلهٔ اعضاء محترم شورای برنامه‌ریزی ریـاضی دوره متوسطـه کـه اکنون فعـال می‌باشد برطرف گردد.

پاورقی

۱ـ هر سال پنج شماره منتشر می‌شود.

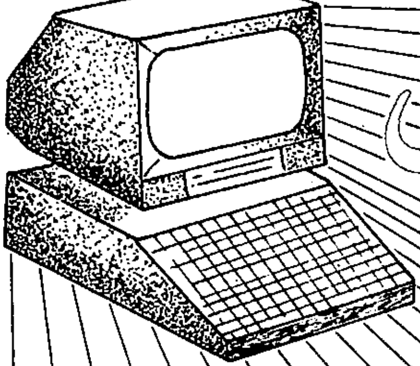
2- School Study Mathematic Group

3- Hand book

۴ـ البته در میان ارائه‌کنندگان‌این‌گونه‌کتابها اشخاص نادری نیز وجود دارند که با تجربه و اهل مطالعه وتحقیق بوده و با صرف وقت و مراجعه به منابع داخلی و خارجی کتب قابل استفاده و مفید ارائه می‌دهند ولی این عده‌قلیل در بین بقیه گم هستند و برای دانش‌آموزان شناسایی و تشخیص آنها مشکل است.

۵ـ استانها می‌توانند با مکاتبه به‌آدرس ـ تهـران خیابان شهید خالد اسلامبولی (پارك سابق) مرکز نشر دانشگاهی صورت کتب منتشر شده مرکـز را درخواست نموده و سفارش بدهند و دبیرستانها برای کتابخانه‌های خود از این کتب تهیه نمایند.

آشنائی با مبانی انفورماتیک و کامپیوتر



گروه کامپیوتر
دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی
وزارت آموزش و پرورش

پیشگفتار

اینک که، در آستانهٔ عصر «انفورماتیک» قرار گرفته‌ایم، بهتر است اطلاعات بیشتری در زمینهٔ مهمترین ابزار انفورماتیکی که کامپیوتر می‌باشد، داشته باشیم.

انفورماتیک روی جنبه‌های مختلف زندگی بشر و به‌ویژه آموزش و فعالیتهای علمی تأثیرات بنیادی‌گذاشته است. نظام آموزش و پرورش درکشور ما نیز برای حفظ پویایی و کم کردن فاصله با کشورهای پیشتاز در جهان معاصر به این امر مهم یعنی وارد کردن موضوع آشنائی با کامپیوتر و انفورماتیک در برنامهٔ آموزشی مدارس پرداخته است. گام نخست در سال سوم رشتهٔ ریاضی ـ فیزیک در حال شکل گرفتن است. درس آشنائی با کامپیوتر و انفورماتیک مبتنی بر آموزش کارگاهی و استفاده ازکامپیوتر هفته‌ای دو تا چهار ساعت از برنامهٔ رسمی آموزش سال سوم ریاضی ـ فیزیک را به خود اختصاص خواهد داد. تألیف کتاب درسی توسط کارشناسان مجرب، مراحل اولیه را پشت سر گذاشته است، کلاسهای بازآموزی و نوآموزی برای دبیران طبق برنامه‌ریزیهای انجام شده، تشکیل شده است، و بالاخره با تجهیز دبیرستانهای کشور به کارگاههای کامپیوتر، درطی یك برنامهٔ پنج ساله، انشاء... این درس جای خود را در بین دروس دبیرستانی باز خواهد کرد.

گامهای بعدی تسری درس آموزش کامپیوتر به سایر رشته‌های تحصیلی و سایر مقاطع است و پرداختن به مقولهٔ استفاده از کامپیوتر به عنوان یك ابزار کمك آموزشی که نیرو و توان زیادی را طلب می‌کند.

بر اساس آنچه به‌طور کوتاه به آن اشاره شد بخش ویژه کامپیوتر و انفورماتیك در مجلهٔ رشد آموزش ریاضی گشوده می‌شود تا هم اخبار مربوط به‌گروه کامپیوتر دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی در آن عنوان شود و هم در حاشیه به برخی نکات آموزشی در زمینهٔ کامپیوتر بپردازیم. امید است این بخش در غنای «فرهنگ کامپیوتری» و ایجاد «سواد کامپیوتری» در بین خوانندگان مؤثر افتد.

توجیه ضرورت سواد کامپیوتری

کامپیوتر هم‌اکنون در کشورهای پیشرفته نقش فراگیری را ایفا می‌کند و پذیرفتن این نقش از ضروریات و شروط لازم برای رشد کشورهای در حال توسعه و عقب افتاده است.

در جامعه فردا، از یك مکانیك ساده اتومبیل گرفته، تا یك پزشك روستا و یك تراشکار متوسط یا یك لوله‌کش، همگی با پردازنده‌ها سر و کار خواهند داشت. از کار به ظاهر ساده جمع‌آوری زباله و بازگردانی آن، تا تجزیه و تحلیل‌های سیاسی ـ اجتماعی و به خصوص اقتصادی، همگی محتاج و متکی به‌کامپیوتر خواهند بود.

بدون شك متخصصین فردا، اعم از پزشك، مهندس، اقتصاددان، جامعه‌شناس، کشاورز، سیاستمدار و مدیر، هیچکدام مستغنی از بهره‌گیری و کار مستقیم با ریز پردازنده‌ها و شبکه‌های کامپیوتری نخواهند بود. بعلت اینکه

عمده افراد جامعه به انحاء مختلف از پردازنده‌ها سودمی‌برند، به‌هریك باید آموخت که تا کجا می‌تواند به این ابزار با هوش (با تعریف مناسبی از هوش) و وسیله مشاورت و دستیابی به اطلاعات اعتماد کند و از قدرت کنترل آن برخوردار شود. همچنین حد و مرز استفاده چیست؟ و جرائم کامپیوتری کدامند؟ اثرات اجتماعی و احیاناً مضار کامپیوتر چیست؟

بنابراین داشتن سواد کامپیوتری برای نسل فردا بسیار ضروری‌تر از دانستن زبان خارجی خواهد بود. فرد بدون‌آشنائی با کامپیوتر و قابلیتها و ضعفهای آن، درست به مشابه فرد بیسواد و به اصطلاح کور در جامعهٔ فعلی می‌باشد و برای کارهائی چون خرید بلیط اتوبوس، گرفتن اطلاعات سفر، داد و ستد پول با بانك، و کار با ابزار جدید در خواهد ماند.

لذاهدف‌از آموزش عمومی‌کامپیوتر، بدواً شناخت کامپیوتر به منظور مشخص نمودن کارآیی‌ها و نارسایی‌های آن و حد و مرزهای مقدور و مجاز در بهره‌برداری از آن می‌باشد. سپس آموزش نحوهٔ‌ارتباط و بهره‌گیری از آن بعنوان مکمل قدرت ذهنی و فکری افراد بشر و ناقل و در اختیار عموم گذارنده دانش افراد خبره، مورد نظر است. در نهایت طرز کار ساختار داخلی آن و نحوهٔ بکارگیری از آن در ابزارهای مختلف به اختصار برای محصلین (رشته ریاضی/فیزیك)آموزش داده می‌شود.

گرایشهای بین‌المللی در آموزش کامپیوتر

در همهٔ کشورها، آموزش کامپیوتر، یا توسط بخش خصوصی (در مدارس خصوصی) یا بصورت طرحهای‌آزمایشی در تعدادی از مدارس دولتی و یا همانند فرانسه در سطح ملی به اجرا گذاشته شده است. محدودیت مالی موضوعی است که در بسیاری از کشورها موجب ناموفق ماندن یا تأخیر این آموزش گشته است. این موضوع یعنی کمبود منابع مالی حتی در بسیاری از کشورهای پیشرفته باعث انتخاب هدف «آموزش دربارهٔ‌کامپیوتر» شده است. زیرا استفاده از کامپیوتر بعنوان وسیله‌ای در خدمت آموزش چنانچه با کیفیتی مناسب منظور شود بمراتب پر هزینه‌تر از آموزش دربارهٔ کامپیوتر است. در هر دو انتخاب از هزینهٔ تهیهٔ نرم‌افزار و تربیت معلم نیز نباید غافل شد. شاید بتوان گفت بزرگترین طرحی‌که در خصوص‌آموزش کامپیوتر به‌اجراگذاشته شد، درفرانسه بود که با عنوان «انفورماتیك برای همه» در اوایل دههٔ ۱۹۸۰ آغاز شد. این طرح ده ساله بود و بر اساس آن بایستی کلیه مدارس متوسطه نوعی آموزش دربارهٔ‌کامپیوتر را آغاز کنند. در اتحاد جماهیر شوروی تعدادی طرحهای کوچك برای آموزش‌کامپیوتر در دبیرستانها آغاز شد و به موجب طرحهای اخیر این آموزش باید کلیه مدارس متوسطه را تحت پوشش قرار دهد. هدف آموزش کامپیوتر در این کشور آشنا کردن همهٔ دانش‌آموزان با کامپیوتر و نیز آشنا کردن برخی از آنان با کاربردهای حرفه‌ای آن است. کشورهائی نظیر مکزیك و هند طرحهائی را با عنوان «آشنائی با کامپیوتر» بصورت آزمایشی در بعضی از مدارس آغاز کردند.

یکی از بزرگترین موارد آموزش کامپیوتر، در دوره‌های فنی و حرفه‌ای است که به تربیت نیروی کار مورد نیاز می‌پردازند و مستقیماً با نیازهای توسعه در ارتباط هستند.

در بلغارستان طرح آموزش کامپیوتر بصورت آزمایشی در چند مدرسه آغاز شده است و در مجارستان این طرح (مانند فرانسه) همهٔ مدارس متوسطه را تحت پوشش قرار می‌دهد. لیکن در مدارس متوسطه‌نظری این درس نه یك درس اجباری بلکه درسی اختیاری است و تنها در مدارس حرفه‌ای این‌درس به‌صورتهای‌کاربردی و بعنوان درسی اجباری تدریس می‌شود. علاوه بر آن در دورهٔ خدمت سربازی نیز آموزشی کوتاه درخصوص کامپیوتر ارائه می‌گردد. در آمریکا، برخلاف فرانسه طرحهای مربوط به آموزش کامپیوتر، منطقه‌ای است و طرح‌کلی در سطح ملی وجود ندارد. لیکن تعداد ریز کامپیوترهائی که‌برای این منظور در دبیرستانها نصب گردیده، بسرعت رو به‌افزایش است. بطوریکه درسال ۱۹۸۱، تعداد ۳۱۰۰۰ ریز کامپیوتر در مدارس وجود داشت و این تعداد تا سال ۱۹۸۵ به ۱۲۷۵۰۰۰ عدد رسید. بطور کلی سیاست یکنواختی در خصوص آموزش کامپیوتر در جهان وجود ندارد. دو کشور بزرگ صنعتی یعنی آلمان غربی و ژاپن در این‌خصوص بسیار محتاطانه حرکت کرده‌اند و آموزش کامپیوتر را تنها با هدف آماده کردن حرفه‌ای جوانان برای بازار کار در سالهای آخر دبیرستان دنبال می‌کنند.

طرح آموزش پیش دانشگاهی انفورماتیك در ایران

درس «مبانی کامپیوتر و انفورماتیك» در سال سوم دبیرستان برای رشته ریاضی ـ فیزیك بطور آزمایشی در سال تحصیلی ۷۰ـ۶۹ در دبیرستانهای ویژه‌ای به اجرا درآمده است.

اهداف کلی آموزش عبارتند از:

۱ـ آشنائی با مفاهیم کامپیوتر و انفورماتیك

۲ـ پرورش مهارتها در خصوص استفاده از کامپیوتر به عنوان ابزاری در حل مسائل

۳ـ شناخت اجزاء تشکیل دهندهٔ یك سیستم کامپیوتری

۴ـ آشنائی با کاربرد کامپیوتر در اقتصاد و صنعت

۵ـ آگاهی از اثرات تکنولوژی

کامپیوتر در جامعه و مشاغل
۶ـ شناخت تأثیر کامپیوتر در تحول تکنولوژی
۷ـ اطلاع ازتوانائیهاو محدودیت‌های کامپیوتر

در مورد شناسائی مهارتها، دانش‌آموز چگونگی برخورد باموضوعات زیر را خواهد آموخت:
۱ـ تحلیل یك مسئله به‌صورت مجموعه‌ای از خواسته‌ها با شیوه بالا به پائین و شیوهٔ سلسله‌مراتبی
۲ـ قدمهای لازم برای حل مسائل
۳ـ تهیه برنامه کامپیوتری با استفاده از تکنیك‌های برنامه‌نویسی
۴ـ روش بهره‌برداری و کار با سیستم‌های کامپیوتری و وسائل جانبی آنها

در مورد توانائی، دانش‌آموز به انجام امور زیر قادر خواهد شد:
۱ـ بیان مفاهیم اساسی کامپیوتر و انفورماتیك
۲ـ بیان نحوهٔ ارتباط قسمتهای اساسی کامپیوتر
۳ـ کار کردن با یك سیستم ریز کامپیوتر
۴ـ طراحی یك برنامه کاربردی و اجرای آن
۵ـ بکارگیری روشهای صحیح برنامه‌نویسی و تنظیم مدارك
۶ـ پیگیری مراحل حل مسائل
۷ـ بیان اثرات علوم ریاضی در کامپیوتر

الگوی آموزشی

فعالیت ایجاد کارگاه، با ۲۴ کارگاه آموزشی (بعلت هماهنگی فعالیت در ۲۴ استان کشور)، شروع و بعد از سه سال اول به ۳۰۰ کارگاه (بعلت ایجاد حداقل یك کارگاه آموزشی در هر شهرستان)، افزایش می‌یابد و در مرحله نهائی در نظر است در کلیه دبیرستانهائی که رشتهٔ ریاضی ـ فیزیك دارند (برای حدود ۸۰۰ دبیرستان)، کارگاه ایجاد گردد.

در هر کارگاه، ۱۰ عدد ریز کامپیوتر جهت کار عملی بهمراه آموزش نظری برای استفادهٔ دو دانش‌آموز از هر دستگاه و حداقل دو ساعت کار نظری و کارگاهی درهفته، به‌انضمام یك دستگاه مادر جهت مربی، تأمین خواهد شد، که این ۱۱ دستگاه بر روی یك شبکهٔ محلی قرار می‌گیرند.

در مورد طرح تهیه کتاب درسی، برای درس مبانی کامپیوتر و انفورماتیك یك کتاب درسی برای دانش‌آموز و یك کتاب راهنمای معلم تألیف می‌شود.

در مورد آموزش دبیران، بازآموزی و نوآموزی دبیران ریاضی در تهران و مراکز استانها پس از مرحله تألیف کتابها، در تابستانها در دوره‌های ۲۰۰ ساعته بعمل می‌آید.

مطلب آموزشی

از این پس سعی براین است که در هر شمارهٔ مجله رشد، یکی از مطالب کامپیوتری به‌خوانندگان عزیز آموزش داده شود. در این شماره، به تعریف الگوریتم و مثالهایی دربارهٔ آن می‌پردازیم.

الگوریتم

کلمهٔ «الگوریتم» از نام خوارزمی، دانشمند بزرگ قرن نهم میلادی، که نامش به‌معنی «اهل خوارزم» است، گرفته شده است.

لذا، بهتر است اندکی اطلاعات در مورد این دانشمند نامی داشته باشیم:
دربارهٔ زندگی خوارزمی چیز زیادی نمی‌دانیم. نام کامل وی به عربی در واقع یك زندگینامه فشرده است: «ابوجعفر محمدبن موسی الخوارزمی» یعنی «محمد، پدر جعفر، پسر موسی، اهل خوارزم». درخشش خوارزمی در سالهای ۸۱۳ و ۸۴۶ میلادی بوده‌است.

بهر حال واضح است که کارهای خوارزمی تأثیر بسیاری بر نسلهای بعدی وی داشته است. در زمان حیات خوارزمی و بعد از آن، مردم به جدولهای او اطمینان داشته‌اند. برخی از کتابهایی که او نوشته مفقود شده است. از جمله کتابی تاریخی در گاهشماری و آثاری در مورد ساعت خورشیدی و اسطرلاب. وی نقشه‌ای از جهان تهیه کرد (که هنوز هم موجود است) و در آن، مختصات جغرافیایی شهرها، کوهها، رودها، و ساحلها را تعیین کرد. این نقشه کاملترین و دقیقترین نقشه‌ای است که تا آن زمان تهیه شده است. او همچنین رساله‌ای کوتاه در مورد تقویم یهودی نوشت و جدولهای مفصل نجومی تهیه کرد که صدها سال از آنها استفاده می‌شد.

مهمترین کار خوارزمی به‌ظن غالب کتابهای وی دربارهٔ جبر و حساب است، که ظاهراً اولین آثار عربی در این مقولات به‌شمار می‌رود. کتاب جبر وی از شهرت ویژه‌ای برخوردار است و در واقع، حداقل سه نسخه از این کتاب به زبان اصلی عربی هنوز هم باقی است.

در واقع کلمهٔ algebra از بخشی از عنوان کتاب خوارزمی، کتاب الجبر و المقابله، گرفته شده است. با نگاهی دقیقتر به کتاب جبر خوارزمی می‌توان به‌علت موفقیت وی پی برد. (هدف این کتاب جمع‌آوری تمام دانش موجود در موضوع جبر نیست، بلکه هدف آن، ارائهٔ «ساده‌ترین و مفیدترین» عناصر جبر است، یعنی ارائه آن‌گونه ریاضیاتی که معمولا بکار می‌آید.) تا وقتی اثر قدیمیتری پیدا نشود که معلوم کند، خوارزمی رهیافت خود به جبر را از دیگری فرا گرفته است، این ملاحظات ما را مجاز می‌دارد که او را «پدر جبر» بخوانیم. به‌زبان‌دیگر، می‌توانیم عبارت «ابوالجبر» را نیز به‌نام وی بیفزائیم!

حال به تعریف «الگوریتم» و مثال‌هایی در این مورد می‌پردازیم:
دانلدکنوت، یکی از مشهورترین

عالمان کامپیوتر عصر ما می‌گویند، الگوریتم دربرگیرندهٔ تمام مفهوم‌هایی است که در فرآیندهای خوش‌تعریف مطرح‌اند، از جمله، ساختار داده‌هایی که روی آنها عمل می‌شود و نیز ترتیب عملیاتی که انجام می‌شود. اما بعضیها الگوریتم را صرفاً روشهای مختلفی می‌دانند که برای حل مسائل خاص بکار می‌روند، تقریباً مثل هر یک از قضایای ریاضی. و به عقیدهٔ وی، علم کامپیوتر عمدتاً همان مطالعهٔ الگوریتمهاست.

نوشتن الگوریتم بیان راه‌حل مسئله است که باید در نهایت از طریق یک زبان کامپیوتری به کامپیوتر داده شود تا پاسخ آن دریافت گردد. اما نکته مهم درک مسئله و یافتن راه‌حل آن در قالب یک مدل ریاضی است، بهمین دلیل مسئله امروز بستر درسهای مهارتی کامپیوتر است.

تقریباً هر فرآیندی را می‌توان بصورت یک الگوریتم بیان کرد. به عنوان مثال برای تهیه چای می‌توان آن را بصورت مراحل عملیاتی و تصمیم‌گیری ساده زیر بیان کرد. در واقع هر کار پیچیده‌ای که انسان آن را انجام می‌دهد نیز می‌تواند به مراحل ساده‌تر و کوچکتری شکسته شود و اجرای این مراحل ساده‌تر و کوچکتر است که بالاخره به حل مسئله پیچیده منجر می‌شود. مثلا می‌توان الگوریتم زیر را برای تهیه چای نوشت:

۱ـ شروع
۲ـ سماور را پر از آب کنید
۳ـ سماور را روشن کنید
۴ـ منتظر بمانید
۵ـ آیا آب داخل سماور بجوش آمده است؟ اگر بلی به مرحلهٔ ۶ و اگر خیر به مرحله ۴ بروید
۶ـ قدری چای خشک در قوری بریزید
۷ـ قوری را از آب جوشیده سماور پر کنید
۸ـ قوری را روی سماور بگذارید
۹ـ منتظر بمانید
۱۰ـ آیا چای دم کشیده است؟ اگر بلی به مرحله ۱۱ و اگر خیر به مرحله ۹ بروید
۱۱ـ فنجانها را تا نیمه از چای قوری پر کنید
۱۲ـ بقیه حجم فنجانها را از آب جوشیده سماور پر کنید
۱۳ـ چای را بین مهمانها توزیع کنید
۱۴ـ پایان

حال برای روشن شدن مطلب، به بررسی مثال دیگری می‌پردازیم:

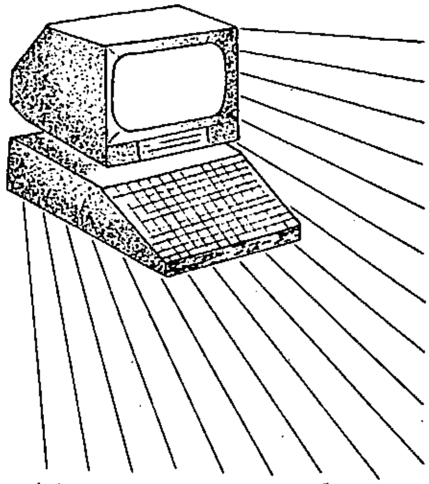
فرض کنید، عددی صحیح بین ۱ تا ۱۰۰۰ در نظر گرفته شده، می‌خواهیم این عدد را حدس بزنیم، یک راه این است که از عدد ۱ شروع کرده و یکی یکی به آن اضافه کنیم تا به عدد مطلوب برسیم. الگوریتم این روش بصورت زیر است:

۱ـ شروع
۲ـ I←۱ (I را یک قرار بده)
۳ـ آیا I همان عدد مورد نظر است؟ اگر بلی، I را بنویس و به ۶ برو، در غیر اینصورت مرحلهٔ بعدی را اجرا کن
۴ـ اگر I > ۱۰۰۰ عملیات‌را متوقف کن، در غیر اینصورت مرحلهٔ بعدی را اجرا کن
۵ـ I←I + ۱ (به I یکی اضافه کن)، و به مرحلهٔ ۳ برگرد.
۶ـ پایان

این روش برای حالتی که عدد مورد نظر، کوچک باشد، ممکن است روش خوبی باشد، ولی اگر عدد مورد نظر مثلا عدد ۹۹۹ باشد، این عملیات باید ۹۹۹ بار تکرار شوند که در آن‌صورت، روش فوق، روش خوبی بنظر نمی‌آید.

راه‌حلهای دیگری نیز وجود دارد. بهترین راه حل و در نتیجه بهترین الگوریتم، الگوریتمی است که دارای خصوصیات زیر باشد،

آ ـ ساده بودن و قابل فهم بودن الگوریتم



ب ـ کم بودن نسبی حجم عملیاتی آن

ج ـ کم بودن نسبی تعداد متغیرهای بکار رفته در آن

بدین ترتیب الگوریتم زیر را برای این مثال می‌نویسیم که در آن عملیات، به‌مراتب کمتر از عملیات‌الگوریتم اول است.

۱ـ شروع
۲ـ L←۱ و K←۱۰۰۰ (ابتدا و انتهای بازه را به‌ترتیب ۱ و ۱۰۰۰ انتخاب کن)
۳ـ M←(K + L) / ۲ (وسط بازه را پیدا کن. M جزء صحیح تقسیم است)
۴ـ آیا عددی که در نظر گرفته‌اید:
برابر M است؟ در اینصورت M را بنویس و عملیات را متوقف کن
کوچکتر از M است؟ در اینصورت K←M − ۱ عملیات را از دستورشمارهٔ ۵ ادامه بده
بزرگتر از M است؟ در اینصورت L←M + ۱
۵ـ اگر L از K بزرگتر نیست عملیات را از دستور شمارهٔ ۳ ادامه بده
۶ـ پایان

الگوریتم فوق را با در نظر گرفتن یک عدد تست کنید. آیا این ساده‌ترین الگوریتم است؟

حال که تا حدودی با نوشتن‌الگوریتم آشنا شدید، می‌توانید بسیاری از

کارهای روزمرهٔ خود را به صورت الگوریتمی بیان نمائید. برای تمرین بیشتر، سعی کنید بهترین الگوریتم را با ویژگیهایی که ذکر شد، برای موارد زیر بنویسید:

۱ــ فرض کنید برای رفتن به‌جائی می‌خواهید سوار تاکسی شوید، کارهایی را که در مراحل مختلف باید انجام دهید، به صورت یك الگوریتم بیان کنید.

۲ــ فرض کنید، می‌خواهید نحوهٔ استفاده از تلفن عمومی (فقط گرفتن یك شمارهٔ تلفن) را شرح دهید، مراحل کار را بصورت یك الگوریتم بیان‌کنید.

۳ــ فرض‌کنید، دریك‌کتاب راهنمای تلفن، می‌خواهید کوچکترین شماره تلفن را تعیین کنید، مراحل کار را بصورت یك الگوریتم بیان کنید.

(جواب این تمرینها در شماره‌های بعدی رشد ریاضی، چاپ خواهد شد.)

مراجع

۱ــ آشنائی با کامپیوتر و انفورماتیك، تالیف خانم دکتر صحت نیاکی و آقای دکتر بابلیان

۲ــ الگوریتم نویسی چیست؟، آقای ابطحی ــ مرکز آموزش انفورماتیك، شمارهٔ ۳

۳ــ آشنائی با کامپیوتر، تالیف‌دکتر بهروز پرهامی

۴ــ نشر ریاضی، سال ۱، شمارهٔ ۲، آذر ۱۳۶۷، مقاله‌ای تحت عنوان «الگوریتم در ریاضیات جدید و علم کامپیوتر»

۵ــ مقدمات کامپیوتر و برنامه‌سازی فرترن، تالیف دکتر محمود نقیب‌زاده

معرفی کتاب:

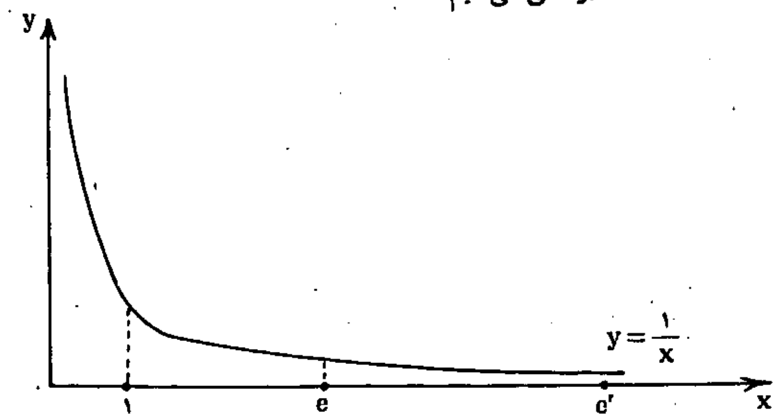
برای مطالعهٔ بیشتر در مورد کامپیوتر شما می‌توانید از کتابهای معرفی شدهٔ زیر، استفاده نمائید:

مبانی کامپیوتر و برنامه‌ریزی‌بخش ۱ و ۲، تالیف کامران فیض (دو جلد)

خاصیت‌های هفتگانه تابع $f(x)=\frac{1}{x}$

غلامرضا کریم‌پور

با رسم تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ درفاصله $x>0$ به‌ترتیب خواص زیر را بررسی می‌کنیم.



اولاً مساحت زیرمنحنی $f(x)=\frac{1}{x}$ درفاصلهٔ $I_n=[e^{n-1}, e^n]$ به‌ازای هر $n\in N$ همواره یك است

$$\int_{e^{n-1}}^{e^n}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_{e^{n-1}}^{e^n}=n-(n-1)=1$$

ثانیاً برای تعیین نوع سری همساز $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ می‌توانیم از آزمون انتگرال‌کمك بگیریم برای‌این منظوراز تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ انتگرال میگیریم

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{n\to\infty}\ln x\Big|_{1}^{n}=\infty$$

که نشان‌می‌دهد سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست، به عبارت دیگر سطح

زیرمنحنی $f(x)=\frac{1}{x}$ درفاصله $(1, +\infty)$ بینهایت است.

همچنین طول I_n بتدریج زیاد و عرض نقاط آن بهمان نسبت‌کم میگردد به‌طوریکه اگر I_n و I_m دوقطعه دلخواه باشد با شرط $m>n$ و l_n طول I_n و k_n عرض متوسط نقاط آن داریم:

طول I_n $\quad l_n = e^n - e^{n-1} = e^{n-1}(e-1)$

عرض متوسط نقاط I_n $\quad k_n = \dfrac{\frac{1}{e^n}-\frac{1}{e^{n-1}}}{2} = \dfrac{1+e}{2e^n}$

مساحت متوسط بین I_n ومنحنی $f(x)=\frac{1}{x}$

$$\overline{S_n} = l_n k_n = \frac{e^{n-1}}{2e^n}(e^2-1) = \frac{e^2-1}{2e}$$

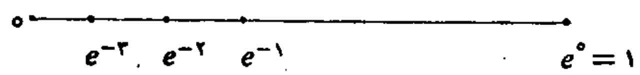
ملاحظه میگردد مساحت متوسط درهر زیرفاصله ثابت ومستقل از n است

$$\overline{S_n}=\overline{S_m} \Rightarrow l_n k_n = l_m k_m \Rightarrow \frac{l_n}{l_m}=\frac{k_m}{k_n}$$

رابطه فوق نشان میدهد که درهردو زیرفاصله دلخواه نسبت‌طول زیرفاصله‌ها برابر عکس نسبت عرضهای متوسطه نقاط آنها میباشد

ثالثاً: اگر تغییرات تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در فاصله $(0, 1)$ هم بررسی کنیم همان خواص ملاحظه میگردد یعنی رفتار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در فواصل $(0, 1)$ و $(1, +\infty)$ مانند هم میباشند

برای این منظورفاصله $I'_n=(e^{-n}$ و $e^{1-n})$ که درآن $n\in N$ را درنظرمیگیریم



$$S'_n = \int_{e^{-n}}^{e^{1-n}} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{e^{-n}}^{e^{1-n}}$$
$$=(1-n)-(-n)=1$$

که نشان می‌دهد مساحت زیرمنحنی در I'_n همواره یک است همچنین در I'_n به‌تدریج عرضهای متوسط نقاط زیاد وطولها کم می‌گردد به‌طوریکه داریم

طول فاصله I'_n $\quad l'_n = e^{1-n}-e^{-n} = e^{-n}(e-1)$

عرض متوسط نقاط I'_n

$$k'_n = \frac{e^n+e^{-1+n}}{2} = e^{n-1}\frac{1+e}{2}$$

مساحت متوسط در I'_n $\quad S'_n=\dfrac{e^2-1}{2e}$

تعریف: دو زیرفاصله $I_n=(e^{n-1}$ و $e^n)$ و $I'_n=(e^{-n}$ و $e^{1-n})$ را معکوس همدیگر می‌نامیم. تحت تابع $y=\frac{1}{x}$

و درحالت کلی برای بدست‌آوردن معکوس $[a, b]$ تحت تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ کافی است $[f(b)\ f(a)]$ را حساب کنیم یعنی

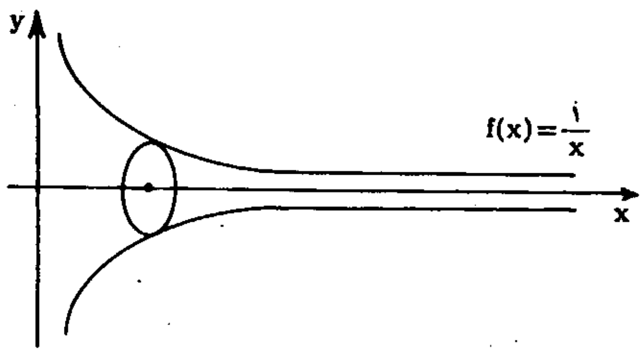
$$\left[\frac{1}{b} , \frac{1}{a}\right]$$

نتیجه. مساحت متوسطه هر دو زیرفاصله معکوس همنام برابرند.

رابعاً اگر منحنی $f(x)=\frac{1}{x}$ را حول محور xها دوران دهیم حجم حاصل از دوران درفاصله $(1, t)$. برابراست با

$$V=\pi\int_1^t \frac{dx}{x^2}=\pi\left(1-\frac{1}{t}\right)$$

واین مقداراز π کمتراست واگر $t\to+\infty$ آنگاه حجم برابر π وشکل حاصل به‌شیپور گابریل معروف‌است. Gabril's Horn (درصورتی که سطح زیرمنحنی نامتناهی می‌باشد)



خامساً درحل بعضی ازانتگرالهای‌ناسره ازتغییرمتغیر $f(x)=\frac{1}{x}$ استفاده می‌گردد.

