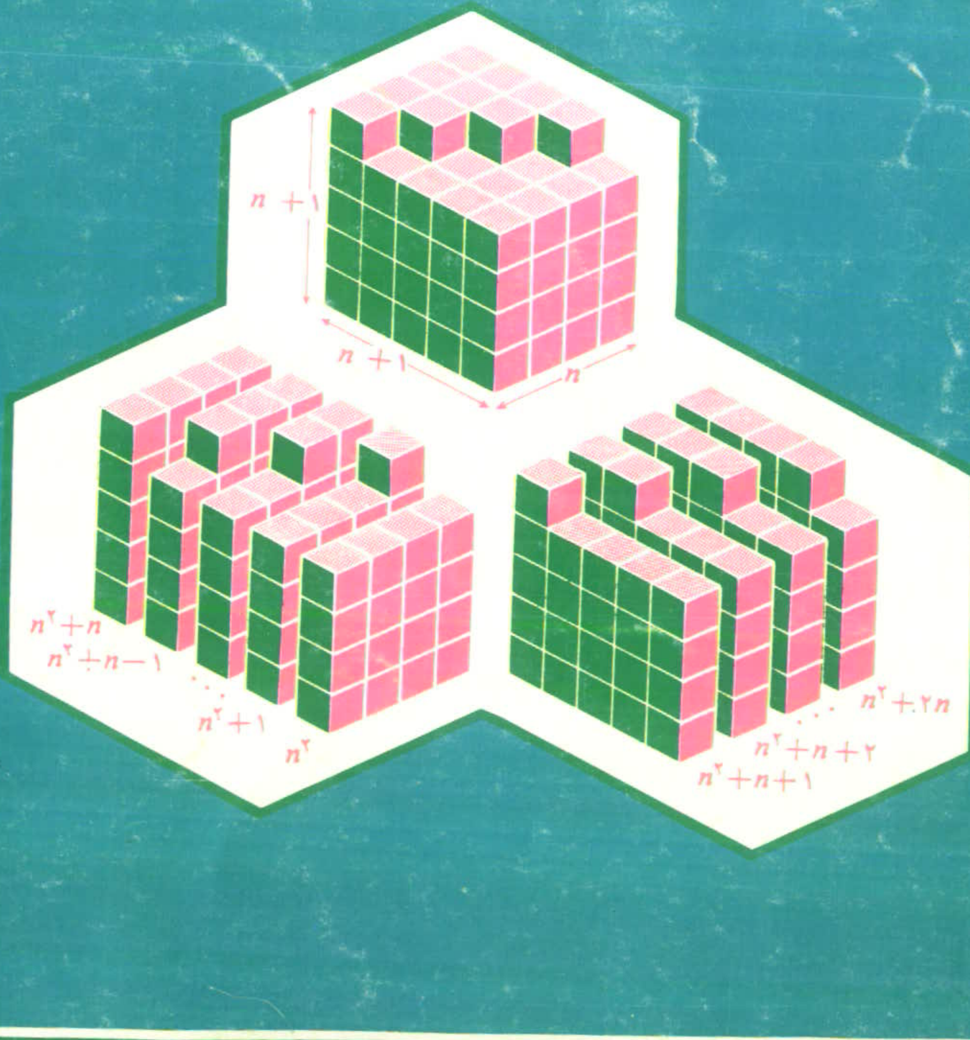
رشد آموزش ریاضی

سال هفتم ـ پاییز ۱۳۶۹ ـ شمارهٔ مسلسل ۲۷ بها: ۱۰۰ ریال

$$۱+۲=۳$$
$$۴+۵+۶=۷+۸$$
$$۹+۱۰+۱۱+۱۲=۱۳+۱۴+۱۵$$
$$۱۶+۱۷+۱۸+۱۹+۲۰=۲۱+۲۲+۲۳+۲۴$$
$$\vdots$$
$$n^۲+(n^۲+۱)+\cdots+(n^۲+n)=(n^۲+n+۱)+\cdots+(n^۲+۲n)$$



بسم‌الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یکبار از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی منتشر می‌شود هدف از انتشار این مجله اعتلای دانش ریاضی دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلّم است. علاوه بر این ایجاد ارتباط متقابل بین معلّمین ریاضی و دفتر تحقیقات، به منظور تبادل تجارب، ارائه روشهای جدید آموزش ریاضی، معرفی جنبه‌های تاریخی، فلسفی، کاربردی ریاضیات در سطح پیش دانشگاهی است. هیأت تحریریه از مشارکت و همکاری همهٔ علاقه‌مندان بویژه دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان در ارائه مقالاتی در زمینه‌های زیر استقبال می‌کند:

الف) آموزش ریاضی (طرح و بررسی آموزش ریاضی، بویژه آموزش ریاضی در دوره‌های پیش دانشگاهی).

ب) تاریخ ریاضی (مشتمل بر سیر تحول مفاهیم ریاضی، شرح و احوال ریاضیدانان و کارهای علمی آنها، بویژه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی).

ج) فلسفه ریاضی (تبیین مفاهیم ریاضی، ریاضیات چیست، بررسی مکاتب ریاضی، بررسی ارتباط تاریخ و فلسفه ریاضی).

ریاضی کاربردی (مشتمل بر مباحثی در زمینه‌های آنالیز عددی، کامپیوتر و برنامه‌ریزی، تحقیق در عملیات، آمار و احتمال).

د) سایر مباحث ریاضی (مشتمل بر مقالات مختلفی در زمینه‌های مختلف، ارائه راه‌حلهای مختلف برای مباحث ریاضی، ارائه مسائل نمونه).

رعایت نکات زیر در مورد مقالات ارسالی ضروری است:

۱) مقالات ارسالی باید در چهارچوب اهداف فوق و با سبکی مشابه با سبک مقالات چاپ شده در رشد ریاضی باشد و در سطحی عرضه شوند که ضمن داشتن محتوی مطلوب دارای کیفیت عرضه مطلوب هم باشند؛

۲) مقالات باید با خط خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) و به صورت یک سطر در میان و با در نظر گرفتن جای کافی در حاشیه تهیه شود و صفحات به‌طور دقیق شماره‌گذاری شود؛

۳) فهرست مراجع مقاله به طور کامل و در دو قسمت فارسی و خارجی و به ترتیب الفبایی و طبق استاندارد مقالات علمی درج شود؛

۴) مقالات ترجمه شده از زبانهای خارجی همراه با متن اصلی ارسال شود؛

۵) مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور به چاپ رسیده باشد؛

۶) رد یا قبول و حک و اصلاح و ویراستاری مقالات به عهدهٔ هیأت تحریریه است.

رشد آموزش ریاضی
سال هفتم - پاییز ۱۳۶۹ - شماره مسلسل ۲۷
نشریهٔ گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تلفن ۴ ــ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۵۰)
سردبیر : دکتر محمدحسن بیژن‌زاده
مدیر داخلی: میرزا جلیلی
مدیر فنی هنری و تولید: حسین فرامرزی نیکنام
صفحه‌آرا: خالد قهرمانی ذهبکری

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار بــه منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر دانش‌پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. جهت ارتقاء کیفی آن نظرات ارزنده خود را به صندوق پستی تهران ۳۶۳ ــ ۱۵۸۵۵ ارسال فرمائید.

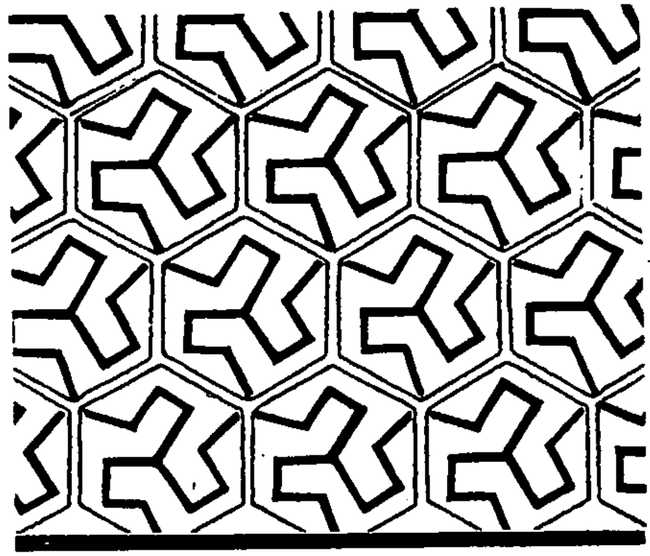
فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

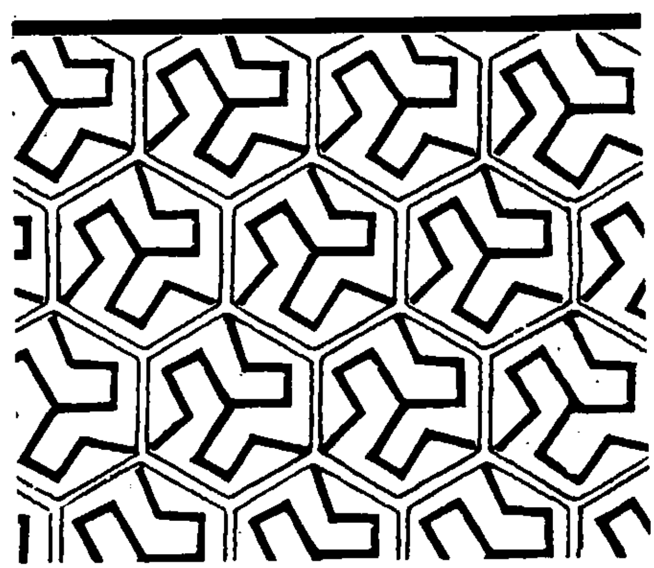
همچنان‌که بارها گفته شده است یکی از اهداف انتشارمجله رشد، انعکاس یافته‌هــای تجربی و پژوهشی دبیران محترم در زمینه آموزش ریاضی و نتایج تحقیقی آنها و نیز سایر مدرسین این رشته می‌باشد. به علاوه پویایی درامر آموزش خود مستلزم مطالعه و تحقیق بیشتر وتبادل نظرهای علمی بین همهٔ مدرسین و اساتیدآموزش ریاضی است. انتظارما براین است‌که ازسوی دبیران محترم مقالات بیشتری دریافت نمائیم. درحالی‌که مجله بیشتر بــه سوی یك مجله علمی تحقیقی در زمینه‌هـای مختلف ریاضی بخصوص وجوه‌آمـوزشی‌آن حرکت مـی‌کند شایسته است‌که همکاران محترم دبیر سعی و اهتمام بیشتری نموده و با ارسال مقالات پر محتوی ترسهم مهمتری از صفحات مجله را به خود اختصاص دهند.

بقیه در صفحه ۳۴



مسأله حل کردن در برنامه ریاضی (۲)

by Alan H. Schoen feld
از انتشارات انجمن ریاضی آمریکا
ترجمه: میرزا جلیلی



مسائل نمونه و بحث‌های کلاسی

نوع مسائلی که ما در کلاس مورد بحث قرار می‌دهیم و تجاربی که از آنها می‌آموزیم در طول سال تغییر می‌کند مقایسه تشابه یادگیری یك بازی ورزشی با یك مسألهٔ فکری مراحل پیشرفت یادگیری را نشان می‌دهد. در اوائل سال که دانش‌آموزان مهارت کمتری در تکنیك‌های حل مسأله دارند در آن دسته از تکنیك‌های اساسی، که بعداً در طول دوره بکار گرفته می‌شوند، آموزش می‌بینند و تمرین می‌کنند (جستجو برای استدلالهای استقرایی، بررسی و آزمایش حالات خاص، استفاده از مسائل ساده‌تر در رابطه با مسأله اصلی، تخصیص و تعمیم) درست به همان طریقی که مثلاً یك مبتدی در تنیس آموزش می‌بیند و تمرین می‌کند که چگونه سرو بزند و یا چگونه باجلو و پشت دست آبشار بزند. زمانی که مهارتهای اساسی خوب فراگرفته شد می‌توان از آنها در شرایط مختلفی که پیش می‌آید به طور گسترده ومتنوعی استفاده کرد. مسائلی که ما کار می‌کنیم به‌تدریج مشکل‌تر و وقت‌گیرتر می‌شود در حقیقت دانش‌آموزان دیگر تنها اصول حل مسأله را نمی‌بینند بلکه یك آموزش خوب ریاضی محض به‌آنها داده می‌شود مطلبی که اکنون رو در روی دانش‌آموزان قرار می‌گیرد انتخاب تکنیك‌های مناسب برای برخورد با مسائل و استفاده مفید و مؤثر از آنها می‌باشد. بحث‌های کلاسی نیز به‌تدریج، همانطور که پیش می‌رویم، تغییر می‌کنند وتأکید بیشتر روی طرح‌ریزی راه حل‌ها و ارزشیابی آنها قرار می‌گیرد. بعضی ازمسائل نمونه کلاس در زیر مطرح شده است.

مسائلی که نکته‌آموزند

اغلب برای آنکه من اطمینان حاصل کنم که نکته خاصی به طور بارزی حتماً به دانش‌آموزان انتقال پیدا خواهدکرد از یك سری مسائل معین که در اختیار دارم استفاده می‌کنم.