اگر $I=\int_0^\infty \frac{\ln y}{1+y^2}dy$ آنگاه درمحاسبه I ترکیبات I را ظاهرمی‌سازیم.

$$\begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ dy=-\frac{dx}{x^2}\end{cases} \Rightarrow I=\int_\infty^0 \frac{-\ln\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{dx}{x^2} = -$$

پس $I=0$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx=-I$$

سادساً با کمك تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ ثابت می‌شود فاصله $[1,\infty)$ وفاصله $(0,1]$ با همدیگر معادلند. (دارای یك عدد اصلی می‌باشند.)

$$f:(0,1]\to[1,+\infty)$$

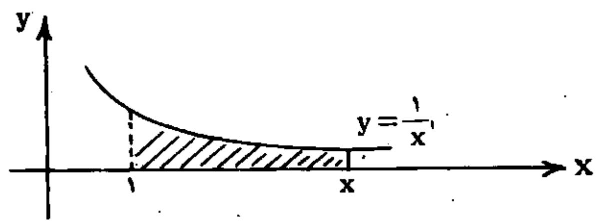
$$f(x)=\frac{1}{x}\qquad x\in(0,1]$$

تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ یك‌بیك وپوشا است پس تناظر یك‌بیك بین‌دو زیرفاصله برقراراست.

سابعاً با کمك تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ می‌توانیم لگاریتم طبیعی را تعریف وکلیه خواص‌آنرا بررسی کنیم.

خواص لگاریتم طبیعی

به کمك انتگرال لگاریتم طبیعی را بصورت زیر تعریف می‌کنیم



$$\ln x=\int_1^x \frac{dt}{t}$$

لگاریتم طبیعی. سطح زیرمنحنی $y=\frac{1}{x}$ درفاصله $(1,x)$ را لگاریتم طبیعی x می‌نامیم

خواص لگاریتم طبیعی:

الف: $\ln 1=0$

$$\ln 1=\int_1^1\frac{dt}{t}=0$$

ب: $\ln xy=\ln x+\ln y \qquad x,y>0$

$$\ln xy=\int_1^{xy}\frac{dt}{t}=\int_1^x\frac{dt}{t}+\int_x^{xy}\frac{dt}{t}=\ln x+I_1$$

$$I_1=\int_x^{xy}\frac{dt}{t}\quad \text{تغییر متغیر}\begin{cases}t=xu\\ dt=xdu\end{cases}$$

$$I_1=\int_1^y\frac{xdu}{xu}=\int_1^y\frac{du}{u}=\ln y$$

$$\Rightarrow \ln xy=\ln x+\ln y \quad \blacktriangle$$

ج: $\ln\frac{1}{x}=-\ln x$

اگر در رابطه (ب) قرار دهیم $y=\frac{1}{x}$ داریم

$$\ln 1=\ln x+\ln\frac{1}{x}\Rightarrow \ln\frac{1}{x}=-\ln x \quad \blacktriangle$$

د: $\ln\frac{x}{y}=\ln x-\ln y$

$$\ln\frac{x}{y}=\ln x\cdot\frac{1}{y}=\ln x+\ln\frac{1}{y}=\ln x-\ln y \quad \blacktriangle$$

ه: $\ln x^n=\int_1^{x^n}\frac{dt}{t}\quad\begin{cases}t=u^n\\ dt=nu^{n-1}du\end{cases}$

$$\ln x^n=\int_1^x\frac{nu^{n-1}du}{u^n}=n\int_1^x\frac{du}{u}=n\ln x$$

و: لگاریتم درمبنای a را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\log_a^x=\frac{1}{\ln a}\int_1^x\frac{dt}{t}=\frac{\ln x}{\ln a}=\frac{\int_1^x\frac{dt}{t}}{\int_1^a\frac{dt}{t}}$$

نتیجه: دستور تغییرمبنا (ازمبنای a بەمبنای b)

$$\log_a^x=\frac{\log_b^x}{\log_b^a}$$

اثبات:

صورت مخرج را به $\ln b$ تقسیم می‌کنیم.

$$\log_a^x=\frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\Rightarrow \log_a^x=\frac{\frac{\ln x}{\ln b}}{\frac{\ln a}{\ln b}}=\frac{\log_b^x}{\log_b^a} \quad \blacktriangle$$

مرجع، حساب دیفرانسیل وانتگرال، تألیف ادوارد.

اثبات برخی پدیده‌های اعداد

محمدتقی دیبایی، عضو هیات علمی دانشگاه تربیت معلم

مقدمه. با توجه به [۳]، اگر ۱۴۲۸۵۷ را دراعداد

$$1\ ,\ 3\ ,\ 2\ ,\ 6\ ,\ 4\ ,\ 5 \qquad (1)$$

ضرب کنیم، به‌ترتیب، اعداد زیر به‌دست می‌آیند:

۱۴۲۸۵۷ , ۴۲۸۵۷۱ , ۲۸۵۷۱۴ , ۸۵۷۱۴۲ ,
۵۷۱۴۲۸ , ۷۱۴۲۸۵.

مشاهده می‌شود که ترتیب ارقام هریک از حاصلضربهای بالا یک جابگشت درارقام حاصلضرب قبلی است. عدد ۱۴۲۸۵۷ یک دورهٔ تناوب نمایش اعشاری کسر $\frac{1}{7}$ است و اعداد (۱) به‌ترتیب باقیمانده‌های تقسیم $\underline{7}\ 1$ در روند تعیین یک دورهٔ تناوب هستند. در [۳] وقوع این پدیده‌ها را درمثالهای دیگری مشاهده کردیم که براساس این مثالها، حدس زیر ارائه گردید.

اگر عدد طبیعی n با ۱۰ متباین باشد وخارج‌قسمت تقسیم ۱ بر n در یک دورهٔ تناوب مساوی

$$\overline{a_{r-1}\,a_{r-2}\cdots a_1\,a_0}$$

باشد، و b_1، b_2، ...، b_r بترتیب باقیمانده‌های تقسیمهای‌جزئی باشند، آنگاه

$$b_1\times\overline{a_{r-1}\,a_{r-2}\cdots a_0}=\overline{a_{r-2}\,a_{r-3}\cdots a_0\,a_{r-1}}$$

$$b_2\times\overline{a_{r-1}\,a_{r-2}\cdots a_0}=\overline{a_{r-3}\,a_{r-4}\cdots a_0\,a_{r-1}\,a_{r-2}}$$

$$\vdots$$

$$b_r\times\overline{a_{r-1}\,a_{r-2}\cdots a_0}=\overline{a_0\,a_{r-1}\,a_{r-2}\cdots a_2\,a_1}\,;$$

که درآن منظور از $\overline{a_{r-1}\,a_{r-2}\cdots a_1\,a_0}$ در مبنای اعشاری عبارت است

$$10^{r-1}a_{r-1}+10^{r-2}a_{r-2}+\cdots+10a_1+a_0$$

و $0\leqslant a_i<10$ ، $0\leqslant i<r-1$ و $a_{r-1}\neq 0$.

دراین مقاله، حدس مذکور را درمبنایی دلخواه ثابت می‌کنیم.

فرض می‌کنیم N مجموعهٔ اعداد طبیعی و $a, b>1$ دو عدد طبیعی باشند وبزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b مساوی ۱ باشد. دربحث زیرنمایش اعداد طبیعی را درمبنای a به‌صورت

$$\overline{a_{r-1}\,a_{r-2}\cdots a_1\,a_0}$$

می‌نویسیم که عبارت است از $\sum_{i=0}^{r-1}a^ia_i$، که در آن $0\leqslant a_i<a$، $0\leqslant i\leqslant r-1$ و $a_{r-1}\neq 0$.

اکنون یک دورهٔ تناوب نمایش کسر $\frac{1}{b}$ درمبنای a، و تعداد ارقام آن را مشخص می‌کنیم.

قضیه. درنمایش کسر $\frac{1}{b}$ درمبنای a، تعداد ارقام دورهٔ تناوب و عدد دورهٔ تناوب عبارتند از:

$s=\min\{i\in\mathrm{N}\ |\ b|a^i-1\}$, تعداد ارقام دورهٔ تناوب

$A=\dfrac{a^s-1}{b}$ عدد دورهٔ تناوب

*برهان. بنابرقضیهٔ اویلر درنظریهٔ اعداد، داریم

$$b|a^{\varphi(b)}-1$$

که در آن $\varphi(b)$ تعداد اعضای مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \ldots, b\}$ است که با a متباین هستند. فرض می‌کنیم s کوچکترین عدد مثبتی باشد که $b|a^s-1$. دراین صورت داریم

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{a^s-1}{b}\cdot\frac{1}{a^{si}}=\frac{a^s-1}{b}\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{a^{si}}$$

$$=\frac{a^s-1}{b}\cdot\frac{\frac{1}{a^s}}{1-\frac{1}{a^s}}=\frac{1}{b}$$

لذا عدد $A=\dfrac{a^s-1}{b}$، شامل یک دورهٔ تناوب نمایش $\frac{1}{b}$ درمبنای a است. چون $A<a^s$، پس نمایش A درمبنای a حداکثر s رقم دارد.

از سوی دیگر، اگر نمایش $\frac{1}{b}$ درمبنای a به‌صورت

$$\frac{1}{b}=0/B'B'\ldots$$

باشد و B' دارای r رقم باشد، با اختیار

* برای درک شهودی قضیه می‌توان چند مثال را درمبنای ۱۰ را بررسی کرد.

$B=a^rB'=\overline{B_1\,B_2\,\cdots\,B_r}$، داریم

$$\frac{1}{b}=B\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{a^{ri}}=\frac{B}{a^r-1}\,.$$

از رابطهٔ فوق نتیجه می‌شود $bB=a^r-1$ درنتیجه $b|a^r-1$. ازاین رابطـه، با توجه به تعریف s، نتیجـه مـی‌شود $r=s$ و $A=B$. □

درقضیهٔ فوق، نمایش A، درمبنای a، را s رقمی می‌گیریم(+). برای این منظور می‌نویسیم

$$A=a^{s-1}A_{s-1}+a^{s-2}A_{s-2}+\cdots+aA_1+A_0\ ,$$
$$0\leqslant A_i<a\ ,\quad 0\leqslant i\leqslant s-1\ ,$$

که درآن iی هست بطوری که $0\leqslant i\leqslant s-1$ و $A_i\neq 0$ و $A_{i+1}=A_{i+2}=\cdots=A_{s-1}=0$.

(+) به بسط عـددهای $\frac{1}{11}$ و $\frac{1}{37}$ و $\frac{1}{77}$ توجه کنید؛

$$\frac{1}{37}=(0/\overline{027})_{10}\ ,\ \frac{1}{77}=(0/\overline{012987})_{10}\ ,$$
$$\frac{1}{11}=(0/\overline{0001011101})_2$$

اکنـون $A_{s-1}\ ,\ \ldots\ ,\ A_1\ ,\ A_0$ از الگـوریتم زیر بـدست می‌آیند:

*

$$(r_1=1)$$
$$ar_1=bA_{s-1}+r_2\ ,\quad 0<r_2<b,\ a\ ,\quad 0\leqslant A_{s-1}<a\ ,$$
$$ar_2=bA_{s-2}+r_3\ ,\quad 0<r_3<b\ ,\quad 0\leqslant A_{s-2}<a\ ,$$
$$\vdots$$
$$ar_i=bA_{s-i}+r_{i+1}\ ,\quad 0<r_{i+1}<b\ ,\quad 0\leqslant A_{s-i}<a\ ,$$
$$\vdots$$
$$ar_{s-1}=bA_1+r_s\ ,\quad 0<r_s<b\ ,\quad 0\leqslant A_1<a$$
$$ar_s=bA_0+r'\ ,\quad 0<r'<b\ ,\quad 0\leqslant A_0<a.$$

برای آنکـه A یک دورهٔ تناوب باشد، لازم است ثـابت کنیم $r'=r_1=1$. این مطلب را می‌توان در زیرمشاهده کرد:

$$r'=ar_s-bA_0=a(ar_{s-1}-bA_1)-bA_0$$
$$=a^2r_{s-1}-b(aA_1+A_0)=$$
$$a^2(ar_{s-2}-bA_2)-b(aA_1+A_0)$$
$$=a^3r_{s-2}-b(a^2A_2+aA_1+A_0)$$
$$\vdots$$
$$=a^sr_1-b(a^{s-1}A_{s-1}+a^{s-2}A_{s-2}+\cdots+aA_1+A_0)$$
$$=a^s-b.\frac{a^s-1}{b}=1=r_1\,.$$

حال به‌اثبات ادعای خود می‌پردازیم. یعنی ثابت می‌کنیم

$$r_1\times\overline{A_{s-1}A_{s-2}\cdots A_0}=\overline{A_{s-1}A_{s-2}\cdots A_1\,A_0}$$
$$r_2\times\overline{A_{s-1}A_{s-2}\cdots A_0}=\overline{A_{s-2}A_{s-3}\cdots A_1A_0\,A_{s-1}}$$
$$\vdots$$
$$r_i\times\overline{A_{s-1}A_{s-2}\cdots A_0}=$$
$$\overline{A_{s-i}\,A_{s-i-1}\cdots A_1A_0A_{s-1}\cdots A_{s-i+1}}.$$
$$\vdots$$

برای این منظور از الگـوریتم (*) استفاده می‌کنیم و r_i را بر حسب $A_{s-1}\ ,\ A_{s-2}\ ,\ \ldots\ ,\ A_{s-i+1}$ بدست می‌آوریم. داریم

$$r_i=ar_{i-1}-bA_{s-i+1}$$
$$=a(ar_{i-2}+bA_{s-i+2})-bA_{s-i+1}$$
$$=a^2r_{i-2}-b(aA_{s-i+2}+A_{s-i+1})$$
$$\vdots$$
$$=a^{i-1}-b\sum_{j=1}^{i-1}a^{j-1}A_{s-i+j}\,.$$

بالاخره، خواهیم داشت:

$$r_i\times\overline{A_{s-1}A_{s-2}\cdots A_0}$$
$$=(a^{i-1}-b\sum_{j=1}^{i-1}a^{j-1}A_{s-i+j})\sum_{t=0}^{s-1}a^tA_t$$
$$=\sum_{t=0}^{s-1}a^{t+i-1}A_t-b\ \frac{a^s-1}{b}\sum_{j=1}^{i-1}a^{j-1}A_{s-i+j}$$
$$=\sum_{t=0}^{s-1}a^{t+i-1}A_t-\sum_{j=1}^{i-1}a^{j-1+s}A_{j+s-i}+\sum_{j=1}^{i-1}a^{j-1}A_{j+s-i}$$
$$=\sum_{j=0}^{s-1}a^{j+i-1}A_j-\sum_{j=s-i+1}^{s-1}a^{j+i-1}A_j+$$
$$\sum_{j=s-i+1}^{s-1}a^{j+i-s-1}A_j$$
$$=\sum_{j=0}^{s-i}a^{j+i-1}A_j+\sum_{j=s-i+1}^{s-1}a^{j-(s-i+1)}A_j$$
$$=\overline{A_{s-i}\,A_{s-i-1}\cdots A_0\,A_{s-1}\cdots A_{s-i+2}A_{s-i+1}}$$

مراجع

[1] Henry Boners & Joan E. Bowers , Arithmetical Excursions, Dover, 1961

[۲] محمدتقی دیبایی، نمایش اعشاری کسرهای متعارفی، رشد ریاضی ۱۵

[۳] محمدتقی دیبایی، شگفتیهای اعداد، رشد ریاضی ۱۶.

بحثی در باب چند ضلعیهای محیطی

حسین کریمی - دبیر ریاضی منطقه ۱۳ آموزش و پرورش تهران

مسئله. بر دایره‌ای به شعاع واحد، یک n ضلعی، محیط کرده‌ایم، حداقل مقدار حاصلضرب اضلاع n ضلعی را به دست آورید.

قبل ازآنکه به حل مسئله بپردازیم، چند لم را ثابت می‌کنیم.

لم ۱. به‌ازاء هر x و y اگر $0<x, y<\frac{\pi}{2}$، آنگاه

$$\sin x \sin y \leqslant \sin^2\frac{x+y}{2} \quad \text{(الف)}$$

$$\cos x \cos y \leqslant \cos^2\frac{x+y}{2} \quad \text{(ب)}$$

برهان. واضح است که

$$(1)\quad \cos(x-y) \leqslant 1 = \sin^2\frac{x+y}{2} + \cos^2\frac{x+y}{2}$$

با اضافه کردن $\sin^2\frac{x+y}{2} - \cos^2\frac{x+y}{2}$ برطرفین نامساوی (۱)، نامساوی (الف) حاصل می‌شود؛ زیرا،

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) \leqslant 2\sin^2\frac{x+y}{2}$$

$$\sin x \sin y \leqslant \sin^2\frac{x+y}{2} \blacksquare$$

با اضافه کردن $\cos^2\frac{x+y}{2} - \sin^2\frac{x+y}{2}$ برطرفین نامساوی (۱)، نامساوی (ب) حاصل می‌شود؛ زیرا،

$$\cos(x-y) + \cos(x+y) \leqslant 2\cos^2\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x \cos y \leqslant \cos^2\frac{x+y}{2} \blacksquare$$

لم ۲. تابع کتانژانت درناحیه اول، یعنی، در $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ محدب است.

به‌عبارت دیگر؛ به‌ازای هر x و y از $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$، داریم

$$2\operatorname{cotg}\frac{x+y}{2} \leqslant \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y.$$

برهان. طرفین نامساوی الف (لم ۱) را در $2\cos\frac{x+y}{2}$ ضرب می‌کنیم وچون درناحیه اول نسبتهای مثلثاتی مثبت هستند، داریم

$$\frac{2\cos\frac{x+y}{2}}{\sin\frac{x+y}{2}} \leqslant \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}$$

$$2\operatorname{cotg}\frac{x+y}{2} \leqslant \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y \blacksquare$$

لم ۳. اگر A و B و C سه زاویه باشند بطوری که $0 \leqslant A, B, C \leqslant \pi$، آنگاه

$$\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \leqslant \sin^3\frac{A+B+C}{3}$$

برهان. با توجه به نامساوی الف در لم ۱ به‌ازاء x و y اگر $0<x<\pi$، داریم

$$\sin A \cdot \sin B \leqslant \sin^2\frac{A+B}{2}$$

$$\sin C \cdot \sin D \leqslant \sin^2\frac{C+D}{2}$$

ازضرب طرفین متناظر دونامساوی دریکدیگر داریم (چون‌طرفین نامساویها نامنفی است.)

$$\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot \sin D \leqslant \sin^2\frac{A+B}{2}\sin^2\frac{C+D}{2}$$

$$\leqslant \sin^4\frac{A+B+C+D}{4}$$

بدون آنکه خللی در کلیت برهان وارد شود، با انتخاب $D=\frac{A+B+C}{3}$، داریم:

$$\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot \sin\frac{A+B+C}{3}$$

$$\leqslant \sin^4\frac{A+B+C}{3}$$

چون $\sin \frac{A+B+C}{3}$ مثبت است داریم

$$\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \leqslant \sin^3 \frac{A+B+C}{3}$$

به‌عنوان تمرین، قضیهٔ زیر را ثابت کنید.

قضیه ۱. اگر A_i $(i=1, 2, \dots, n)$ زاویه‌ای بین ۰ و π باشد. آنگاه:

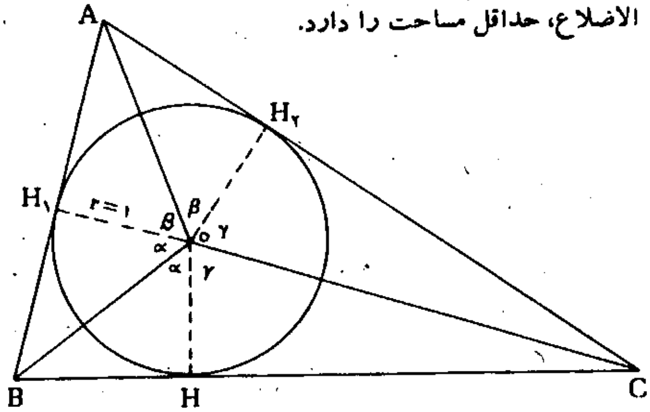
$$\prod_{i=1}^{n} \sin A_i \leqslant \sin^n \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i}{n}$$

نتیجه ۱. اگر A و B و C زاویه‌های یک مثلث باشند، آنگاه

$$\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \leqslant \sin^3 60^\circ$$

$$\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

لم ۴. دربین تمام مثلثهای محیط بر دایره‌ای، مثلث متساوی‌الاضلاع، حداقل مساحت را دارد.



برهان. جهت سهولت درکار شعاع دایرهٔ محاطی را واحد در نظرمی‌گیریم. می‌دانیم دراین‌حالت‌مساحت‌مثلث متساوی‌الاضلاع برابر $3\sqrt{3}$ است.

$$S_{ABC} = 2S_{BOH_1} + 2S_{AOH_2} + 3S_{COH}$$

(۱)

$$S_{ABC} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma$$

که درآن، $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

ابتدا، ثابت می‌کنیم که مقدار $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma$، با توجه به اینکه $0<\alpha,\ \beta$ و $\gamma<\frac{\pi}{2}$، دارای مینیموم است و از آنجا مینیموم، مساحت را به‌دست خواهیم آورد.

با توجه به [نامساوی ب لم ۱] و ضرب طرفین نامساوی در $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ با محاسبات مقدماتی، خواهیم داشت:

$$2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} \leqslant \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$$

حال با توجه به‌آنچه که در برهان لم ۳ دیده شد، رابطهٔ فوق برای چهار زاویه α و β و γ و γ' نیز برقرار است و به‌ازاء $\gamma' = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ داریم.

$$3\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \leqslant \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma$$

حال اگر $\alpha+\beta+\gamma=\pi$، خواهیم داشت:

$$3\operatorname{tg} 60^\circ \leqslant \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma$$

و با توجه به (۱) داریم: $S_{ABC} \geqslant 3\sqrt{3}$

در نتیجه، دربین‌مثلثهای‌محیط بریک‌دایره، مثلث متساوی‌الاضلاع، حداقل مساحت را دارد.

به‌عنوان تمرین قضیهٔ زیر را ثابت کنید.

قضیه ۲. دربین تمام n ضلعیهای محیط بریک دایره، n ضلعی منتظم، حداقل مساحت را دارد.

مسئله. ثابت کنید دربین مثلثهای محیط بریک دایره، حداقل مساحت، فقط وفقط، ازآن، مثلث متساوی‌الاضلاع است.

«مسئله فوق را برای n ضلعی‌های محیط بریک دایره، تعمیم دهید.»

با تعریف زیر و مقدمات لازم حل مسئله را به‌اتمام می‌رسانیم:

تعریف: فرض کنید A یک مجموعه از اعداد حقیقی باشد. a را مینیموم A خوانیم درصورتی که

۱) $a \in A$.

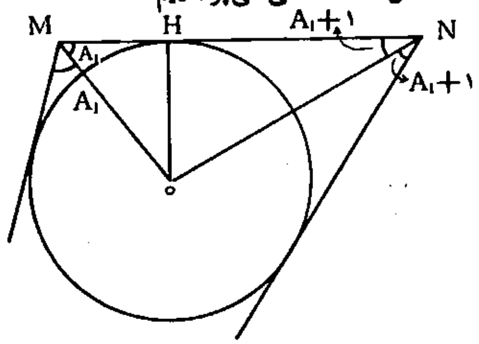
۲) به‌ازاء هر x از A، $a \leqslant x$.

اگر مجموعهٔ A دارای مینیموم باشد، همان عضو نقش اینفیموم را نیز بازی می‌کند اما وجود اینفیموم، وجود مینیموم را تضمین نمی‌کند.

برای مثال؛ در $[0, 1]$، ۰، هم مینیموم وهم اینفیموم است.

اما در $]0, 1]$ ۰، اینفیموم هست اما مینیموم نیست.

اینک به حل مسئله اصلی می‌پردازیم:



(الف)

فرض‌می‌کنیم اضلاع متوالی n ضلعی، به‌ترتیب، $a_1, a_2, \dots, a_n$ باشند و زوایای متوالی آن را با $2A_1$ و $2A_2$ و $\dots$ $2A_n$ نمایش می‌دهیم و با توجه به شکل (الف)، داریم:

$$a_i = MN = MH + HN = \operatorname{cotg} A_i + \operatorname{cotg} A_{i+1} \qquad (1)$$

فرض می‌کنیم

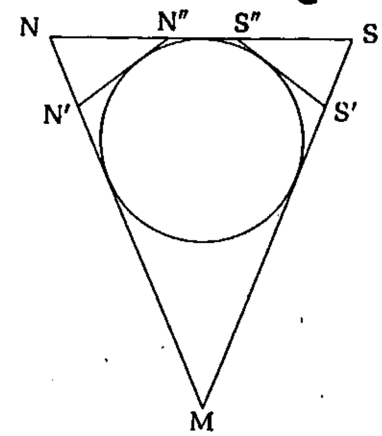
$$P \equiv \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} (\operatorname{cotg} A_i + \operatorname{cotg} A_{i+1})$$

که در آن، حاصلضربها و حاصلجمعها به‌صورت متـوالی روی i دوری هستند و $\sum_{i=1}^{n} A_i=(n-2)\frac{\pi}{2}$ کـه $A_i<\frac{\pi}{2}$. البتـه لازم به ذکراست که $A_{n+1}=A_1$.

ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که $n>4$.

با در نظرگرفتن دو زاویه متـوالی، بسیار نـزدیک به π، مانند زاویه‌هـای $2A_i$ و $2A_{i+1}$، خـواهیـم داشت: $A_i \to \pi/2$ و $A_{i+1} \to \pi/2$. لهذا با توجه به برابری (۱) اندازهٔ ضلـع a_i بسیار نزدیک به صفر خواهد بود.

«به عنوان مثال آنچه را که گفتیم برای‌حالت $n=5$ بررسی می‌کنیم. به‌شکل (ب) مراجعه کنید. درمثلث MNS، نقاط N' و S' را به‌ترتیب براضلاع MN و MS وبسیار نـزدیک به نقاط N و S درنظرمی‌گیریم و از آن نقـاط مماسهایی بر دایره رسم می‌کنیم تا ضلـع NS را به‌ترتیب درنقاط N'' و S'' قطع کند. حال در پنج ضلعـی $M N' N'' S'' S'$، هرچه نقـاط N' و S' به ترتیب به‌نقاط N و S نزدیک باشند، اندازهٔ دو زاویه متوالی N'' و S'' افزایش پیدا می‌کنند و به سمت π میل می‌نمایند و در این حالت اندازهٔ ضلع $N'' S''$ به‌صفر میل می‌کند.»



(ب)

پس، توجه داریم که برای حالت $n>4$، مقدار مینیموم موجود نیست یعنی به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم آن را کوچک کنیم.

(لازم به ذکر است که، صفر، یک کران پایین خواهد بود. یعنی حاصلضرب P، دراین حالت اینفیموم دارد، ولی مینیموم ندارد.)

اینک حالت $n=4$ را بررسی می‌کنیم.

برای این حالت داریم:

$$P=a_1 . a_2 . a_3 . a_4$$

با توجه به (۱) و لم ۲، داریم:

$$P\geq 16 \operatorname{cotg}\frac{A_1+A_2}{2} . \operatorname{cotg}\frac{A_2+A_3}{2} . \operatorname{cotg}\frac{A_3+A_4}{2} . \operatorname{cotg}\frac{A_4+A_1}{2}$$

ازطرف دیگر چون:

$$\frac{1}{2}(A_1+A_2+A_3+A_4)=\frac{\pi}{2}$$

پس:

$$\operatorname{cotg}\frac{A_1+A_2}{2} . \operatorname{cotg}\frac{A_3+A_4}{2}=1 \quad \text{و}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{A_2+A_3}{2} . \operatorname{cotg}\frac{A_4+A_1}{2}=1$$

بنابراین مقدار ذیل را بدست می‌آوریم:

$$a_1 . a_2 \ a_3 . a_4 \geq 16.$$

برای اینکه حاصلضـرب اضـلاع یك چهارضلعـی محیطـی بر دایره‌ای مینیموم شود، آن است که این چهارضلعی، مربع باشد. (قضیه ۲، را درحالت $n=4$ بررسی کنید.)

اینك حالت $n=3$ را بررسی می‌کنیم.

شروع‌کار را با دانستن نامساوی

$$(2)\quad (a_1 . a_2 . a_3)^2 \geq \left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^3$$

آغاز می‌کنیم، کـه در آن S مساحت مثلث است وتساوی وقتـی برقرار است که $a_1=a_2=a_3$. چون، $a_1 . a_2 . a_3=4RS$ و طبق قضیهٔ سینوسها: $a=2R\sin A$. (R شعـاع دایرهٔ محیطی مثلث است) وبا توجه به‌آنچه کـه گفته شد و نتیجه ۱، نامساوی (۲) به دست می‌آید.

تعبیر هنـدسی این نامساوی، این است که کوچکتـرین مساحت مثلث محیطی دریک دایره، مثلث متساوی‌الاضـلاع است که در لم ۴، بیان گردیده است.

حال با توجه به‌آنچه که در لم ۴ دیدیم، ($S_\Delta \geq 3\sqrt{3}$) داریم:

$$(a_1 . a_2 . a_3)^2 \geq 1728$$

$$a_1 . a_2 . a_3 \geq 24\sqrt{3}$$

بار دیگر یادآوری می‌کنیم کـه دراینجا تساوی تنها برای مثلث متساوی‌الاضلاع است. بالنتیجه، مینیموم برابراست با:

$$a_1 . a_2 . a_3 = 24\sqrt{3}.$$

جمع‌بندی:

الف) $n>4$ مقدارمینیموم موجود نیست.

ب) $n=4$ مقدارمینیموم برابر ۱۶ است.

ج) $n=3$ مقدارمینیموم برابر $24\sqrt{3}$ است.

مراجع

[1] MATHEMATICS MAGAZINE, VOL. 63, NO. 3, JUNE 1990.

۲ــ ماکزیمم و می‌نیمم (بدون استفاده ازمشتق) ایوان نیون– ترجمه، پرویز شهریاری و ابراهیم عادل.

آشنایی با نظریه انتگرال‌گیری و معرفی عدد e به کمک آن (۳)

جواد لالی

مقدمه: امروزه، در بسیاری از کشورها، در دورهٔ متوسطه، سعی بر آن دارند که احکام ریاضی را به‌صورت مفاهیم طولی بیان کنند و از اثبات دقیق ریاضی آن، که دانش‌آموز را دراستنتاجهای پیچیده منطقی درگیر می‌کند، صرفنظر می‌کنند. زیرا، شرایط سنی دانش‌آموز موجب می‌شود که او جویای کاربرد عملی مفاهیم ریاضی باشد. قضیه‌ها ابزار خوبی برای کاربرد عملی هستند.

بنابراین، روش‌ارائه مطالب در بعضی ازکشورها بدین‌صورت است که ابتدا مفاهیم اولیه و تعاریف را دقیقاً بیان می‌کنند. برای اینکه دانش‌آموزان درک شهودی ازمفهوم و تعاریف داشته باشند به‌ذکر چندین مثال متنوع می‌پردازند. سپس، قضیه‌ها و نتیجه‌های بعدی را بدون اثبات، ویا با اثبات شهودی، بیان می‌کنند. در ضمن؛ با توجه به‌آموزش حلزونی، اثبات دقیق قضیه‌های ارائه شده را در مقاطع تحصیلی بالاتر می‌آورند. ما نیز دراین مقاله چنین روشی را اتخاذ می‌کنیم. بسیاری از قضیه‌ها را بدون اثبات می‌آوریم و تنها آن دسته از قضیه‌ها و نتایج را ثابت می‌کنیم که اثبات آنها کوتاه و یا ساده باشد.

در دومقاله، ازشماره‌های قبل، سه بیان مختلف برای معرفی عدد e ارائه دادیم. دراینجا نیزمطالب‌را به‌گونه‌ای‌گردآورده‌ایم که عدد e را، متمایز از صورتهای قبل، معرفی می‌کند. انتخاب چنین روشی ما را به ذکر بسیاری ازقضیه‌های مهم هدایت می‌کند. اینگونه قضیه‌ها تکنیکهای بسیارمفیدی را جهت محاسبه انتگرالها ارائه داده، و به‌کارگیری آنها، کاربرد عملی انتگرالها راگسترش می‌دهد.

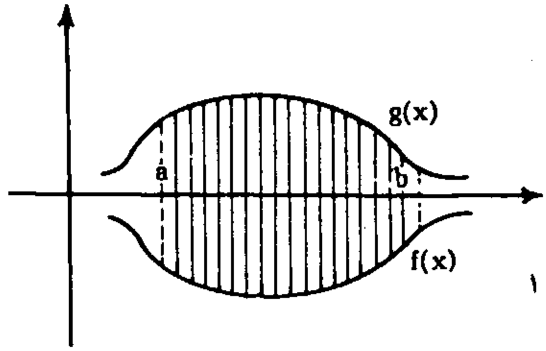
۱) **یادآوری:** درشماره ۱۹ و ۲۰ رشد آموزش ریاضی نظریه انتگرال‌گیری را مشروحاً بیان کردیم وانتگرال یك تابع را به کمك حاصلجمع مساحتهای مستطیلهای‌محاطی ویا محیطی تعریف نمودیم. فرض ما درآن مقاله این‌بوده است که تابع $y=f(x)$ بربازه $[a, b]$ پیوسته و نامنفی باشد، وبرای محاسبه سطح محصور بین منحنی و محورها بربازه مذکور، مقدارحد ذیل را محاسبه می‌کردیم

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x,$$

که درآن، $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ و c_k نقطه‌ای‌از زیربازه kام $[x_{k-1}, x_k]$ است. بنابراین،

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x \qquad *$$

حال اگر f بر بازه $[a, b]$ منفی باشد، عبارت تحت حاصلجمع فوق؛ یعنی، $f(c_k)\,\Delta x$، منفی است. بالنتیجه، مقدار انتگرال، یا سطح محصور، منفی خواهد شد. درچنین حالتی فرض می‌کنیم که $g(x)=|f(x)|$. نمودار منحنی g قرینه منحنی f نسبت به محور xها است وسطح زیرمنحنی آن، که در بالای محور xها قرار دارد، دقیقاً، برابرسطح زیرمنحنی f است‌که در زیرمحور xها واقع است.