این مسائل به‌نظر و تجربه من به طور یقین عکس‌العمل‌های مناسب و خاصی را در دانش‌آموزان ایجاد می‌نماید و استفاده درست و منطقی ازآنها می‌تواند کاملاً مفید ومؤثر واقع شود.

مثلاً این مسأله حائزاهمیت است که درشروع سال تحصیلی که هنوز وضع کلاس نامرتب و غیر طبیعی است و باید جهت داده شود به دانش‌آموزان فهماند وآنها را متقاعدکرد که شما واقعاً چیزی را برای یاد دادن به‌آنها دارید. درطول سالهای تحصیلی بچه‌ها، شاید شما اولین معلم باشیدکه توجه خاص

به مراحل راه حل مسأله دارید. دانش‌آموزان تا این مرحله از تحصیل خود، بدون آنکه نگرانیهای خاصی داشته باشند کار خود را خوب انجام داده‌اند. و اغلب سؤال می‌کنند که چرا حالا ناگهان ما باید اینطور در حل مسائل غور و کنکاش کنیم. مخصوصاً وقتی مسائل مقدماتی مطرح است آنها در وضع خاصی قرار می‌گیرند که اغلب احساس ناراحتی می‌کنند.

برای جلوگیری از بروز این احساس، دسته مسائل من برای چند روز اول کلاس معمولاً شامل بعضی مسائل به صورت زیر است:

۱ـ مجموع دنبالهٔ زیر را تعیین کنید.

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

۲ـ برای چه مقادیری از a دستگاه معادلات زیر:

$$\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ (x-a)^2+y^2=1 \end{cases}$$

دارای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ جواب است؟

۳ـ مطلوبست محاسبه:

$$\sqrt{(\underbrace{111\cdots 1}_{100\ \text{تا یک}})(\underbrace{1000\cdots 05}_{99\ \text{تا صفر}})}$$

۴ـ اگر مقادیر a، b، c، d بین ۰ و ۱ باشد ثابت کنید:

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)\geqslant 1-a-b-c-d$$

۵ـ چه تعداد زیر مجموعه زوج عضوی (۲ عضوی، ۴ عضوی، ...) در مجموعه‌ای که دارای ۸۷ عضو است وجود دارد؟ برای مجموعه n عضوی چه حدس می‌زنید؟

۶ـ چه اعدادی بـه شکل $\underbrace{aaaa\cdots aaa}_{n\ \text{مرتبه}}$ مربع کامل هستند.

۷ـ یك عدد سه رقمی را در نظر بگیرید مثلاً ۱۲۳ یك عدد شش رقمی با نوشتن دو مرتبه تکرار این عدد بنویسید، ۱۲۳۱۲۳ آیا این عدد بر ۷ بخش‌پذیر است؟ بر ۱۱ چطور؟ مانده این عدد بر ۱۳ چیست؟ آیا می‌توان قانونی در این زمینه بیان کرد؟

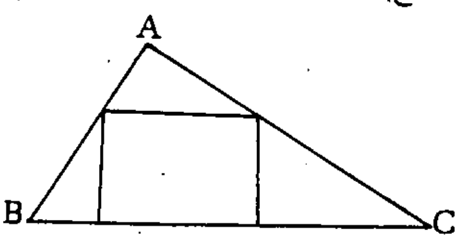
۸ـ درحالت کلی فرمولی برای چند جمله‌ای درجه $n+1$ پیدا کنید که از نقاط زیر بگذرد (n نقطه)

(x_1, y_1) و (x_2, y_2) و (x_3, y_3) و ... و (x_n, y_n)

۹ـ مثلثی را با در دست داشتن زاویه A، ضلع a وارتفاع وارد بر ضلع a رسم کنید.

۱۰ـ مثلثی را با در دست داشتن دو ضلع a و b و طول میانه وارد بر ضلع سوم رسم کنید.

۱۱ـ مثلث زیر را در نظر بگیرید. ثابت کنید مربعی قابل محاط شدن دراین مثلث وجود دارد یعنی نشان دهید که مربعی وجود دارد که چهار رأس آن روی اضلاع مثلث است (دو رأس روی یك ضلع).



تجربه من این است که دانش‌آموزان معمولاً بیست دقیقه روی هر یك از این مسائل، بدون اخذ نتیجه، وقت صرف می‌کنند. اگر آنها موفق به پیدا کردن راه حل هم بشوند. این راه حل اغلب اشتباه و یا آبکی است مثلاً ما تشخیص می‌دهیم که مسأله ۱ همان دنبالهٔ معروف ادغام است که در آن جملات مجاور وقتی که هر کدام به صورت زیر بیان شود

$$\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}$$

حذف خواهند شد. دانش‌آموزانی که با این دنباله برخورد نکرده باشند احتمال ضعیف دارد که قادر به حل مسأله باشند اغلب دانش‌آموزان اقرار کرده‌اند که به نظر می‌آید که حل آن مثل خرگوش از زیر کلاه بیرون آوردن است و آنها هرگز خود قادر به حل آن نبوده‌اند.

در مسأله ۲ دانش‌آموزان فوری بـه راه حل جبری رو می‌آورند. پی‌گیری راه حل‌های مختلف برای یك مسأله نیز برای آنها خیلی مشکل است و اگر ازمیان دانش‌آموزان کسانی هم این کار را انجام بدهند عدهٔ آنها بسیار محدود خواهد بود

همچنین مسائل ۳ و ۴ ممکن است با راه‌حل‌های مختلف حل گردد.

وقتی مسأله ۴ در یك مجله ماهانه به چاپ رسید من تعداد زیادی راه‌حل‌های مختلف دریافت کردم اما در مورد دانش‌آموزان به طور کلی می‌توان گفت که آنها پرانتزها را ضرب وهمهٔ جملات را به‌طرف چپ منتقل می‌کنند و با تحمل زحمات زیاد ثابت می‌کنند که عبارت دست چپ مثبت است.

در مورد مسأله ۵ دانش‌آموزان فوری به فرمولهای پیچیده ترکیبات متوسل می‌شوند. درمورد مسأله ۶ اگر دانش‌آموزان به حالات‌خاص بپردازند مسلماً به‌نتیجه‌خواهند رسید. زمانی که این مسائل مطرح است من به کلاس اجازه می‌دهم مدتی روی آنها کار کنند و سپس به آنها چند قانون کلی برای مسأله حل کردن می‌دهم که مسلماً شما با آنها آشنا هستید پیشنهادات برای مسائل فوق به‌قرار زیر است:

۱ـ اگر درمسأله «پارامتر صحیح» n وجود دارد مسأله را برای حالات خاص $n = 1, 2, 3, 4, 5$ حل کنید. ممکن است ضمن آزمایش حالات خاص به یك الگو دست پیدا کنید. اگر الگو ظاهر شد صحت آن‌را با روش استقراء ثابت کنید.

۲ـ هرجا ممکن است شکل رسم کنید.

۳ـ اگر مسأله به صورت داده شده مشکل است موقتاً یکی ازشرایط مسأله راکنار بگذارید و درجستجوی مسأله‌ای قدری ساده‌تر باشید. وقتی مطمئن شدیدکه مسأله ساده‌تری که طبیعت آن با مسأله اصلی یکی است پیداکردید قاعدتاً برای این مسأله جدید باید راه حل‌های بیشتری وجود داشته باشد. به همه راه حل‌های این مسأله ساده شده توجه‌کنید شاید راه حلی برای مسأله اصلی در بین آنها وجود داشته باشد.

۴ـ اگر در مسأله متغیرهای متعددی وجود داردکه نقش همه آنها یکی است بدنبال مسأله متشابه با یك یا دو متغیر باشید. ممکن است بدین طریق موفق شوید راه حلی پیدا کنید.

با این اشارات، دانش‌آموزان معمولاً قادر خواهند بود ظرف چند دقیقه مسائل ۷,۵,۳,۲,۱ را حل کنند ولی بقیه مسائل ممکن است وقت بیشتری بگیرند ولی درمجموع، طرح و بحث همه آنها برای کلاس مفید خواهد بود.

پیشنهادات برای حل‌مسائل کاملاً طبیعی ومنطقی به‌نظر می‌آیند.

در حقیقت، برای مسأله حل‌کردن، نکات ومطالبی وجود دارد که دانش‌آموزان باید بدانند ولی نمی‌دانند و تذکر آنها ضروری است.

با این سیاست‌واستراتژی وقتی دانش‌آموز ازکلاس بیرون می‌آید احساس می‌کندکه بعضی از مهارتهای مسأله حل‌کردن را درکلاس یادگرفته است و از این جهت خوشحال به نظر می‌رسد.

به‌ترتیب‌که دانش‌آموزان درحل مسأله مهارت پیدا می‌کنند مسائل مناسب دیگری مطرح می‌شوندکه نتایج خاصی ازآنها را همراه خود به خانه خواهند برد. مثلاً دانش‌آموزان به زودی ارزش پیشنهاد مطرح شده در بند ۱ بالا را تشخیص خواهند داد در این موقع از سال مسأله زیر مفید خواهد بود:

در یك مسابقه حذفی شطرنج بازیکنان به طور تصادفی زوج، زوج انتخاب می‌شوند و هر زوج یك بازی را انجام می‌دهد و بازنده از مسابقه حذف می‌شود و برنده ادامه می‌دهد. مثلاً اگر ما با ۳۲ بازیکن شروع‌کنیم پس‌از بازی اول ۱۶ نفر برای دور دوم باقی می‌مانند. اگر تعداد بازیکنان فرد باشند یك‌نفر بازی نمی‌کند امامرتب به دورهای بعدی راه پیدا می‌کند. اگر عدهٔ بازیکنان ۱۵ نفر باشند یك نفر بدون بازی جلو می‌رود و پس‌از بازی اول ۷ نفر برنده وآمادهٔ دور بعد خواهند شد.

در حالت‌کلی اگر n بازیکن شرکت داشته باشند:

اگر n زوج باشدآنگاه $\frac{n}{2}$ بازی انجام‌خواهد شد و $\frac{n}{2}$ بازیکن به دور بعدی راه پیدا می‌کنند اگر n فرد باشد $\frac{n-1}{2} + 1$ یا $\frac{n+1}{2}$ بازیکن ادامه خواهند داد $\frac{n-1}{2}$ بازی انجام شده است.

سؤال: اگر n بازیکن در مسابقه شرکت کنند، قبل‌از اینکه برنده تعیین شود، چند بازی باید انجام گردد؟

برای حل این مسأله عده زیادی ازدانش‌آموزان به‌آموزش واطلاعات خود مراجعه خواهندکرد وفوری به‌تکنیك «پارامتر صحیح» متوسل خواهند شد. وقتی آنها برای حالات خاص $n = 2, 3, 4, 5, 6$ آزمایش کردند الگوی مسأله کاملاً روشن خواهد شد.

اگر n نفر بازی را شروع کنند و اگر در هر بازی یك نفر حذف شودآنگاه $n-1$ بازنده خواهد بود لذا $n-1$ بازی انجام شده است.

نتیجه:

ـ قبل‌ازآنکه شروع به‌حل مسأله‌کنید مطمئن شویدکه مسأله

را خوب فهمیده‌اید.

ـ راه حل‌های پیچیده و پر عمل را ادامه ندهید مگر آنکه مطمئن شوید که راه ساده‌تری وجود ندارد.

ـ یك هدف اصلی در حل مسائل روشن ساختن نقش ارائه برهانهای مختلف (راه حل‌های مختلف) در ریاضیات است لذا برای رسیدن به جواب به راه حل‌های مختلف توجه کنید.

مسأله زیر نا مأنوس‌ترین ولی از قوی‌ترینهاست.

مسأله: مجموع سری هندسی زیر را پیدا کنید

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

اگر دانش‌آموزان قبول کنند که این مجموع دارای حداست آنگاه راه حل زیر بهترین خواهد بود.

طرفین تساوی فوق را در ۲ ضرب می‌کنیم می‌شود:

$$2S=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots}_{S}$$

همانطور که انتظار داشتیم:

$$2S=1+S \Longrightarrow \boxed{S=1}$$

وقتی دانش‌آموزان این شکل راه حل را می‌بینند معمولاً احساس می‌کنند که بحث ε و δ با آن ظرافت ودقت که به‌آنها تحمیل می‌شود غیر ضروری است چرا باید آنهمه‌کش و قوس رفت در حالی که ما چنین استدلال ساده و قابل قبولی برای مسأله داریم.

من بحث مسأله زیر را نیز مفید می‌دانم

مسأله: مطلوبست تعیین مجموع سری زیر:

$$T=1+2+4+8+\cdots+2^n+\cdots$$

از بحثی نظیر آنچه در بالا گذشت حاصل می‌شود:

$$2T=2+4+8+16+\cdots+2^n+\cdots$$

$$=1+(2+4+8+16+\cdots+2^n+\cdots)-1$$

$$=\underbrace{(1+2+4+8+16+\cdots+2^n+\cdots)}_{T}-1$$

$$=T-1$$

$$\boxed{T=-1\ ?}$$

(لغزشهای ریاضی ماکسول[1] یکی از منابع قوی برای استدلالهای نظیر استدلال بالاست. برای دوره‌های پیشرفته گل‌بام[2] وال‌مست مثالهای نقص در آنالیز مفید می‌باشد).

نکته آموزشی

آماده ساختن دانش‌آموزان برای مسأله حل کردن که حالات خاص‌را مورد آزمایش قرار دهند و یا مسائل ساده‌تر در ارتباط با مسأله اصلی را بررسی کنند و یا استراتژی مختلف مسأله حل کردن را به‌کار بگیرند باید با همان دقت و تمرین انجام شود که ما آنها را برای به‌کار بردن مثلاً، فرمول معادله درجه دوم و یا قانون جزء به جزء در انتگرال‌گیری آماده می‌سازیم.

به طور کلی، من بحث منطقی زیر را برای آموزش هر تکنیکی مفید می‌دانم:

۱ـ آموزش هر تکنیك را با طرح مسائل خاص، جالب و دلچسبی شروع نمائید.

۲ـ در هفته‌های بعد، تعداد زیادی تمرین روی آن تکنیك حل کنید (مثلاً $\frac{1}{3}$ مسائل کلاس).

۳ـ در طول سال، به طور متعادلی، مسائلی که با آن تکنیك حل می‌شوند به کلاس بدهید.

بحث کلاس روی یك مسأله مشکل

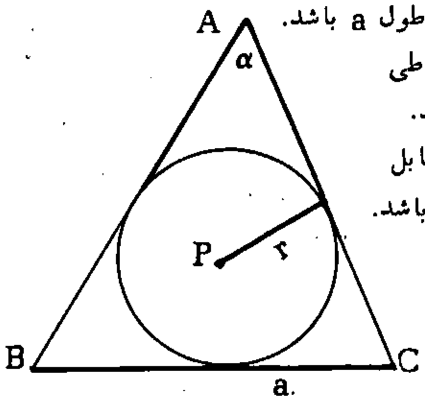
در این قسمت کوشش من این است که گوشه‌ای از بحث‌های کلاس که روی مسأله زیر انجام گرفته است ارائه دهم.

مسأله: دو پاره خط به طولهای a و r مفروضند زاویه α نیز داده شده است مثلثی بسازید که دارای خواص زیر باشد.

۱ـ یك ضلع آن به طول a باشد.

۲ـ شعاع دایره محاطی داخلی مثلث r باشد.

۳ـ اندازه زاویه مقابل به ضلع a برابر α باشد.



برای سهولت در مراجعات بعدی، مثلث مطلوب را بـه T، نمایش می‌دهیم در شکل، اجزایی کـــه سیاه‌تر ترسیم شده‌اند مفروضات مسأله را نشان می‌دهندکـه می‌خواهیم با استفاده از آنها مثلث T را بسازیم. کلاس با اساس به‌کارگیری خط‌کش و پرگار در رسم‌هـای هندسی آشناست. علاوه بر این بچه‌ها رسم کمان در خور زاویه α متناظر با خط a را نیز می‌دانند. روش استاندارد برای حل اینگونه مسائل این است کـه سعی شود مستقیماً مثلث مطلوب ساخته شود راه حل را مـی‌توان با یکی از فرض‌هـای داده شده مسأله شروع کرد و آنگاه سعی نمود با تعیین تلاقی دو مـکان هندسی ساخته شده نقطه‌ای تعیین کرد که بـه طور یگانه‌ای مثلث T را مشخص سازد ــ کلاس همچنین با روش دیگری نیز آشناست «ساختن مثلث متشابـه با مثلث T وسپس رسیدن‌به T باکم و زیادکردن نسبت (مقیاس) تشابه» شاید منطقی باشدکه به دنبال چنین راه حلی نیز رفت.

در زیر بحث‌هـای کلاس راکه، مدت ۴۰ دقیقه وقت ما را اشغال نمود و بـه وسیله دو نفر از دانش‌آموزان یادداشت و تنظیم شده است می‌بینید[۳].

طرح تصمیم‌گیری

به نظر شما شروع کار باید باکـدام یك از مفروضات زیر باشد؟

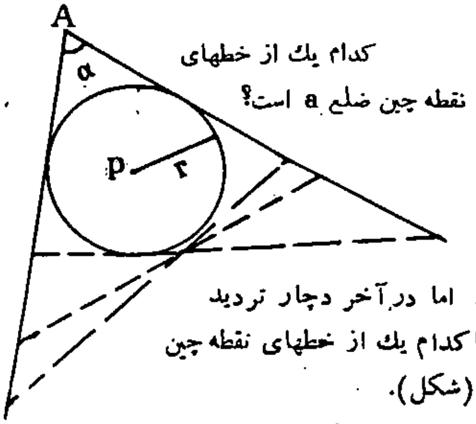
الف ــ دایره محاطی با شعاع r.

ب ــ ضلع a از مثلث.

ج ــ زاویه α به رأس A

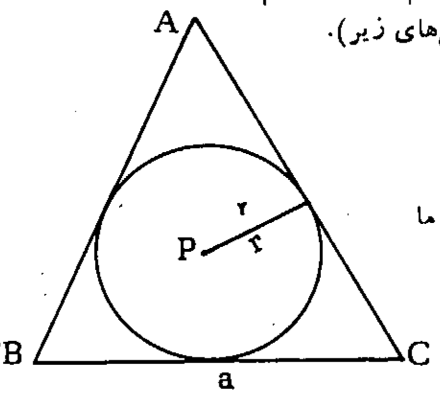
آیا انتخاب الف خـارج از بحث است؟ ببینیم اگـر بـا دایره محاطی شروع کنیم وضع ضلع a چطور می‌شود؟

ضلع a چگونه با رأس A ارتباط پیدا مـی‌کند؟ بـه نظر می‌رسدکـه این یکی ارزش پـی‌گیری کـردن را ندارد. اما انتخاب «ب» منطقی به نظر می‌رسد اگربا ضلع a شروع کنیم ما می‌توانیم (I) مکان هندسی رأس A را رسم کنیم (II) مکان مرکز دایره محاطی یعنی، P را تعیین نماییم. اما این دو مکان چگونه با هــم ارتباط پیدا می‌کنند روشن نیست؟ ممکن است این مطلب ارزش پی‌گیری کـردن را داشته بـاشد. اما اجازه بدهید نگاهی هم به انتخاب «ج» بیاندازیم. اگر با زاویه α شروع‌کنیم بـه نظر می‌آیدکـــه ما می‌توانیم دایره را محاط نماییم. آیا می‌توان ازآنجا راه‌حلی بدست‌آورد؟ جواب هم ممکن است و هم ممکن نیست اما به‌نظرمی‌رسدکه ارزش دنبال کردن داشته باشد با زاویه α شروع می‌کنیم نقطه P به‌آسانی

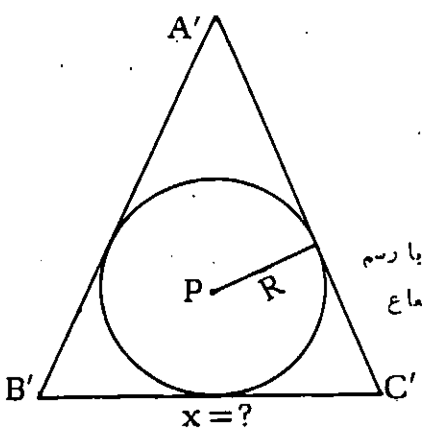


بدست می‌آید. اما درآخر دچار تردید می‌شویم که‌آیا کدام یك از خطهای نقطه‌چین ضلع a است؟ (شکل).

ما طول ضلع a را و اینکـه بـر دایـره باید مماس باشد می‌دانیم. دو نوع اطلاع راجع بـه ضلع a داریم اما ظاهراً راهی برای ارتباط آنها بـه نظر نمی‌آید اگر چه قدری باز ـ نگهدارنده است اما هنوز هـم ممکن است ما بتوانیم از تشابه اشکال رسم شده چیزی به دست‌آوریم واین ارزش یك امتحان کردن مختصر را دارد ما یك مماس دلخواه را در پایین دایره می‌کشیم و امید داریم که بعداً باکم و زیادکردن نسبت تشابه به a برسیم (شکل‌های زیر).



این شکلی است که ما می‌خواهیم به شعاع. r و BC=a



این شکل را می‌توان با رسم یك دایره محاطی به شعاع دلخواه R به دست آورد

در شکل بالا، اگر دو مثلث متشابه باشند داریم $\frac{x}{R}=\frac{a}{r}$ و این به نظر نمی‌آیدکه به جائی برسد و متوقف می‌شویم.

طرح تصمیم‌گیری ۵ دقیقه از وقت‌کلاس را می‌گیرد. در این موقع من نقش راهنما را بازی مـی‌کنم و سؤالاتی از این

قبیل مطرح می‌کنم: خوب، چه انتخابهایی ما داریم؟ آیا انتخابهای دیگر نیز وجود دارد؟ کدام از اینها امیدوار کننده‌تر به‌نظر می‌رسند؟ بنابراین انتخاب ما، بین ب و ج خواهد بود. شما باکدام یك از این دو شروع خواهیدکرد؟ دانش‌آموزان کلاس راجع به کارآئی هر یك از این دو راه بحث می‌کنند و تصمیم می‌گیرند. فرض ج را آزمایش کردیم به‌نتیجه نرسید.

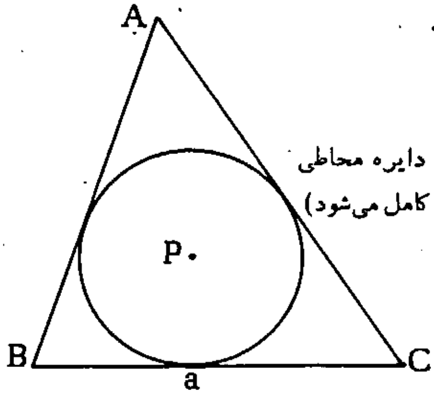
تصمیم مدبرانه

آیا ما باید این خط فکری را بیشتر دنبال‌کنیم و یا اینکه برگردیم و راه دیگری را جستجوکنیم. بدین ترتیب به نظر می‌رسدکه ما به بن‌بست رسیده‌باشیم لذا تصمیم گرفتیم دوباره به انتخاب «ب» برگردیم.

۱ــ می‌دانیم‌که ما می‌توانیم مکان هندسی نقاطی راکه مقابل ضلع a هستند وزاویهٔ ثابتی را می‌سازند (کمان درخور زاویه α متناظر با پاره‌خط a) رسم کنیم.

۲ــ می‌دانیم‌که برای نقطه P، یعنی مرکز دایره محاطی نیز یك مکان داریم.

ما نیاز به اطلاع دیگری راجع به مثلث داریم. اگربتوانیم مکان دیگری را برای رأس A پیداکنیم آنگاه کارساختن مثلث تمام شده است تعیین مکان دیگری بـرای نقطهٔ P، مرکز دایره محاطی، به ما امکان رسم دایره محاطی را می‌دهد. همچنین به ما امکان خواهد داد از دوسر پاره‌خط a دومماس بردایره رسم کنیم. (شکل زیر).



(با داشتن ضلع a و دایره محاطی
در جا ساختن مثلث کامل می‌شود)

در زیر انتخابهای ممکن دسته‌بندی شده است

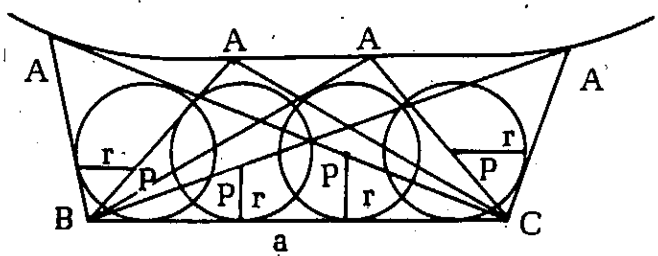
۱ــ تعیین مکان رأس A وقتی ضلع a ثابت ودایره محاطی داخلی مثلث با شعاع ثابت که برضلع a مماس است تغییر کند.

۲ــ تعیین مکان مـرکز دایره محاطی داخلی مثلث وقتی‌که ضلع a ثابت واندازهٔ زاویه A نیز برابر مقدارثابت α باشد و رأس A تغییرکند (کمان درخور زاویـه α نظیر وتـر a) کدام یك را باید ادامه داد؟

پیشنهاد: ما در وضع غیر ثابتی هستیم و اساسی بـرای یك قضاوت خوب نداریم شاید حالا وقت آن رسیده باشدکه چند تا شکل تقریبی رسم‌کنیم چه مشاهده بعضی کارهـــای عملیّ و ترسیمی ممکن است ما را هـدایت‌کندکـه یك انتخاب را بر دیگری ترجیح دهیم و حتی ممکن است فرضیه و ایدهٔ جدیدی نیز به‌دست دهد. ما انتخابهای ۱ و ۲ را به ترتیب درشکلهای ۱ و ۲ آزمایش می‌کنیم.