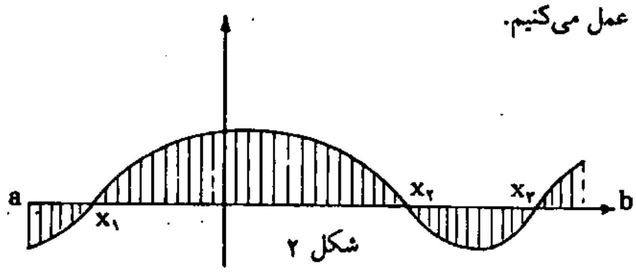


شکل ۱

بنا براین،

$$\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b |f(x)|dx=|\int_a^b f(x)\,dx|$$

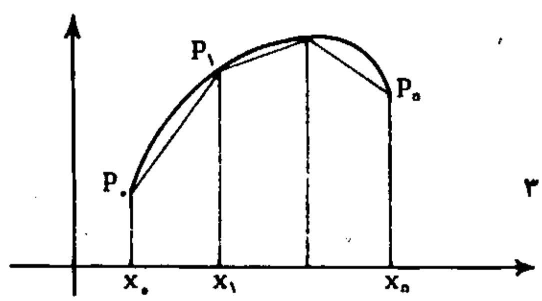
حال اگر قسمتهایی ازنمودار f دربالا وقسمتهایی از آن درپائین محور xها واقع شود، مساحتهای محصور در بالای محور xها مثبت و درپائین محور xها منفی است. درنتیجه، باید هریك از قسمتها را جداگانه محاسبه کرد. سپس، قدرمطلق آنها را برای محاسبه سطح محصور به‌کاربرد. به‌عنوان مثال، اگر بخواهیم مساحت سطح محصورمطابق شکل ۲ را محاسبه کنیم بدین‌صورت عمل می‌کنیم.



شکل ۲

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_a^{x_1} f(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx-\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx+\int_{x_3}^b f(x)\,dx$$

۱.۲ قاعده ذوزنقه برای تقریب انتگرال: اگر در محاسبه حاصلجمع رابطه (*) به‌جای‌مستطیلها ذوزنقه اختیارشود، روشی را ارائه می‌دهد که به‌قاعده ذوزنقه معروف است. برای بررسی این قاعده فرض کنیم x_0، x_1، . . . ، x_n همانهایی باشند که قبلاً تعریف شده‌اند. خطوط موازی محور yها، ازنقاط x_kها، ذوزنقه‌هایی تشکیل می‌دهند که مجموع مساحتهای آنها تقریبی برای سطح محصور به زیرمنحنی آن است.



شکل ۳

اگر مجموع مساحتهای این ذوزنقه‌ها را با نماد S_n نمایش‌دهیم، خواهیم داشت:

$$S_n=[f(x_0)+f(x_1)]\frac{\Delta x}{2}+[f(x_1)+f(x_2)]\frac{\Delta x}{2}+\cdots+[f(x_{n-1})+f(x_n)]\frac{\Delta x}{2}$$

با خلاصه‌کردن عبارت فوق، دستوری حاصل می‌شود که انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ را تخمین می‌زند. صورت این دستورچنین‌است:

$$S_n=[\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}f(x_n)]\,\Delta x.$$

به‌آسانی ثابت می‌شود که اگر n به‌قدر کافی بزرگ شود؛ یعنی، Δx به‌صفرمیل کند، S_n به‌مقدار واقعی انتگرال معین میل‌خواهد کرد. بنابراین،

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\int_a^b f(x)\,dx$$

میزان دقت تقریب را می‌توان به‌کمك روشهایی در ریاضیات پیشرفته‌تر (به‌کمك تعمیمی ازقضیه مقدار میانگین درمشتق) به دست آورد؛ یعنی، ثابت می‌شود که اگر f بر $[a, b]$ پیوسته و دارای مشتق مرتبه دوم بر (a, b) باشد، در این صورت، متناظر n مفروض، x_0ای بین a و b موجود است که

$$\int_a^b f(n)\,dx=S_n-\frac{b-a}{12}f''(x_0)\,(\Delta x)^2.$$

که اگر Δx به‌سمت صفر میل‌کند، جمله دوم عبارت سمت راست، که مقدار خطای تقریب است به صفر میل خواهد کرد. با تقریب کردن $f''(x_0)$ می‌توان میزان حدود خطا را محاسبه کرد. مقدار S_n تقریب خوبی برای انتگرال معین خواهد بود.

۳.۱ مثال: با استفاده ازقاعده ذوزنقه، به‌ازای $n=4$ و $n=8$، انتگرال $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ را تا چهار رقم اعشاری تخمین بزنید واین تخمین‌ها را با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید وحدود خطا را به‌دست‌آورید.

حل: برای تخمین با قاعده ذوزنقه، وقتی که $n=4$، به صورت ذیل عمل می‌کنیم:

$x_0=a=1$, $x_n=b=2$

$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{1}{4}$ $x_k=1+\dfrac{1}{4}k$

k	۰	۱	۲	۳	۴
x_k	۱	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{4}$
$f(x_k)=\frac{1}{x_k}$	۱	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$

فرض کنیم S_4 مقدار تقریبی انتگرال معین در اینحالت باشد بنابراین،

$$S_4=\Delta x\left[\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\frac{1}{2}f(x_4)\right]=\frac{1171}{1680}=0/6970$$

اینک حالتی را محاسبه می‌کنیم که $n=8$. در این حالت، $\Delta x=\frac{1}{8}$ و

k	۰	۱	۲	...	۷	۸
x_k	۱	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{8}$	...	$\frac{15}{8}$	$\frac{16}{8}$
$f(x_k)=\frac{1}{x_k}$	۱	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{10}$	...	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$

$$S_8=\frac{1000535}{1441440}=0/6941$$

هرچه n افزایش یابد، با محاسبه به روش فوق، عدد حاصل به مقدار واقعی انتگرال نزدیکتر می‌گردد. تکرار ارقامی که در محاسبات مختلف حاصل می‌شود همان ارقام عددی است که مقدار واقعی انتگرال را نشان می‌دهد. مثلاً، مقدار واقعی انتگرال تا دو رقم اعشاری ۰/۶۹ است. اگرمحاسبات را برای nهایی که به‌قدر کافی بزرگ باشند انجام دهیم، مقدار واقعی انتگرال، تاچهار رقم اعشاری، برابر ۰/۶۹۳۱ است. بنابراین، همان حالت $n=4$ دقیقاً مقدار انتگرال را تا دو رقم اعشار محاسبه می‌کند.

خطا درحالت اول ۰/۰۰۲۹−، و درحالت دوم ۰/۰۰۱۰− است. اگر n افزایش یابد مقدارخطا کاهش می‌یابد. با توجه به فرمول ارائه شده درحالت $n=4$ حدود خطا چنین است:

$$f(x)=\frac{1}{x},\quad f''(x)=\frac{2}{x^3},$$

$$-\frac{b-a}{12}f''(x)(\Delta x)^2=-\frac{1}{96x^3}.$$

که $1\leqslant x\leqslant 2$. بنابراین، مقدار خطای عددی بین ۰/۰۰۱۳− و ۰/۰۱۰۴− است.

وقتی که درمورد بازه بسته $[a, b]$ درانتگرال معین بحث می‌شود فرضمان این است که $a<b$. اما ممکن است که $a=b$ ویا در انتگرال معین $b<a$. اینک، تعریف انتگرال معین را به گونه‌ای تعمیم می‌دهیم که حالتهای فوق را شامل شود.

۴.۱ تعریف: فرض کنیم که f بر $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد. در این صورت،

$$\int_a^a f(x)dx=0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

دراینجا، بسیاری از خاصیتهای انتگرالها را، که بلافاصله از تعریف نتیجه می‌شود، ذکرمی‌کنیم.

۵.۱ قضیه: فرض کنیم f و g بربازه $[a, b]$ انتگرالپذیر باشند. دراین‌صورت،

(الف) به‌ازای هر A و B،

$$\int_a^b (Af(x)+Bg(x))\,dx=A\int_a^b f(x)\,dx+B\int_a^b g(x)\,dx.$$

(ب) اگر $a<c<b$،

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

(ج) اگر به‌ازای هر x از $[a, b]$، $f(x)\leqslant g(x)$ آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b g(x)\,dx$$

اثبات احکام فوق ساده و نتیجه مستقیم تعریف انتگرال معین است.

چون همواره $-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|$، بنابراین، نتیجه ذیل ازقضیه فوق (قسمت (ج)) حاصل می‌شود.

۶.۱ نتیجه: (الف) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\,dx$

(ب) اگر به‌ازای هر x از $[a, b]$، $m\leqslant f(x)\leqslant M$، آنگاه

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M(b-a).$$

(ج) اگر به‌ازای هر x از $[a, b]$، $f(x)\geqslant 0$، آنگاه $\int_a^b f(x)\,dx\geqslant 0$.

۲) قضیه‌های بنیادی درانتگرال‌ها

تعیین مقدار انتگرال معین به‌وسیله سریها کاری بس مشکل و در بعضی مواقع امکان‌پذیر نیست. زیرا، همیشه نمی‌توان حد یك حاصلجمع متناهی را محاسبه کرد. همانطور که می‌دانید روش دیگری برای محاسبه انتگرال معین یك تابع وجود دارد وآن‌از طریق تعیین تابع اولیه تابع است. اما چگونه می‌توان چنین ارتباطی را بین تابع اولیه یك تابع و انتگرال معین‌آن به کمك یك سری بیان کرد.

قضیه ذیل ثابت می‌کند که اگرتابع اولیه تابعی معلوم باشد به کمك‌آن می‌توان انتگرال معین آن تابع را محاسبه کرد.

۱.۲ قضیه (اولین قضیه اساسی حسابان)

اگر f بر $[a, b]$ پیوسته باشد و F تابع اولیه f براین‌بازه باشد،

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

اگرچه اثبات این قضیه چنـدان مشکـل نیست ولی ما جهت جلوگیری از اطاله کلام ازاثبات آن می‌گذریم. آنچه که در این قضیه مهم است این است که برای انتگرال معین تابع f نیاز به تابع اولیه آن است؛ یعنـی، دستیابی به تابعی مانند $F(x)$ که به‌ازای هر x ازبازه $[a, b]$، $F'(x) = f(x)$. اما، این خـود اتخاذ روش مبتنـی برعکس عمل مشتق‌گیـری است. چگـونه می‌توان به چنین توابعی‌دسترسی پیدا کرد؟ تنظیم جدولی ازاین گونه توابع، و ارائه روشهایی برای به‌دست آوردن تابع اولیه بعضی ازتوابع، موجب کاربرد عملی‌قضیه فوق می‌گردد. اما، در نظریه انتگرال‌گیری قضیه‌ای هست که وجود تابع اولیه را برای تمام توابع انتگرال‌پذیرثابت می‌کنـد. این قضیه که موسوم به دومین قضیه اساسی‌حسابان است مبنای خوبی برای تعمیم نظریه انتگرال‌گیری است. دراینجا، ما تنها به بیان صورت آن اکتفـا می‌کنیم و از اثبات آن می‌گذریم.

۲.۲ قضیه (دومین قضیه اساسی حسابان)

فرض کنید که f بربازه باز (a, b) انتگرال‌پذیر باشد و c نقطه دلخواهی ازاین بازه باشد. تابع F که با ضابطه

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

تعریف می‌شود براین بازه تابعی پیـوسته ومشتق‌پذیر است وبه ازای هر x ازاین بازه

$$F'(x) = f(x)$$

این قضیه تضمین می‌کندکه اگر f بریك بازه‌ای پیوسته باشد آنگاه f برآن بازه دارای تابع اولیه‌ای به‌صورت $\int_c^x f(t)dt$ است. بالعکس، اگرتابعی به‌صـورت انتگـرال، مطابق ضابطه فوق، تعریف شود، مشتق‌آن همان عبارت تحت انتگرال‌است.

۳.۲ مثال: مشتق تابع $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{t}\,dt$ را محاسبه کنید.

حل: فرض کنیم که $g(x) = x^2$ و $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$. دراین صورت،

$$F(x) = (f o g)(x)$$

بنابر دومین قضیه اساسی، وبا توجه به‌مشتق ترکیب‌توابع واینکه $f'(x) = \frac{1}{x}$، خواهیم داشت

$$F'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$$

$$= \frac{1}{x^2} \times 2x = \frac{2}{x}$$

همانطوری که دربالا متذکرشدیم، هدف اصلی در تکنیکهای انتگرال‌گیری ایجاد روشهایی برای محاسبه تابع اولیه یك تابع است. دو روش اساسی در تکنیکهـای انتگـرال‌گیری هست که دسترسی به توابع اولیه را آسان می‌کند. یکی انتگرال‌گیری به طریق جزء به جزء و دیگـری به روش جایگزینی. اینك به‌بررسی آنها می‌پردازیم.

اولین روش انتگرال‌گیری؛ یعنی، به‌طریق جزء به جزء، مبتنی برعکس مشتق‌گیری ازحاصلضرب دوتابع است که صورت دقیق حکم آن چنین است:

۴.۲ قضیه (انتگرال‌گیری به‌طریق جزء به جزء)

فرض‌کنیم f و g بربازه $[a, b]$ دارای مشتق پیوسته باشند. در این صورت،

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

برهان: چون f و g دوتابع مشتق‌پذیراند، پس بنابرقاعده مشتق حاصلضرب دوتابع

$$[f(x)\,g(x)]' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

از دوطرف رابطه فوق انتگرال می‌گیریم

$$\int_a^b [f(x)\,g(x)]'\,dx = \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,g(x)$$

با توجه به اولین قضیه اساسی حسابان، خواهیم داشت:

$$\int_a^b [f(x)\,g(x)]'\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b$$

$$= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a)$$

چون طرف اول تساویهای فوق یکسان است، پس طرف دوم نیز برابراست.

با مساوی قرار دادن دوطرف تساویهای فوق، وانتقال جمله‌ای‌از یك طرف به‌طرف دیگر، دستور فوق حاصل می‌شود.

دومین روش‌انتگرال‌گیری «روش جایگزینی» است. این‌روش نتیجه مستقیم مشتق ترکیب دوتابع است.

۵.۲ قضیه (انتگرال‌گیـری به‌روش جایگزینی، یا تغییر متغیر درانتگرال معین)

فرض کنیم g' بر بازه $[a, b]$ و f بر $g([a, b])$ پیوسته باشد، و $A = g(a)$ و $B = g(b)$. دراین صورت،

$$\int_A^B f(u)\,du = \int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx$$

برهان: فرض کنیم $u=g(x)$ و $F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ باشد. با توجه به قاعده مشتق تابع مرکب،

$$[F(u)]'=[F(g(x))]'=F'(g(x))\,g'(x)$$
$$=f(g(x))\,g'(x)$$

بنابراین، $F(g(x))$ تابع اولیه $f(g(x))\,g'(x)$ است. بنابراین، بنابراولین قضیه اساسی حسابان، خواهیم داشت.

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx=F(g(x))\Big|_a^b$$
$$=F(g(b))-F(g(a))$$
$$=F(B)-F(A)$$
$$=\int_A^B f(u)\,du$$

علت اینکه این طریقه انتگرال‌گیری به «روش جایگزینی» موسوم گردیده است به‌خاطر این است که متغیر u را با علامت جدید x عوض کرده‌ایم؛ یعنی، u را تابع جدیدی از x؛ $u(x)=g(x)$، قرار داده‌ایم وسپس عبارت $g'(x)\,dx$ را جانشین du کرده‌ایم تا دستور فوق پدید آمد.

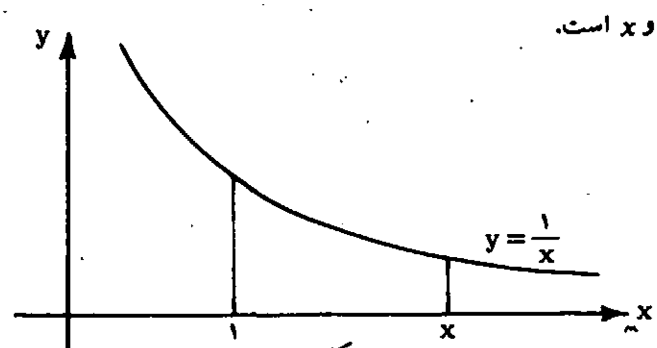
۳) لگاریتم طبیعی

توابعی که اکثر دانش‌آموزان بدان آشنا هستند توابع چند جمله‌ای، توابع گویا، وتوابع جبری هستند وبعد ازاینها توابع مثلثاتی هستند که کم و بیش بسیاری از خواص آنها مورد مطالعه قرارمی‌گیرد. دومین قضیه اساسی حسابان مبنای تعریف توابع جدیدی است که به‌کمک انتگرالها تعریف می‌شوند. یکی از این نوع توابع تابع لگاریتم طبیعی‌است‌که به‌صورت تابع‌انتگرالی تعریف می‌شود وعبارت تحت انتگرال آن تابع $\frac{1}{x}$ است.

۱.۳ تعریف: تابع لگاریتم طبیعی هرمجموعه اعداد حقیقی‌مثبت چنین تعریف می‌شود:

$$\ln(x)=\int_1^x\frac{1}{t}\,dt$$

درحقیقت، مقدار این تابع درهرنقطه x مثبت، همان مقدار سطح محصور به منحنی $y=\frac{1}{x}$ و محور xها بر بازه‌ای با دوانتهای ۱ و x است.



شکل ۴

ازتعریف فوق نتایج ذیل حاصل می‌شود

(الف) چون به‌ازای هر $x>0$ تابع $y=\frac{1}{x}$ پیوسته است. پس، این‌تابع برهربازه بسته‌ای با دوانتهای ۱ و x انتگرال‌پذیر است. بنابراین، قلمروی‌آن بازه $(0,\infty)$ است.

(ب) اگر $0<x<1$، بنابرتعریف ۴.۱، ونتیجه ۶.۱،

$$\ln(x)=\int_1^x\frac{1}{t}\,dt=-\int_x^1\frac{1}{t}\,dt$$

بنابراین، $\ln(x)<0$؛ اگر $x=1$ آنگاه $\ln(x)=0$؛ همچنین، اگر $x>1$ آنگاه $\ln(x)>0$.

(ج) بنابر «دومین قضیه اساسی‌حسابان»، $\ln(x)$ نیز $(0,x)$ پیوسته ومشتق‌پذیراست. بنابراین، به‌ازای $x>0$،

$$(\ln(x))'=\frac{1}{x}>0$$

ازاینجا نتیجه می‌شود که $\ln(x)$ تابعی صعودی است وچون

$$(\ln(x))''=-\frac{1}{x^2}<0$$

پس تقعرآن به سمت yهای منفی است.

اینک، می‌خواهیم خواص‌عمومی‌این تابع را به‌دست‌آوریم.

۲.۳ قضیه: فرض کنیم a و b اعداد حقیقی مثبت و r عدد حقیقی دلخواهی باشد. دراین‌صورت، احکام ذیل برقرارند:

(الف) $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$،

(ب) $\ln(a^r)=r\ln(a)$،

(ج) $\ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln(b)$،

(د) $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$،

برهان قسمت (الف)، بنابرقضیه ۵.۱،

$$\ln(ab)=\int_1^{ab}\frac{1}{t}\,dt=\int_1^a\frac{1}{t}\,dt+\int_a^{ab}\frac{1}{t}\,dt$$

اینک، درانتگرال دوم، با جانشین کردن $u=\frac{1}{a}t$، خواهیم‌داشت

$$du=\frac{1}{a}\,dt,$$

$$\int_a^{ab}\frac{1}{t}\,dt=\int_1^b\frac{1}{u}\,du=\ln b.$$

بنابراین،

$$\ln(ab)=\int_1^a\frac{1}{t}\,dt+\int_1^b\frac{1}{u}\,du=\ln(a)+\ln(b)$$

واین اثبات قسمت (الف) را تمام می‌کند.

اثبات (ب). اگر $r=0$ آنگاه حکم برقراراست. پس‌فرض کنیم $r\neq 0$. با جانشین کردن $t=u^r$، خواهیم داشت

$$dt = ru^{r-۱}du$$

$$\ln(a^r) = \int_۱^{a^r} \frac{۱}{t}\,dt = \int_۱^{a} \frac{۱}{u^r} \times ru^{r-۱}du =$$

$$r\int_۱^{a} \frac{۱}{u}du = r\ln(a)$$

حکم (ج) و (د) به‌کمك احکام (الف) و (ب) نتیجه‌می‌شود. زیرا،

$$\ln\left(\frac{۱}{b}\right) = \ln(b^{-۱}) = -\ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{۱}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{۱}{b}\right)$$

$$\left(\frac{۱}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

۳.۳ رسم نمودار تابع لگاریتمی

مقدار $\ln(x)$ را، به‌ازای $۰<x$، می‌توان به‌روش مستطیلهای محاطی یا محیطی‌ویا ازقاعده ذوزنقه و یا روشهای دیگری‌محاسبه کرد. همانطوری که درمثال ۳.۱ نشان دادیم، مقادیر $\ln(x)$، وقتی که $x = ۲^n$ $(n \in z)$، به‌صورت ذیل محاسبه می‌شود.

$$\ln(۲) \approx ۰/۶۹۳۱$$

$$\ln(۴) = \ln(۲^۲) = ۲\ln(۲) \approx ۱/۳۸۶۲$$

$$\ln(۸) = \ln(۲^۳) = ۳\ln(۲) \approx ۲/۰۷۹۳$$

$$\ln\left(\frac{۱}{۴}\right) = \ln(۲^{-۲}) = -۲\ln(۲) \approx -۱/۳۸۶۲$$

$$\ln\left(\frac{۱}{۸}\right) = \ln(۲^{-۳}) = -۳\ln(۲) \approx -۲/۰۷۹۳$$

بنابراین، اگربه‌ازای xای از $(۰, \infty)$ مقدار تابـع لگاریتمی معین باشد، تمام مقادیرتابع لگاریتمی، به‌ازای x^n، قابل‌محاسبه است. اطلاعات دیگـری که در رسم منحنی به ما کمـك می‌کند تعیین مقدارتابع است وقتی‌که x متعلق به یك همسایگی بینهایت ویا درهمسایگی صفرباشد. یعنـی، تعیین حـد $\ln(x)$، وقتی که $x \to +\infty$ یا $x \to ۰^+$. فرض کنیـم x به‌قدر کافی بزرگ باشد. بنابراین، عدد طبیعی مانند n هست که

$$۲^n \leqslant x < ۲^{n+۱}$$

چون $\ln(x)$ تابعی صعودی است، پس،

$$n\ln(۲) \leqslant \ln(x) \leqslant (n+۱)\ln(۲)$$

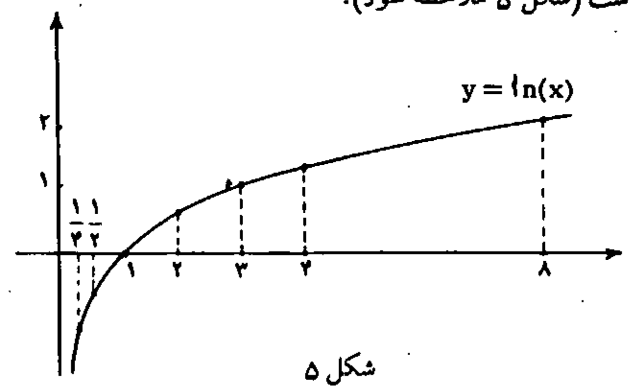
این نامساوی مقدارتقریبی برای لگاریتم است ومی‌تـوان مقدار آن را دربینهایت محاسبه کرد؛ یعنی،

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

برای محاسبه حد $\ln x$، وقتی که $x \to ۰^+$، چنین عمل‌می‌کنیم: فرض‌کنیم $u = \frac{۱}{x}$. دراین صـورت، اگر $x \to ۰^+$ آنگـاه $u \to +\infty$. بنابراین، بنابرقسمت قبل،

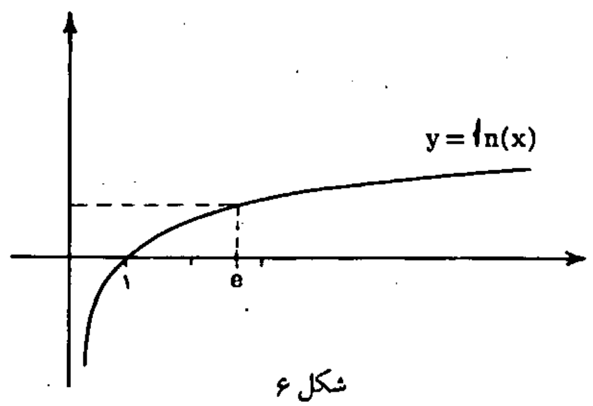
$$\lim_{x \to ۰^+} \ln(x) = \lim_{u \to +\infty} \ln\left(\frac{۱}{u}\right) = \lim_{u \to +\infty}(-\ln(u)) = -\infty$$

اینك، مقدمات کافی جهت رسم منحنی مهیا شده است. با توجه به پیوسته وصعودی بودن تابـع لگاریتمی، نمودارآن قابل رسم است (شکل ۵ ملاحظه شود).



شکل ۵

رسم نمودار این تابع نشان می‌دهد کـه بردآن برابر $(-\infty, +\infty)$ است. ازطرفی این تابع پیوسته واکیداً صعودی است. پس یك به‌یك است وهرخط حقیقـی، مانند $y = c$، نمودار این تابع را تنها دریك نقطه بربازه $(۰, +\infty)$ قطع می‌کند. (شکل ۶ ملاحظه شود). بنابراین، حکمی به این صورت برقرار است. به‌ازای هرعدد حقیقی c، عدد حقیقی مثبت منحصر به‌فردی، مانند x، موجود است که $\ln(x) = c$.



شکل ۶

حالت خاص حکـم فوق، وقتی کـه $c = ۱$، عدد مهمی را مشخص می‌کند که چنین تعریف می‌شود.

۴.۳ تعریف: عدد حقیقی مثبت x که درمعادله $\ln(x) = ۱$ صدق می‌کند عدد e نامیده می‌شود.

وجود چنین عددی را می‌توان ازخاصیت توابع پیوسته نتیجه گرفت. زیرا، تابع لگاریتمی پیوسته واکیداً صعودی است‌وچون $\ln(۲) < ۱ < \ln(۴)$ پس این تابع هرمقداربین‌آنها را اختیار می‌کند. بنابراین، xای بین ۲ و ۴ موجود است که

$$\ln(x) = ۱$$

بنابراین، $۲ < e < ۴$. برای‌به‌دست‌آوردن e می‌توان a، b، c، ...،

را به‌گونه‌ای تعیین کرد که

$$\ln(a)+\ln(b)+\ln(c)+\cdots=۱$$

مثلاً، فرض‌کنیم $\ln(۲)=۰/۶۹۳۱۵$. اینك، ریشه دوم، چهارم، هشتم، . . . ، عدد ۲را با تقسیمهای‌متوالی حساب می‌کنیم؛ یعنی،

$$\ln(۲)=۰/۶۹۳۱۵$$
$$\ln(۲^{۱/۲})=۰/۳۴۶۵۸$$
$$\ln(۲^{۱/۴})=۰/۱۷۳۲۹$$
$$\ln(۲^{۱/۸})=۰/۰۸۶۶۴$$
$$\ln(۲^{۱/۱۶})=۰/۰۴۳۳۲$$

برای اینکه ببینیم کدام‌یك ازاین لگاریتمها مجموعی نزدیك به یك دارد، لگاریتمها را به‌گونه‌ای جمع می‌کنیم که حاصل آن از یك تجاوز نکند، مثلاً،

$$۱=۰/۶۹۳۱۵+۰/۱۷۳۲۹+۰/۰۸۶۶۴+۰/۰۴۳۳۲+R$$

که درآن، R باقیمانده است و

$$R=۰/۰۰۳۶۰<\ln(۲^{۱/۱۶۰})=۰/۰۰۴۳۳$$

با این محاسبه خواهیم داشت،

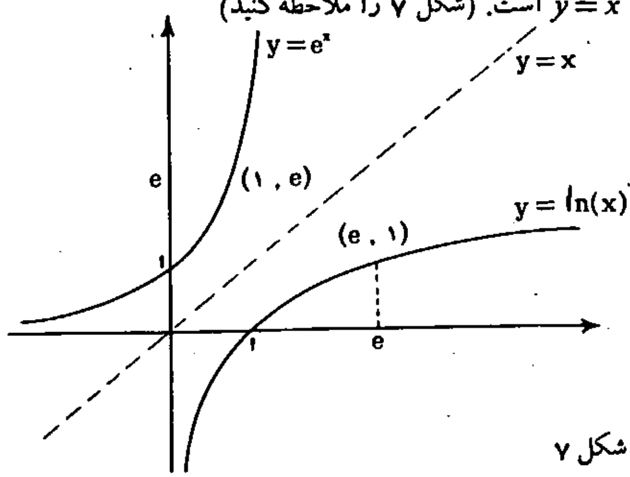
$$۲^{۲۳/۱۶}=۲\times۲^{۱/۴}\times۲^{۱/۸}\times۲^{۱/۱۶}<e<۲\times۲^{۱/۴}\times۲^{۱/۸}\times۲^{۱/۱۶}\times۲^{۱/۱۶۰}=۲^{۳۱/۱۶۰}$$

البته به کمك دنباله یا سری می‌توان عدد e را محاسبه کرد. در دهه ۱۹۶۰ دانیل شنکز[1] و جان رنچ[2] به کمك کامپیوتر آی. بی. ام ۷۰۹۰، عدد e را تا $۱۰^۵$ رقم اعشاری محاسبه کردند. برای محاسبه این تقریب از e مدت ۲/۵ ساعت وقت کامپیوتر گرفته شده است. مقدار عدد e تا ۱۵ رقم اعشاری‌چنین است

$$e=۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹۰۴۵.$$

ازآنجایی که‌تابع لگاریتمی یك به‌یك وپیوسته است، بنابراین، تابع معکوس آن موجود است و به‌صورت ذیل تعریف می‌شود.

به‌ازای هرعدد حقیقی x، $y=e^x$. این تابع را «تابع نمایی طبیعی» یا تابع نمایی می‌نامند و یکی از توابع مهم ریاضی است. نمودار $y=e^x$ قرینه تابع $y=\ln(x)$ نسبت به خط $y=x$ است. (شکل ۷ را ملاحظه کنید)



شکل ۷

علت اینکه تابع نمایی تابع معکوس تابع لگاریتمی است بخاطر قضیه ذیل است.

۵.۳ قضیه: به‌ازای هرعدد حقیقی x که $-\infty<x<\infty$، $\ln(e^x)=x$ همچنین، به‌ازای هرعدد حقیقی x که $x>۰$، $e^{\ln(x)}=x$.

برهان:

$$\ln(e^x)=x\ln(e)=x\times۱=x$$

حال اگر $y=e^{\ln(x)}$ آنگاه

$$\ln(y)=\ln(x)\ln(e)=\ln(x).$$

ازطرفی، تابع لگاریتمی تابعی یك به یك است. بنابراین، $y=x$ ویا $e^{\ln x}=x$.

حکم فوق بیان می‌کند که اگر $f(x)=\ln x$ و $g(x)=e^x$ آنگاه $g(f(x))=x$ و $f(g(x))=x$؛ یعنی، f و g معکوس‌یکدیگرند و بنابر تعریف لگاریتم برپایه یك عدد حقیقی، $\log_e x=\ln(x)$ اگر وفقط اگر $e^{\ln x}=x$

یعنی تابع لگاریتمی همان لگاریتم بر پایه e است. این مبحث را با ذکر مثالهایی خاتمه می‌دهیم.

۶.۳ مثال: مشتق $f(x)=\int_x^{x^۲}\frac{۱}{t}\,dt$ را محاسبه‌کنید

حل:

$$f(x)=\int_x^{x^۲}\frac{۱}{t}\,dt=\int_x^{۱}\frac{۱}{t}\,dt+\int_۱^{x^۲}\frac{۱}{t}\,dt$$
$$=-\int_۱^{x}\frac{۱}{t}\,dt+\int_۱^{x^۲}\frac{۱}{t}\,dt$$
$$=-\ln(x)+\ln(x^۲)$$
$$=-\ln(x)+۲\ln(x)=\ln(x)$$

بنابراین، $f'(x)=\frac{۱}{x}$.