انتخاب ۱

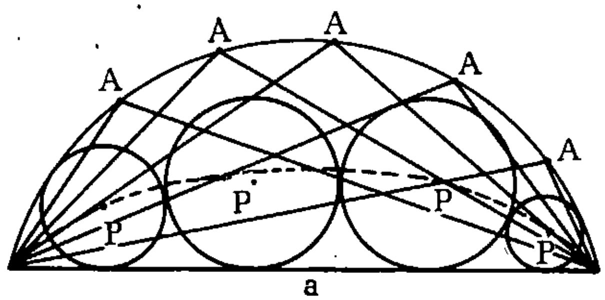
تعیین مـکان رأس A با در دست داشتن ضلع ثابت a و دایره محاطی متغیر با شعاع ثابت r به نظر نمی‌آیدکـه این شکل راه‌گشا باشد.



شکل (۱)

انتخاب ۲

تعیین مرکزدایره محاطی P، با در دست داشتن a و رأس متغیر A متقابل به زاویه α نظیر a



شکل (۲)

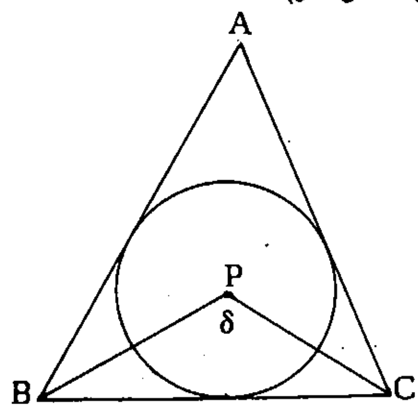
مکان متقارن است واز دوسر پاره‌خط a می‌گذرد واحتمال دارد قوسی ازیك دایره باشد. این انتخاب ممکن است ما را به جائی برساند. شکل تقریبی رسم شده نشان می‌دهدکه مکان P، با دردست داشتن متغیر A، ممکن است دایره‌ای باشد، که

ضلع a وتر آن است (اگر ما از حدس خود مطمئن نیستیم می‌توانیم شکل‌های دقیق‌تری رسم کنیم. اجازه بدهید این کشف عملی را دست کم نگیریم).

لم ۱ (زیر مسأله) - ثابت کنید مکان هندسی نقطه P (مرکز دایره محاطی) وقتی ضلع a و رأس متغیر A داده شده دایره‌ای است که a یك وتر آن می‌باشد.

سؤال - چگونه این مطلب را ثابت کنیم؟ ما راجع به دایره و وتر و خواص آن چیزهائی در این زمینه می‌دانیم.

بیان لم بالا به شکل دیگر - ثابت کنید که با در دست داشتن a و α، نقطه P یك زاویه ثابت متقابل (متناظر) ضلع a می‌سازد (کمان درخور شکل زیر).

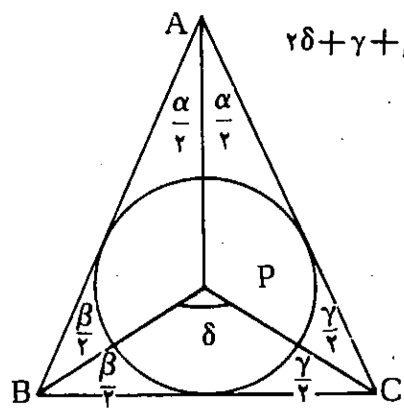


آیا می‌توان ثابت کرد که زاویه δ فقط بستگی به α دارد؟

لم ۲ (زیر مسأله) - فرمولی که δ را برحسب α نشان دهد به دست آورید. در مثلث PBC داریم:

$$\delta+\frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{2}=180^\circ$$

$$2\delta+\gamma+\beta=360^\circ \qquad (1)$$



در مثلث ABC نیز داریم

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ \qquad (2)$$

با توجه به (۱) و (۲) می‌شود:

$$\boxed{\delta=90^\circ+\frac{\alpha}{2}}$$

یعنی δ فقط بستگی به α دارد، و این مسأله را حل می‌کند. مرکز دایره محاطی از محل تلاقی دایره و یك خط، به شرح زیر به دست می‌آید.

۱- رسم کمان درخور زاویه $\delta=90+\frac{\alpha}{2}$ متناظر با پاره خط a

۲- رسم خط موازی a و به فاصله r از آن

جمع‌بندی مختصر بحث فوق

همانطور که در بالا گفته شد، حل این مساله ۴۰ دقیقه وقت کلاس را گرفت تا به نتیجه رسید. درصورتی که می‌شد ظرف ده دقیقه یا کمتر راه حل را ارائه داد - آیا این همه وقت صرف یك مسأله کردن؛ با شروع‌های نادرست آغاز کردن، به عقب برگشت کردن، راههای کور تجربه کردن استراتژی مهم تصمیم گرفتن، دنبال لم‌ها رفتن و غیره حقیقتاً ارزش پی‌گیری کردن دارد و قابل دفاع است؟ جواب من مثبت است، اگرچه مطمئناً قصد این را ندارم که توصیه کنم هر مسأله‌ای را از این راه حل کنید.

مواقعی است که ما فقط نیاز داریم اطلاعات را ارائه دهیم مثلاً آن زمان که دانش‌آموزان می‌خواهند در راه حل‌های معمولی مهارت پیدا کنند.

ما باید دانش‌آموزان را هدایت کنیم که اندیشیدن و کشف کردن را بیاموزند. در حقیقت مهمترین وظیفه ما به عنوان یك معلم و راهنما این است که دانش‌آموزان خود را طوری تربیت کنیم که خودکار و خود اندیش باشند من فکر می‌کنم که این طریق مسأله حل کردن در کلاس یك کاتالیزور برای اینگونه آموزش است.

در محاسبهٔ زاویه δ برحسب α، کلاس یك کشف کاملاً غیر منتظره‌ای انجام داد «مکان هندسی مرکز دایره محاطی با مفروضات داده شده (ضلع ثابت a و رأس متغیر A با زاویه α منقابل a) دایره‌ای است که a وتر آن است» کار این کشف به علت نیاز و همچنین انجام چند ترسیم تسریع شد مهم اینکه آن در حل مسائل دیگر نیز مفید خواهد بود. خلاصه اینکه آن‌روز دانش‌آموزان در کلاس کار ریاضی کردند تجربه‌ای که آنها در آن کشف کوچك داشتند شبیه تجربه خود ماست وقتی که با ریاضیات عالی کار می‌کنیم. این روش مسأله حل کردن به ما اجازه می‌دهد که ریاضی را به عنوان یك درس زنده و حیاتی، که در آن کشف هم ممکن است وهم لذت بخش، معرفی

نماییم.

اما راجع به شروعهای نادرست، عقب گردها، راههای کور و غیره چطور؟ در حقیقت کار ریاضی کردن شامل همهٔ این مراحل می‌شود. کار ریاضی یعنی فائق آمدن برهمهٔ این مشکلات دانستن آنکه چه موقع باید کنکاش کرد. تصمیم گیری روی انتخابهایی که جلوی روی ماست، چه راهی را باید دنبال نمود، کدامها نتیجه می‌دهند و کدامها باید رها شوند، و غیره. دانش‌آموزانی که این مطالب را می‌دانند به احتمال خیلی قوی در حل مسائل مبارزه‌جوتر و با شهامت‌تر خواهند بود. آنها وقتی کار ریاضی می‌کنند، مسأله حل می‌کنند و یا راه‌حل‌ها را شخصاً تجربه می‌کنند از این راه کلی مطلب یاد می‌گیرند.

مسأله حل کردن مشکل ریاضی‌دانهاست، **آن لذت وهیجان** ریاضی است. ما وظیفه داریم و حتی بدهکاریم به آنهایی که درآینده می‌خواهند ریاضی‌دان شوند ویا آنهایی که کار ریاضی را انجام می‌دهند و یا ریاضی را به کار می‌برند و یا کسانی که نسبت به ریاضی علاقه دارند **تجربه مسأله حل کردن را یاد بدهیم**.

ما معتقدیم که آموزش روش مسأله حل کردن به دانش‌آموزان هیجان و زیبایی ریاضی را نشان خواهد داد. به همان درجه که ما دانش‌آموزان خود را تربیت کنیم که مستقلاً فکر کنند و از اطلاعات خود خوب استفاده نمایند. ما به عنوان یك معلم در کار خود توفیق پیدا کرده‌ایم.

نمونه مسائل کار در کلاس

۱ــ فرض کنید p عدد اول بزرگتر از ۳ باشد ثابت کنید که باقیماندهٔ p^2 بر عدد ۱۲ برابر ۱ است.

۲ــ فرض کنید P یك چند ضلعی با ۱۰۰۱ ضلع باشد آیا:

الف ــ هرگز

ب ــ بعضی اوقات ولی نه همیشه

ج ــ همیشه می‌توان خط راستی رسم کرد که همهٔ اضلاع P را قطع کند؟

۳ــ آیا فقط با به کار گرفتن اسکناسهای ۷ و ۱۷ تومانی می‌توان:

الف ــ یك دفترچه ۵ تومانی خرید و باقی پول را نیز درست تحویل گرفت؟

ب ــ یك مجلهٔ ۱۱ تومانی؟ ویك باغ ۹۸۷۶۹۸۷۶ تومانی؟

۴ــ آیا فقط با به کار گرفتن اسکناسهای ۶ و ۱۵ تومانی می‌توان

الف ــ یك کتابچه ۵ تومانی خرید؟ یك مداد ۱۲ تومانی خرید؟ یك باغ ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ تومانی خرید؟ (و باقیمانده را درست دریافت کنید).

۵ــ اگر a، b، c، d اعداد مفروض مثبت باشند ثابت کنید

$$\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{abcd} \geqslant 16$$

۶ــ با در دست داشتن قطعه خطی به طول l، آیا می‌توان پاره‌خطی به طول:

$$l\left(\frac{\sqrt{13}-3}{4}\right)$$

رسم کرد؟

۷ــ مجموع زیر را پیدا کنید

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$$

۸ــ اینهم برای کسانی که «حساب حروفی» را دوست دارند، مجموعهای زیر را حساب کنید.(هرحرف متمایز نمایش یك رقم متمایز است)

$$\begin{array}{r} \text{FORTY} \\ +\ \text{TEN} \\ +\ \text{TEN} \\ \hline \text{SIXTY} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{SEND} \\ +\ \text{MORE} \\ \hline \text{MONEY} \end{array}$$

زیرنویس‌ها:

۱ــ Maxwell,s Fallacies in Mathematics.

۲ــ Gelbaum and Olmest.

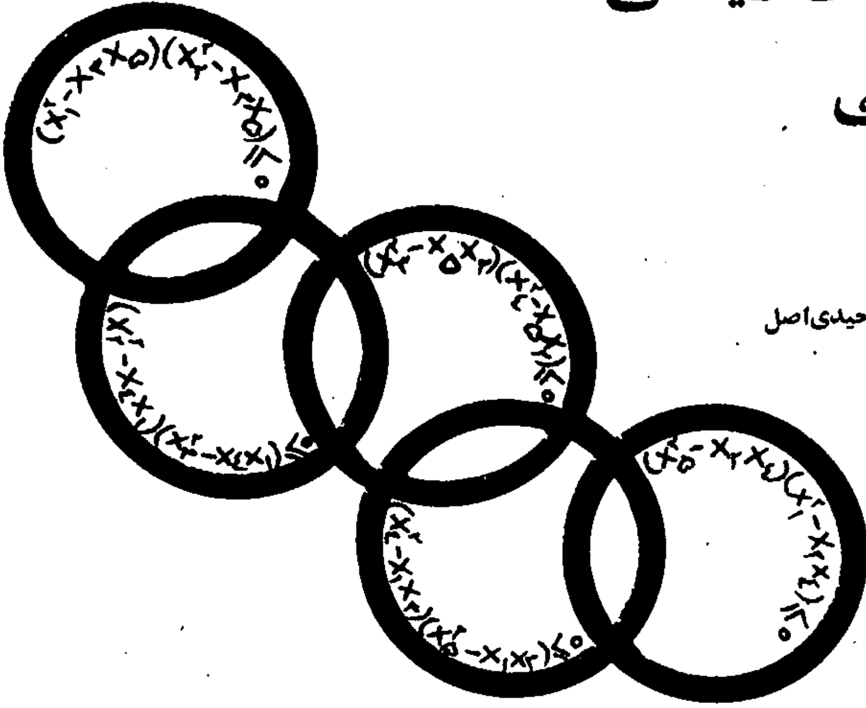
۳ــ مطالب در کلاس خیلی سریع پیش می‌رود و یاداشت برداشتن اغلب موجب عدم توجه دقیق دانش‌آموزان به مطلب درسی می‌شود. ما معمولاً در کلاس بدین ترتیب عمل می‌کنیم که در هر جلسه به نوبت دو نفراز دانش‌آموزان یادداشت برمی‌دارند و بعد با استفاده ازآنها بحث کلاس تنظیم و تدوین و بــه وسیله خودم یادستیارم تصحیح می‌شود و سپس بین دانش‌آموزان توزیع می‌گردد (از ضبط و نوار هم استفاده می‌شود) بقیه دانش‌آموزان در آن روز از نوت برداری رسمی معاف هستند ولی ممکن است نکات مهم، جالب و آموزنده درس‌را برای‌خود یادداشت کنندکه به همین یادداشتها نیز به عنوان کار در کلاس توجه و نمره داده می‌شود.

المپیادهای ریاضی بین‌المللی

جلد اول

گرایتزر سموئل

ترجمهٔ: محمدقاسم وحیدی‌اصل



(ریاضیات پیش‌دانشگاهی - ۲۷)

در حاشیه نقد کتاب

جواد لالی

نام‌کتاب؛ المپیادهای ریاضی بین‌المللی.
تألیف ؛ گرایتزر سموئل.
مترجم ؛ دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل.
ناشر ؛ مرکز نشر دانشگاهی.
قیمت ؛ ۱۱۰۰ ریال.

جهت آشنایی با محتوای کتاب المپیادهای ریاضی بین‌المللی، و انگیزه پیدایش و تألیف و ترجمه آن، بی‌مناسبت نیست که نظری اجمالی به تاریخچهٔ این نوع المپیادها و نحوهٔ گزینش و انتخاب و جمع‌آوری مسائل آن داشته باشیم.

در سال ۱۹۵۹ کشور رومانی ازکشورهای بلوك شرق (رومانی، مجارستان، چکسلواکی، لهستان، شوروی و آلمان شرقی) دعوت نمود تا در یك مسابقه ریاضی شرکت کنند. این ابتکار کشور رومانی موجب گردید که مبنای یك مسابقه ریاضی بین‌المللی در جهان گذاشته شود و تاکنون، هرساله، این مسابقه در یکی ازکشورهای شرکت‌کننده برگزار می‌شود. اگر چه در شروع آن تعدادکشورهای شرکت کننده اندك بودند، ولی، با مرور زمان، سال‌به‌سال به تعداد آن افزوده گردید به‌گونه‌ایی‌که در سال ۱۹۷۷ به بیست‌ویك کشور، ودرسال ۱۹۸۷، که ایران برای اولین بار درآن‌شرکت کرده بود[۱]، بـه ۴۲ کشور رسید. هر کشور یك تیم ۸ نفره، شامل ۶ دانش‌آموز و یك سرپرست اول و یك سرپرست دوم، به‌کشور میزبان اعزام می‌دارد. سرپرستان اول هیأتی بنام هیأت ژوری تشکیل می‌دهند که مهمترین مرجع تصمیم گیری دراین نوع مسابقات است. هریك ازسرپرستان اول، حداکثر، ۵ مسأله به هیأت ژوری ارائه می‌دهند. اعضای هیأت ژوری براساس علاقه خویش به ۵ کمیته هندسه، نظریه اعداد، آنالیز ترکیبی توابع و نامساویها تقسیم می‌شوند. مسائل برحسب محتوای علمی خود بین این کمیته‌ها توزیع می‌گردد. پس‌از بحث و تبادل‌نظر برروی مسائل درکمیته‌ها، از هر کمیته، یك

مسأله برای مسابقه برگزیده می‌شود. بالاخره، در یك جلسه نهایی بین کمیته‌ها، ششمین مسأله نیز انتخاب می‌گردد. ملاك اصلی در انتخاب مسائل ضرورت به‌کارگیری نوعی از ابتکار، خلاقیت در راه‌حل‌مسأله، عدم چاپ آن مسأله درکتب ونشریات علمی است. انجام مسابقات در دو روز، هر روز سه مسأله، به مدت چهار ساعت ونیم انجام می‌گیرد. هر مسأله ۷ امتیاز دارد و حداکثر امتیاز هر دانش‌آموز ۴۲ است. هیأت ژوری پس‌از تصحیح کامل اوراق برای تعیین حدود امتیاز هر مدال، وتعداد آنها، تشکیل‌جلسه می‌دهد که پس‌از تعیین یك دستورالعمل مراسم اهداء مدلها و جوایز در روز پایانی انجام می‌گیرد.

انجمن ریاضی‌آمریکا مسائل این مسابقات را در دو جلد کتاب جمع‌آوری ومنتشرکرده است وگویا مرکزنشردانشگاهی مصمم به ترجمه این دوکتاب وکتابهایی از این نوع دارد. ازتازه‌های انتشاراتی این مرکز«المپیادهای ریاضی بین‌المللی»، جلد اول، (المپیادهای ۱۹۵۹ تا ۱۹۷۷) است که توسط فرد آشنایی چون دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل ترجمه شده و به علاقه‌مندان ریاضی تقدیم‌گردیده است. اگر بخواهیم انگیزه ترجمه ایشان را از این‌کتاب بدانیم بهتر است به مقالاتی‌که در سالهای قبل در مجله رشدآموزش ریاضی، در همین زمینه، نوشته‌اند مراجعه‌کنیم[۲]. ایشان یکی ازکسانی بودندکه در معرفی این نوع مسابقات، در سالهای اخیر، سهیم بوده‌اند و زمانی‌که با مجله رشدآموزش‌ریاضی همکاری‌نزدیکی داشته‌اند اخبارو گزارشات مربوط به‌آن را دراین مجله درج می‌نمودند. غیراز این ترجمه، آقای دکتر وحیدی ترجمه‌های دیگری در زمینه‌آمار و احتمال تاریخ ریاضیات وآنالیز ریاضی دارند که به‌عنوان‌کتاب درسی در دانشگاهها تدریس می‌شود ومورد استفاده اکثر دانشجویان است. این‌کتاب به‌خاطر بردی‌که در میان معلمین و دانش‌آموزان دارد از امتیاز خاصی برخوردار است. بیشترمفاهیم آن در برنامه ریاضیات دبیرستانی گنجانیده شده است. بنابراین، برای درك اغلب مطالب‌آن نیازبه اطلاع وسیع ریاضی نیست. تمام معلمین ریاضی واکثردانش‌آموزان توان استفاده از این‌کتاب را دارند. ازآنجایی‌که اکثر ترجمه‌های‌آقای دکتر وحیدی از امتیاز حفظ امانت، روانی مطلب، وگویایی عبارتها برخوردار است در این ترجمه نیز موفق بوده‌اند. ایشان با عبارتهای ساده توانسته‌اند اندیشه و فکر طراح مسأله را، بدون هیچ‌کم و کاستی، به زبان فارسی برگردانند وخواننده را در همان جومطلوب مسأله قرار دهند.

این‌کتاب شامل ۱۱۶ مسأله از المپیادهای ریاضی، سالهای ۱۹۵۹ تا ۱۹۷۷ میلادی است وطبق سنت معمول در این نوع مسابقات، هرساله ۶ مسأله (به‌جزسالهای ۶۰و۶۲که ۷ مسأله)، به روشی‌که قبلاً متذکر شدیم، انتخاب می‌شود. ازآنجایی‌که این‌گونه مسائل دریك مسابقه بین‌المللی ارائه می‌گردد، دارای نکات دقیق ریاضی است و از محتوای علمی خوبی برخوردار است. میزان دشواری مسائل متفاوت است. بعضی ساده و از یك نکته ویا اصل ریاضی استفاده می‌کند وبعضی دیگر دشوار؛ که برای حل‌آن نیاز به تمرکز حواس وتلاش فکری فراوانی دارد. برای بسیاری از مسائل دو یا سه راه‌حل ارائه‌گردیده است. هر یك از راه‌حلها می‌تواند الگویی برای حل مسائل مشابه باشد. برای اینکه به‌کم وکیف مسائل‌کتاب و از چگونگی ترجمه‌آن اطلاعات دقیقتری داشته باشیم، دو نمونه از مسائل‌آن را، بدون هیچ انتخاب قبلی، تجزیه و تحلیل می‌کنیم. این دو انتخاب را به اولی وآخرین مسأله محدود می‌کنیم تا شاید بتوانیم چنین ادعایی را داشته باشیم‌که «مسائل‌کتاب را از اول تا به‌آخر بررسی‌کرده‌ایم!!»

اولین مسأله‌کتاب مربوط به المپیاد ریاضی‌سال ۱۹۵۹ است که درکشور رومانی، در شهر براسوا، برگزار گردیده است. برای‌آن دو برهان داده شده است‌که یکی استفاده ازالگوریتم اقلیدسی (یا تقسیم) است و دیگری استفاده از رابطه‌ای بین صورت و مخرج‌کسر است.

«**۱۹۵۹-۱.** ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n کسر $\frac{۲۱n+۴}{۱۴n+۳}$ تحویل‌ناپذیر است.

راه حل اول: نشان می‌دهیم که اگر $g > ۰$ یك عامل‌مشترك صورت و مخرج باشدآنگاه $g = ۱$. قرار می‌دهیم.

$$۲۱n+۴=gA \quad و \quad ۱۴n+۳=gB$$

در این صورت

$$g(۳B-۲A)=۳gB-۲gA=(۴۲n+۹)-(۴۲n+۸)=۱$$

اولین عبارت طرف چپ بر g قابل‌قسمت است، لذا، g یك مقسوم‌علیه ۱ است. بنابراین، $g = ۱$، وکسرتحویل‌ناپذیراست»

اینك،به‌تجزیه و تحلیل مطالب فوق می‌پردازیم.

اولین جمله بعداز «راه حل اول» نارسا است. زیرا، g را به عنوان عامل مشترك صورت ومخرج کدام عبارت و یاکسری در نظر گرفته است؟ اگر به متن اصلی مراجعه کنیم، در می‌یابیم که مترجم برای حرف معین THE کلمه یا حروفی در نظر نگرفته است. معمولاً در زبان انگلیسی حرف معین THE مورد استعمال فراوانی دارد و یکی از کاربردآن این است که ابتدای اسمهایی می‌آیدکه قبلاً تعریف شده‌اند و برای بار دوم و سوم ... بدان اشاره می‌شود. اگر در ترجمه یك جمله از سیاق مطلب چنین معنی فهمیده شود می‌توان از ترجمه‌آن صرفنظر نمود. ازآنجایی که صورت مسأله در ابتدا، و حل‌آن در انتهای کتاب آمده است چنین برداشتی نمی‌توان کرد. باید با الفاظ مناسب، مانند «آن» یا «ی» و یا تکرار اسم آن، از ابهام جمله جلوگیری کرد. اگر ترجمه عبارت فوق به صورت «... اگر $g > 0$ یك عامل مشترك صورت ومخرج آن [کسر] باشد...» انجام می‌گرفت مناسبتر می‌بود. در چهارمین سطر بعدی، کلمه «طرف چپ» در جمله «اولین عبارت طرف چپ بر g قابل قسمت است...» درمتن اصلی نیامده است و به جای آن حرف معین THE ذکر شده است. اگر این جمله به صورت «عبارت اولی بر g قابل قسمت است...» ترجمه می‌شد نیازی به جمله اضافی، جهت جلوگیری از ابهام جمله، نبود.

اگر از این نکته جزئی صرفنظر کنیم، اشکال دیگری در آن نمی‌بینیم وحفظ امانت و روانی مطلب را در آن مشاهده می‌کنیم. همچنین آقای وحیدی به خوبی از اصطلاحات و واژه‌های ریاضی استفاده نموده است. در ضمن، مسأله چندان مشکل نیست و هر دانش‌آموزی که اطلاعات مقدماتی نظریه اعداد را داشته باشد، قادر به حل آن است.

آخرین مسأله، در این کتاب، مربوط به نوزدهمین المپیاد ریاضی است که در سال ۱۹۷۷ درکشور یوگسلاوی، در شهر بلگراد، برگزار گردیده است. برای این مسأله دو برهان نوشته شده است؛ که اولی ابتکاری است؛ و دومی دارای نکات آموزشی مفیدی است و به‌کمك استقراء ریاضی برهان دقیق و زیبایی ارائه داده است. بررسی و مشاهده برهان دوم را به دارندگان کتاب وا می‌گذاریم وتنها به بیان راه حل اول اکتفا می‌کنیم.

«**۱۹۷۷-۶.** فرض کنید $f(n)$ تابعی باشد که بر مجموعهٔ کلیه اعداد صحیح مثبت تعریف شده است و کلیه مقادیر خود را در این مجموعه اختیار می‌کند. ثابت کنید که اگر به ازای هر عدد صحیح مثبت n

$$f(n+1) > f(f(n))$$

آنگاه به ازای هر n،

$$f(n) = n.$$

۱۹۷۷-۶. راه حل اول: توجه‌کنیدکه f دارای مینیمم یکتایی در $n = 1$ است. زیرا، اگر $n > 1$، داریم

$$f(n) > f(f(n-1)).$$

همین استدلال نشان می‌دهدکه دومین عددکوچکتر، $f(2)$ است و غیره. بنابراین،

$$f(1) < f(2) < f(3) < \cdots$$

چون به‌ازای هر n، $f(n) \geqslant 1$، به ویژه داریم $f(n) \geqslant n$. فرض کنیدکه به ازای عدد صحیح مثبت k: $f(k) > k$. در این صورت $f(k) \geqslant k+1$. و چون f تابعی صعودی است، $f(f(k)) \geqslant f(k+1)$ که نامساوی مفروض را نقض می‌کند. بنابراین، به ازای هر n، $f(n) = n$.»