۷.۳ مثال. ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{۱}{e}$$

فرض کنید $y=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. بنابراین،

$$\ln(y)=\frac{۱}{n}\ln(n!)-\ln(n)$$
$$=\frac{۱}{n}[\ln(n!)-n\ln(n)]$$
$$=\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}(\ln(k)-\ln(n))$$
$$=\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

اینك، n را به بینهایت میل می‌دهیم. بنابراین،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)=\int_۰^{۱}\ln(x)\,dx$$

مقدار انتگرال را می‌توان از طریق جزء به جزء محاسبه کرد. در نتیجه،

$$\int_{۰}^{۱} \ln(x)\,dx = ?x\ln(x) - x\Big|_{۰}^{۱} = -۱$$

چون تابع لگاریتمی پیوسته و یک به یک است، پس

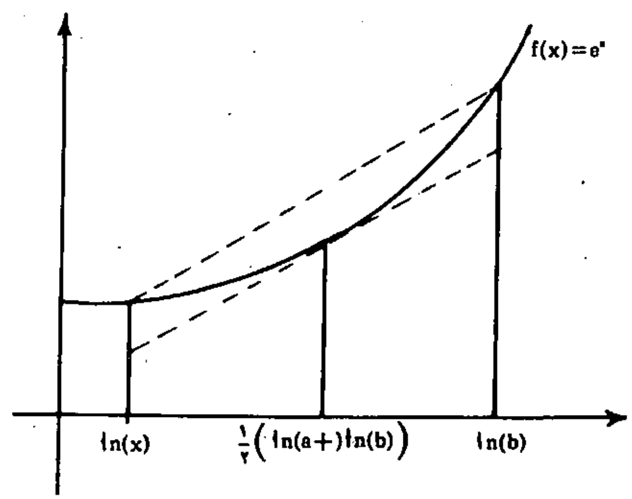
$$\lim_{n\to\infty} \ln(y) = -۱ = \ln(e^{-۱})$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-۱}$$

۸.۳ مثال. (نامساوی بین میانگین هندسی، لگاریتمی، و حسابی)

فرض کنیم $۰<a<b$ همچنین فرض کنیم که $f(x)=e^x$. بنابراین، $\ln(f(x))=x$.

با توجه به مشتق توابع مرکب، نتیجه می‌شود که $f'(x)=f(x)$. حال اگر نمودار $f(x)$ را بر بازه $[\ln(a), \ln(b)]$، با فرض $a<b$، رسم کنیم، دو ذوزنقه مطابق شکل ۸ حاصل می‌شود که مساحتهای آنها تقریبهای نقصانی و اضافی برای $\int_{\ln(a)}^{\ln(b)} e^x dx$ است.



شکل ۸

بنابراین،

$$e^{\frac{۱}{۲}(\ln(a)+\ln(b))}(\ln(a)-\ln(b)) < \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} e^x dx < \frac{۱}{۲}(e^{\ln(a)}+e^{\ln(b)})(\ln(b)-\ln(a))$$

که پس از محاسبه عبارت فوق، و تقسیم طرفین بر $(\ln b - \ln a)$، نامساوی جالبی به‌صورت

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)} < \frac{a+b}{۲}$$

حاصل می‌شود که به نامساوی میانگین هندسی، لگاریتمی و حسابی معروف است.

پانوشت:

۱) DANIEL SHANKS

۲) JOHN W. WRENCH

مقاله شنکز رنچ را تحت عنوان «محاسبه π تا ۱۰۵ رقم اعشاری» درمجله

MATHEMATICS OF COMPUTATION

جلد ۱۶، شماره ۷۷، ژانویه ۱۹۶۲، می‌توانید ملاحظه کنید.

منابع

۱) جورج توماس، حساب دیفرانسیل و انتگرال (ترجمه علی اکبرجعفریان وابوالقاسم‌میامئی) انتشارات مرکز نشردانشگاهی، چاپ چهارم، ۱۳۶۳.

۲) HOWARD ANTON, CALCULUS WITH ANALYTIC GEOMETRY, NEW YORK, 1988.

۳) AMERICAN MATHEMATICAL MONTHIY Vol. 94 NO. 6, June-July 1987.

الگوهای عددی

آقای امیر شقاقی، دانش‌آموز دبیرستان سعدی‌تبریز، روابط زیر را که درمجله ۱۷، شماره ۱، MATHE MATICAL SPECTRUM، به‌چاپ رسیده است، برایمان ارسال داشته‌اند که عیناً درج می‌شود

هیأت تحریریه

$$۱ = ۳^{۰}$$
$$۱+۲ = ۳^{۱}$$
$$۲+۳+۴ = ۳^{۲}$$
$$۲+۳+\cdots+۷ = ۳^{۳}$$
$$۵+۶+۷+\cdots+۱۳ = ۳^{۴}$$
$$۵+۶+۷+\cdots+۲۲ = ۳^{۵}$$
$$۱۴+۱۵+۱۶+\cdots+۴۰ = ۳^{۶}$$
$$۱۴+۱۵+۱۶+\cdots+۶۷ = ۳^{۷}$$
$$۴۱+۴۲+۴۳+\cdots+۱۲۱ = ۳^{۸}$$

آیا می‌توانید نمونه را برای $۳^{۹}$ و $۳^{۱۰}$ و غیره ادامه دهید و فرمول عمومی برای آن پیدا کنید؟

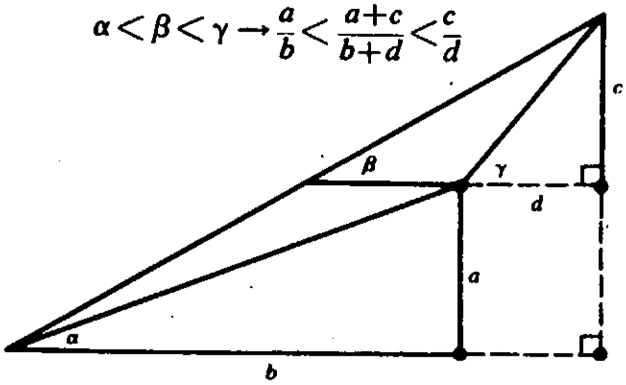
برهان بدون کلام:

خاصیت میانی در نامساویها.

ثابت کنید که

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}.$$

$$\alpha<\beta<\gamma \rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$



مجله ریاضیات، جلد ۶۳، شماره ۳، ژوئن ۱۹۹۰.

برهان بدون کلام:

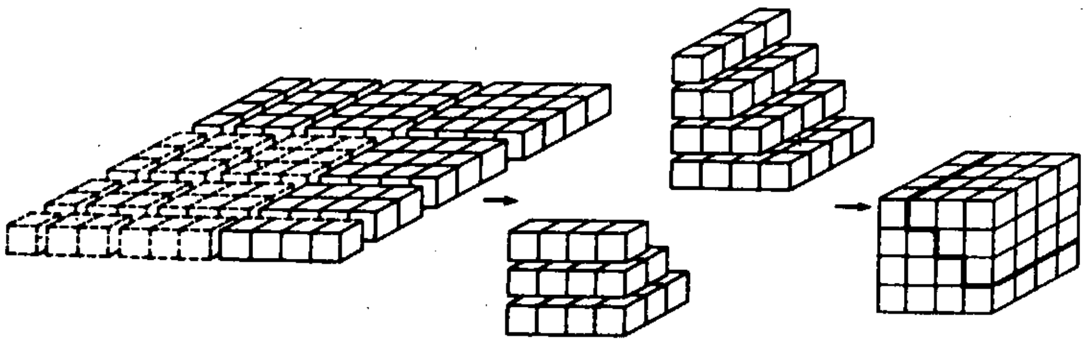
مربع اعداد مثلثی.

فرض کنیم $t_n = ۱+۲+\dots+n$. ثابت کنید

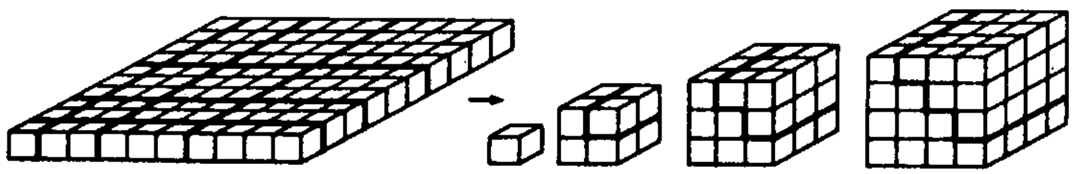
(الف) $t_n^۲ - t_{n-۱}^۲ = n^۳$.

(ب) $t_n^۲ = (۱+۲+\dots+n)^۲ = ۱^۳+۲^۳+\dots+n^۳$.

برهان:



$$t_n^۲ - t_{n-۱}^۲ = n^۳$$



$$t_n^۲ = (۱+۲+\dots+n)^۲ = ۱^۳+۲^۳+\dots+n^۳$$

مجله ریاضیات، جلد ۶۳، شماره ۳، ژوئن ۱۹۹۰

«تنظیم از لآلی»

مسائل ویژه دانش‌آموزان

تنظیم از: ابراهیم دارابی

۱- ازبین مثلث‌هایی‌که قاعده مشترك آنها AB و ارتفاع‌مفروض CH را دارند، مثلثی را پیدا کنید که دارای پیرامون می‌نیمم باشد.

۲- در ذوزنقه $KPMH$ طول ساق MH برابراست با $7\sqrt{2}$. دایره‌ای ازنقاط K و P و M می‌گذرد وخط KH را در نقطه E قطع می‌کند. اگر $PE=14$ و $P\hat{E}K=45^\circ$، طول پاره KH را پیدا کنید.

راهنمایی: چون HE و PM وترهای موازی در دایره‌اند، $KPME$ ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

$KM=PE=14$ ،$M\hat{K}H=P\hat{E}K=45^\circ$

فاصله نقطه M تا خط KE برابراست

$KM\cdot\sin(M\hat{K}H)=7\sqrt{2}$

ازآنجا نتیجه بگیرید که MH بر KE عمود است.

۳- p را طوری تعیین کنید که معادله

$1+p\sin x=p^2-\sin^2 x$

یك ریشه داشته باشد.

جواب $-2\leqslant p\leqslant\frac{-2}{\sqrt{5}}$ ، $\frac{2}{\sqrt{5}}\leqslant p\leqslant 2$

۴- معادله زیر را به‌ازاء جمیع مقادیر a حل کنید.

$9^{-|x-2|}-4\times 3^{-|x-2|}-a=0$

جواب $x_{1,2}=2\pm\log_3(2-\sqrt{4+a})$

۵- درمثلث ABC با زوایای حاده که هیچ یك از اضلاع آن برابر نیستند، ازیك رأس ارتفاع، از رأس دیگرمیانه واز رأس سوم نیمسازنظیرآنها را رسم می‌کنیم. ثابت کنید مثلث حاصل از برخورد این سه خط نمی‌تواند متساوی‌الاضلاع باشد.

(فرستنده: محمد مرندی رضایی، دانش‌آموز)

(راهنمایی: ازبرهان خلف‌استفاده کنید: اگر P و Q و R رئوس مثلث حاصل و $PR=RQ=PQ$ آنگاه ازمثلث RHC نتیجه بگیرید $R\hat{C}H=30^\circ$. (H پای ارتفاع مثلث ABC است) ازآنجا $R\hat{C}M=30$. و در مثلث CQM دارید $M\hat{Q}C=L\hat{Q}B=60^\circ$.)

۶- در چهارضلعی محدب $ABCD$ دو قطر همدیگر را درنقطه E قطع می‌کنند. اگر مساحت مثلث‌های ABE و CDE با هم برابر و AC نیمساز زاویه A و $AB=4$ باشد، اندازه BC را حساب کنید.

(راهنمایی: ابتدا ثابت کنید چهار ضلعی مفروض ذوزنقه است).

۷- دایره‌ای بر دوخط AB و BC بترتیب درنقاط D و E مماس است. نقطه A بین B و D ونقطه C بین B و E قرار دارد S_{ABC} را حساب کنید.

درصورتی که طولهای AB و AC بترتیب برابرند با ۱۳ و ۱. و A و D و E و C بر روی یک دایره قرار دارند.

(راهنمایی: $\triangle_{ABC}\sim\triangle_{EBD}$ و $S=\frac{15}{4}\sqrt{3}$)

۸- ثابت کنید اگریکی ازاعداد 2^n-1 و 2^n+1 $(n>2)$ اول باشد، دیگری‌مرکب‌است. (به‌ازاء $n=2$ هردوعدد فردند.)

(راهنمایی: 2^n نمی‌تواند بر ۳ بخشپذیر باشد، اگر باقیمانده 2^n بر ۳ برابر با ۱ باشد، آنگاه 2^n-1 بر ۳ بخشپذیر می‌شود . . .)

۹- ثابت کنید دو رقم آخر 9^{9^9} و $9^{9^{9^9}}$ یکی هستند. ($9^{9^9}=9^{(9^9)}$).

(راهنمایی: بنابرفرمول دوجمله‌ای می‌توان نوشت:

$A=9^{9^9}=(10-1)^{9^9}=10^a-C(a,1)\cdot 10^{a-1}+C(a,2)\,10^{a-2}+\dots+(a,1)\,10-1$

$B=9^{9^{9^9}}=(10-1)^{9^{9^9}}=10^b-C(b,1)\cdot 10^{b-1}+C(b,2)\cdot 10^{b-2}+\dots+C(b,1)\cdot 10-1$

(که درآن $a=9^9$ و $b=9^{9^9}$.)

۱۰- ثابت کنید اگر α و β حاده و $0<\alpha<\beta$ آنگاه

(a $\alpha-\sin\alpha<\beta-\sin\beta$

(b $\operatorname{tg}\alpha-\alpha<\operatorname{tg}\beta-\beta$

(c $\operatorname{tg}\alpha/\alpha<\operatorname{tg}\beta/\beta$

(راهنمایی: برای خالت (a) ازصعودی بودن تابع $f(x)=x-\sin\alpha$ استفاده کنید و برای سایر حالات تابع مناسبی انتخاب کنید.)

۱۱- ماکزیمم $x+2y$ را طوری تعیین کنید که x و y منفی و درنامساوی $x^2-4xy+y^2+3\leqslant 0$ صدق کند.

(راهنمایی: اول a را طوری تعیین کنید که دستگاه زیر جواب داشته باشد.

$$\left(\begin{cases}x+2y=a\\ x^2-4xy+y^2+3\leqslant 0\end{cases}\right.$$

۱۲- جزء صحیح عدد زیر را پیدا کنید

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\frac{1}{\sqrt[3]{6}}+\dots+\frac{1}{\sqrt[3]{1'000'000}}$$

راهنمایی: ازمقایسه $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1+2\times\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$ و

$$\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}\right)^3=1+2\times\frac{1}{n}+\frac{4}{3}\times\frac{1}{n^2}+\frac{8}{27}\times\frac{1}{n^3}$$

نتیجه بگیرید که به‌ازای هرعدد طبیعی n

وبالنتیجه: $\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}\right)^3>\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$

$1+2/3n>(1+1/n)^{2/3}$ ویا $n^{2/3}+2n^{-1/3}>(n+1)^{2/3}$

وازآنجا،

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right]$$

جواب: ۱۴۹۹۶

۱۳-

a) همه مقادیرصحیح ومثبت x و y را طوری تعیین کنید که در معادله $x^y=y^x$ صدق کنند.

b) همه مقادیر مثبت و گویای ومتمایز x و y را طوری پیدا کنید که درمعادله $x^y=y^x$ صدق کنند.

راهنمایی: a) از $x^y=y^x$ معلوم می‌شود که x و y عوامل اول یکسان دارند:

$$x=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n} \quad \text{و} \quad y=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_n^{\beta_n}$$

که در آن p_1 و p_2 ... و p_n عوامل اول هستند

پس از $x^y=y^x$ داریم

$$\alpha_1 y=\beta_1 x,\ \dots\ \alpha_2 y=\beta_2 x,\ \dots\ \alpha_n y=\beta_n x$$

ازآنجا نتیجه بگیرید $y=kx$.

b) اگر $y/x=k$ آنگاه $x^{kx}=(kx)^x$

جواب: $x=\left(\frac{p+1}{p}\right)^p$ ، $y=\left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+1}$

که درآن p عدد صحیح ومتمایز از صفر و ۱- است.

۱۴- دربین شرکت کنندگان دریك مسابقه شطرنج دونفر زن وجود دارند. هریك ازشرکت‌کنندگان با بقیه ۲ باربازی می‌کنند. تعداد بازیهایی که مردها دربین خودشان انجام داده‌اند، ۶۶ بار بیشتراز تعداد بازیهایی است که آنها با زنها انجام داده‌اند. چند نفر دراین مسابقه شرکت کرده‌اند. چند بار بازی انجام گرفته است.

جواب: ۱۳، ۱۵۶.

۱۵- فرض کنید f تابعی از R به R وعددی مانند $a>0$ متعلق به R باشد بقسمی که به‌ازاء هر x از R داشته باشیم

$$f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}$$

ثابت کنید f متناوب است.

۱۶- مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\dots+\frac{n}{2}}{0/25n^2+n+3}$ را محاسبه‌کنید.

$n\in N$

جواب: ۱

۱۷- جمله عمومی دنباله $2, 4, 7, 11, \dots$ را که در آن تفاضل جملات متوالی تشکیل تصاعد عددی می‌دهند پیدا کنید.

راهنمایی: دنباله را با $a_1, a_2 \dots a_n$ نشان دهید.

$$a_2-a_1=r_1$$
$$a_3-a_2=r_2$$
$$a_n-a_{n-1}=r_{n-1}$$

جواب: $a_n=1+\frac{n(n+1)}{2}$

۱۸- برای محاسبه x^n کمترین تعداد ضرب انجام شده را تعیین کنید. (مثلاً، برای محاسبه x^8 می‌توان چنین عمل کرد

$$x\times x=x^2$$
$$x^2\times x^2=x^4$$
$$x^4\times x^4=x^8$$

بنابراین با سه مرتبه ضرب x^8 قابل محاسبه است).

(راهنمایی: ازمبنای ۲ استفاده کنید. اگر

$(n=C_m 2^m+\dots+C_0$

(جواب: $m+\sum_{i=0}^{m-1}C_i$

۱۹- فرض‌کنید A ماتریس $m\times n$ و B ماتریس $n\times p$ باشد. اگر درایه‌های هرسطر B تشکیل یك تصاعد عددی (هندسی) با قدرنسبت d (q) بدهد، ثابت کنید کــه اعضای هرسطر AB نیز تشکیل تصاعد عددی (هندسی) می‌دهند

(فرستنده؛ بیرجند، محمدحسین خسروی.)

(راهنمایی؛ حکم را برای ماتریسهای ۲×۲ و ۳×۲ انجام داده و حالت کلی را نتیجه بگیرید. فرض کنید:

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}c_1 & c_1+d & c_1+2d\\ c_2 & c_2+d & c_2+2d\end{bmatrix}$$

اگر $a_1c_1+a_2c_2=x$ و $b_1c_1+b_2c_2=y$ آنگاه

$$(AB=\begin{bmatrix}x & x+(a_1+a_2)\,d & x+(a_1+a_2)\,2r\\ y & y+(b_1+b_2)\,d & y+(b_1+b_2)\,2r\end{bmatrix}$$

مسائل هشتمین دورهٔ مسابقات ریاضی دانش‌آموزان کشور

آذرماه ۱۳۶۹

۱) اگر $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ مجموعه‌های دلخواه باشند مجموعه‌های B_n را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

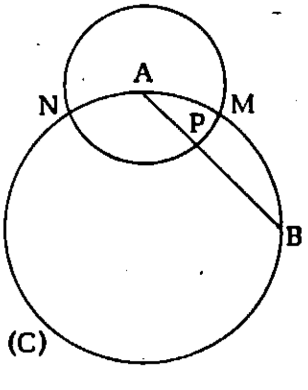
$$B_1 = A_1$$

$$B_n = A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \qquad (n \geqslant 2)$$

آ) ثابت کنید $\qquad B_n \cap B_m = \phi \qquad (n \neq m)$

ب) ثابت کنید $\qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

۲) وتر AB از دایره (C) را درنظرمی‌گیریم. دایره دیگری به مرکز A وبه شعاع کوچکتر ازطول AB رسم می‌کنیم تا دایره (C) را درنقاط M و N و وتر AB را درنقطهٔ P قطع کند، ثابت کنید عمودمنصف BP از وسط کمان $\widehat{MB}$ می‌گذرد.



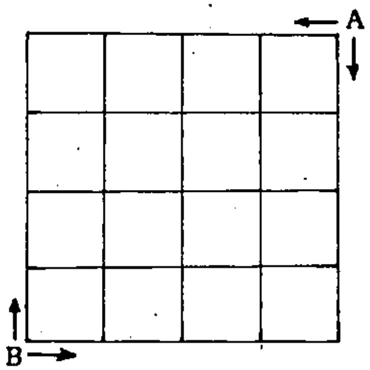
۳) نشان دهید که برای هرعدد طبیعی $n \geqslant 5$، $n!$ بر کلیه اعداد $1, 2, \ldots, k$ بخش‌پذیر است به‌شرط اینکه $k+1$ کوچکترین عدد اول بزرگتر از n باشد. (می‌دانیم که برای $n \geqslant 2$ بین n و $2n$ یک عدد اول وجود دارد).

۴) همه اعداد حقیقی x و y و z را تعیین کنید که در روابط زیر صادق باشند.

$$x(1+y) = y(1+z) = z(1+x)$$

۵) ثابت کنید درهرمثلث، خطوطی‌که اوساط اضلاع را به‌اوساط ارتفاعهای متناظر وصل می‌کنند، متقاربند.
آیا می‌توان به‌جای ارتفاعها، هرسه خط متقارب را درنظرگرفت؟ چگونه؟ ثابت کنید.

۶) درشبکه 4×4 با شکل زیرمتحرکی از نقطه A به سمت نقطهٔ B حرکت می‌کند به‌طوری که هر ثانیه یک ضلع مربع واحد را به سمت پائین یـا به سمت چپ با احتمـال برابر می‌پیمـاید. همچنین متحرک دیگری از نقطه B به سمت نقطه A در حرکت است به‌طوری که هر ثانیه یک ضلع مربع واحد را به سمت‌بالا یا به‌سمت راست با احتمال برابرمی‌پیماید. اگـر هردو متحرک با هم شروع به‌حرکت نمایند، احتمـال برخورد دو متحرک را محاسبه کنید.



۷) ازتساوی زیر $f(x)$ را تعیین کنید.

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + f\left(-\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x$$

۸) اگره $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$ و $b_i > 0$ و به‌ازای هر k،

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \leqslant \sum_{j=1}^{k} b_j$$

ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

مسائل شماره ۲۸

تهیه و تنظیم از لآلی

۱ـ در زنگ تفریح مدرسه‌ای بین علی، حسین، مهرداد و جهانگیر سخنانی به‌این صورت رد و بدل شد:

مهرداد: هرکس که به‌جهانگیر کمک کند، دوست ناظم‌مدرسه نیست.

علی: من کسانی را که با حسین بازی می‌کنند کمک نمی‌کنم.

جهانگیر: من با هرکس که با مهرداد بازی‌کند، بازی نمی‌کنم.

حسین: من با مهرداد بازی نمی‌کنم.

سؤال: آیا علی دوست ناظم است؟ چرا؟

اگر ناظم و علی دوست یکدیگـر باشند، چه کسی با حسین بازی می‌کند.

۲ـ همه جوابهای حقیقی دستگاه معادلات چند مجهولی ذیل را به‌دست آورید

$$\begin{cases} ۲x\,(۱+y+y^{۲}) = ۳\,(۱+y^{۴}) \\ ۲y\,(۱+z+z^{۲}) = ۳\,(۱+z^{۴}) \\ ۲z\,(۱+x+x^{۲}) = ۳(۱+x^{۴}). \end{cases}$$

۳ـ درستی تساوی ذیل را تحقیق کنید

$$۳=\sqrt{۱+۲\sqrt{۱+۳\sqrt{۱+۴\sqrt{۱+۵\sqrt{۱+\cdots}}}}}$$

۴ـ مقدار انتگرال ذیل را محاسبه کنید

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{۱}{x}\,(\operatorname{Arctg}\pi x - \operatorname{Arctg} x)\,dx$$

مسائل المپیاد کانادا ۱۹۹۰(*)

۵ـ در مسابقه‌ای، که kروز برگزار می‌شود، $۲\leqslant n$ بازیکن شرکت می‌کنند. هر روز بازیکنان امتیازات ۱، ۲، ۳، ...، n را می‌گیرند و هیچ دو بازیکنی امتیازات یکسانی دریافت نمی‌کنند.

(*) با تشکر بسیار ازآقای محمد علیپوراسکندانی، دانشجوی دانشگاه تبریز، که مسائل المپیاد کانادا را برایمان ارسال داشتند.

در پایان kمین روز معلوم می‌شود که هر بازیکن، در مجموع، دقیقاً ۲۶ امتیاز می‌آورد.

همه ازواج مرتب (n,k) را که ممکن است رخ‌دهد تعیین‌کنید.

۶ـ مجموعه‌ای با‌تعداد $\frac{۱}{۲}n\,(n+۱)$ عضو متمایز، به‌تصادف، بر روی آرایهٔ مثلثی مرتب شده‌اند:

```
            ×
        ×       ×
    ×       ×       ×
    ∘       ∘       ∘
    ∘       ∘       ∘
    ∘       ∘       ∘
×   ×   ∘       ∘       ∘   ×   ×
```

فرض کنیم M_k بزرگترین عدد در kمین سطر از رأس آن باشد. احتمال اینکه

$$M_{۱}<M_{۲}<M_{۳}<\cdots<M_{n}$$

را پیدا کنید.

۷ـ فرض کنیم $ABCD$ یک چهار ضلعی محدب در دایره‌ای باشد، و اقطـار BD AC یکدیگـر را در نقطه X قطع کنند. عمودهایی از X اضلاع AB، BC، CD، و DA را، به‌ترتیب، در A'، B'، C'، و D' قطع می‌کنند. ثابت کنید که

$$|A'B'| + |C'D'| = |A'D'| + |B'C'|$$

($|A'B'|$ طول پاره خط $A'B'$ است، و قس علیهذا.)

۸ـ یک ذره مادی می‌تواند با سرعت حداکثر ۲ متر بر ثانیه در امتداد محور x ها و با سرعت حداکثر یک متر بر ثانیه در مسیرهای دیگر صفحه حرکت کند. نمودار ناحیه‌ای را در صفحه تعیین کنید که ذره مادی می‌تواند در یک ثانیه، با شروع از مبدأ، به‌مرز آن ناحیه برسد.

۹ـ فرض کنیـم که تابعی، مانند f، بر مجموعه اعداد صحیح مثبت تعریف شده باشد و در این شرایط صدق کند:

$$f(۱)=۱,\quad f(۲)=۲$$

$$f(n+۲) = f(n+۲-f(n+۱))+f(n+۱-f(n)) \quad (n\geqslant ۱)$$

(الف) ثابت کنید که

(I) $۰\leqslant f(n+۱)-f(n)\leqslant ۱$

(II) اگر $f(n)$ فرد باشد آنگاه $f(n+۱) = f(n)+۱$.

(ب) با ذکر دلیل، همهٔ مقادیر n را تعیین کنید که

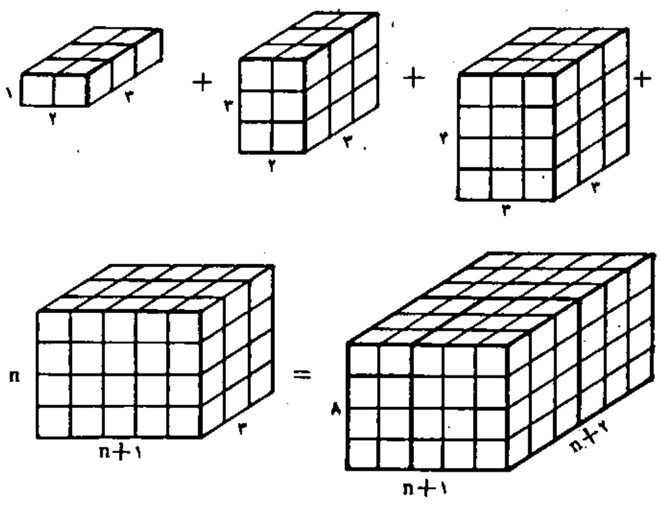
$$f(n) = ۲^{۱۰}+۱۰$$

برهان بدون کلام

(تهیه‌کننده: جواد تالی)

برهان بدون کلام
مجموع حاصلضربهای خاص

$$۳\,(۱\times۲+۲\times۳+۳\times۴+\cdots+n(n+۱))=n(n+۱)(n+۲)$$



شکل ۱

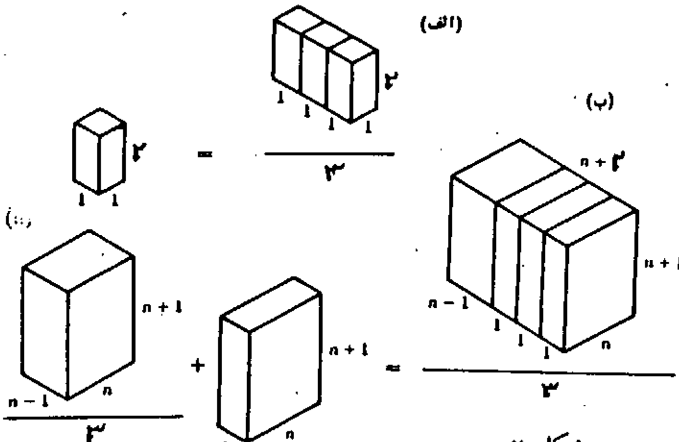
ازمجله ریاضیات، جلد ۶۳، شماره ۲، آوریل ۱۹۸۹.