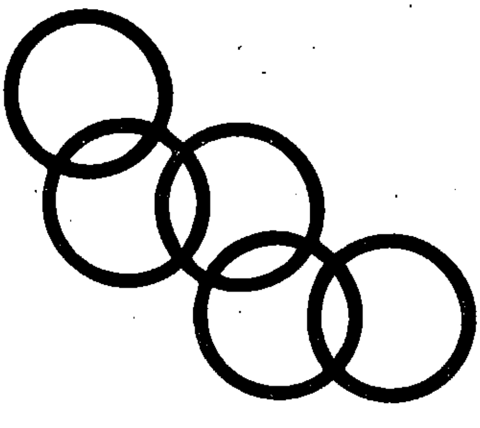
مطالب فوق بیانگر راه‌حل اول مسأله است که عیناً ازکتاب مذکور نقل گردیده است. اینك، می‌خواهیم نکاتی که در ترجمه این قسمت مورد بحث است بررسی کنیم. با مقابله متن اصلی با ترجمه، در می‌یابیم که در سطر چهارم راه حل مسأله، کلمه «دومین عدد» متناظر هیچ کلمه‌ای در متن اصلی نیست. ترجمه دقیقتر این سطر چنین است «... همین استدلال ثابت می‌کند که کوچکترین مقدار بعدی‌آن $f(2)$ است...» [به نظر می‌آید برای لغت «SHOW»، در بسیاری از جملات، معنی ثابت کردن مناسبتر باشد اگر چه معنی تحت‌اللفظی آن «نشان دادن» است.] بقیه مطالب ترجمه شده مطابق متن اصلی است و اگر موردی باشد بیشترجنبه سلیقه‌ایست و در ترجمه چندان تأثیری ندارد. بیان‌برهان مسأله‌ای بدین‌صورت دارای نکات‌آموزشی فراوان است. مؤلف جهت تلخیص مطلب قسمتی از برهان را حذف می‌کند تا خواننده با اطلاعات ریاضی خود مطالب ناگفته را بیان‌کند وخلاً موجود دراستدلال را پرسازد. ادعای اینکه $f(n) \geqslant n$ نیاز به توضیح بیشتری دارد و اثبات دقیق آن به استقراء است. زیرا، برد تابع مجموعه اعداد صحیح مثبت است. بنابراین، $f(1) \geqslant 1$. ازآنجایی‌که تابع f اکیداً صعودی است، پس،

$$f(2) > f(1) \geqslant 1$$

یا $f(۲) > ۱$، بالنتیجه، $f(۲) \geqslant ۲$ [این استنتاج یکی از احکام مهم نامساویها در اعداد صحیح است، که چنین حکمی در مجموعه اعداد گویا و حقیقی برقرار نیست.] اینک، به استقراء می‌توانید برهان را کامل کنید. ارائه برهان بدین صورت، در سرتاسر کتاب، وجود دارد. البته، هدف بسیاری از مؤلفین از ارائه برهانهایی به روش فوق این است که خواننده را در بیان کامل برهان شریك کنند، و او را از وضعیت روخوانی به حالت تفکر ریاضی وادارند تا درك عمیق‌تری از حکم مسأله داشته باشند.

در انتهای این برهان مطلب آموزشی تحت عنوان «تذکر» مطرح می‌کند که اهمیت آن کمتر از خود برهان مسأله نیست. این تذکرات مربوط به نکات مبهم برهان است، توضیح چنین مطالبی جدا از مسیر طبیعی برهان خواننده را سردرگم و خسته نمی‌کند. همچنین، تحت عنوان تبصره، بسیاری از قضایای مهم ریاضی که مورد استفاده برهان مسأله قرار می‌گیرد به صورت مقدماتی ثابت می‌کند. انجام چنین عملی کتاب را تا حدامکان، از نظر احکام ریاضی، خودکفا می‌کند و نیاز مسائل کتاب به قضایای ریاضی را برطرف می‌سازد. به عنوان مثال، مسأله ۲۴ المپیاد ریاضی ۱۹۷۵، تحت‌عنوان تبصره، قضایای ویلسون، فرما. و شرط اینکه $x^۲ \equiv_p -۱$ دارای جواب نیست، توضیح می‌دهد. گنجانیدن چنین تذکرات و تبصره‌ها محتوای علمی کتاب را در سطح مطلوبی قرار می‌دهد.

ناشر این کتاب مرکز نشر دانشگاهی است که یك مؤسسه فرهنگی و علمی معتبری در ایران است. این مرکز پس‌از انقلاب فرهنگی تأسیس شده است ودراین مدت کوتاه توانسته است ترجمه و تألیفات متنوعی به جامعه علمی کشور تقدیم کند. وجود ویرایشگر، وداشتن اصول ودستورالعمل خاص درترجمه، موجب می‌شود که از برداشتهای سلیقه‌ای مترجم، که خارج از متن اصلی کتاب است، جلوگیری کند. بحثهایی که بین مترجم و ویرایشگر انجام می‌شود موجب دقت زیاد درانتخاب واژه‌ها، هماهنگی رسم‌الخط و نمادها، و نمایش یکسان اعداد و اصطلاحات می‌شود به طوری که اثر منتشر شده را در سطح قابل ملاحظه‌ای قرار می‌دهد. بعضی‌از مربیان ودبیران آموزش ریاضی براین باورند که ترجمه و تألیف چنین کتابهایی از نظر آموزش ریاضی چندان مفید نیست... زیرا خواننده راه‌حل مسأله‌را بلافاصله بعدازدیدن آن می‌تواند مشاهده کند. بنابراین، لذت تفکر ریاضی را که در پیدایش راه‌حل حاصل می‌شود



نمی‌برد. البته، اکثرمسائل کتاب چندان ساده ومقدماتی نیستند. احتمال آن دارد که تلاش شما، برای حل آن روزهای متمادی مثمرثمر نشود. برای اینکه این نکته منفی در مطالعه این کتاب تأثیر چندانی نداشته باشد، پیشنهاد ما مانند مترجم و مؤلف به خوانندگان این کتاب این است که هر مسأله را خود حل کنند وفقط برای اطمینان از درستی راه‌حل به بخش پاسخها مراجعه نمایند. اگر تلاش شما به حل مسأله کمك چندانی نکرد نباید مأیوس شد. زیرا، راه‌حل یك مسأله با ارزش به‌آسانی وبدون سختکوشی حاصل نمی‌شود. راه‌حل یك مسأله با ارزش نتیجه روزها، هفته‌ها یا ماهها تلاش فکری یك جوان علاقمند است. اگر نتیجه مثبتی در این تلاش پیگیر برای حل مسأله حاصل شد، شما از لذت تفکر ریاضی، که در راه‌حل آن جلوه‌گر است، بی‌نصیب نخواهید بود.

انتشار این نوع کتابها جو مبارزه علمی را درکشور دامن می‌زند و اکثرکشورها مسأله برگزاری مسابقات را به عنوان عاملی جهت تشویق جوانان به مطالعه و تحقیق می‌دانند وانتشار وتجزیه وتحلیل چنین کتابهایی توان علمی جوانان‌را درمبارزات علمی بالا می‌برد.

این کتاب توسط دو مترجم دیگر [آقایان، یاسی‌پور و پرویز شهریاری] ترجمه شده است. بررسی و مقایسهٔ آثار این مترجمین نیاز به فرصت دیگری است. اما، موضوعی که باید درنظر داشت این است که زمینهٔ چنین کتابهایی در جامعه خالی است. نیاز علاقه‌مندان به این نوع کتابها تقاضای بیش‌از حد را در جامعه می‌طلبد. امید است که ناشران و مترجمین جنبه سودآوری و تجاری آن را ناچیز بشمارند و

همواره، در ترجمه، حفظ امانت و روانی مطلب را مدنظر داشته باشند تا شاید، توجه بدان، موجب ضعف در ترجمه و ناهماهنگی مطالب نگردد. در پایان آرزوی توفیق بیشتر برای مترجمین، بالاخص، آقای دکتر وحیدی را در انتشار چنین کتابهایی داریم.

پانوشت:

(۱) ایران درسال ۶۶، از تاریخ ۱۲ الی ۲۳، تیمی برای شرکت در بیست‌وهفتمین مسابقه المپیاد ریاضی، که در هاوانا پایتخت کوبا برگزار می‌شد، فرستاده در این مسابقه بین ۴۲ کشورشرکت‌کننده، کشور ایران با ۷۰ امتیاز مقام بیست‌وششمین کشور را نصیب خود کرد. این موفقیت دور از انتظار بود. زیرا، ما برای اولین‌بار در این نوع مسابقات شرکت می‌کردیم وکشورهای نروژ، ایتالیا، لهستان‌وفنلاند را پشت‌سرگذاشتیم. این مسابقه نشان داد‌که سطح ریاضی درکشور، و توان علمی جوانان ما، به گونه‌ایست‌که می‌توانند با کشورهایی که سالهای سال در ریاضیات صاحب نام و مقامی بوده‌اند برابری‌کنند. سال بعد به همت وکوشش مسئولان آموزش وپرورش، در المپیاد ریاضی آلمان شرکت کردیم و در بین ۵۱ کشور، با جمع امتیاز ۱۴۷ (۲ مدال نقره، ۳ مدال برنز و یك دیپلم افتخار) مقام چهاردهمین کشور را ازآن خود ساختیم. این موفقیت با ارزشی برای ما بود و ما بعداز فرانسه کشورهای بزرگی چون ایتالیا، بریتانیا، کانادا و استرالیا را پشت‌سر گذاشتیم.

(۲) آقای دکتر وحیدی، در مجله آموزش ریاضی، بهار ۶۵، مقاله‌ای تحت عنوان گزارشی از بیست‌وششمین المپیاد ریاضی درج نمودند. در بخشی از آن می‌خوانیم که «کشورهایی که برای اولین‌بار در این مسابقه شرکت می‌کنند عبارتند از ایران، چین، ایسلند و ترکیه است» ایشان در پانوشت همین گزارش توصیه‌ای به مسئولان آموزشی کشور می‌کنند. «گمان نمی‌رود که این تیم به طور رسمی به عنوان نماینده دولت جمهوری اسلامی ایران در این مسابقه شرکت‌کرده باشد. امید است‌که برای دانش‌آموزان مستعد، از ایران نیز تیمی در این مسابقه شرکت‌کند».

در بررسی‌های بعدی‌که به وسیله مسئولان آموزش‌وپرورش انجام گرفت مشخص گردید‌که افراد شرکت‌کننده به صورت آزاد و از اتباع ایران درکشور فرانسه بوده‌اند که با هویت ایرانی در بیست‌وششمین مسابقات بین‌المللی المپیاد ریاضی شرکت‌کرده بودند.

مماس بر منحنی‌ها

Tangents to Graphs

ترجمه محمود نصیری

مقدمه

آیا حکم «شرط لازم وکافی برای آنکه نمودار تابع f دارای خط مماس غیرعمودی درنقطه $(c, f(c))$ باشدآن است‌که $f'(c)$ موجود باشد». حکمی صحیح است؟ جواب منفی است: اگر مشتق موجود باشد مماس نیز موجود است، اما عکس آن صحیح نیست.

اما اگر f در نقطه $(c, f(c))$ پیوسته باشد آنگاه مماس موجود است فقط وفقط اگرمشتق موجود باشد.

ما این نتایج را درقضیه‌های ۱ و ۲، ثابت می‌کنیم.

تعریف خط مماس

می‌دانیم خط مماس دریك نقطه P_0 روی منحنی C خطی است که از P_0 گذشته به‌طوری که ضریب زاویه آن حد ضریب زاویه قاطع P_0P است وقتی که P روی منحنی C به P_0 میل می‌کند.

ما نمی‌توانیم خودمان را به‌این محدود کنیم که «وقتی طول قوس PP_0 به صفر میل می‌کند P روی منحنی C به P_0 میل می‌کند» مگر آنکه خودمان را به منحنی‌های راست شدنی یا با طول متناهی محدود کرده باشیم.

بنابراین حالتی را بررسی می‌کنیم که نقطه P روی منحنی C در نزدیکی P_0 واقع باشد (دریك‌همسایگی P_0). ما نمی‌خواهیم صریحاً وارد این سؤال زیرکانه شویم‌که این منحنی‌ها چگونه‌اند، لذا مجازیم که تعریف‌مان را برای هرمجموعه‌ای از نقاط به‌کار ببریم.

تعریف ۱. فرض کنیم C یك منحنی (یا مجموعه‌ای از نقاط) و P_0 یك نقطه نامنفرد از C باشد، خط L را که از P_0 گذشته یك خط مماس بر C درنقطه P_0 گوئیم هرگاه بازاء هرعـدد مثبت ε عددی مثبت مانند δ وجود داشته باشد به‌طوری که زاویه بین P_0P و L بازاء هرنقطه P از C که در فاصله δ از P_0 است، کوچکتر از ε باشد.