برهان بدون کلام:

قضیه:

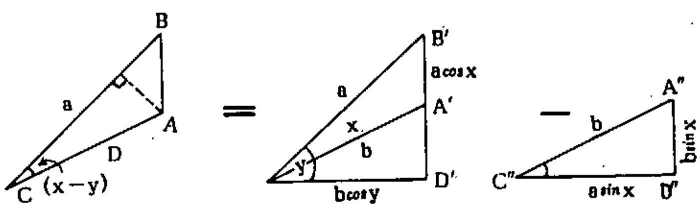
$$(۱\times۲)+(۲\times۳)+(۳\times۴)+\cdots+(n-۱)\,n=\frac{(n-۱)\,n\,(n+۱)}{۳}$$

برهان: به‌استقراء ثابت می‌کنیم؛



شکل ۲

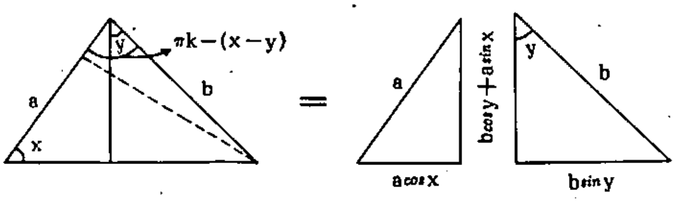
برهان بدون کلام: مساحت و تفاضل نسبتهای مثلثاتی (سینوس وکسینوس) دو زاویه.



$$S_{ABC}=S_{D'B'C'}-S_{D''A''C''}$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$

شکل ۳

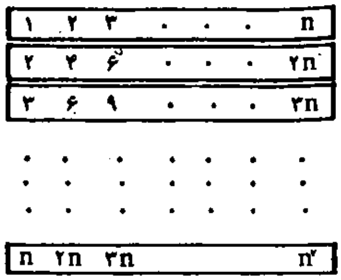


$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

شکل ۴

برهان بدون کلام: ثابت کنید $(\sum_{i=1}^{n} i)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3$

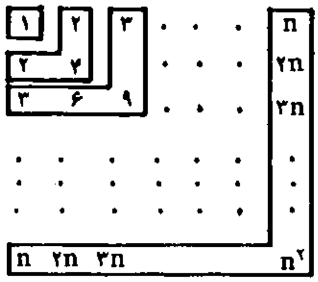
پیشنهاد اول: برهان ترکیباتی،



$$= \sum_{i=1}^{n} i + 2\sum_{i=1}^{n} i + \dots + n\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= (1+2+\dots+n)\sum_{i=1}^{n} i$$

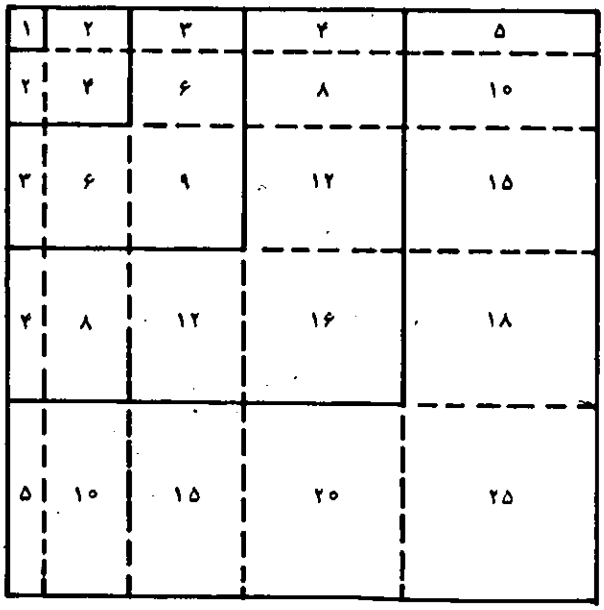
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$



$$= 1^2 + 2(2)^2 + \dots + n(n)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^3$$

پیشنهاد دوم: برهان هندسی،



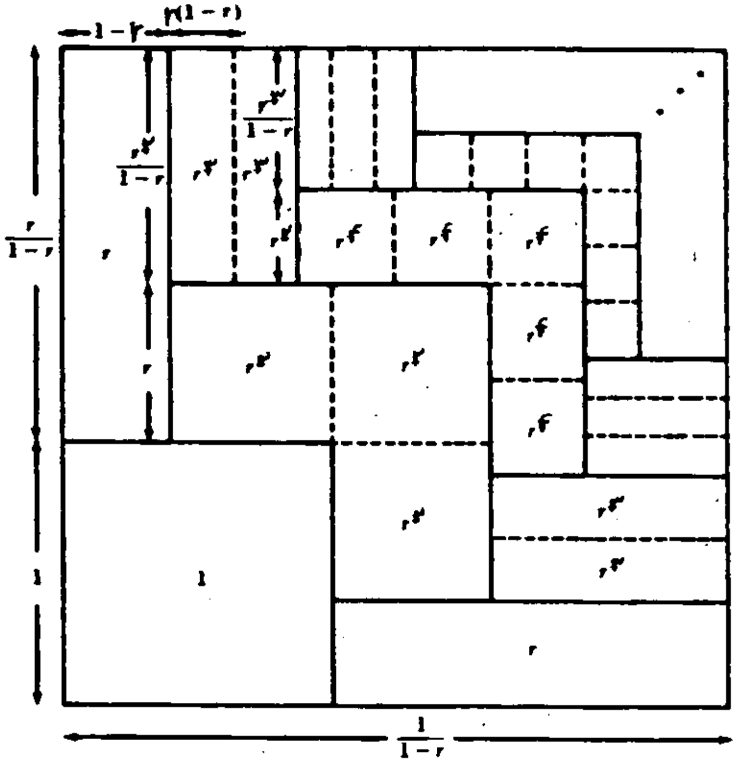
شکل ۶

$$(\sum_{i=1}^{n} i)^2 = 1\times(1)^2 + 2\times(2)^2 + \dots + n(n)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3$$

برهان بدون کلام:

مسئله: ثابت کنید به‌ازای $0 \leqslant r < 1$،

$$1+2r+3r^2+4r^3+\dots = \left(\frac{1}{1-r}\right)^2$$



شکل ۷

$$1 = \left(\frac{1}{1-r}\right)^2 - r(2-r)\left(\frac{1}{1-r}\right)^2$$

$$1+2r = \left(\frac{1}{1-r}\right)^2 - r^2(3-2r)\left(\frac{1}{1-r}\right)^2$$

$$1+2r+3r^2 = \left(\frac{1}{1-r}\right)^2 - r^3(4-3r)\left(\frac{1}{1-r}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$1+2r+3r^2+\dots+nr^{n-1} = \left(\frac{1}{1-r}\right)^2$$

$$-r^{n}(n+۱-nr)\left(\frac{۱}{۱-r}\right)^{۲}$$

$$۱+۲r+۳r^{۲}+\cdots=\left(\frac{۱}{۱-r}\right)^{۲}$$

$$=۴-(n+۲)\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}$$

$$۱+۲\left(\frac{۱}{۲}\right)+۳\left(\frac{۱}{۴}\right)+\cdots=۴$$

برهان بدون کلام: مشتقگیری ازسری هندسی:

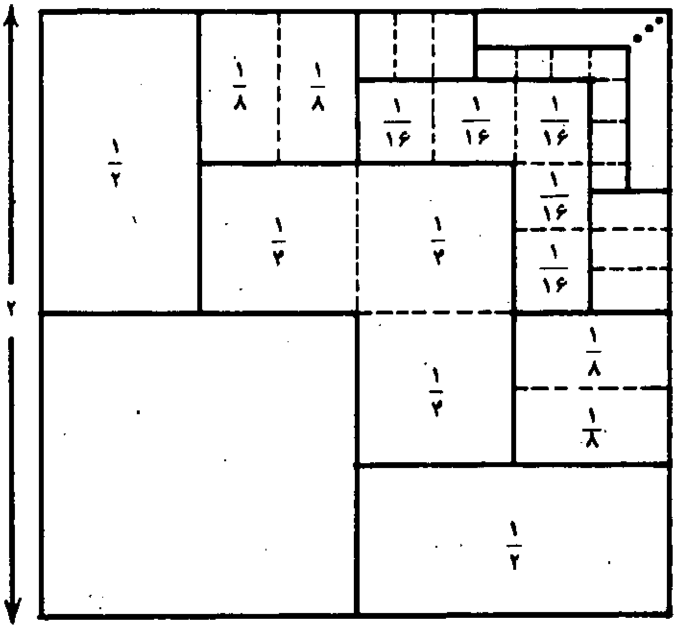
با فرض $|x|<۱$،

$$x+x^{۲}+x^{۳}+x^{۴}+\cdots=\frac{x}{۱-x}$$

$$۱+۲x+۳x^{۲}+۴x^{۳}+\cdots=\frac{۱}{(۱-x)^{۲}}$$

بنا براین، اگر $x=\frac{۱}{۲}$،

$$۱+۲\left(\frac{۱}{۲}\right)+۳\left(\frac{۱}{۴}\right)+۴\left(\frac{۱}{۸}\right)+\cdots=۴$$



$$۱=۴-۳(۱)$$

$$۱+۲\left(\frac{۱}{۲}\right)=۴-۴\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$۱+۲\left(\frac{۱}{۲}\right)+۳\left(\frac{۱}{۴}\right)=۴-۵\left(\frac{۱}{۴}\right)$$

$$۱+۲\left(\frac{۱}{۲}\right)+۳\left(\frac{۱}{۴}\right)+۴\left(\frac{۱}{۸}\right)=۴-۶\left(\frac{۱}{۸}\right)$$

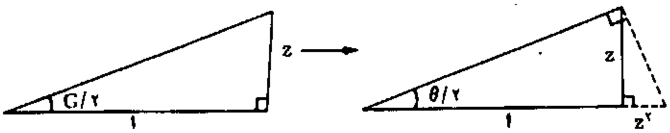
$$\vdots$$

$$۱+۲\left(\frac{۱}{۲}\right)+۳\left(\frac{۱}{۴}\right)+\cdots+n\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}$$

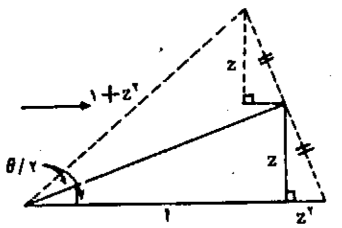
برهان بدون کلام:

جانشین‌سازی یك عبارت‌گویا برای توابع سینوس وکسینوس:

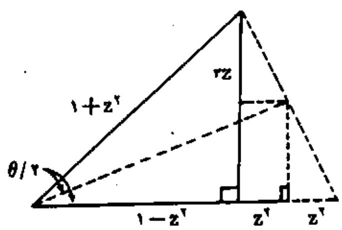
اگر $z=\tan\frac{\theta}{۲}$ آنگاه $\sin\theta=\frac{۲z}{۱+z^{۲}}$ و $\cos\theta=\frac{۱-z^{۲}}{۱+z^{۲}}$



شکل ۹



شکل ۱۰



شکل ۱۱

محاسبات کامپیوتری

در شماره ۲۲ مجله تعدادی از اعداد ۹ رقمی کــه مربع کامل‌اند ارائه شده بود. متعاقباً آقای سعید بدیهی از مجتمع صنعتی هفتم‌تیر اصفهان همهٔ اینگــونه اعداد را با استفاده از برنامه‌ریزی کامپیوتر تولید کرده‌اند. ضمن تشکر از ایشان ذیلاً جدول ارسالی وی ذکــر می‌گردد.

سردبیر

لیست اعداد مربع کامل ۹ رقمی بدون تکرار رقم. تهیه شده با کامپیوتر PC موجود در مجتمع صنعتی هفتم تیر اصفهان

تنظیم از: سعید بدیهی

ردیف	شماره ترتیب عدد تولید شده	عدد مربع کامل تولید شده که دارای ۹ رقم بدون تکرار است	عدد جذر گرفته شده	زمان تولید عدد ۹ رقمی در طول برنامه
۱	۱۰۰۱۶	۱۳۹۸۵۴۲۷۶	۱۱۸۲۶	۰۰:۲۵:۴۳
۲	۱۵۶۲۷	۱۵۲۸۴۳۷۶۹	۱۲۳۶۳	۰۰:۴۰:۰۷
۳	۱۸۱۲۹	۱۵۷۳۲۶۸۴۹*	۱۲۵۴۳	۰۰:۴۶:۳۲
۴	۴۱۸۳۸	۲۱۵۳۸۴۹۷۶	۱۴۶۷۶	۰۱:۴۷:۲۴
۵	۵۲۲۲۸	۲۴۵۸۹۳۷۶۱*	۱۵۶۸۱	۰۲:۱۴:۳۴
۶	۵۷۳۷۳	۲۵۴۸۱۷۳۶۹*	۱۵۹۶۳	۰۲:۲۷:۱۶
۷	۸۸۱۹۰	۳۲۶۵۹۷۱۸۴	۱۸۰۷۲	۰۳:۴۶:۴۵
۸	۱۰۱۳۶۱	۳۶۱۸۷۴۵۲۹	۱۹۰۲۳	۰۴:۲۰:۳۴
۹	۱۰۸۳۰۱	۳۷۵۴۶۸۱۲۹*	۱۹۳۷۸	۰۴:۳۸:۲۹
۱۰	۱۱۲۲۳۶	۳۸۲۹۴۵۷۶۱*	۱۹۵۶۹	۰۴:۴۸:۳۵
۱۱	۱۱۳۲۸۰	۳۸۵۲۹۷۶۴۱*	۱۹۶۲۹	۰۴:۵۱:۱۶
۱۲	۱۲۱۳۴۳	۴۱۲۷۳۹۸۵۶	۲۰۳۱۶	۰۵:۱۲:۰۶
۱۳	۱۶۷۵۲۳	۵۲۳۸۱۴۷۶۹	۲۲۸۸۷	۰۷:۱۰:۳۸
۱۴	۱۷۱۳۵۲	۵۲۹۸۷۴۳۶۱*	۲۳۰۱۹	۰۷:۲۰:۲۸
۱۵	۱۷۴۳۸۲	۵۳۷۲۱۹۶۸۴*	۲۳۱۷۸	۰۷:۲۸:۱۵
۱۶	۱۸۱۰۷۴	۵۴۹۳۸۶۷۲۱	۲۳۴۳۹	۰۷:۴۵:۲۶
۱۷	۱۹۵۵۳۵	۵۸۷۴۳۲۱۶۹*	۲۴۲۳۷	۰۸:۲۲:۳۴
۱۸	۱۹۶۱۱۲	۵۸۹۳۲۴۱۷۶*	۲۴۲۷۶	۰۸:۲۴:۰۳
۱۹	۲۰۰۴۸۲	۵۹۷۳۶۲۴۸۱	۲۴۴۴۱	۰۸:۳۵:۱۷
۲۰	۲۰۳۹۶۵	۶۱۵۳۸۷۲۴۹*	۲۴۸۰۷	۰۸:۴۴:۱۴
۲۱	۲۱۰۲۰۲	۶۲۷۹۵۳۴۸۱	۲۵۰۵۹	۰۹:۰۰:۱۵
۲۲	۲۲۳۸۳۸	۶۵۳۹۲۷۱۸۴*	۲۵۵۷۲	۰۹:۳۵:۱۶
۲۳	۲۲۸۱۶۰	۶۷۲۹۳۵۴۸۱*	۲۵۹۴۱	۰۹:۴۶:۲۲
۲۴	۲۴۰۹۰۴	۶۹۷۴۳۵۲۸۱*	۲۶۴۰۹	۱۰:۱۹:۰۷
۲۵	۲۴۳۷۷۵	۷۱۴۶۵۳۲۸۹*	۲۶۷۳۳	۱۰:۲۶:۲۹
۲۶	۲۵۴۸۶۸	۷۳۵۹۸۲۶۴۱	۲۷۱۲۹	۱۰:۵۴:۵۸
۲۷	۲۵۸۹۷۵	۷۴۳۸۱۶۵۲۹*	۲۷۲۷۳	۱۱:۰۵:۳۱
۲۸	۲۹۸۷۸۳	۸۴۲۹۷۳۱۵۶	۲۹۰۳۴	۱۲:۴۷:۴۵
۲۹	۳۰۱۰۲۷	۸۴۷۱۵۹۲۳۶*	۲۹۱۰۶	۱۲:۵۳:۳۱
۳۰	۳۲۸۴۳۵	۹۲۳۱۸۷۴۵۶	۳۰۳۸۴	۱۴:۰۳:۵۵

زمان کل اجرای برنامه برابر = «۵۵۹۴۳» ثانیه = ۱۵:۳۲:۲۳

* اعدادی که با علامت «*» مشخص شده‌اند اعداد جدیدی‌اند که در لیست اعداد چاپ شده در مجله شماره ۲۲ موجود نبوده است.

حل مسائل شماره ۲۴

تهیه و تنظیم: محمود نصیری

۱ـ اگر $x, y, z, n>0$ ثابت کنید:

$$\frac{x^{n+1}}{y^n}+\frac{y^{n+1}}{z^n}+\frac{z^{n+1}}{x^n}\geqslant x+y+z$$

حل. پس ازضرب و مرتب کردن، نامساوی فوق معادل نامساوی زیراست،

$$x^nz^n(x^{n+1}-y^{n+1})+x^ny^n(y^{n+1}-z^{n+1})+y^nz^n(z^{n+1}-x^{n+1})\geqslant 0$$

چون‌نامساوی نسبت به x و y و z متقارن است، می‌توان‌دوحالت

(۱) $x\geqslant y\geqslant z$

(۲) $x\geqslant z\geqslant y$

را درنظرگرفت درحالت (۱) نامساوی فوق را به صورت زیر مرتب می‌کنیم.

$$z^n(x^n-y^n)(x^{n+1}-y^{n+1})+y^n(x^n-z^n)(y^{n+1}-z^{n+1})\geqslant 0$$

که همواره برقراراست.

درحالت (۲) نامساوی فوق را به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم.

$$z^n(x^n-y^n)(x^{n+1}-z^{n+1})+x^n(z^n-y^n)(z^{n+1}-y^{n+1})\geqslant 0$$

که باز برقراراست.

۲. ماکسیمم عبارت‌زیر را پیدا کنید.

$$A=\frac{(x^{2n}-a^{2n})(b^{2n}-x^{2n})}{(x^{2n}+a^{2n})(x^{2n}+b^{2n})}$$

حل. می‌توان a و b را نامنفی درنظرگرفت. داریم:

$$A=\frac{-x^{4n}+(a^{2n}+b^{2n})x^{2n}-a^{2n}b^{2n}}{x^{4n}+(a^{2n}+b^{2n})x^{2n}+a^{2n}b^{2n}}=$$

$$\frac{-x^{4n}-(a^{2n}+b^{2n})x^{2n}-a^{2n}b^{2n}+2(a^{2n}+b^{2n})x^{2n}}{x^{4n}+(a^{2n}+b^{2n})x^{2n}+a^{2n}b^{2n}}$$

$$=\frac{2(a^{2n}+b^{2n})x^{2n}}{x^{4n}+(a^{2n}+b^{2n})x^{2n}+a^{2n}b^{2n}}-1=$$

$$\frac{2(a^{2n}+b^{2n})}{x^{2n}+\frac{a^{2n}b^{2n}}{x^{2n}}+(a^{2n}+b^{2n})}$$

برای آنکه A ماکسیمم باشد باید مخرج کسر فوق مینیمم باشد. اما بنابه نامساوی واسطه حسابی وهندسی

$$x^{2n}+\frac{a^{2n}b^{2n}}{x^{2n}}\geqslant 2\sqrt{a^{2n}b^{2n}}=2a^nb^n$$

واین مینیمم وقتی اتفاق می‌افتد که

$x^2=ab$ یا $x^{4n}=a^{2n}b^{2n}$

بنابراین:

$$\text{Max } A=\frac{(a^nb^n-a^{2n})(b^{2n}-a^nb^n)}{(a^nb^n+a^{2n})(a^nb^n+b^{2n})}=\left(\frac{b^n-a^n}{b^n+a^n}\right)^2$$

۳ـ فرض کنید $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$. ثابت کنید:

$$12\pi\sin x\geqslant(\pi^2+24)x-4x^3$$

حل. فرض‌کنیم $f(x)=12\pi\sin x+4x^3-(\pi^2+24)x$ سپس

$$f'(x)=12\pi\cos x+12x^2-(\pi^2+24)$$

$$f''(x)=-12\pi\sin x+24x=-12\pi\left(\sin x-\frac{2x}{\pi}\right)$$

اما، اگر $0<x<\frac{\pi}{2}$ آنگاه $\sin x>\frac{2x}{\pi}$ و در نتیجه $f''(x)<0$ یعنی تابع f' در فاصله $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ اکیداً نزولی‌است. ولذا دربازهٔ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ جهت تقعر تابع f به سمت پائین است. همچنین $f(0)=0=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. بنابراین بازاء هر x دربازهٔ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$، $f(x)\geqslant 0$.

تساوی فقط وفقط وقتی برقرار است‌که $x=0$ یا $x=\frac{\pi}{2}$.

تذکر: برای اثبات نامساوی $\sin x>\frac{2x}{\pi}$ وقتی $0<x<\frac{\pi}{2}$،

تابع g را دربازهٔ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ با ضابطه $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ تعریف می‌کنیم. این تابع در بازهٔ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ مشتق‌پذیر است لذا:

$$g'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x) < 0$$

زیرا در بازهٔ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$، $x < \operatorname{tg} x$.

بنابراین تابع g در بازه $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ اکیداً نزولی است، در نتیجه اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ آنگاه $g(x) > g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ یعنی $\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}$ یا

$\sin x > \frac{2x}{\pi}$.

۴. فرض کنیم n، m و p اعداد صحیح ومثبتی باشند ثابت کنید.

$$\left(1+\frac{m+n}{p}\right)^p\left(1+\frac{n+p}{m}\right)^m\left(1+\frac{m+p}{n}\right)^n \leqslant 3^{n+m+p}$$

حل. بنابه نامساوی واسطه حسابی وهندسی

$$\frac{3}{n+m+p} = \frac{\overbrace{\left(\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p}\right)}^{p \text{ مرتبه}} + \overbrace{\left(\frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{m}\right)}^{m \text{ مرتبه}} + \overbrace{\left(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}^{n \text{ مرتبه}}}{n+m+p}$$

$$\geqslant \sqrt[n+m+p]{\frac{1}{n^n m^m p^p}}$$

بنابراین اگر طرفین نامساوی فوق را به توان $n+m+p$ برسانیم خواهیم داشت:

$$\left(\frac{3}{n+m+p}\right)^{n+m+p} \geqslant \frac{1}{n^n m^m p^p}$$

پس،

$$3^{n+m+p} \geqslant \frac{(n+m+p)^{n+m+p}}{n^n m^m p^p}$$

$$= \left(\frac{n+m+p}{n}\right)^n \left(\frac{n+m+p}{m}\right)^m \left(\frac{n+m+p}{p}\right)^p$$

$$= \left(1+\frac{m+p}{n}\right)^n \left(1+\frac{n+p}{m}\right)^m \left(1+\frac{n+m}{p}\right)^p$$

۵. درچهارضلعی محیطی $ABCD$ نقاط تماس اضلاع AB، BC، CD و DA را با دایره محیطی به ترتیب P، Q، R و S می‌نامیم. اگر $AB = a$ و $BC = b$ و $CD = c$ و $DA = d$ و $PR = q$ و $QS = P$ ثابت کنید $\frac{ac}{bd} = \frac{p^2}{q^2}$

حل. شعاع دایره محاطی مثلث را به r و زوایای مرکزی مقابل به وترهای SP و PQ و QR و RS را بترتیب به α و β و γ و δ نشان می‌دهیم، داریم

$$AP = AS = r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\ BQ = BP = r\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},$$

$$CQ = CR = r\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2},\ DR = DS = r\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$$

بنابراین:

$$ac = r^2\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\right)$$

$$bd = r^2\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$$

لذا

$$\frac{ac}{bd} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma+\delta}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\delta}{2}} = \frac{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin^2\frac{\beta+\gamma}{2}}$$

از روابط

$$\sin\frac{\alpha+\delta}{2} = \sin\frac{\beta+\gamma}{2},\ \sin\frac{\gamma+\delta}{2} = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$q^2 = \left(2r\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\right)^2 \text{ و } p^2 = \left(2r\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2,$$

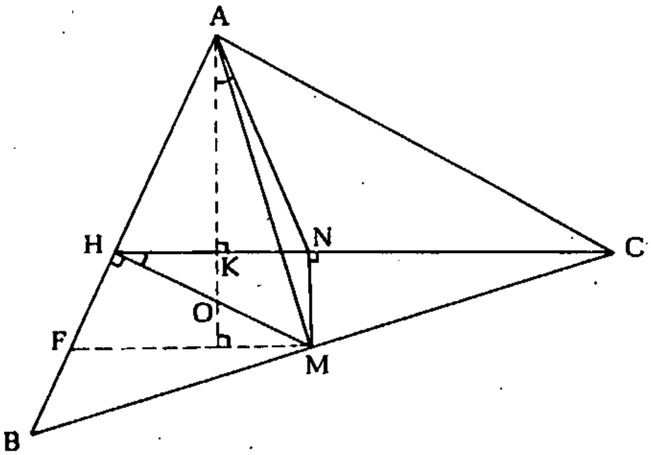
نتیجه می‌گیریم

$$\frac{ac}{bd} = \frac{p^2}{q^2}$$

۶. درمثلث متساوی‌الساقین ABC به رأس A ازنقطه M وسط قاعده BC عمود MH را بر ساق AB رسم می‌کنیم. از C به H وصل کرده عمود MN را بر CH رسم می‌کنیم (N پای عمود است). ثابت کنید:

$AH = AN$

حل. درمثلث قائم‌الزاویه ABM، MH ارتفاع وارد بر وتر است در نتیجه، دومثلث AHM و MHB متشابهند وچون اضلاع متناظر آنها بر هم عموداند لذا میانه‌های نظیر نیز برهم عمود می‌باشند. یعنی AO بر MF و در نتیجه برموازی آن HN عمود است. از طرف دیگر OA و MN موازیند. پس OA از

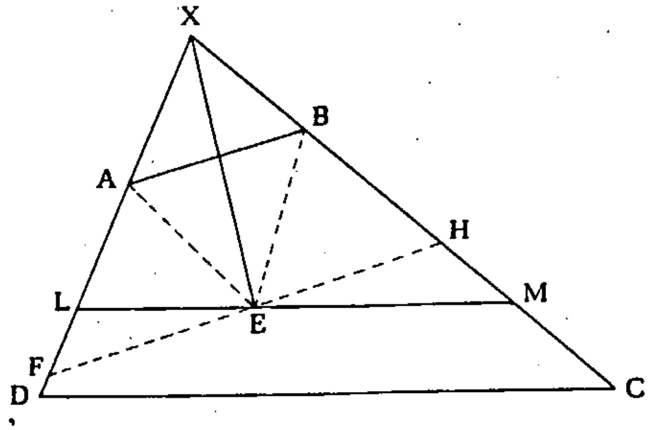


وسط HN نیز می‌گذرد درنتیجه K وسط HN وچون AK بر HN عمود است لذا AK هم میانه و هم ارتفاع است بنابراین مثلث AHN متساوی‌الساقین است.

۷. فرض کنیم $ABCD$ یك چهارضلعی محاطی باشد نیمسازهای زوایای A و B یکدیگر را در E قطع می‌کنند از E خطی موازی CD رسم می‌کنیم تا AD و BC را به‌ترتیب در M و L قطع کنند ثابت کنید

$$AL+BM=ML$$

حل.



AD و BC را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در X قطع کنند. از E پاره‌خط FH را به‌موازات AB رسم کرده و از E به X وصل می‌کنیم.

چون E محل تلاقی دونیمساز خارجی مثلث XAB است، لذا XE نیزنیمساز داخلی زاویه AXB می‌باشد.

اکنون گوئیم دومثلث MLX و HFX مساوی‌اند زیرا زوایای آنها برابر ونیمساز XE درهر دومشترك است. زوایا به‌این دلیل برابراندکه درچهارضلعی محاطی زوایای مقابل مکمل‌اند مثلاً $H\hat{M}E$ مکمل $L\hat{A}B$ و $L\hat{F}E$ نیز مکمل $L\hat{A}B$ است ($FH\|AB$) بنابراین $L\hat{F}E=H\hat{M}E$ به‌همین ترتیب $A\hat{L}F=B\hat{H}E$. ازتساوی این‌دومثلث نتیجه می‌گیریم $ME=FE$ و $HE=EL$ و درنتیجه $HM=LF$.

چون FH موازی AB است و AE نیمساز DAB درنتیجه $F\hat{A}E=A\hat{E}F$ ولذا $AF=FE$ به‌طورمشابه $BH=EH$.

اکنون چنین داریم؛

$$LA+BM=(AF-LF)+(BH+HM)$$
$$=(AF+BH)+(HM-LF)=$$
$$AF+BH=FE+EH=EM+EL=LM.$$

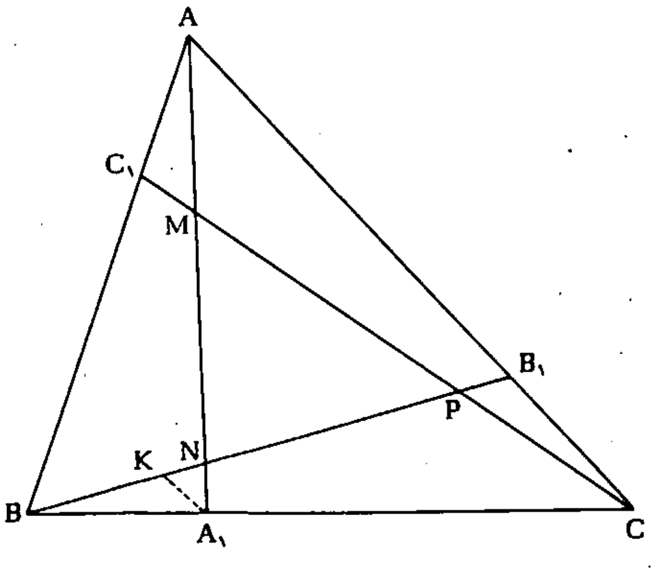
۸. درمثلث ABC سه نقطه A_1 و B_1 و C_1 را به‌ترتیب روی اضلاع BC، AC و AB چنان اختیارمی‌کنیم که

$$\frac{AC_1}{AB}=\frac{BA_1}{BC}=\frac{CB_1}{CA}=\frac{1}{n}$$

اگرسه خط AA_1، BB_1 و CC_1 دو به‌دویکدیگر را درنقاط M، N و P قطع کنند ثابت کنید

$$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}}=\frac{(n-2)^2}{n^2-n+1}$$

حل. از A_1 خطی موازی AC رسم می‌کنیم ومحل تلاقی آنرا با BB_1، K می‌نامیم اگر طول A_1K را برابر x فرض کنیم



$AB_1=n(n-1)x$ و $B_1C=nx$

$\frac{AN_1}{NA}=\frac{1}{n(n-1)}$ یا $\frac{NA_1}{AA_1}=\frac{1}{n^2-n+1}$

بنابراین

$$\frac{S_{NBA_1}}{S_{ABA_1}}=\frac{1}{n^2-n+1}$$

لذا

$$S_{NBA_1}=\frac{1}{n^2-n+1}S_{ABA_1}=\frac{1}{n(n^2-n+1)}S_{ABC}$$ و

همچنین، S_{AMC_1} و S_{PB_1C} نیز برابر S_{NBA_1} می‌باشند. و

$$S_{PCMA_1}=S_{PB_1AM}=S_{BNMC_1}=\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n(n^2-n+1)}\right)$$

$$S_{ABC}=\frac{n^2-n-1}{n(n^2-n+1)}S_{ABC}$$

درنتیجه:

$$S_{MNP}=S_{ABC}-(3S_{A_1NB}+3S_{MNBC_1})=$$

$$\left(1-\frac{3}{n(n^2-n+1)}-\frac{3(n^2-n-1)}{n(n^2-n+1)}\right)S_{ABC}=$$

$$\frac{n^2-4n+4}{n^2-n+1}S_{ABC}$$

۹. دنباله $\{a_n\}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم، $a_1=3$ و برای هر $n\geqslant 1$، $a_{n+1}=3^{a_n}$.

دو رقم سمت راست a_n را به‌ازای هر $n\geqslant 3$ پیدا کنید.

حل. به‌سادگی مشخص است که $a_3\equiv 87 \pmod{100}$.

اگر $a_n\equiv 87 \pmod{100}$ آنگاه $a_n=87+100k$.

و داریم؛

$$a_{n+1}\equiv 3^{87+100k}\equiv 3^{7+20(4+5k)}\equiv 3^7\equiv 87 \pmod{100}$$

بنابراین بوسیله استقراء، برای هر $n\geqslant 3$.

$$a_n\equiv 87 \pmod{100}$$

یعنی دو رقم سمت راست هر a_n برابر ۸۷ است.

۱۰. ثابت کنید معادله همنهشتی زیر دارای ۱۳ جواب دو به دو متمایز است.

$$4x^{26}+2x^{14}+20x^2\equiv 0 \pmod{13}$$

حل. x_1 و x_2 را دوجواب متمایز یك معادله همنهشتی به پیمانه m می‌نامیم درصورتی که

$$x_1\not\equiv x_2 \pmod{m}$$

بنابه قضیه فرما؛

$$x^{13}\equiv x \pmod{13}$$

بنابراین

$$2(x^{13})^2+2x^{13}\cdot x+(13+7)x^2\equiv$$

$$2x^2+2x^2+7x^2\equiv 13x^2$$

$$\equiv 0 \pmod{13}$$

بنابراین اگر $\{0, 1, 2, \cdots, 12\}$ یك دسته کامل‌مانده‌ها به پیمانه ۱۳ باشد چون معادله فوق به ازای هر x برقرار است پس تمام اعضای دسته کامل‌مانده‌ها که به پیمانه ۱۳ دوبه‌دو همنهشت نباشند درمعادله صدق می‌کنند.

۱۱. جسمی از نقاطی تشکیل شده است که فواصل این نقاط از نقاط داخل یا روی چندضلعی محدبی که پیرامون آن $2P$ و مساحت آن S است از d تجاوز نمی‌کند حجم جسم را پیدا کنید.

حل. اگرصفحه شکل مفروض یك چندضلعی محدب باشد در آن صورت جسم موردنظر از یك منشور به حجم $2dS$، نیم‌استوانه‌هائی به حجم کل πPd^2 ومجموعه‌ای ازقطاع‌های‌کروی که جمعاً کره‌ای به حجم $\frac{4}{3}\pi d^3$ بوجود می‌آورند تشکیل شده است. بنابراین حجم جسم برابراست با؛

$$V=2dS+\pi pd^2+\frac{4}{3}\pi d^3$$

۱۲. هرگاه درگروه G، به‌ازای هرسه عدد صحیح متوالی n، و برای هر $a, b\in G$ رابطه $(ab)^n=a^nb^n$ برقرارباشد ثابت‌کنید G آبلی است.

حل. فرض کنیم رابطه فوق به ازای i، $i+1$، $i+2$ برقرار باشد. دراین صورت،

$$(ab)^i=a^ib^i$$

$$a^{i+1}b^{i+1}=(ab)^{i+1}=(ab)^i a\cdot b=a^ib^iab$$

با توجه به‌قانون حذف،

$$\boxed{ab^i=b^ia} \qquad (1)$$

$$(ab)^{i+2}=a^{i+2}b^{i+2}=(ab)^{i+1}(ab)=a^{i+1}b^{i+1}ab$$

ازقانون حذف

$$\boxed{ab^{i+1}=b^{i+1}a}$$

بنابراین $ab^ib=b^{i+1}a$ و با توجه به رابطه (۱) داریم

$$b^iab=b^{i+1}a\Rightarrow ab=ba$$

۱۳. وسیعترین زیرمجموعه از R را به‌دست آورید که نسبت به عمل تقسیم گروه باشد.

حل. فرض کنیم $\varnothing\neq A\subset R$. چون A باید نسبت به عمل تقسیم شرکت‌پذیر باشد

باید داشته باشیم $\forall a, b, c\ (a\div(b\div c)=(a\div b)\div c)$

که ازآن نتیجه می‌شود اولاً، A نباید شامل صفرباشد

و ثانیا: $\frac{a}{bc}=\frac{ac}{b}$ که درنتیجه $c^2=1$

چون c عضو دلخواهی از A است نتیجه می‌شود که

$A=\{1, -1\}$

بسادگی معلوم می‌شود که این مجموعه نسبت به عمل تقسیم بسته،

دارای عضو بی‌اثر 1 وهرعضو آن وارون دارد.

۱۴. به چند طریق می‌توان n توپ را در n جعبه شماره‌دار قرار داد بطوری که دقیقاً یک جعبه خالی بماند.

الف- توپها نامتمایزند.

ب- توپها متمایز هستند.

حل. الف- دراین حالت مسأله به‌این منجر می‌شود که انتخاب جعبه خالی وجعبه‌ای است که باید دوتوپ داشته باشد ولذا تعداد طرق برابر $n(n-1)$ است.

ب- ابتدا جعبه خالی را انتخاب می‌کنیم، این به n طریق‌صورت می‌گیرد، سپس $n-1$ توپ را انتخاب کرده و درهریک از $(n-1)$ جعبه خالی یک توپ قرارمی‌دهیم چون n توپ‌داریم لذا تعداد طرق $n!$ است. بالاخره درهر مرحله آخرین توپ را دریکی ازجعبه‌های اخیر قرار می‌دهیم، تعداد طرق $(n-1)$ است بنابراین کل طرق $n\cdot n!\,(n-1)$ است اما در آخرین مرحله هرجعبه‌ای که دوتوپ در آن قرار داده می‌شود می‌تواند آن را به دوترتیب درآن قرار داد لذا در این حالت دوبار شمارش‌شده است وباید بردوتقسیم شود و درنتیجه تعدادکل طرق $\frac{n(n-1)\,n!}{2}$ است.

۱۵. تابع f بر R مشتق‌پذیر و در شرایط زیر صدق می‌کند، به ازاء هر x، $f(x+2)=-f(x)$ و $f(4-x)=f(x)$.
واگر $0<x<2$ آنگاه

$f(1)=0$ و $f'(x)<0$

الف- پیوستگی ومشتق‌پذیری تابع

$$g(x)=\frac{1}{2}\left(|f(x)|+f(x)\right)$$

را بررسی کنید.

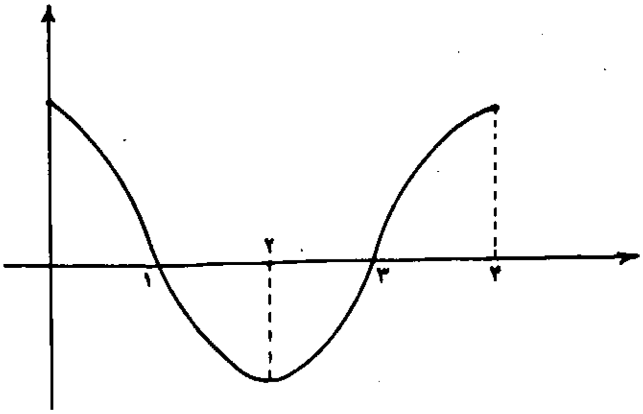
ب- نمودارتابع $h(x)=Sgn\,g(x)$ را رسم کنید.

حل. چون بازاء هر x، $f(x+2)=-f(x)$ لذا تابع‌متناوب و $T=4$ یک دورهٔ تناوب‌آن است. زیرا،

$$f(x+4)=f(x+x+2)=-f(x+2)=f(x)$$

همچنین بازاء هر x، $f(4-x)=f(x)$ درنتیجه خط $x=2$ یک محورتقارن تابع است. بنابه فرض درفاصله $(0,2)$ تابع اکیداً نزولی است، درنتیجه بنابه تقارن درفاصله $(2,4)$ تابع اکیداً صعودی است و $f(1)=f(3)=0$. بنابراین $T=4$ کوچکترین دوره تناوب و درفاصله $(0,4)$ فقط $x=2$ محور تقارن است لذا معادله کلی محورهای تقارن $x=4n+2$ است. $(n\in Z)$.

بنابراین‌می‌توانیم یک نمودارازتابع f را درفاصله $[0,4]$ بصورت زیر رسم کنیم.



اکنون،

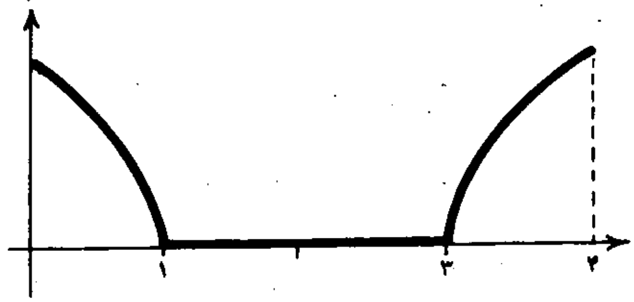
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & f(x)\geqslant 0 \\ 0 & f(x)<0 \end{cases}$$

بنابراین

$$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & f(x)>0 \\ 0 & f(x)<0 \end{cases}$$

در فاصله $[0,4]$. $f(1)=f(3)=0$ لذا تابع g درنقاط $x=1$ و $x=3$ مشتق‌پذیر نیست. بنابراین تابع g در نقاط $x=4n\pm1$ مشتق‌پذیر نیست. تابع در R پیوسته است.

نمودار g دریک دوره تناوب بصورت زیراست.



ب- با توجه به‌تعریف تابع علامت:

$$Sgn\,x=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

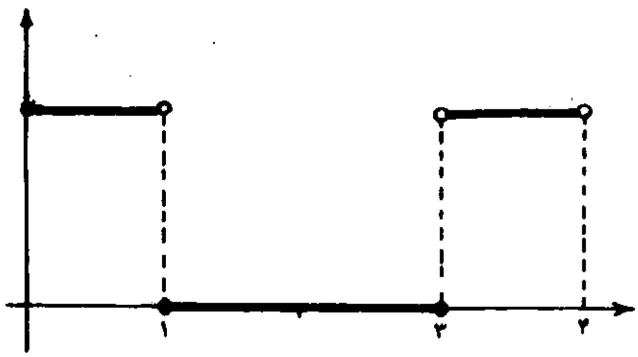
بنابراین:

$$h(x)=\begin{cases} 1 & g(x)>0 \\ 0 & g(x)=0 \\ -1 & g(x)<0 \end{cases}$$

تابع $Sgn\,g(x)$ نیزمتناوب و با دورهٔ تناوب $T=4$ است.

$$h(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<1 \text{ یا } 3<x<4 \\ 0 & 1\leqslant x\leqslant 3 \end{cases}$$

ونمودار آن دریک دورهٔ تناوب به‌صورت زیراست.



۱۶. ثابت کنید مجموع مربعات هرپنج عدد صحیح متوالی نمی‌تواند مربع کامل باشد.

حل. این پنج عدد می‌توانند به‌صورت، $n-2$، $n-1$، n، $n+1$ و $n+2$ باشند، بنابراین:

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=$$
$$5n^2+10=5(n^2+2)$$

اگر عبارت مربع کامل شود، لازم است n^2+2 بر ۵ بخش‌پذیر باشد که چنین نیست.

زیرا اگر n را برحسب باقیمانده‌های آن بر ۵ بنویسیم $n=5k$ یا $n=5k\pm1$ یا $n=5k\pm2$ که درهرحالت n^2+2 مضرب ۵ نیست.

۱۷. فرض کنیم که $f_p(x)=\sum_{k=1}^{n} k^p x^k$

و $x\neq 0$، $x\neq 1$.

الف_ ثابت کنید $f_{p+1}(x)=xf'_p(x)$.

ب_ به کمک رابطه فوق حاصل $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^p}{L^k}$ را محاسبه کنید.

ج_ $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}$ را محاسبه کنید.

حل. الف_ به‌سادگی داریم؛

$$f'_p(x)=\sum_{k=1}^{n}k^{p+1}x^{k-1}=\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n}k^{p+1}x^{k}=$$
$$\frac{1}{x}f_{p+1}(x)\Rightarrow f_{p+1}(x)=xf'_p(x)$$

ب_ ابتدا $f_1(x)$ را حساب می‌کنیم. با توجه به رابطه تراجعی فوق $f_1(x)=xf'_0(x)$ اما

$$f_0(x)=x+x^2+\dots+x^n=\frac{x^{n+1}-x}{x-1}$$

که با محاسبه مشتق آن $f'_0(x)$ وضرب آن در x داریم؛

$$f_1(x)=xf'_0(x)=x\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

وبه همین ترتیب $f_2(x)$ از رابطه $f_2(x)=xf'_1(x)$ محاسبه می‌شود ولذا هر $f_p(x)$ قابل محاسبه است.

حال‌اگردر $f_p(x)$، $x=\frac{1}{L}$ قرار دهیم حاصل $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^p}{L^k}$ محاسبه می‌شود.

ج_ اگر در $f_1(x)$، $x=\frac{1}{2}$ قرار دهیم؛

$f_1\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}$ و از طرف دیگر؛

$$f_1\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\frac{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+1}{\frac{1}{4}}=$$

$$n\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2=2-\frac{n+2}{2^n}$$

۱۸. فرض کنیم بدانیم $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

الف_ ثابت‌کنید $\lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=e^k$

ب_ اگر d عددی حقیقی باشد برای هرعدد صحیح $m\geqslant 0$ دنباله $\{a_m(i)\}$ $(i=0,1,2,\dots)$ را با شرط

$$a_m(i+1)=(a_m(i))^2+2a_m(i) \quad \text{و} \quad a_m(0)=\frac{d}{2^m}$$

، $i\geqslant 0$ تعریف می‌کنیم مطلوبست

$$\lim_{n\to\infty}a_n(n)$$

حل. الف_ فرض کنیم $\frac{k}{n}=\frac{1}{p}$ در این صورت

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=\lim_{p\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{p}\right)^p\right)^k=e^k$$

ب_ داریم؛

$$a_n(i+1)+1=(a_n(i)+1)^2$$

بنابراین به استقراء ثابت می‌شود،

$$\boxed{a_n(i)=(a_n(0)+1)^{2^i}-1}$$

بازاء $i=1$ برقراراست. فرض کنیم بازاء i برقرار باشد دراین صورت؛

$$a_n(i+1)=(a_n(i)+1)^2-1=$$
$$((a_n(0)+1)^{2^i}-1+1)^2-1=(a_n(0)+1)^{2^{i+1}}-1$$

که برقراراست.

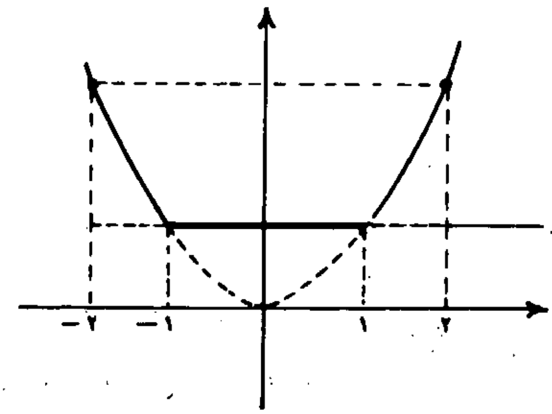
درنتیجه؛

$$\lim_{n\to\infty} a_n(n) = \lim_{n\to\infty} (a_n(۰)+۱)^{۲^n} - ۱ =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{d}{۲^n}\right)^{۲^n} - ۱ = e^d - ۱$$

۱۹. مطلوبست محاسبه $I=\int_{-۲}^{۲} \text{Max}\,\{۱, x^۲\}\,dx$.

حل.



با توجه به شکل یا محاسبه،

$$I = ۲\int_۰^۲ \text{Max}\,\{۱, x^۲\}\,dx = ۲\int_۰^۱ dx + ۲\int_۱^۲ x^۲dx$$

$$= ۲+۲\left(\frac{۱}{۳}x^۳\right)\Big|_۱^۲ = ۲+\frac{۱۴}{۳} = \frac{۲۰}{۳}$$

۲۰ـ ثابت کنید تابع با ضابطه $f(x)=x+[x]$ روی حوزه مقادیرش وارون‌پذیر است و وارون‌آنرا پیدا کنید.

حل. اگر $n\leqslant x<n+۱$ آنگاه $f(x)=x+n$ و $۲n\leqslant y<۲n+۱$. تابع در فاصله $[n, n+۱)$ اکیداً صعودی و یک به‌یک است. و چون برد تابع اجتماعی از فاصله‌های $[۲n, ۲n+۱)$ است و اشتراک هر دو به دوی فاصله‌های فوق تهی است لذا، تابع در R یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر است که وارون آن به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} y=x+n \\ n\leqslant x<n+۱ \\ ۲n\leqslant y<۲n+۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y-n \\ n\leqslant x<n+۱ \\ ۲n\leqslant y<۲n+۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f^{-۱}(x)=y=x-n \\ ۲n\leqslant x<۲n+۱ \\ n\leqslant y<n+۱ \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} y=x-\frac{[x]}{۲} \\ ۲n\leqslant x<۲n+۱ \\ n\leqslant y<n+۱ \end{cases}$$

زیرا، اگر $y=x+[x]$ آنگاه $[y]=۲[x]$.

مسائل سی‌امین دوره مسابقات المپیاد ریاضی

ترجمه: فرامرز صابری ــ حسین شجاعی
دانشجویان رشته مهندسی کامپیوتر دانشگاه صنعتی شریف

روز اول

۱ـ ثابت کنید که مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, ۱۹۸۹\}$ می‌تواند به مجموعه‌های A_i $(i=۱, ۲, \ldots, ۱۱۲)$ افراز شود بطوری که:

(i) هر A_i، ۱۷ عضو داشته باشد.

(ii) مجموع همه عضوهای هر A_i، یکسان باشد.

حل. به‌ازای $i=۱, ۲, \ldots, ۱۱۷$ مجموعه‌های B_i و C_i را به‌این شکل تعریف می‌کنیم:

$B_i=\{i+۱۱۷k \mid ۰\leqslant k\leqslant ۷\}$ و $C_i=\{۱۹۹۰-x \mid x\in B_i\}$

که دراین صورت به‌ازای هر $j\neq i$ داریم $B_i\cap B_j=\varnothing$ (دسته‌های همنهشتی به‌هنگ ۱۷) وبنابراین $C_i\cap C_j=\varnothing$ برای هر $i\neq j$ داریم:

$$(۱)\quad \text{Max} \bigcup_{i=۱}^{۱۱۷} B_i = ۱۱۷+۱۱۷\times ۷ = ۹۳۶$$

$$(۲)\quad \left|\bigcup_{i=۱}^{۱۱۷} B_i\right| = \sum_{i=۱}^{۱۱۷} |B_i| = ۱۱۷\times ۸ = ۹۳۶$$

$$(۳)\quad \text{Min} \bigcup_{i=۱}^{۱۱۷} C_i = ۱۹۹۰-۹۳۶ = ۱۰۵۴$$

$$(۴)\quad \left|\bigcup_{i=۱}^{۱۱۷} C_i\right| = \sum_{i=۱}^{۱۱۷} |C_i| = ۱۱۷\times ۸ = ۹۳۶$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

$$\bigcup_{i=۱}^{۱۱۷} B_i = \{۱, ۲, \ldots, ۹۳۶\}$$

از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که:

$$\bigcup_{i=1}^{117} C_i=\{1054, 1055, \dots, 1989\}$$

به‌ازای $i=1, 2, \dots, 117$، فرض کنید $A'_i=B_i\bigcup C_i$

دراین صورت A'_1 و A'_2 و ...، A'_{117}، ۱۱۷ مجموعهٔ ۱۶ عضوی جدا ازهم می‌باشند بدین شکل که:

$$\bigcup_{i=1}^{117} A'_i=\{1, 2, \dots, 1989\}-\{937, 938, \dots, 1053\}$$

حال A_i را به روش زیرمشخص می‌نماییم:

به‌ازای $i=1, 2, \dots, 59$

$$A_i=(A'_i-\{i\})\bigcup\{60-i\}\bigcup\{995+2i-60\}$$

به‌ازای $i=60, 61, \dots, 117$

$$A_i=(A'_i-\{i\})\bigcup\{117-i\}\bigcup\{995+2i-117\}$$

داریم:

$$\bigcup_{i=1}^{59}\{995+2i-60\}\bigcup\bigcup_{i=60}^{117}\{995+2i-117\}=\{937, 939, 941, \dots, 1053\}\bigcup\{938, 940, \dots, 1052\}=\{937, 938, \dots, 1053\}$$

بنابراین اعدادی که درتعریف A_i درمنتهاالیه راست قرار دارند دقیقاً همان اعدادی هستند که در A'_iها نبوده‌اند. در راه رسیدن از A'_i به A_i یک تعویض دوجانبه بین کوچکترین عضو A'_i و A'_{60-i} $(1\leqslant i\leqslant 59)$ یا A'_i و A'_{117-i} $(60\leqslant i\leqslant 117)$ وجود دارد، بطوری که هیچ عضوی اضافه یا کم نشده است.

بنابراین به‌ازای هر i که $i\in\{1, 2, \dots, 117\}$،

$$|A_i|=|A'_i|+1\ (=17)$$

بالاخره مجموع اعضای هر A_i برابراست با:

$$\sum_{x\in A_i}x=\begin{cases}\sum_{x\in A'_i}x-i+60-i+995+2i-60 & 1\leqslant i\leqslant 59\\ \sum_{x\in A'_i}x-i+117-i+995+2i-117 & 60\leqslant i\leqslant 117\end{cases}$$

بنابراین

$$\sum_{x\in A_i}x=\sum_{x\in A'_i}x+995=\sum_{x\in B_i}(x+\overbrace{1990-x}^{1990})+995=8\times 1990+995$$

بنابراین مجموعه‌های A_iها همان حاصل‌جمع را دارند.

۲ـ درمثلث حادةالزاویه ABC، نیمسازهای زوایای A و B و C بترتیب دایره محیطی را درنقطه‌های A_1 و B_1 و C_1 قطع می‌کند. همچنین نقاط A_0 و B_0 و C_0 بترتیب مراکز دوایر محاطی خارجی متناظر با رئوس A و B و C می‌باشد. ثابت کنید:

(i) مساحت مثلث $A_0B_0C_0$ دوبرابر مساحت شش‌ضلعی $AC_1BA_1CB_1$ است.

(ii) مساحت مثلث $A_0B_0C_0$ حداقل چهار برابر مساحت مثلث ABC است.

حل: مرکز دایره محاطی داخلی را I می‌نامیم (شکل ۱) پس

(۱) $\overline{IA_1}=\overline{A_1A_0}$

یکی از راه‌های اثبات (۱) این است که چون AA_0 و BB_0 و CC_0 ارتفاعات مثلث $A_0B_0C_0$ است درنتیجه دایره محیطی مثلث ABC، دایره نه نقطه مثلث $A_0B_0C_0$ است. بنابراین این دایره، IA_0 را نصف می‌کند. یا بدون مراجعه به دایره نه نقطه خواهیم داشت.

$$\sphericalangle A_1IB=\frac{1}{2}\sphericalangle A+\frac{1}{2}\sphericalangle B$$ (زاویه خارجی مثلث AIB)

$$\sphericalangle IBA_1=\frac{1}{2}\sphericalangle A+\frac{1}{2}\sphericalangle B=\sphericalangle A_1IB$$

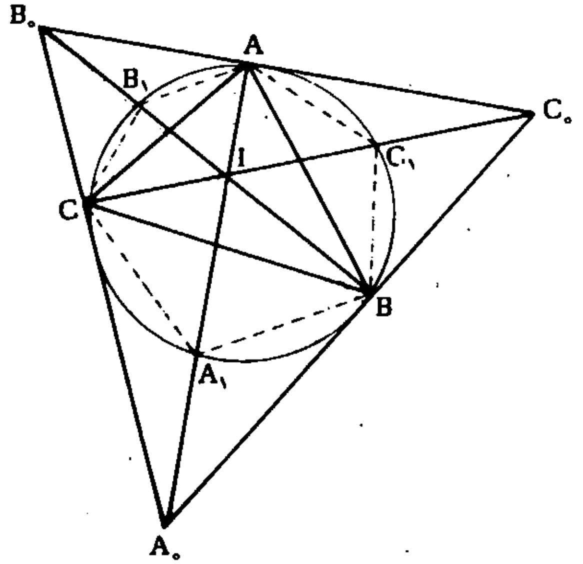
بنابراین $\overline{IA_1}=\overline{A_1B}$ (۲).

ولی همچنین داریم:

$$\sphericalangle A_1A_0B=90-\sphericalangle A_1IB$$

$$\sphericalangle A_1BA_0=90-\sphericalangle IBA_1$$

بنابراین $\overline{A_1B}=\overline{A_1A_0}$ (۳).



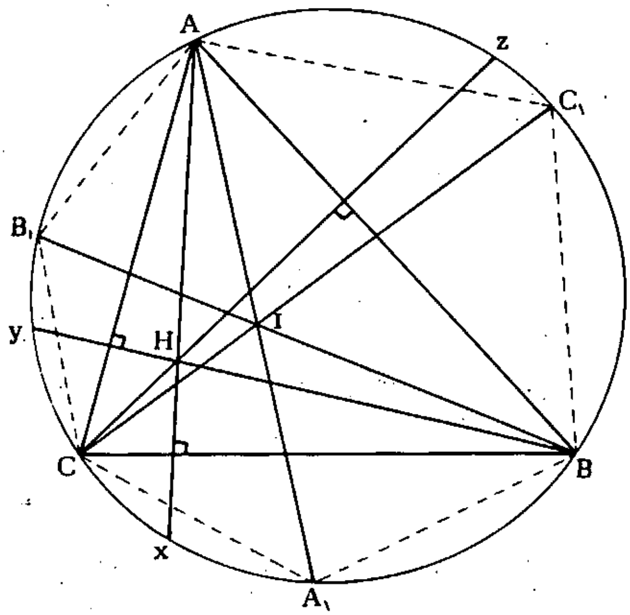
با توجه به (۱) خواهیم داشت که: مساحت مثلث IA_1B = مساحت مثلث A_0A_1B. با تکرار این عمل برای شش مثلثی که یکی از رئوس آنها I است وجمع نمودن آنها با هم، تساوی

موردنظر را بدست می‌آوریم.

برای اثبات نامساوی (ii)، سه ارتفاع مثلث ABC را رسم می‌کنیم ومحل برخورد آنها را H می‌نامیم (شکل ۲). فرض می‌کنیم x و y و z بترتیب قرینه‌های H نسبت به BC و AC و AB باشد. نقاط z و y و x روی دایره محیطی ABC قرار دارند (زیرا $\sphericalangle CxB = \sphericalangle CHB = ۱۸۰ - \sphericalangle A$ و این از روابط چهارضلعی‌های محاطی تشکیل شده ازارتفاع‌ها نتیجه می‌شود).

چون A_1 وسط کمان BC است، مساحت $BA_1C \leqslant$ مساحت BxC. بنابراین مساحت شش‌ضلعی $AC_1BA_1CB_1 \leqslant$ مساحت شش‌ضلعی $AzBxCy$ = ۲ (مساحت BHC + مساحت CHA + مساحت AHB) = ۲ مساحت ABC.

که بدین ترتیب نامساوی مطلوب اثبات می‌شود.



۳ـ فرض کنید n و k اعداد صحیح مثبت و S مجموعه‌ای n نقطه‌ای درصفحه باشد بطوری که:

(i) هیچ سه نقطه‌ای از S بریك صفحه واقع نباشد.

(ii) برای هرنقطه P از S حداقل k نقطه از S وجود داشته باشد که فاصلهٔ آنها از P یکسان باشد.

ثابت کنید $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

حل. فرض می‌کنیم $k \geqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$. نقطه P از S را در نظر می‌گیریم. حداقل k نقطه در S موجود است که فاصله‌شان از P یکسان است. درنتیجه حداقل $\binom{k}{2}$ جفت نقطه از A و B موجود است بطوریکه $AP = BP$ چون این موضوع برای تمام نقاط P از S صادق است، پس حداقل $n\cdot\binom{k}{2}$ جفت نقطه از A و B وجود دارد بطوری‌که برعمود منصف AB حداقل یك نقطه از S وجود دارد. داریم:

$$n\cdot\binom{k}{2} = n(k-1)\,k/2 \geqslant n/2\left(\sqrt{2n}-\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{2n}+\frac{1}{2}\right) =$$

$$\frac{n}{2}\left(2n-\frac{1}{4}\right) = n\left(n-\frac{1}{8}\right) > n(n-1) = 2\binom{n}{2}$$

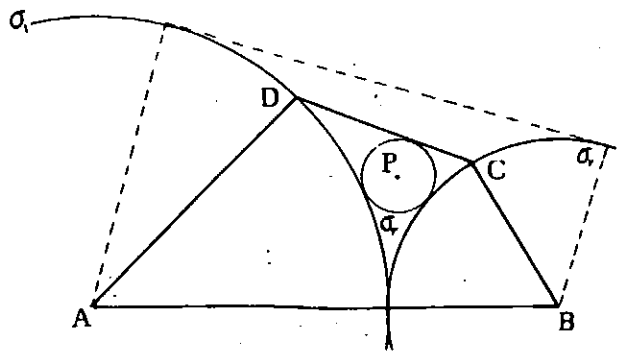
چون $\binom{n}{2}$ مجموع کلیه جفتهای ممکن‌ازنقاط A و B در S است، باید جفت نقطه‌ای از A و B در S باشد بطوری که برای آنها $P_1, P_2, \dots, P_m$ $(m>2)$ $AP_1 = BP_1$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ این نقاط برروی یك خط قرار دارند واین (۱) را نقض می‌کند.

روز دوم

۴ـ فرض کنید $ABCD$ یك چهارضلعی محدب با رابطه $AB = AD + BC$ باشد (اضلاع این چهار ضلعی AB، AD، BC و CD است). نقطه‌ای مانند P در داخل چهارضلعی با فاصله h از CD وجود دارد بطوریکه $AP = h + AD$ و $BP = h + BC$. ثابت کنید که:

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$$

حل. اجازه دهید ساختار چهارضلعی فوق با دوخاصیت داده‌شده را برای مقادیرمختلف h درنظر بگیریم. فرض می‌کنیم $AD = R$ و $BC = r$. ابتدا ABP را با اضلاع $R+r$ و $R+h$ و $r+h$ می‌سازیم. سپس(شکل را ببینید) دایره σ_1 را به مرکز A وشعاع R، دایره σ_2 را بەمرکز B وشعاع r وبالاخره دایره σ_3 را به مرکز P وشعاع h رسم می کنیم. نقاط C و D به‌ترتیب بر دو دایره σ_1 و σ_2 قرار دارند وخط CD مماس بر σ_3 می‌باشد. از این جا مشخص است که ماکزیمم مقدار h که درآن این ساختار موجود باشد وقتی است که خط CD بر دوایر σ_1 و σ_2 نیز مماس باشد. بالطبع دراین حالت زوایای C و D قائمه خواهند بود. نشان خواهیم داد که وقتی CD برسه دایره مماس باشد رابطه $\frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$ برقرار خواهد بود. از این رابطه وبا توجه به ماکزیمم بودن h دراین حالت



نامساوی موردنظر نتیجه خواهد شد.
پای عمود از نقطه P بر CD را M می‌نامیم و از قضیه فیثاغورث خواهیم داشت:

$$CD = \sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$$
$$CD = CM+MD = \sqrt{(r+h)^2-(r-h)^2} + \sqrt{(R+h)^2-(R-h)^2} = 2\sqrt{rh}+2\sqrt{Rh}$$

بنابراین.

$$\sqrt{Rr}=\sqrt{rh}+\sqrt{Rh}$$

و با تقسیم کردن طرفین بر $\sqrt{Rrh}$ داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{h}}=\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{1}{\sqrt{r}}$$

۵- ثابت کنید به‌ازای هرعدد صحیح مثبت n، n عدد صحیح مثبت متوالی وجود دارد بطوری که هیچکدام از آنها توان صحیحی از یك عدد اول نیست.

حل. با توجه به n، عدد N مناسبی را مشخص خواهیم کرد بطوری که اعداد صحیح $N+1$، $N+2$، . . . ، $N+n$ دارای خاصیت موردنظر باشد. N را بدین شکل تعریف می‌کنیم $N=((n+1)!)^2+1$ دراین صورت $j+1$ یك فاکتورصحیح از $N+j$ می‌باشد ($1\leqslant j\leqslant n$). حال از برهان خلف استفاده می‌نماییم. فرض می کنیم $N+j=P^m$ توانی از عدد اول P باشد. پس عددی مثل r ($1\leqslant r<m$) وجود دارد بطوری که $j+1=P^r$. ولی در این صورت $P^{r+1}|((n+1)!)^2$ و $P^{r+1}|P^m$ که نتیجه خواهد داد $P^{r+1}|N-1$ و $P^{r+1}|N+j$ وبنابراین $P^{r+1}|j+1$ که این یك تناقض است.

۶- یك جایگشت $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ازمجموعه $\{1, 2, \dots, 2n\}$ وقتی که n یك عدد صحیح مثبت باشد، دارای خاصیت T است هرگاه $|x_i - x_{i+1}| = n$ برای هر i $(1\leqslant i\leqslant (n-1))$. نشان دهید برای هر n، تعداد جایگشتها با خاصیت T بیشتر از جایگشتهایی بدون این خاصیت است.

حل. دوعدد متمایز x و y از مجموعه $\{1, 2, \dots, 2n\}$ را دوقلو گوئیم هرگاه $n=|x-y|$. جایگشت $(x_1, x_2,\dots, x_{2n})$ ازمجموعه $\{1,2,\dots,2n\}$ (یا کلیتر، جایگشت $2n$ عضوی مرکب‌از n جفت دوقلو) ازنوع T_k است اگر $n=|x_i-x_{i+1}|$ برای k مقدار i برقرار باشد. (درنتیجه درجایگشت از نوع T_0 تمام دوقلوها ازهم جدا هستند و درنوع T_1 دقیقاً یك جفت‌دوقلو در کنار هم ظاهر می‌شود). تعداد جایگشتهای نوع T_k از $\{1,2,\dots,2n\}$ را با $F_n(k)$ نمایش می‌دهیم. فرض می‌کنیم $(x_1, x_2,\dots,x_{2n})$ جایگشتی ازنوع T_0 باشد. x_{2n} وجفت آن‌را ازمجموعه برمی‌داریم. چیزی‌که باقی می‌ماند یك‌جایگشت $2n-2$ عضوی (شامل $n-1$ جفت دوقلو) است که یا این جایگشت:

(۰, ۰): ازنوع T_0 است ویا

(۰, ۱): ازنوع T_1 است که تنها جفت دوقلوی کنار هم آن توسط عضو خارج شده (جفت x_{2n}) ازهم جدا شده بودند.

دراینجا، x_{2n} می‌تواند $2n$ مقدار را اختیار کند در (۰, ۰) جفت x_{2n} می‌تواند $2n-2$ جا را بگیرد. در (۰, ۱) جای جفت x_{2n} بستگی به چگونگی جایگشت نوع T_1 از $2n-2$ عضو دارد. ازتمام این‌ها نتیجه می‌شود که:

$$(0)\quad F_0(n)=2n((2n-2)F_0(n-1)+F_1(n-1))$$

حال فرض می‌کنیم $(x_1, x_2,\dots,x_{2n})$ یك جایگشت نوع T_1 باشد و (x_j, x_{j+1}) تنها همسایه‌های دوقلو باشند. با خارج کردن این جفت یك جایگشت $2n-2$ عضوی داریم که یا:

(۱, ۰): ازنوع T_0 است ویا:

(۱, ۱): ازنوع T_1 است که جفت دوقلوی همسایه توسط جفت دوقلوی خارج شده جدا شده بودند. جفت (x_j, x_{j+1}) از بین n جفت دوقلو انتخاب شده ومی‌تواند به‌دوشکل فوق مرتب‌شود. درحالت (۱, ۰) این جفت دوقلو می‌تواند یکی از $2n-1$ جا را اشغال نماید. درحالی‌که در حالت (۱, ۱) مکان این‌جفت دوقلو بستگی به جایگشت نوع T_1 از $2n-2$ عضو دارد.
بنابراین:

$$(1)\quad F_1(n)=2n((2n-1)F_0(n-1)+F_1(n-1))$$

با کم کردن رابطه (۱) از (۰) داریم:

$$F_1(n)=F_0(n)+2nF_0(n-1)$$

با جایگزین کردن $n-1$ به‌جای n در (۰) یك رابطه بازگشتی ازمرتبه دوم خواهیم داشت. یعنی:

$$F_0(n)=2n((2n-1)F_0(n-1)+(2n-2)F_0(n-2))$$

نسبت تعداد جایگشتهای T_0 به‌کل جایگشت‌های ممکن $2n$عضو را $P_{(n)}$ می‌نامیم. اعمال سادهٔ جبری نتیجه می‌دهد:

$$P_{(n)}=P_{(n-1)}+\frac{P_{(n-2)}}{(2n-3)(2n-1)}$$

بنابراین داریم:

$$P_{(n)}-P_{(n-1)}=\frac{P_{(n-2)}}{(2n-3)(2n-1)}<\frac{1}{(2n-3)(2n-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)$$

وچون $P_{(1)}=0$ خواهیم داشت:

$$P_{(n)}=\sum_{k=2}^{n}(P_{(k)}-P_{(k-1)})<\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)<\frac{1}{2}$$

نتیجه. به‌ازاء هر n، پدیدارشدن یك جایگشت با حداقل یك جفت دوقلو کنارهم محتملتر است.

محاسبهٔ مقدماتی انتگرالهای

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx \text{ و } \int_0^\infty \cos x^2 dx \text{ ، } \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

نوشتهٔ

ROBERT WEINSTOCK

Department of Physics, Oberlin College, Oberlin, OH 44074 Math. Monthly, Jan, 1990

ترجمه و تنظیم از:

حکیمه ماهیار

گروه ریاضی ـ دانشگاه تربیت معلم

«انتگرالهای فرنل[1] اهمیت بسزایی درنظریهٔ پراش[2] دارند. این انتگرالها دراغلب کتابهای آنالیز مختلط به روش ماندهها، که یکی از ابزارهای قوی برای محاسبه انتگرالهای حقیقی توسعی است، محاسبه میشوند. دراینجا روشی مقدماتی برای محاسبه این انتگرالها ارائه میکنیم.»