این واضح است که منحنی C نمی‌تواند بیش از یك مماس‌در نقطه P_0 داشته باشد واگر C دریك صفحه قرار داشته باشد، تمام این مماسها نیز باید درآن صفحه واقع باشند.

تعریفی را که بیان کردیم کاملاً وسیع است. اقلیدس هرگز مجموعه همه نقاط روی یك دایره مفروض را که به فاصله‌ای گویا ازخط مستقیم مفروضی‌باشند یك‌شکل‌هندسی درنظر نگرفت، اما اگرما بخواهیم می‌توانیم چنین درنظر بگیریم، وآن تجسم یك دایره‌ای است که درهرنقطه‌اش برطبق تعریف فوق یك مماس وجود دارد.

ممکن است تعجب کنیم که منحنی که نمودارآن شبیه عدد هشت (8) است وخودش را درنقطه‌ای مانند Q قطع می‌کند، دو مماس یا هیچ مماس برنمودارآن در Q وجود داشته باشد. واضح است که برطبق تعریف ما مماسی درآن نقطه وجود ندارد. این مانع ازآن نمی‌شود که برای یك نقطه که روی منحنی 8 حرکت می‌کند تعریفی جامع ومانع ازضریب زاویه مماس وقتی که مماس از Q می‌گذرد نداشته باشیم. درحقیقت، اگرآن خط روی قسمت صاف منحنی سرتاسر نمودار 8 را طی کند، دوضریب زاویه، درگذشتن ازنقطه Q خواهد داشت (در دوموقع‌متفاوت).

مثال فوق پای مفهوم منحنی‌های پارامتری را به میان می‌کشد. فرض کنیم C مجموعه‌ای ازنقاط بمختصات $(f(t), g(t))$ بازاء هر t از دامنه f و g باشد، وفرض کنیم P_0 نقطه‌ای با پارامتر c باشد. آیا خطی که از نقطه P_0 با شیب $\lim\limits_{t\to c} \dfrac{g(t)-g(c)}{f(t)-f(c)}$ می‌گذرد یك خط مماس بر C در نقطه P_0 است؟

پاسخ: الزاماً نه

اگر f و g ناپیوسته باشند ممکن است تعجب‌آور باشد. برای مثال، فرض کنیم

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{t} & t\neq 0\\ 0 & t=0\end{cases}$$

$$g(t)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{t} & t\neq 0\\ 0 & t=0\end{cases}$$

و $c=0$. دراین صورت C بازاء هر u مجموعه‌ای ازنقاط به مختصات $(u, \sin u)$ است، و P_0 روی مبدأ مختصات است، و

$$\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(c)}{f(t)-f(c)}=\lim_{t\to 0} t\sin\frac{1}{t}=0\,.$$

اما خطی که با ضریب زاویه صفر از P_0 می‌گذرد بر نمودار C مماس نیست: مماس دراین نقطه دارای ضریب زاویه یك است.

درحقیقت، تعریف مماس پارامتری مستقیماً قابل درك نیست مگرآنکه توابع پارامتری‌پیوسته باشند. دلیل‌این نتیجه غیرمنتظره آن است که ضریب زاویه خط مماس‌حد ضریب زاویه خط قاطع است وقتی $(f(t), g(t))$ به $(f(c), g(c))$ میل می‌کنـد، و اگر f و g ناپیوسته باشند وقتی t به c میل می‌کند این همان‌حد نیست.

می‌خواهم خطراین نظریه را بیان کنم که تعریف تمام خطهای مماس بوسیله مشتق قابل درك هستند مگر آنکه تمام توابع مورد بحث پیوسته باشند.

آنهائی که درهندسه دیفرانسیل کار می‌کننـد معمولاً نه‌فقط خود را به‌حالتی که f و g پیوسته‌اند بلکه به‌اینکه تابـع، $t\ (f(t), g(t))$ از R به R^2 یك بیك و دارای تابـع معکوس پیوسته است، نیزمحدودمی‌کنند، (یعنی (f, g) یك همو یا همیومورفیسم است). می‌توانیم تعریف زیر را بیان کنیم.

تعریف ۲. اگر C مجموعه‌ای از نقاط به مختصات $(f(t), g(t))$ باشد، که (f, g) یك همیومورفیسم است، واگر $f'(c)$ و $g'(c)$ موجود باشند وهردو مخالف صفر، خطی که از نقطه $(f(c), g(c))$ گذشته وبه‌ضریب زاویه بردار $f'(c)\vec{i}+g'(c)\vec{j}$ است یك مماس پارامتری بر C درنقطه $(f(c), g(c))$ است.

این ساده است که ثابت کنیم هرمماس پارامتری یك مماس طبق تعریف (۱) است ([۱] صفحه ۱۱۵۱)، وپس از ۱۹۲۷ منحنی‌هائی شناخته شده‌اند که به وسیله همو یاهمیومورفیسم تعریف شده‌اند و مماسهائی برآنها وجود دارند که نمی‌توانند مانند مماسهای پارامتری بدست آیند [۲].

نتیجه

اکنون نتیجه‌ای را که درمقدمه قول داده بودیم بیان می‌کنیم.

فرض کنیم $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ اگر x گویا و $|x|\leqslant 1$ و $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$ اگر x اصم و $|x|\leqslant 1$.

نمودار f یك «شبه‌دایره» است و در نقطه $(1, 0)$ یك مماس بر نمودار آن وجود دارد؛ اما f در نقطه صفر مشتق‌پذیر نیست، لذا این همان مثالی است که قول داده بودیم که مماس در نقطه $(c, f(c))$ وجود دارد اما f در c مشتق‌پذیر نیست.

این حالت دیگری است که تابع ناپیوسته است و رابطه بین مماس ومشتق قابل‌تصور نیست.

سرانجام، برمی‌گردیم به‌قضیه‌هائی که قول داده بودیم دراین قضایا f تابعی از R به R، C یك نقطه حدی از دامنه‌آن است، و، بازاء هر h برای $C+h$ که در دامنه تابع است، P_h نقطه‌ای به‌مختصات $(C+h, f(C+h))$ است.

به‌ویژه P_0 نقطه $(C, f(C))$ است.

قضیه ۱. اگر f در نقطه C مشتق‌پذیر باشد، خط L که از P_0 با ضریب زاویه $f'(C)$ می‌گذرد بر نمودار f در P_0 مماس است.

اثبات. P_0 یك نقطه منفرد نمودار نیست زیرا f در C پیوسته است. و C یك نقطه حدی از دامنه f است. بازاء هر ε مثبت η مثبتی وجود دارد به‌طوری‌که خطهای با شیب بین $f'(C)-\eta$ و $f'(C)+\eta$ با خط L زاویه کوچکتر از ε می‌سازند.

پس $\delta>0$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$f'(C)-\eta<\frac{f(C+h)-f(C)}{h}<f'(C)+\eta$$

یا

$$\left|\frac{f(C+h)-f(C)}{h}-f'(C)\right|<\eta \quad (i)$$

هرگاه $0<|h|<\delta$ و $C+h$ در دامنه تابع است.

هرگاه $0<|P_0P_h|<\delta$، $C+h$ در دامنه تابع است و $0<|h|<\delta$ وبنابراین (i) برقرار است، ضریب زاویه P_0P_h بین $f'(C)\pm\eta$ قرار دارد، و P_0P_h با خط L زاویه کوچکتر از ε می‌سازد.

قضیه ۲. اگر f درنقطه C پیوسته ونمودار آن درنقطه P_0 دارای یك مماس غیرعمودی باشد، آنگاه f در C مشتق‌پذیر است.

اثبات. فرض کنیم ε هرعدد مثبت دلخواهی باشد فرض کنیم m ضریب زاویه مماس باشد، و θ کوچکتر از دو زاویه ذیل باشد:

زاویه بین خط به‌ضریب m و خط به‌ضریب زاویه $m+\varepsilon$ و زاویه بین خط با ضریب زاویه $m-\varepsilon$ وخط با ضریب زاویه m.

فرض کنیم θ_h زاویه بین P_0P_h ومماس باشد.

اگر $\theta_h<\theta$، آنگاه

$$\left|\frac{f(C+h)-f(C)}{h}-m\right|<\varepsilon \quad (ii)$$

عدد مثبت δ_1 وجود دارد به طوری که $\theta_h<\theta$ هرگاه $|P_0P_h|<\delta_1$.

عدد مثبت δ_2 وجود دارد به‌طوری‌که $|f(C+h)-f(C)|<\frac{\delta_1}{2}$ هرگاه $|h|<\delta_2$ و $C+h$ در دامنه f است.

فرض کنیم δ کوچکتر از $\frac{1}{2}\delta_1$ و δ_2 باشد. سپس هرگاه $0<|h|<\delta$ و $C+h$ در دامنه f است ما روابط متوالی زیر را داریم.

$$|f(C+h)-f(C)|<\frac{1}{2}\delta_1,$$
$$0<[f(C+h)-f(C)]^2+h^2<\delta_1^2,$$
$$0<|P_0P_h|<\delta_1$$
$$\theta_h<\theta;$$

و (ii) بدست می‌آید.

علاوه برآن C یك نقطه حدی دامنه f است، درغیر این صورت P_0 یك نقطه منفرد نمودار f خواهد بود. بنابراین $f'(C)$ وجود دارد.

منبع

MATHEMATICS MAGAZINE
Vol. 61 No. 5 Decmber 1988

مراجع

1. H. A. Thurston, on the definition of tangent-line. Amer. Math. Monthly 71 (1964), 1099 - 1103.
2. G. Valiron, Sur les courbes qui admettent une tangente en chaque Point, Nouvelles Annales de Mathématique 6 (1927), 46-51.

مثلثهای فیثاغورثی

نوشته: بلادوسا
ترجمه: مرتضی صفرعلی
دانشجوی ریاضی دانشگاه تهران

روشی را برای تخمین $\sqrt{2}$ بوسیلهٔ سه‌تاییهای فیثاغورثی شرح می‌دهیم. اعداد صحیح ومثبت x، y و z را سه‌تایی یا سه‌گانـه گویند هرگاه در رابطهٔ $z^2=x^2+y^2$ صـدق کنند واین سه‌تایی اول گفته می‌شود اگر بزرگترین مقسوم‌علیـه مشترك آنها ۱ باشد. همچنین دریك سه‌تایی اول یکی ازاعداد x و y زوج و دیگری فرد است. درفرمولهای زیر همهٔ سه‌تاییهای اول فیثاغورثی بیان می‌شوند:

$$x=p^2-q^2 \quad , \quad y=2pq \quad , \quad z=p^2+q^2$$

که درآنها p و q اعداد صحیح با خاصیت $p>q>0$ هستند و یکی ازآنها زوج وبقیه فردند. (برای مثـال، $p=2$ و $q=1$ سه‌تایی ۳ و ۴ و ۵ را می‌دهد.) واضح است که این سه فرمول سه‌تاییهای فیثاغورثی را بدست می‌دهد. زیرا،

$$x^2+y^2=(p^2-q^2)^2+(2pq)^2=p^4+2p^2q^2+q^4$$
$$=(p^2+q^2)^2=z^2$$

دریك مثلث قائم‌الزاویه‌که اضلاع مجاوربه زاویه قائمه برابرند، وطول‌هریك مثلاً a است، وترطولی برابر $a\sqrt{2}$ خواهد داشت. پس اگر p و q را چنان انتخاب کنیم کـه x و y تقریباً برابر باشند قادرخواهیم بود تخمینی برای $\sqrt{2}$، ازفرمول زیر بدست آوریم:

$$\sqrt{2}=\frac{2a\sqrt{2}}{a+a}\simeq\frac{2z}{x+y}$$

که برحسب p و q چنین بدست می‌آید

$$\sqrt{2}\simeq\frac{2(p^2+q^2)}{p^2-q^2+2pq}$$

با استفاده از یك ریزکامپیوتر بهترین مقـدار بدست‌آمده برای $p=33461$ و $q=1386$ چنین بوده است:

$$x=927538921 \; , y=927538920 \; ,$$
$$z=1311738121$$

و $\sqrt{2}\simeq 1/414213562$ با نه رقم اعشار منظورشده است. خواننده می‌تواند با دسترسی به‌کامپیوترهای قوی‌تر تخمینهای بهتری بدست‌آورد.

اولین مثلث فیثاغورثی با دوعدد صحیح متوالی مثلثی با اضلاع ۳، ۴ و ۵ است که باقراردادن $p=2$، $q=1$ درفرمولهای‌ذکر شده بدست می‌آیند. می‌توان بوسیلهٔ تکرار متوالی $q_{n+1}=p_n$ و $p_{n+1}=2p_n+q_n$ مثلثهای بیشتری ازاین نوع بدست‌آورد. مثلث بعدی که اضلاع مجاور به زاویه قائمه آن دوعدد صحیح متوالی هستند وقتی بدست می‌آید که $q=2$ و $p=5$ که‌مثلثی با اضلاع ۲۰، ۲۱ و ۲۹ بدست می‌دهد ومثلـث بعدی، به‌ازای $q=5$ و $p=12$، دارای اضلاع ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۶۹ است.