در کمتر ازیک دهۀ قبل روش جدیدی برای محاسبه انتگرال

$$J=\int_0^\infty e^{-x^2}dx \qquad (1)$$

ظاهر گردید که مقدار آن از مدتها قبل معلوم و برابر $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ میباشد. مهارت این روش درمعرفی

$$e(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt \qquad (2)$$

نهفته است بطوری که با مشتقگیری از آن بسادگی تساوی $\pi=4J^2$ بهدست میآید. با وجودی که $e(x)$ با انتگرال توسعی تعریف شده است، میتوان از قاعده مقدماتی لایپنیتز[3] برای محاسبه مشتق آن استفاده کرد: یا باید قضیهٔ عمیقتری را به کاربرد که مثلاً در [2] آمده است، یا محاسبهٔ ویژهای را که در [1] برای تشکیل $e'(x)$ بهکار رفته است انجام داد.

ایدهٔ اصلی روشی را که دراین مقاله ارائه میدهیم از [1] گرفته شده و درحقیقت تعدیل همان روش [1] میباشد، ولی پیچیدگی مشتقگیری ازانتگرالهای توسعی را ندارد.

محاسبه انتگرالهای فرنل در [1] لزوماً با همان روش قبلی، لیکن با تغییرات لازم، انجام شده است. بهعبارت دیگر درمحاسبهٔ انتگرال (۱) مجدداً ازمشتقگیری انتگرالهای توسعی استفاده شده است، که ازپیچیدگی خاصی برخوردار است. دراین مقاله انتگرالهایفرنل را با تعدیلآن روش و بدون چنینپیچیدگیهایی محاسبه مینمائیم.

ابتدا انتگرال (۱) را محاسبه میکنیم: بهجای (۲) تابع

$$f(x)=\int_0^1\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt \qquad (3)$$

را درنظرمیگیریم. تابع $f(x)$ برای هر x حقیقی پیوسته و مشتقپذیر است، و

$$f(0)=\arctan 1=\frac{\pi}{4} \text{ و } f(\infty)=0 \ , \qquad (4)$$

زیرا برای هر $x>0$،

$$0<f(x)=e^{-x}\int_0^1\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt<e^{-x}\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

با بهکار بردن قاعده لایپنیتز در (۳)، برای هر $x>0$ داریم،

$$f'(x)=-\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt=-e^{-x} \qquad (5)$$

$$\int_0^1 e^{-xt^2}dt=-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}}e^{-u^2}du=-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}g(\sqrt{x}),$$

که

$$g(z)=\int_0^z e^{-u^2}du. \qquad (6)$$

از (۵) از ۰ تا ∞ انتگرال گرفته، وتغییر متغیر $z=\sqrt{x}$ میدهیم. دراینصورت با استفاده از (۶) بهدست میآوریم:

$$f(\infty)-f(0)=-\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}g(\sqrt{x})\,dx=-2\int_0^\infty e^{-z^2}g(z)\,dz$$

$$=-2\int_0^\infty g'(z)\,g(z)dz=[g(0)]^2-[g(\infty)]^2. \qquad (7)$$

با توجه به (۱)، (۴) و (۶)، از (۷) نتیجه میشود که

$-J^2=-\frac{\pi}{4}$، بنابراین $J=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

برای محاسبه انتگرالهای فرنل

$$F=\int_0^\infty \cos y^2 dy \quad \text{و} \quad G=\int_0^\infty \sin y^2 dy, \qquad (8)$$

مانند (۳)، توابع ذیل را تعریف می‌کنیم:

$$\alpha(x)=\int_0^1 \frac{\cos xt^2}{1+t^2}dt \quad \text{و} \quad \beta(x)=\int_0^1 \frac{\sin xt^2}{1+t^2}dt. \qquad (9)$$

توابع $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ نیز برای هر x حقیقی، پیوسته و مشتقپذیرند، و

$$\alpha(0)=\frac{\pi}{4} \quad \text{و} \quad \beta(0)=0. \qquad (10)$$

بعلاوه، بعداً نشان می‌دهیم که

$$\alpha(\infty)=0 \quad \text{و} \quad \beta(\infty)=0. \qquad (11)$$

با به‌کاربردن قاعده لایبنیتز در هردو انتگرال (۹)، ویك سری عملیات جبری، معادلات دیفرانسیل خطی ذیل به‌دست می‌آیند:

$$\alpha'(x)-\beta(x)=-q(x) \text{ و } \beta'(x)+\alpha(x)=p(x), \qquad (12)$$

که برای $x>0$،

$$(13)\quad \begin{cases} p(x)=\int_0^1 \cos xt^2 dt=\frac{1}{\sqrt{x}} \\ q(x)=\int_0^1 \sin xt^2 dt=\frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{x}} \cos y^2 dy=\frac{1}{\sqrt{x}}\,u(\sqrt{x}) \\ \int_0^{\sqrt{x}} \sin y^2 dy=\frac{1}{\sqrt{x}}\,v(\sqrt{x}) \end{aligned}\right\},$$

و

$$u(z)=\int_0^z \cos y^2 dy \quad \text{و} \quad v(z)=\int_0^z \sin y^2 dy. \qquad (14)$$

در (۱۲) عملیاتی به صورت ذیل انجام می‌دهیم: (الف) اولی را در $\cos x$ –، و دومی را در $\sin x$ ضرب کرده وسپس حاصلضربها را جمع می‌کنیم. (ب) اولی را در $\sin x$، و دومی را در $\cos x$ ضرب کرده و حاصلضربها را جمع می‌کنیم. دراین صورت روابط ذیل نتیجه می‌شوند:

$$(15)\quad \begin{aligned} &\text{(الف)}\quad \frac{d}{dx}\{\beta(x)\sin x-\alpha(x)\cos x\}= \\ &\qquad p(x)\sin x+q(x)\cos x \\ &\text{(ب)}\quad \frac{d}{dx}\{\beta(x)\cos x+\alpha(x)\sin x\}= \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} p(x)\sin x+q(x)\cos x \\ p(x)\cos x-q(x)\sin x \end{aligned}\right\}.$$

از (الف) و (ب) از ۰ تا ∞ انتگرال می‌گیریم. با استفاده از (۱۰) و (۱۱) به‌دست می‌آوریم،

$$(16)\quad \int_0^\infty [p(x)\sin x+q(x)\cos x]\,dx=\frac{\pi}{4} \text{ و}$$

$$\int_0^\infty [p(x)\cos x-q(x)\sin x]\,dx=0$$

حال (۱۳) را به‌کارمی‌بریم وتغییرمتغیر $z=\sqrt{x}$ می‌دهیم. لذا با توجه به (۱۴)، می‌توان (۱۶) را به‌صورت ذیل نوشت:

$$\frac{\pi}{4}=2\int_0^\infty [u(z)\sin z^2+v(z)\cos z^2]\,dz=2$$

$$\int_0^\infty [u(z)\,u'(z)+u(z)\,u'(z)]\,dz$$

$$(17)\qquad =2\int_0^\infty \frac{d}{dz}[u(z)\,v(z)]\,dz=2FG \text{ و}$$

$$0=2\int_0^\infty [u(z)\cos z^2-v(z)\sin z^2]\,dz=2$$

$$\int_0^\infty [u(z)\,u'(z)-v(z)\,v'(z)]\,dz$$

$$(18)\qquad =\int_0^\infty \frac{d}{dz}\{[u(z)]^2-[v(z)]^2\}\,dz=F^2-G^2$$

درهر دوحالت، از (۸) و (۱۴) کمك گرفته‌ایم.

جهت اثبات مثبت بودن G، (کـه از آن با توجه به (۱۷)، مثبت بـودن F نیز نتیجه میشود)، در (۸) تغییر متغیر $y=\sqrt{x}$ را منظور می‌کنیم ومی‌نویسیم

$$G=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

بدیهی است که، سری فوق یك سری متناوب با جملات نزولی است. جمله kام آن وقتـی $k\to\infty$ به صفـرمیل می‌کند و به ازای $k=0$ جملـه مثبـت به‌دست می‌آید. در نتیجـه $G>0$.

بنابراین از (۱۷) و (۱۸) نتیجه می‌شودکه $F=G=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

حال جهـت اثبـات تساوی دوم (۱۱) در (۹) تغییـر متغیر $y=xt^2$ می‌دهیم. برای $x>\pi$،

$$\beta(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^x \frac{\sin y}{\sqrt{y}\left(1+\frac{y}{x}\right)}\,dy. \qquad (19)$$

اکنون بازه $[0,x]$ را به‌زیربازه‌های $[0,\pi]$، $[\pi,2\pi]$، ...، $[n\pi,x]$ افزارمی‌کنیم که n یـك عدد مثبت مناسبی می‌باشد، و (۱۹) را بـه‌صـورت حاصلجمـع انتگـرالهـا روی زیر بازه‌ها می‌نویسیم. بدیهی است که یك حاصلجمـع متناوب با جملاتی نزولی حاصل می‌شود کـه جملـه اول آن مثبت است. بنابراین برای $x>\pi$،

مطالبی در مورد اعداد جبری و غیر جبری

تهیه و تنظیم از: نظام ایزدی دبیر دبیرستانهای کاشان

دراین بحث ابتدا اعداد جبری وغیرجبری را تعریف کرده سپس با اثبات شمارش‌پذیری اعداد جبری و ناشمارائی اعداد حقیقی پی به‌وجود اعداد غیرجبری برده و در خاتمه ناشمارا بودن اعداد غیرجبری را ثابت می‌کنیم.

۱) تعریف. اعداد حقیقی دو نوع‌اند یک نوع آن اعدادی هستند که‌می‌توانند ریشه‌های معادله‌ای جبری باضرایب صحیح به‌صورت زیر باشند:

$$(1) \quad c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$$

این اعداد را که متشکل از تمام اعداد گویا و بعضی اعداد گنگ است اعداد جبری می‌نامیم مثلاً، عدد گویای $\frac{p}{q}$ که در معادله $qx - p = 0$ صدق می‌کند و $\sqrt{2}$ که یکی از ریشه‌های معادله $x^2 - 2 = 0$ است و $\cos 20°$ که می‌توانند در معادله $8x^3 - 6x - 1 = 0$ صدق کند (از تساویهای $x = \cos 20°$ و $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ می‌توان به معادله مذکور رسید) همگی اعدادی جبری می‌باشند.

نوع دیگر اعداد حقیقی اعدادی هستند که در معادله‌ای از نوع (۱) صدق نمی‌کنند.

این نوع اعداد را اعداد متعالی یا اعداد غیرجبری می‌نامند. مثلاً، اعداد π و e و $\lg 2$ متعالی‌اند که البته اثبات متعالی بودن آنها به‌سادگی نوشتن آنها نیست و خود بحث دیگری است خارج از حوصله بحث ما.

(برای مزید اطلاع خواننده می‌تواند به‌کتابهای تئوری اعداد دکتر مصاحب و مرجع [۲] مراجعه کند)

۲) شمارش پذیری اعداد جبری. مجموعه نامتناهی A را شمارش‌پذیرگویند در صورتی‌که بتوان بین مجموعه A و مجموعه اعداد طبیعی (N) یک تناظر یکبیک برقرار ساخت. مثلاً، مجموعه اعداد صحیح را می‌توان به‌ترتیب زیر با مجموعه اعداد طبیعی متناظر ساخت:

$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots$

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \ldots$

در تناظر فوق عدد طبیعی مربوط به تناظر را شماره تناظر اعداد صحیح می‌نامیم. مثلاً، عدد (۷) شماره تناظر (۳−) و عدد (۴) شماره تناظر (۲) می‌باشد.

درموردشمارش‌پذیری اعدادجبری معادله (۱)را درنظر می‌گیریم. با توجه به‌اینکه تعداد ریشه‌های این معادله، برای n ثابت، متناهی می‌باشد **اگر بتوانیم اینگونه معادلات را شماره گذاری کنیم خواهیم توانست اعداد جبری را نیز شماره‌گذاری کنیم.** به این ترتیب که جدولی درست می‌کنیم که در سطر اول آن ریشه‌های متمایز معادله اول قرار گیرد و در سطر دوم آن ریشه‌های متمایز معادله دوم را قرار می‌دهیم که با ریشه‌های معادله اول نیز فرق داشته باشند و در سطر سوم آن ریشه‌های متمایز معادله سوم‌را قرار می‌دهیم که با ریشه‌های معادله‌های اول و دوم نیز متمایز باشند و الی آخر. در این صورت مجموعه‌ای از اعداد جبری به‌صورت زیر خواهیم داشت که مجموعه‌ای شمارش پذیراست.

$$a_1 \to a_2 \to a_3 \cdots \to a_l$$

$$\downarrow$$

$$b_1 \leftarrow b_2 \leftarrow b_3 \cdots \leftarrow b_m$$

$$\downarrow$$

$$c_1 \to c_2 \to c_3 \cdots \to c_t$$

$$\downarrow$$

....

....

بنابراین کافی است شمارش‌پذیری معادلات جبری را ثابت کنیم. برای این منظور معادلات ازنوع (۱) را با شماره $2^{\alpha_0} \times 3^{\alpha_1} \times 5^{\alpha_2} \times \cdots \times p^{\alpha_n}$ متناظر می‌سازیم، که‌درآن p، $(n+1)$ مین عدد اول و α_i **شماره تناظر عدد صحیح c_i در مجموعه اعداد صحیح می‌باشد.** مثلاً شماره معادله $x^2 - 2 = 0$ عدد $2^5 \times 3^1 \times 5^2 = 2400$ می‌باشد. زیرا:

$$c_0 = -2,\ c_1 = 0,\ c_2 = 1 \Rightarrow \alpha_0 = 5,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 2$$

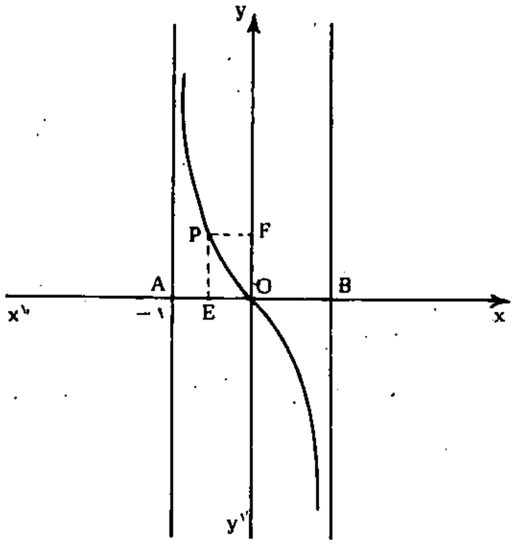
با توجه به‌اینکه حاصلضرب توانهای اعداد اول با پایه‌ها یا نماهای مختلف متفاوتند و تجزیه اعداد طبیعی منحصر به‌فرد است و هر معادله شماره مخصوص بخود دارد، تمام شماره‌ها متمایز و منحصر به‌فرد می‌باشند. بنابر این با هر شماره تناظر به‌صورت: $2^{\alpha_0} \times 3^{\alpha_1} \times 5^{\alpha_2} \times \cdots \times p^{\alpha_n}$، تنها به‌یک طریق عددهای $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ به‌دست خواهد آمد، که این اعداد نیز متناظر بااعداد صحیح $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ بوده‌که درنتیجه متناظر بامعادله مشخص $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = 0$ خواهد بود. مثلاً، شماره $324 = 2^2 \times 3^4$ عددهای $\alpha_0 = 2, \alpha_1 = 4$ را می‌دهد، که از آنجا معادله $2x + 1 = 0$ مشخص می‌شود. از طرفی با توجه به‌اینکه «هر زیر مجموعه

نامتناهی از یک مجموعه شمارا خود شماراست» (به‌سادگی قابل اثبات است) و شماره هر معادله جبری یک عدد طبیعی است بنابراین مجموعه شماره معادلات جبری شمارا است و درنتیجه مجموعه معادلات جبری شمارش پذیر است.

۳) ناشمارائی اعداد حقیقی. پس ازذکر قضیه مقدماتی ذیل ثابت می‌کنیم که، R، مجموعه اعداد حقیقی ناشمار است.

قضیه. هر فاصله باز مانند (a, b) از اعداد حقیقی $(a \neq b)$ با R همعدد است.

برهان. نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^2-1}$ درفاصله $(-1, 1)$ را در نظر می‌گیریم (شکل روبرو) هر نقطه دلخواه مانند E از



پاره‌خط AB با یک نقطه مانند F (تصویر p روی $y'oy$) از محور $y'oy$ متناظر است و بالعکس هر نقطه دلخواه مانند F از محور $y'oy$ نیز با یک نقطه مانند E ازپاره‌خط AB متناظر است. بنابراین پاره‌خط AB بامحور $y'oy$ همعدداست. ازطرفی باتوجه به‌اینکه مجموعه نقاط واقع بر محورهای مختصات با R همعدد می‌باشند فاصله باز (۱ و ۱−) با پاره خط AB متناظر است. (پاره‌خط AB را فاقد نقاط ابتدائی و انتهائی درنظر می‌گیریم) و مجموعه R نیز با محور $y'oy$ متناظر است. بنابراین فاصله $(-1, 1)$ با R همعدد است. از طرفی به‌راحتی می‌توان تناظری یکبیک بین (a, b) و $(-1, 1)$ برقرارکرد، که در نتیجه (a, b) و $R = (-\infty, +\infty)$ همعدد خواهند بود.

قضیه. R ناشمار است

برهان. اگر ثابت‌کنیم مجموعه نقاط یک پاره‌خط شمارش پذیر نیست بنا به‌قضیه قبل R نیز شمارش پذیر نخواهد بود. پاره‌خط AB به‌طول واحد را در نظر می‌گیریم. بدیهی است که فاصله هر نقطهٔ آن تا نقطه A با یک عدد اعشاری (مختوم یا نامختوم) بیان می‌شود. اگر مجموعه نقاط پاره خط مذکور شمارش پذیر باشد (برهان خلف) یعنی اگر به‌ترتیبی مجموعه نقاط پاره خط AB با اعداد طبیعی در تناظر یک‌به‌یک باشد و مثلاً، این تناظر به‌شرح زیر باشد.

۱) ۰/۳۲۴۲۵, ...

۲) ۰/۲۱۳۷۴, ...

۳) ۰/۲۱۵۲۰, ...

۴) ۰/۳۲۴۱۵, ...

۵) ۰/۳۱۲۸۵, ...

در این صورت می‌توان عددی اعشاری ارائه داد که متناظر با یکی از نقاط پاره‌خط AB باشد ولی هیچ یک از اعداد فوق نباشد. مثلاً، عدد اعشاری که رقم اول بعد از ممیز آن غیر از رقم اول بعد از ممیز شماره (۱) و رقم دوم بعد از ممیز آن عددی غیر از رقم دوم بعد از ممیز شماره (۲) و الی آخر ... باشد. مثلاً، عدد ... ۰/۴۲۳۳۱, و نه‌تنها یک چنین عدد بلکه بینهایت عدد به‌این صورت وجود دارد. در نتیجه به‌هیچ نحوی شماره گذاری نقاط پاره‌خط AB ممکن نیست و با این تناقض حکم ثابت است. روشی را که برای اثبات قضیه فوق به‌کار بردیم در سال ۱۸۸۳ به‌وسیله کانتور ارائه شده است.

نتیجه: چون عددهای جبری شمارا هستند و عددهای حقیقی شمارا نیستند باید عددهای حقیقی دیگری غیر از اعداد جبری وجود داشته باشند که همان اعداد متعالی یا غیر جبری می‌باشند و در واقع قضیه فوق وجود اعداد متعالی را به‌ثبوت می‌رساند.

۴) مجموعه اعداد متعالی شمارش پذیر نیست. اثبات، می‌دانیم که مجموعه اعداد جبری شمارا است و اگر آنها را به‌صورت $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ فرض کنیم و اگر فرض کنیم مجموعه اعداد متعالی نیز شمارا و به‌صورت $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ باشند در این صورت دنباله زیر که نمایشی از مجموعه اعداد حقیقی است شمارا خواهد بود.

$$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, a_3, \beta_3, \ldots$$

که این متناقض با قضیه قبلی است.

می‌توان از قضیه فوق به‌تعبیری گفت عددهای جبری که در هر قدم به‌آنها برخورد می‌کنیم در واقع کمیاب‌تر از عددهای متعالی است که به‌دشواری به‌دست می‌آیند!

مراجع

[۱]. داستان مجموعه‌ها، اثر ناوم یاکوله‌ویچ ویلنکین، ترجمه پرویز شهریاری

[۲]. اعداد گویا و گنگ، اثر ایوان نیون، ترجمه غلامحسین اخلاقی‌نیا

$$0<\beta(x)<\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{y}\left(1+\frac{y}{x}\right)}\,dy<$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}\,dy,$$

از آن‌جا، $\beta(\infty)=0$.

برای محاسبه

$$\alpha(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_{0}^{x}\frac{\cos y}{\sqrt{y}\left(1+\frac{y}{x}\right)}\,dy.$$

تقریباً بدیهی است که با افرازی شبیه برای بازهٔ $[0, x]$ عبارت ذیل وقتی $x>\pi$ نتیجه می‌شود:

$$0<\alpha(x)<\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_{0}^{\pi}\frac{\cos y}{\sqrt{y}\left(1+\frac{y}{x}\right)}\,dy<$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_{0}^{\pi/2}\frac{\cos y}{\sqrt{y}\left(1+\frac{y}{x}\right)}\,dy$$
$$<\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_{0}^{\pi/2}\frac{\cos y}{\sqrt{y}}\,dy$$

از آنجا نیز $\alpha(\infty)=0$. این اثبات (۱۱) را کامل می‌کند.

پانوشتها:

1. Fresnel 2. Diffraction 3. Leibniz

مراجع:

1. J. van yzeren, Moivre's and Fresnel's integrals by simple integration, this MONTHLY, 86 (1979) 691–693.

2. T. M. Apostol Mathematical Analysis, Addison —Wesley. 1957. p. 443.

3. H. Flanders, on the Fresnel integrals, this MONTHLY, 89, (1982) 264–266.

مجموعه‌ای از اعداد با ارقام جالب

فرستنده: مسعود طاهرخانی-قزوین

در مجموعه {۴, ۱۶, ۳۷, ۵۸, ۸۹, ۱۴۵, ۴۲, ۲۰} رابطه جالبی بین یک عضو، و ارقام عضو دیگر، به‌صورت دوره‌ای، برقرار است:

$$\begin{aligned}
4^2&=16\\
1^2+6^2&=37\\
3^2+7^2&=58\\
5^2+8^2&=89\\
8^2+9^2&=145\\
1^2+4^2+5^2&=42\\
4^2+2^2&=20\\
2^2+0^2&=4\\
4^2&=00\\
\ldots&\ \ldots
\end{aligned}$$

این خاصیت، درمجموعه {۲۵۰, ۵۵, ۱۳۳}، با توان ۳ نیز وجود دارد:

$$\begin{aligned}
1^3+3^3+3^3&=55\\
5^3+5^3&=250\\
2^3+5^3+0^3&=133
\end{aligned}$$

مرجع:

MATHEMATICAL SPECTRUM vol. 22 N. 182

تمرین: مجموعه‌ای با خواص فوق بیابید.

شگفتیهای اعداد

$$(10^4-9^4)\div(10^2+9^2)=10+9$$
$$(100^4-99^4)\div(100^2+99^2)=100+99$$
$$(1000^4-999^4)\div(1000^2+999^2)=1000+999$$
$$\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots$$

«ارسالی ناصر مظاهری»

روابط فوق به‌خاطر اتحاد جبری ذیل است

$$(a^4-b^4)\div(a^2+b^2)=(a-b)(a+b)$$

هدفهای

آموزش ریاضی در دبیرستان

در نظام جدید آموزش و پرورش

ریاضیات یکی از دستاوردهای ارزشمند تمدن بشر است که بنابر ویژگی «کاربردپذیری» آن ابزار اساسی شناخت واقعیت عینی است، علاوه بر آن ریاضیات یکی از ابزارهای تربیت فکر است. نقش ریاضیات در شناخت طبیعت و تربیت فکر از زمینه‌های اساسی تدوین اهداف آموزش ریاضی است.

علاوه بر اینها جنبه‌های فرهنگی آموزش ریاضیات و نقش آن در آینده‌سازی فرد وجامعه را نیز بایستی در نظر داشت.

سنین نوجوانی یکی از مراحل حساس و مهم از مراحل رشد ذهنی است. در این دوران نوجوان می‌تواند تفکر قیاسی را به‌کار گیرد و درباره آینده و مطالب مجرد و ذهنی فکر کند. تفکر نوجوان انعطاف‌پذیر، منطقی و منظم است.

نوجوان می‌تواند راههای مختلف حل مسئله را تصور کند و می‌تواند به یك مسئله از نقطه‌نظرهای مختلف بنگرد. او می‌تواند دربارهٔ مفاهیم مجردی مانند فضا و زمان بیندیشد. براین اساس محتوای آموزش ریاضیات بایستی با هدف رشد هرچه بیشتر قدرت استنتاج و یادگیری، ساختارهای ریاضی و مبتنی بر تقویت قوای فراگیری شهودی دانش‌آموز تدوین شود.

بدین ترتیب هدفهای آموزش ریاضی در دبیرستان مبتنی بر چهار دسته زیر خواهد بود:

۱ـ نقش ریاضیات در شناخت طبیعت و جهان.

۲ـ نقش ریاضیات در تربیت فکر.

۳ـ نقش ریاضیات در تأمین آینده فرد و جامعه.

۴ـ نقش ریاضیات در تربیت فرهنگی.

۱ـ نقش ریاضیات در شناخت طبیعت و جهان:

۱ـ۱ـ آشنایی با ساختارهایی از جهان عینی که در تجربیات دانش‌آموز ظاهر می‌شود و دسته‌بندی آنها.

۱ـ۲ـ آموزش تکنیکهای لازم برای مدلسازی ریاضی مسائل روزمرهٔ زندگی و تجزیه و تحلیل این مدلها.

۱ـ۳ـ آموزش ریاضی مورد نیاز برای مطالعه سایر موضوعات.

۱ـ۴ـ آشنایی با نقش ریاضیات در صنعت و تکنولوژی و کشاورزی.

۲ـ نقش ریاضیات در تربیت فکر:

۲ـ۱ـ پرورش قوهٔ تفکر ریاضی (اندیشه، استدلال، استنتاج).

۲ـ۲ـ پرورش دقت و عادت به‌نظم فکری و پرورش قوهٔ نقد و انتقاد.

۲ـ۳ـ پرورش قوهٔ ارائه دقیق یك فکر.

۲ـ۴ـ پرورش اعتماد به‌نفس در به‌کار بردن دانسته‌های ریاضی برای حل مسائل.

۲ـ۵ـ پرورش قوهٔ خلاقیت و پرورش درك شهودی.

۲ـ۶ـ پرورش قوه تعمیم و تجرید.

۳ـ نقش ریاضیات در تامین آینده فرد و جامعه:

۳ـ۱ـ آماده‌سازی دانش‌آموز برای تحصیلات بعدی.

۳ـ۲ـ آماده‌سازی دانش‌آموز برای ورود به بازار کار.

۴ـ نقش ریاضیات در ارتقاء سطح فرهنگی:

۴ـ۱ـ آشنایی مقدماتی با تاریخ ریاضیات و شناخت‌شناسی.

۴ـ۲ـ آشنایی مقدماتی با زیباشناختی ریاضیات.

۴ـ۳ـ آشنایی مقدماتی با زبان و نمادهای ریاضی.

در شماره بعد زیر مواد برنامه ریاضی دورهٔ دبیرستان

جان نپر[1] و نقش او در ریاضیات کاربردی

مهدی نفر
عضو هیات علمی دانشکده علوم اداری
و اقتصاد دانشگاه اصفهان

هیوم مورخ مشهور، در ارزیابی نپر، عنوان بزرگمردی را شایسته اومیداند

یکی از ریاضیدانان معروف دنیا، که نام او همواره با بعضی مباحث ریاضیات همراه است، جان نپر ریاضیدان اسکاتلندی است که در سال ۱۵۵۰ هنگامی که پدرش فقط ۱۶ سال داشت در خانواده‌ای اشرافی و در شهر ادینبورو (اسکاتلند)[2] دیده به جهان گشود. نپر از وضع مالی بسیار خوبی برخوردار بود، چه در جوانی یکی از ملاکین بزرگ بشمار می‌رفت. او قسمت اعظم دوران زندگی خود را در ملك خانوادگی خود و در کاخ مرچیستون[3]، نزدیك شهر ادینبورو سپری نمود.

نپر در اوائل جوانی بیشترین وقت و انرژی خود را صرف جدالهای سیاسی و مذهبی آن زمان نمود که بذر مخالفت با کلیسای کاتولیك در همان آغاز کودکی در ذهنش افشانده شده بود. در واقع می‌توان چنین گفت که تولد نپر هم‌زمان با کشمکش بزرگ میان پروتستانها و کاتولیکهای اسکاتلندی بود.

نپر به‌شدت ضد کاتولیك بود و در این راستا از نیات جان‌ناکس[4] و جیمز اول[5] حمایت می‌کرد. در پیروی از افکارش، در سال ۱۵۹۳ ادعانامه‌ای تند علیه کلیسای رم تحت عنوان «کشف ساده‌ای از کلیهٔ مکاشفات یوحنای قدیس» منتشر نمود. در این ادعانامه او سعی کرده بود که ثابت کند پاپ ضد مسیح است و خداوند چنین مقدر نموده که دنیا در سالهای بین ۱۶۸۸ و ۱۷۰۰ به آخر خود می‌رسد. این ادعانامه به‌صورت‌کتاب و به‌تعداد ۲۱ بار به چاپ رسید که حداقل ده بار آن در زمانی منتشر شد که خود جان‌نپر زنده بود.

از خصوصیات بسیار بارز نپر، داشتن نبوغ و قدرت تجسم او بود که منجر به‌پیش‌بینی و پیشگویی‌هایی می‌شد که برای مردم آن دوره به هیچ‌وجه قابل قبول نبود بطوریکه بعضی‌ها او را از لحاظ فکری‌نامتعادل می‌پنداشتند و بعضی دیگر او را رواج دهندهٔ سحر و جادو معرفی می‌کردند. اما او بدون توجه به شایعات پیرامون خود، به‌کار خویش با جدیت و تلاش خستگی‌ناپذیر ادامه می‌داد. از پیشگویی‌های مهم نپر، دادن طرح و نمودارهایی در مورد وسایل جنگی بود. او ادعا می‌کرد که در آینده وسیله‌ای آتشبار به‌وجود خواهد آمد که قادر است میدانی را با محیط چهار مایل با بیش از یك پا بلندی، از هرموجود زنده‌ای تهی نماید. همین‌طور درمورد ابزارهای دریانوردی زیر آب و ارابه‌های جنگی که بتواند بر هر سو مرگ بپراکند، صحبت می‌نمود و پیشگویی می‌کرد. چنانچه بعداً ملاحظه‌شد، تمامی این‌پیش‌بینی‌ها در زمان جنگ جهانی اول به ترتیب در قالب مسلسل، زیر دریایی و تانك به‌وقوع پیوست.

نپر برای رهایی از مناقشات و جدال‌های سیاسی و مذهبی، خود را با مطالعهٔ ریاضیات و علوم سرگرم کرد و بدین ترتیب شهرت عمده‌ای دردنیای ریاضیات کسب نمود. او در سال ۱۵۶۳ هنگامی‌که ۱۳ ساله بود وارد دانشگاه سنت‌اندروز شد ولی بعداً بدون اخذ درجه‌ای آنجا را ترك نمود. در سال ۱۶۷۱ دوباره به اسکاتلند باز گشته و در گارتنس استرلینگشایر سکنی گزید. احتمالا در همین جا بود که کتاب مشهورش را راجع به‌الهیات تحت عنوان «**شرح ساده مکاشفات یوحنا**» که قبلا ذکر آن رفت، نوشت.

بازده کار او را در ریاضیات می‌توان تحت چهار عنوان که در تاریخ ریاضیات ثبت شده و تمامی آنهانشان دهندهٔ نبوغ او می‌باشند، بشرح زیر ارائه داد:

۱) اختراع لگاریتم

۲) یادآور زیرکانه‌ای در مورد قاعدهٔ اجزاء مستدیر، برای بدست آوردن فرمولهایی که در حل مثلثهای قائم‌الزاویهٔ کروی از آنهااستفاده می‌شود.

۳) ارائه حداقل دو فرمول‌مثلثاتی از یك گروه چهارتایی تحت عنوان «مشابهت‌های نپر[6]» که در حل مثلث‌های غیرمشخص کروی بکار می‌روند.

۴) ابداع وسیله‌ای موسوم به «میله‌های نپر» که در عمل ضرب، تقسیم و استخراج ریشه‌های دوم‌اعداد

به‌طور مکانیکی، به‌کارگرفته می‌شوند.

چهار مورد فوق حاصل تلاش‌ها و کوشش‌های خستگی‌ناپذیر نپر می‌باشد که با جدیت تمام برای به‌نتیجه رساندن افکار و اهداف خود مسائل مورد نظر خویش را دنبال می‌نمود. برای مثال او ۲۰ سال از بهترین دوران عمر خود را (۱۶۱۴–۱۵۹۴) صرف پیدا نمودن راه‌حلها و روابط پیچیده‌ای نمود تا بوسیله آنها بتواند کلیهٔ اعداد را به‌شکل توان بنویسد و از این طریق راه‌گشای حل بعضی از مسائل و ساده نمودن محاسبات‌طولانی گردد. زیرا درآن زمان‌اهمیت محاسبات عددی در زمینه‌های مختلف از قبیل نجوم، دریانوردی، تجارت، مهندسی و جنگ، ایجاب می‌کرد که محاسبات مربوط به‌آنها به‌طور سریع و دقیق انجام گیرد. به‌همین دلیل بود که نپر در سال ۱۵۹۴ به این فکر افتاد تا به وضع نابسامان محاسبات عددی که توسط افراد مختلف انجام می‌گرفت و در این رهگذر ساعتها کار و تلاش صورت می‌پذیرفت و منجر به یك رشته اعمال مکانیکی می‌شد، خاتمه داده و روش جدیدی را ابداع نماید تا به کمك آن مسیر طولانی محاسبات کوتاه و احتمال اشتباه به کمترین حد خود تقلیل یابد.

برای تحقق چنین فکری ۲۰ سال زمان صرف نمود تا بالاخره در سال ۱۶۱۴ موفق شد که روش جدیدی را در انجام محاسبات ابداع نماید. این روش جدید براین مبنا استوار بود که نپر معتقد بود، می‌توان کلیهٔ اعداد را به‌صورت اعداد نمایی نشان داده و نتایج مورد نظر را از آنها بدست آورد. نپر در بیان نظریهٔ‌خویش چنین استدلال می‌نمود، همانطوری که اعدادی مانند ۴، ۸ و ۱۶ را می‌توان به ترتیب به‌صورت 2^2، 2^3 و 2^4 نوشت، سایر اعداد را از قبیل اعداد ۵، ۶ و ۷ را که‌ظاهراً به‌صورت توانی نوشتن آنها غیرممکن بنظر می‌رسد، نیز می‌توان به‌صورت نمایی با پایه ۲ و با توانی کسری که مقدار آن بین اعداد ۲ و ۳ است، نشان داد. با این ایده او نتیجه می‌گیرد که اگر کلیهٔ اعداد به‌صورت نمایی نوشته شوند، در این صورت اعمال جمع و تفریق به‌ترتیب جانشین اعمال ضرب و تقسیم شده و محاسبات ریاضی ساده‌تر می‌شوند.

نپر این نحوه محاسبات را که در نوع خود بی‌نظیر بود **«لگاریتم»**[۷] به معنی **«اعداد مناسب»** نام‌گذاری کرد که امروزه به‌همان اسم نیز معروف است. نکته قابل توجه در استفاده از مبحث لگاریتم و در روش محاسبهٔ ارائه شده توسط نپر، این است که وقتی می‌خواهیم اعداد را به‌صورت توانی در نظر گیریم باید دقت شود که آنها را با پایه‌های مشترك و نماهای مختلف نوشت تا با در نظر گرفتن نکات محاسباتی در مورد اعداد نمایی، بتوان اعمال ضرب و تقسیم بین اعداد و به‌توان رساندن آنها و ریشه‌گیری از اعداد را به‌ترتیب به‌اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم نماها تبدیل نمود تا محاسبات به‌سهولت انجام‌گیرد. ابداع لگاریتم توسط نپر و تکمیل آن بعد از او و کاربرد آن در زمینه‌های ریاضی و ریاضیات کاربردی، تأثیر به‌سزائی را در پیشرفت سایر علوم به جای گذاشت به‌طوری‌که امروزه دنیای علم کتاب شرح قوانین لگاریتم او را سازندهٔ عصر جدیدی در علم ریاضیات می‌داند. نپر دو کتاب راجع به‌لگاریتم نوشت و بعد از او دانشمندان دیگری دنبالهٔ تحقیقات او را در این زمینه ادامه داده و در تکمیل لگاریتم اهتمام ورزیدند.

در این مورد می‌توان از **هنری‌بریگز**[۸] نام برد که بیش از همه سعی کرد تا اختراع نپر را در راه موفقیت بیاندازد. او کاملا متوجه اهمیت ابداع نپر شده بود بطوری که در سال ۱۶۱۵ در نامه‌ای به **جیمزآشر** اسقف اعظم آرما راجع به‌خودش چنین می‌نویسد:

«تمام وقت خود را صرف تکامل ابداع عالی لگاریتم نموده است»

در ملاقاتی که بریگز با نپر داشت، مبنای ۱۰ را برای لگاریتم با نپر در میان گذاشت. نپر که خود قبلا به این موضوع اندیشیده بود و حضور ذهن داشت، آنرا پذیرفته و از آن به‌بعد تا به‌امروز عدد ۱۰ مبنای لگاریتم‌قرار گرفت. بعدها نتیجه محاسبات اعداد به وسیله لگاریتم، در جداولی تحت‌عنوان **«جدول لگاریتم»** اولین بار توسط بریگز در سال ۱۶۱۸ تنظیم گردید که امروزه مورداستفاده فراوان‌قرار دارد.

ژوبست‌بورگی[۹] ابزار ساز سویسی تنها رقیب نپر در اختراع لگاریتم بود. بورگی جدولی از لگاریتم‌ها را مستقل از نپر ساخته و نتایج کارهای خود را در سال ۱۶۲۰ یعنی شش سال بعد از اینکه جهانیان با کشف نپر آشنا شده بودند، اعلام نمود. بنابراین بااینکه هردوی آنها دارای ایدهٔ لگاریتم‌بودند، اما آنچه مسلم است، این است که این ایده اولین بار به‌ذهن نپر راه یافته و پس از تکمیل انتشار داده شده است. تفاوتی که بین ابداع لگاریتم توسط نپر و ایدهٔ بورگی در این‌زمینه وجود دارد این است که روش نپر هندسی است در حالی‌که روش بورگی، جبری است.

از نظر ریاضی می‌توان گفت که امروزه لگاریتم عموماً صورت دیگری از حالت نما است. به‌عبارت دیگر در تساوی $a^x = b$، x را لگاریتم b در مبنای a نامیده و بصورت تساوی $\log_a^b = x$ نشان می‌دهند. بنابر این می‌توان گفت که این امر بر خلاف قاعدهٔ تاریخ ریاضیات انجام پذیرفته است، یعنی کشف لگاریتم پیش از بکار بردن نماها صورت گرفته است.

در سال ۱۹۷۱ نیکاراگوئه یك‌سری

تمبر پستی در مقام بزرگداشت دانشمندان ریاضی منتشر نمود که در میان آنها، یك تمبر به‌کشف لگاریتم توسط نپر اختصاص داده شده بود. اختراع شگفت‌انگیز نپر به‌طور بی‌سابقه‌ای و با گرمی در سراسر اروپا مورد استقبال قرار گرفت. به‌ویژه در نجوم، زمان برای چنین اکتشافی بسیار آماده بود به‌طوری‌که **لاپلاس** اظهارنظر می‌نماید که اختراع لگاریتم عمر منجمین را با کوتاه کردن محاسبات، دو برابر کرد. بعد از ابداع لگاریتم و توسعه روش محاسبه آن، تلاش بعدی نپر این بود که بتواند استفاده از لگاریتم را توسط خط‌کش‌های محاسبات به‌صورت مکانیکی درآورد تا از این طریق نیازی به‌استفاده از جداول لگاریتمی نباشد و شخص محاسب فوراً به‌نتیجه مورد نظر خود برسد.

از کارهای دیگر نپر، ابداع علامت اعشار(ممیز)، درموردکسرهای‌اعشاری بود. این‌گونه‌کسرها اولین‌بار توسط شخصی بنام **سیمون‌استونیوس**[۱۰] بکار رفته بود و نپر با ابداع و استفاده از علامت اعشار آنها را به‌صورت کسر‌های کنونی درآورد. از کارهای دیگر نپر، ارائه روشی است تحت عنوان **«میله‌های نپر»**.

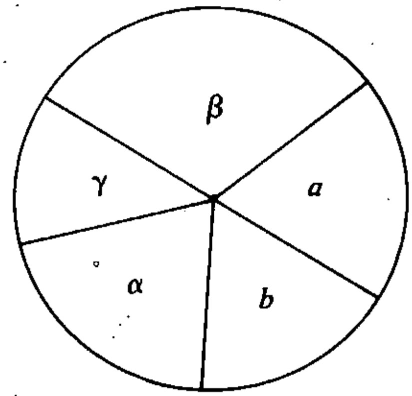
میله‌های نپر اختراع نپر معروف‌به میله‌های نپر در زمان خود بسیار معروف بود که توسط خود او در اثری بنام **«مطالعهٔ چوبهای معجزه‌آسا»** در سال ۱۶۱۷ منتشرگردید. این اختراع، یك روش مکانیکی بود که در رفع مشکل موجود در ضرب اعداد بزرگ بکار گرفته می‌شد.

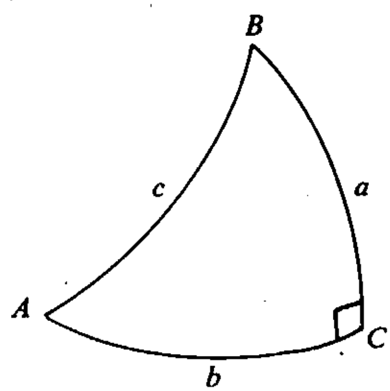
نپر و مثلث‌های کروی ــ نپر دو قاعده برای حل مثلثهای قائم‌الزاویه کروی ارائه داده است که استفاده از آنها فرمول‌های مورد نیاز را بدست می‌دهد. این دو قاعده را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

الف) سینوس هر جزء میانی در مثلث، مساوی حاصلضرب کسینوس‌های دو جزء مقابل آن است.

ب) سینوس هر جزء میانی با حاصلضرب تانژانت‌های دو جزء مجاور مساوی است.

برای روشن شدن مطلب یك مثلث کروی و دایره‌ای که به ۵ قسمت تقسیم شده است، به صورت زیر در نظر می‌گیریم:





در شکل فوق α، β و γ به ترتیب زاویه‌های متممA، B و C هستند. ($\alpha = 90 - A$، $\beta = 90 - B$، $\gamma = 90 - C$). کمیتهای زاویه‌ای b, a و $\beta, \alpha,$ و γ را در دایره اجزاء مستدیر می‌نامند. همانطوری که مشاهده می‌شود در دایره هر جزء با دو جزء مستدیر همجوار و با دو جزء دیگر غیر همجوار است. به این‌ترتیب چنین جزیی را جزء میانی نامیده و اجزاء همجوار و غیرهمجوار، به‌ترتیب اجزاء مجاور و اجزاء مقابل آن را تشکیل میدهند.

نسبت‌های نپر ــ روابط زیر به نسبتهای نپر مشهورند که عبارتند از:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}C}$$ و

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}C}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C}$$ و

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C}$$

از این روابط می‌توان در حل مثلثهایی که قائم‌الزاویه نیستند استفاده نمود مشروط بر اینکه درآنها همواره دو ضلع و زاویه بین یا دو زاویه و ضلع بین معلوم باشد.

کارهای نپر چه در زمان حیات او و چه بعد از او زمینه‌های مساعدی را در پیشرفت مباحث ریاضیات، نجوم، دریانوردی و غیره بوجود آورد که امروزه نیز این پیشرفتها تداوم خود را حفظ نموده و درآینده نیز ادامه خواهد داشت. برای حسن ختام و خاطرنشان کردن اهمیت نپر و زمینه‌هایی که برای سایر دانشمندان ایجاد نمود، یادآور می‌شویم که لئونارد اولر (۱۷۸۳ــ۱۷۰۷) ریاضی‌دان مشهور، یك قرن بعد از نپر هنگامی‌که عدد e = ۲/۷۱۸۲۸۱۰۰۰ را پایه لگاریتم قرار می‌دهد، به‌افتخار مخترع لگاریتم یعنی نپر، آنرا **«لگاریتم درپایه نپر»** یا به‌طور خلاصه **«لگاریتم نپری»** نام‌گذاری‌می‌کند. امروزه آن‌را لگاریتم طبیعی[۱۱] نیز نامیده و با نماد (Ln) نشان می‌دهند ($\log_e^x = \ln x$).

عدد e به‌قدری با نام نپر عجین شده است که امروزه گاهی اوقات آنرا «عدد نپر»[۱۲] می‌گویند. مقدار این عدد را می‌توان از حد دو جمله‌ای $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ وقتی که n به‌سمت بی‌نهایت میل

می‌کند به‌دست آورد، یعنی:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\text{۲/۷۱۸۲۸۱۰۰۰}$$

لازم به‌توضیح است‌که اهمیت‌عدد e در این است که اساس و پایه بعضی از فرمولهای محاسباتی مهم را تشکیل می‌دهد و در مباحث مختلف ریاضیات و اقتصاد ریاضی کاربردهای بسیار دارد.

زیرنویسها

1- John Napier
2- Edinburgh
3- Merchiston
قلعه مرچیستون که در سدهٔ پانزدهم ساخته شده بود، یکی از دو استحکامات حومهٔ ادینبورو بود و به مرور زمان توسعه یافته و به صورت بنای معظمی درآمده بود که مظهر خاندان نیر به‌شمار می‌رفت.
4- John Knox
5- James I
6- Napier Analogies
7- Logarithm
8- H. Briggs
9- Jobst Bürgi
10- Simon Stevinus
سیمون استیونیوس ریاضیدان بلژیکی ـ هلندی (۱۶۲۰ـ۱۵۴۸) افسر مهندس ارتش هلند و بازرس سدهای این کشور بود. وی استعمال کسرهای اعشاری را در ریاضیات معمول داشت.
11- Natural Logarithm
12- Napier Number

مراجع

۱ـ آسیموف، ایزاك دایرةالمعارف دانشمندان علم و صنعت ۳ جلد ترجمه محمودمصاحب، انتشارات علمی و فرهنگی، تهران ۱۳۶۸.
۲ـ بهرامی، منوچهر ریاضیات عمومی چاپ زر، تهران، ۱۳۵۲.
۳ـ اسمیت، دیوید تاریخ ریاضیات ترجمه غلامحسین صدری‌افشار تهران، ۱۳۵۶.
۴ـ ایوز، هاورد آشنایی با تاریخ ریاضیات ۲ جلد ترجمه محمدقاسم وحیدی اصل تهران.

اخبار گروه ریاضی و کامپیوتر

۱ـ در تابستان گذشته آقایان دکتراسداله رضوی و دکتر امیدعلی کرمزاده ازطرف سازمان پـژوهش و برنامه‌ریـزی آموزشی در اولین کنگره مسابقات ریاضی‌که درکانادا برگزارشده بود شرکت کردند.

۲ـ شورای برنامه‌ریزی و تـألیف ریاضـی دربی نشستی که در تاریخ ۱۳۶۹/۸/۱۰ با وزیر محتـرم آموزش و پرورش برادر دکترمحمدعلی نجفی داشت مأمـوریت یافت تا امر برنامه‌ریزی دوره نظری شاخه تجربی را شروع نماید.

۳ـ اولین مرحله المپیاد ریاضی، هشتمین مسابقات ریاضی‌کشور، در روزجمعه دوم آذرماه درسراسر کشور برگزار گردید.

۴ـ هفتمین کنگره آموزش ریاضی (ICME –7) از تاریخ ۲۲ مرداد تا ۲ شهریور ۱۳۷۱ درشهر کبك کانادا تشکیل می‌شود. دراین کنگره که مسائل برنامه‌ریزی تحصیـلی در مقاطع مختلف تحصیلی ومسائل تخصصی‌آموزش ریاضی بحث وبررسی‌می‌شود بیش از ۳۰۰۰ نفرازمعلمین، دبیران، اساتید ومتخصصین‌آموزش ریاضی ازسراسرجهان شرکت‌خواهند داشت. اولین اطلاعیه این کنگره منتشر شده وعلاقه‌مندان برای دریـافت آن می‌توانند با آدرس زیر مکاتبه نمایند.

Congrês ICMB –7 Congress
Universite Laval
2 uébec , 2C
Canada Glk, 7p 4

سمینار کاربرد کامپیوتر در آموزش و پرورش

این سمینار از ۱۷ تا ۱۸ شهریورماه ۱۳۶۹ در دانشکدهٔ علوم تربیتی دانشگاه تبریز برگزار شد. در این سمینار عده کثیـری از صاحبنظـران دانشگاهها، شرکتهای کامپیوتـری و مسئولین و دبیران آموزش و پرورش شرکت داشتند. سمینار با سخنان جناب آقای دکتر نجفی وزیر محترم آموزش و پرورش شروع به‌کار کرد و سخنرانان مدعو مقاله‌های خود را در زمینه‌های مختلف کاربرد کامپیوتر در آموزش و پرورش ارائه نمودند. توفیق بیشتـر برگـزار کننده ایـن سمینـار را آرزومندیم.

چاپ مقدماتی کتاب مبانی کامپیوتر و انفورماتیك

این کتاب کـه جهت تـدریس در کلاسهای سوم ریاضی ـ فیزیك توسط آقای دکتر بابلیان و خانم دکتر صحت نیاکی تألیف گردیده، به‌تعداد دانش‌آموزان تحت پوشش طرح آزمـایشی درس آشنایی با مبانی کامپیوتر چاپ گردید و در اختیار این دانش‌آموزان قرار گرفت.

بازدید از کارگاههای کامپیوتـر در مراکز استانها

به‌منظور بازدید از چگونگی آماده‌سازی کارگاههای کامپیوتر، و اجرای آزمایشی درس آشنایـی بـا مبانـی کامپیوتر، در مراکز استانهای مختلف کشور، کارشناسان گروه کـامپیوتـر سازمان پژوهش‌و برنامه‌ریزی آموزشی در آذرماه ۶۹ ازمراکز استانها بازدید بعمل آوردند. توضیح اینکه بتدریـج به کارگاههایی که آمادهٔ نصب‌کامپیوتر باشند ۱۱ کامپیوتر ارسال می‌شود.

جواب نامه‌ها

تنظیم از: لآلی - دارابی

آقای ابوالقاسم گرجی، دانش‌آموز، فریدون کنار.

درارتباط با جمله عمومی رشته‌ای که مطرح کرده‌اید به مسئله ویژه دانش‌آموزان مندرج در مجله رشد، مراجعه کنید.

آقای علیرضا تفنکچی، دانشجو شیراز. از مسایل ارسالی شما صمیمانه سپاسگزاریم. ازاین مسایل حتماً استفاده خواهیم کرد.

آقای محمد مرندی رضایی، دانش‌آموز، خمین.

ازمسایل جالبی که برای ما فرستاده‌اید صمیمانه سپاسگزاریم. متأسفانه مرجع هیچ یک ازآنها درج نشده است.

آقای محمد حسین خسروی، دانش‌آموز، بیرجند.

با تشکر ازارسال مسایل برای درج درمجله، به‌اطلاع شما می‌رسانیم که از این مسایل استفاده خواهیم کرد.

آقای ارشک حمیدی، دانش‌آموز، تهران.

از مسایلی که برای درج در مجله فرستاده‌اید صمیمانه تشکر می‌کنیم به موقع ازآنها استفاده خواهیم کرد.

آقای محمداسماعیل خسروی، دانش‌آموز، بروجرد.

با تشکر از شما، از مسایل ارسالی شما بموقع استفاده خواهیم کرد.

آقای صمد نوروزی، دانش‌آموز، ایذه.

مسئله‌ای که طرح می‌کنید و لابد از نظر خودتان جالب است، حل هم بکنید. مجله درحل مسایلی که خوانندگان طرح می‌کنند و درصحت‌آن‌خودشان مشکوکند، مسئولیتی ندارد.

آقای جعفر عشریه.

قضیه‌ای که ثابت کرده‌اید نتیجه بدیهی قضیه زیراست که در اکثر کتابهای جبر موجود است: اگر G یك گروه باشد و H زیرمجموعه‌ای غیرخالی‌از G، آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه H زیرگروه G باشد آنست که اگر $a, b\in H$، آنگاه

$$ab^{-1}\in H$$

حال برای جمع، $ab^{-1}=a-b$ وبرای ضرب $ab^{-1}=a/b$.

آقای ح. آ، اراك.

تربیع دایره ازجمله مسائلی است‌که لاینحل می‌باشد. درشماره‌های۶و۵ مجله، تحت‌عنوان «اثبات‌امتناع‌تثلیث‌زاویه، تضعیف مکعب، و تربیع‌دایره» مقاله‌مبسوطی توسط دکترعلیرضا جمالی درج گردیده‌که می‌توانید بدان‌مقاله مراجعه کنید. اما، درمورد قضایای فرما، دوقضیه مشهور از فرما در نظریه اعداد مطرح است‌که یکی قضیه کوچك فرما، اگر a و p نسبت بهم اول باشند آنگاه $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$، و دیگری قضیه بزرگ فرما، به‌ازاء هرعدد طبیعی $n\geqslant 3$ معادله $x^n+y^n=z^n$ در مجموعه اعداد صحیح، جواب نابدیهی ندارد. قضیه دوم فرما تابه‌حال ثابت نشده است و نمی‌توان مفاهیم مشتق را برای اثبات آن بهکار برد. زیرا، مشتق در مجموعه اعداد صحیح تعریف نمی‌شود.

آقای جمشید طالبی، کرج.

اعداد اول به‌صورت $F_n = 2^{2^n}+1$ را اعداد اول فرما می‌نامند و برهانی که شما برای اثبات اول بودن آن ارائه داده‌اید درست‌نیست. زیرا، اثبات به‌استقراء نتیجه مطلوب را نمی‌دهد. اگر F_n اول باشد و F_n و F_{n+1} نسبت به‌هم اول باشند دلیلی وجود ندارد که F_{n+1} نیزاول باشد. فرما چنین می‌پنداشت که اعداد به‌صورت F_n جملگی اول هستند. ولی، اویلر درسال ۱۷۳۲ ثابت کرد که:

$$F_5 = 2^{32}+1 = 641\times 6700417$$

وبدین‌گونه بطلان حدس فرما ثابت گردید، یعنی همهٔ این اعداد اول نیستند واگر اول باشند، آن‌را اعداد اول فرما می‌نامند و F_0، F_1، . . . ، F_4 اولند.

آقای انوشه اصغری‌فر؛ قزوین.

نتایجی که بدست آورده‌اید نتیجه و خاصیت عمل ضرب اعداد است. بویژه‌اگر درعمل ضرب اعداد یکی از عوامل ضرب به‌صورت ۱۱، ۱۱۱، ۱۰۱ یا ۱۰۰۱ باشد نتایج جالبی را به‌دست می‌دهد.

آقای مهدی‌اقبال املشی، اصفهان.

نامه پر از مهر و محبت شما موجب دلگرمی و خرسندی ما گردید وما از اینکه توانسته‌ایم رضایت شما عزیزان را بدست آوریم خوشحالیم.

آقای اسماعیل بهاری تهرانی، مشهد.

دومقاله ارسالی شما، که در زمینه کعبگیری تنظیم شده است، به دستمان رسیده امروزه، وجود ماشین‌حساب ویا استفاده از روشهایی مثل، به‌کارگیری دیفرانسیل و یا روش نیوتن، برای تخمین ریشه‌های یک معادله ما را از اینگونه روشهای ارائه شده بی‌نیاز می‌کند موفقیت شما را آرزومندیم.

آقای اسماعیل جمالدار، رشت.

قاعده‌ای که برای محاسبه مربع اعداد دو رقمی به‌دست آورده‌اید همان کاربرد اتحاد اول است. حالتهای مختلفی که ارقام

اعداد اختیار می‌کند دستورهای مختلفی را به دست می‌دهد که کاربرد عملی آن چندان مفید نیست. توضیح قاعده شما چنین است:

$$(\overline{ab})^2 = (10a+b)^2 = 100a^2 + 10(2ab) + b^2$$

با شرط اینکه b^2 و $2ab$ و a^2 از ۹ تجاوز نکند، عدد $\overline{a^2\,(2ab)\,b^2}$ حاصل می‌شود. درغیر این‌صورت، صورت اعداد حاصل تغییر می‌کند.

خانم لیلا رحیمی، دانش‌آموز، کرج.
دستوری که برای ضرب اعداد به دست آورده‌اید برای اعداد خاصی کاربرد دارد که استفاده از آن هم چندان مفید نیست. اگر دستور ارسالی خود را به عنوان یك مسئله تنظیم کنید و برای مجله بفرستید در بخش مسایل آنرا درج می‌کنیم.

آقای محمد اسماعیل خسروی، دانش‌آموز، بروجرد.
ازمسایل ارسالی شما در بخش مسایل استفاده خواهیم کرد.

آقای فرشید شعبانی، دانش‌آموز، رشت.
از ابراز لطف شما نسبت به مجله صمیمانه سپاسگزاریم. تعمیم مسئله مسابقه شماره ۹ را دریافت کردیم. آن را به نام شما درمجله درج خواهیم کرد.

آقای مسعود جلیلی، دانشجو، تهران.
تثلیث زاویه با قبول اصول هندسه اقلیدسی قابل حل نیست. بهتر است به‌مقدمه کتاب هندسه سال اول رشته ریاضی فیزیك تألیف آقای بیرشك مراجعه کنید. همچنین درمجله رشدشماره ۵ و ۶ صفحه ۵۰ به‌مقاله آقای دکتر علیرضا جمالی مراجعه کنید.

آقای محمدی، اصفهان.
ازمسایل ارسالی‌شما برای دانش‌آموزان، به‌موقع استفاده خواهیم کرد.

آقای فرشید شعبانی مطلق، دانش‌آموز، رشت.
از ارسال حل مسایل دانش‌آموزی تشکر می‌کنیم ولی تأکید می‌کنیم از این به بعد از ارسال حل این مسایل نیز خودداری نکنید.

آقای محمدرضا جوادی، تهران.
بارها نوشته‌ایم که ثابت شده است یک زاویه را نمی‌توان به‌کمک خط‌کش و پرگار به سه جزء مساوی تقسیم کرد، وقت خودتان را صرف مسایلی که ثابت شده است حل نمی‌شود، نکنید.

آقای داریوش افتخارپور، دانشجو، تهران.
سؤال کرده‌اید که چرا می‌توان هر عدد طبیعی را به صورت مجموعی از توانهای مختلف ۲ نوشت؟ جواب این است که عدد طبیعی را می‌توان در مبنای ۲ نوشت. واین نمایش منحصر به‌فرد است.

تصحیح

مجله رشد شماره ۲۵ درصفحهٔ ۳۵ ستون ۴ به‌جای $\frac{R}{R-P}$ عبارت $\frac{r}{R}$ صحیح است.

معرفی کتاب

کتب جدیدالانتشار. کتبی‌که نسخه‌هایی ازآن جهت معرفی به‌دفتر مجله رسیده‌است ذیلاً معرفی می‌گردد.

۱- **کتاب معلم(ریاضی):** مسعود فرزان، محمدتقی دیبایی، صفر با همت شیروانه‌ده، پرویز فرهودی‌مقدم؛ ناشر: وزارت‌آموزش وپرورش، ۱۳۶۹؛ این کتاب شامل روش تدریس‌کتب ریاضی دورهٔ راهنمایی‌تحصیلی است ومطالعه آن به همهٔ معلمین و دبیران ریاضی توصیه می‌گردد.

۲- **جبرو حساب:** محمود نصیری؛ ناشر: انتشارات مبتکران، مهر ۱۳۶۹، این کتاب دوره‌ای ازمباحث سالهای اول و دوم جبرو حساب دبیرستان را شامل می‌شود.

۳- **نظریهٔ گالوا:** گارلینگ، دی. اچ؛ ترجمهٔ محمدحسن بیژن‌زاده وحسین‌صدیقی؛ ناشر: دانشگاه یزد، چاپ و انتشارات دانشگاه پیام نور، آبان ۱۳۶۹.

اطلاعیه

دربارهٔ نشریات رشد آموزش تخصصی

مجلات رشد آموزش مواد درسی مدارس کشور که بمنظور ارتقاء سطح دانش معلمان و ایجاد ارتباط متقابل میان صاحبنظران، معلمان و دانشجویان با برنامه‌ریزان امور درسی از سوی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش هر سه ماه یکبار ــ چهار شماره در سال ــ منتشر می‌شود در حال حاضر عبارتند از:

۱ ــ آموزش ریاضی ۲۸
۲ ــ آموزش شیمی ۲۴
۳ ــ آموزش جغرافیای ۲۳
۴ ــ آموزش ادب فارسی ۲۴
۵ ــ آموزش زیست‌شناسی ۲۱
۶ ــ آموزش زبان ۲۵
۷ ــ آموزش زمین‌شناسی ۲۰
۸ ــ آموزش فیزیک ۲۲
۹ ــ آموزش معارف اسلامی ۱۱
۱۰ ــ آموزش علوم اجتماعی ۵

*دبیران، دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر علاقمندان به اشتراک این مجلات می‌توانند جهت دریافت چهار مجله درسال مبلغ ۴۰۰ ریال به‌حساب ۹۰۰۵۷ نزدبانک ملّی شعبه‌خردمند جنوبی ـ قابل‌پرداخت‌درکلیهٔ شعب‌بانک ملّی ـ واریز و فیش آن را همراه با فرم تکمیل شده زیر به نشانی تهران، جادّهٔ آبعلی، خیابان سازمان آب بیست‌متری خورشید مرکز توزیع انتشارات کمک آموزشی کدپستی ۱۶۵۹۸ ــ تلفن ۷۷۵۱۱۰ ــ ارسال دارند. ضمناً: معلمان، کارشناسان، مدیران، پژوهشگران و سایر علاقمندان به امور تعلیم و تربیت جهت آگاهی بیشتر از یافته‌های صاحبنظران می‌توانند با پرداخت مبلغ ۸۰۰ ریال در هر سال ۴ جلد **فصلنامه تعلیم و تربیت** دریافت نمایند.*

مجلات رشدتخصصی در مراکز استان در کتابفروشیهای زیر و سایر شهرستانها در فروشگاههای معتبرمطبوعات‌بصورت فروش‌آزادعرضه می‌شود

تهران:	انتشارات مدرسه ــ اوّل خیابان ایرانشهر شمالی
اهواز:	کتابفروشی ایرانپور زیتون کارمندی خیابان کمیل بین زاویه و زهره پلاک ۲۰
اصفهان:	کتابفروشی مهرگان چهار باغ ابتدای سید علی خان
ارومیه:	کتابفروشی زینالپور نمایندگی و خبرنگاری روزنامه
اراک:	کتابفروشی گنج دانش بازارچه امیرکبیر
بندرعباس:	کتابفروشی مالوک خیابان سید جمال الدین اسدآبادی
باختران:	کتابفروشی دانشمند خیابان مدرس مقابل پارکینگ شهرداری
خرم‌آباد:	کتابفروشی آسیا خیابان شهدا شرقی
رشت:	کتابفروشی فرهنگستان خیابان نامجو جنب دانشگاه
زنجان:	کتابفروشی شهید بهشتی خیابان آیت‌ا... طالقانی
سنندج:	کتابفروشی شهریار خیابان فردوسی
ساری:	شرکت ملزومات و معارف خیابان انقلاب روبروی اداره برق داخل کوچه
شیراز:	پیام قرآن میدان شهدا جنب اداره آموزش و پرورش مرکز فرهنگی
کرمان:	فرهنگسرای زمین پارک مطهری
مشهد:	انتشارات آستان قدس رضوی خیابان امام خمینی روبروی باغ ملی
یاسوج:	کتابفروشی فرهنگ جنب سینما دنا خیابان شهید هرمزپور.

***** دانشجویان مرکز تربیت معلم می‌توانند با ارسال فتوکپی کارت تحصیلی خود از ۵۰٪ تخفیف برخوردار شوند.**

فرم اشتراک مجلات رشد تخصصی

اینجانب با ارسال فیش واریز مبلغ ۴۰۰ ریال، متقاضی اشتراک یکسالهٔ مجلهٔ رشد آموزش هستم.

نشانی دقیق متقاضی: استان شهرستان خیابان

کوچهٔ پلاک کُدپستی تلفن

دانش‌آموزان شرکت‌کننده در سی‌ویکمین
المپیاد بین‌المللی ریاضی چین


قابل توجه
دبیران و
دانشجویان
رشد آموزش شیمی
رشد آموزش زمین شناسی
رشد آموزش جغرافیا
رشد آموزش ادب فارسی
رشد آموزش ریاضی
آموزش زیست شناسی
رشد آموزش فیزیک
رشد آموزش معارف اسلامی
فصلنامه
تعلیم و تربیت
نشریه
مرکز تحقیقات آموزشی
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش
سال ششم ــ شماره ۱ ــ بهار ۱۳۶۹ ــ شماره مسلسل ۲۱
رشد آموزش علوم اجتماعی
رشد آموزش زبان
FLT
آیا شما
مجلات
رشد تخصصی
مخصوص دبیران و دانشجویان را که هر
سه ماه یکبار در زمینه آموزش دروس
دبیرستانی منتشر می شود می خوانید؟