البته این یـك حدس درست است ومی‌دانیـم کـه مثلثها را می‌توان ازفرمول‌های زیر نیزبدست‌آورد.

$$x_1=3 \quad , \quad y_1=4 \quad , \quad z_1=5$$
$$x_{n+1}=3x_n+2z_n+1 \; , \; y_{n+1}=x_{n+1}+1 \; ,$$
$$z_{n+1}=4x_n+3z_n+2$$

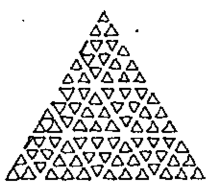
بعنوان مرجع دراین رابطه می‌توانید به کتاب

Elementary theory of Numbers

نوشتهٔ W. Sierpinshi مراجعه کنید.

مرجع:

Mathematical Monthly, Volume 21, 1988/1989 NUMBER 1, 2.



قضیه سینوسها و کسینوسها در کنجهای سه وجهی

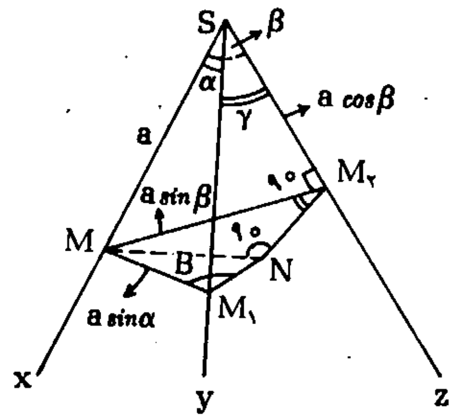
تنظیم و ترجمه از: ابراهیم دارابی

همان اندازه که زوایا و مثلث به‌عنوان ساده‌ترین اشکال، درهندسه مسطحه اهمیت دارند، و بیشتر قضایا را بخود اختصاص داده‌اند تا براساس آنها سایر اشکال مسطحه شناسایی شوند، کنج‌های سه‌وجهی و چهاروجهی هم که پایه و اساس هندسه فضایی را تشکیل می‌دهند، اهمیت خاصی دارند. در واقع همزاد مثلث‌هادر هندسه مسطحه، چهار وجهی‌ها هستند و کنج‌ها از خانواده‌های زوایا به‌حساب می‌آیند. اما بعضی از قضایا درمورد مثلث، با همان نام درکنجها به‌کار رفته است. مقاله حاضر به بعضی ازاین قضایا نظر دارد.

۱ـ قضیه سینوسها درکنجهای سه‌وجهی.

اگر α و β و γ زوایای رأس یك کنج سه‌وجهی، و A و B و C فرجه‌های نظیر آنها باشند، آنگاه

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}$$



(شکل ۱)

اثبات: کنج سه‌وجهی $Sxyz$ را درنظرمی‌گیریم. M را روی‌یال Sx طوری اختیار می‌کنیم که $SM=a$. تصویر M را روی Sy و Sz به‌ترتیب M_1 و M_2 و تصویر M روی‌وجه ySz را N می‌نامیم. داریم، $SM_2=a\cos\beta$ ،$MM_2=a\sin B$ ،$MM_1=a\sin\alpha$ (شکل ۱).

همانطور که دیده می‌شود مسطحه فرجه نظیر یال Sz برابر است با A، مسطحه فرجه نظیر یال Sy برابراست با B ومسطحهٔ فرجه نظیر یال Sx برابراست با C.

از مثلث قائم‌الزاویه MM_2N طول MN را حساب می‌کنیم

$$MN=MM_2\sin A=a\sin B\sin A \qquad (۱)$$

MN را ازمثلث قائم‌الزاویه MM_1N هم حساب می‌کنیم.

$$MN=MM_1\sin B=a\sin\alpha\sin B \qquad (۲)$$

ازمقایسه (۱) و (۲) داریم

$$a\sin\beta\sin A=a\sin\alpha\sin B$$

ویا

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}$$

به‌طریق مشابه ثابت می‌شود

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}$$

وازآنجا

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}$$

قضیه ۲ـ اگر دریك کنج سه‌وجهی زوایای رأس α و β و γ، وفرجه‌های نظیرآنها A و B و C باشند، آنگاه،

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A$$

و

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos\alpha$$

که اولی، قضیه اول کسینوسها درکنجهای سه‌وجهی، و دومی قضیه دوم کسینوسها درکنجهای سه‌وجهی نامیده می‌شود.

اثبات ـ بردارهای یکه یالهای کنج سه‌وجهی را با a و b و c نشان می‌دهیم. (a مقابل به زاویه‌ای از رأس کنج که اندازه آن α، b مقابل بزاویه‌ای از رأس کنج که اندازه‌آن β و c مقابل بزاویه‌ای از رأس کنج که اندازه‌آن γ می‌باشد.)

بردار b را می‌توان چنین نوشت.

$$b=a\cos\gamma+\eta$$

که درآن $|\eta|=\sin\gamma$ و η برداری است‌که بر a عمود است. به‌طریق مشابه داریم

$c = a\cos\beta+\zeta$

که در آن $\sin\beta = |\zeta|$ و ζ برداری است عمود بر a. زاویه بین η و ζ برابر A می‌شود.

دو بردار b و c را بطور اسکالر درهم ضرب می‌کنیم

$$bc = (a\cos\gamma+\eta)(a\cos\beta+\zeta)$$
$$= \cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A$$

و یا

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A \qquad (a)$$

واضح است که می‌توان دو رابطه مشابه آنرا هم نوشت یعنی،

$$\cos\beta = \cos\alpha\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\cos B \qquad (b)$$
$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos C \qquad (c)$$

برای اثبات قضیه دوم کسینوسها، یادآوری دونکته لازم است.

اولاً همانطور که می‌دانیم، اگر از نقطه‌ای در داخل فرجه‌ای دو خط به دو وجه فرجه عمود کنیم، زاویه بین این دوخط با فرجه مفروض ازنظر اندازه مکمل هم می‌شوند.

ثانیاً، اگر ازنقطه‌ای واقع در درون یك کنج سه‌وجهی، سه خط به سه وجه آن عمود کنیم کنج سه‌وجهی دیگری پدید می‌آید که زوایای رأس‌آن، مکمل فرجه‌های کنج اول هستند.

کنج دوم را مکمل کنج اول می‌نامند، و بالعکس. (شکل ۲).

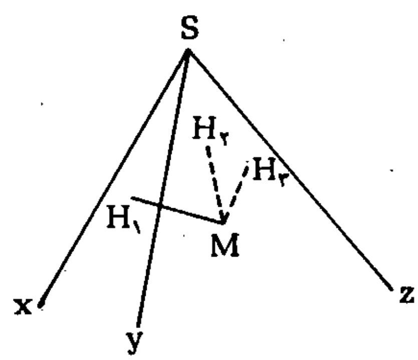
پس‌اگر زوایای‌رأس کنج‌اول α و β و γ باشند زوایای‌رأس‌کنج مکمل عبارت خواهند بود از $(\pi-A)$ و $(\pi-B)$ و $(\pi-C)$ (A و B و C را اندازه‌های فرجه‌های‌کنج اول درنظرگرفته‌ایم.)

اگرقضیه اول کسینوسها را دراین کنج بنویسیم خواهیم داشت

$$\cos(\pi-A) = \cos(\pi-B)\cos(\pi-C)+$$
$$\sin(\pi-B)\sin(\pi-C)\cos(\pi-\alpha)$$

و یا

$$\cos A = -\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos\alpha \qquad (a')$$



شکل ۲

باز می‌توان دو فرمول مشابه آنرا برای فرجه‌های B و C هم نوشت:

$$\cos B = -\cos A\cos C+\sin A\sin C\cos\beta \qquad (b')$$
$$\cos C = -\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos\gamma \qquad (c')$$

مثال ۱- ثابت کنید اگرهمه زوایای رأس یك کنج سه‌وجهی منفرجه باشند، همه فرجه‌های‌آن هم منفرجه‌اند.

حل- بنا برقضیه اول کسینوسها درکنجهای سه‌وجهی داریم

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A$$

بنابه فرض α و β و γ منفرجه‌اند. پس سمت چپ تساوی بالا منفی است. بنابراین سمت راست تساوی هم باید منفی بشود. چون $\cos\beta\cos\gamma>0$ ولی باید داشته باشیم $\sin\beta\sin\gamma\cos A<0$ اما $\sin\beta\sin\gamma>0$ پس $\cos A<0$ یعنی A منفرجه است. با نوشتن فرمولهای (b) و (c) از قضیه اول کسینوسها و به طریق مشابه ثابت می‌شودکه فرجه‌های B و C هم منفرجه‌اند.

مثال ۲- ثابت کنید اگر همه فرجه‌های یك کنج سه‌وجهی حاده باشند، همه زوایای رأس آن هم حاده‌اند.

حل- ازفرمول دوم قضیه کسینوسها در کنجهای سه‌وجهی داریم

$$\cos A = -\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos\alpha$$

چون به‌فرض A و B و C حاده‌اند، سمت چپ تساوی بالا مثبت است. پس باید سمت راست هم مثبت باشد. اما $-\cos B\cos C<0$ پس باید داشته باشیم

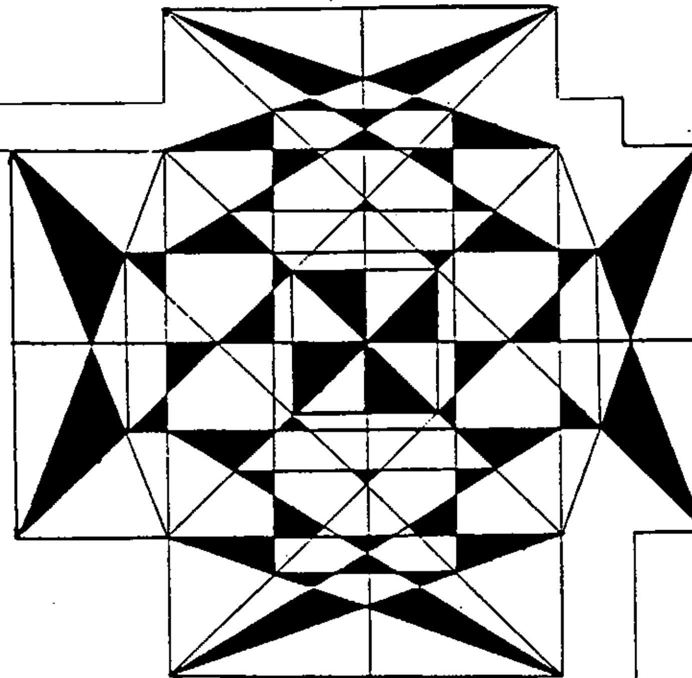
$$\sin B\sin C\cos\alpha>0$$

چون $\sin B\sin C>0$ بنابراین $\cos\alpha>0$ و ازآنجا α حاده است. با نوشتن فرمول‌های (b') و (c') از فرمول‌های قضیه دوم‌کسینوسها، ثابت‌می‌شود β و γ هم‌حاده‌اند.

بدیهی است که می‌توان نتیجه گرفت، اگر همه زوایای رأس کنج سه‌وجهی قائمه باشند، همه‌فرجه‌های آن‌هم‌قائمه‌اند و بالعکس.

منبع

I. F. Sharygin
Problems in Solid Geometry Mir Publishers Moscow 1986



تعمیم یك فرمول در هندسه

ابراهیم دارابی

اخیراً در ترجمه‌کتابی از هندسه، اثر آی. اف. شاریگین به مسأله‌ای برخورد کردم که توجه مرا به‌خود جلب کرد. مسأله چنین بود:

ثابت کنید اگر همه رئوس یك چند وجهی محدب برروی دو صفحه موازی قرار داشته باشند، آنگاه حجم آن از فرمول زیر قابل محاسبه است.

$$V=\frac{h}{6}(S_1+S_2+4S)$$

که درآن S_1 مساحت وجه واقع برروی یکی ازصفحات، S_2 مساحت وجه دیگر واقع برروی صفحه دیگر، S مساحت مقطع حاصل از چند وجهی با صفحه‌ای موازی با دو صفحه مفروض و به یك فاصله از آنها، و h فاصله بین دو صفحه می‌باشد. پس‌از مطابقت نتایج این فرمول با نتایج فرمولهای مربوط به حجم چند وجهی‌های محدب به این فکر افتادم، این فرمول را برای چند ضلعی‌های محدب در هندسه مسطحه و اشکال فضایی دوار تعمیم دهم. نتیجه کار، مقاله‌ای است که از نظر خوانندگان می گذرد.

۱ــ اگرهمه رئوس چند ضلعی محدبی روی دو خط موازی قرار داشته باشند، (بی‌تردید این چند ضلعی مثلث و یا ذوزنقه خواهد بود) آنگاه مساحت آن از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$S=\frac{h}{6}(l_1+l_2+4l) \qquad (1)$$

که درآن l_1 فاصله بین دو رأس واقع برروی یکی از دو خط موازی، l_2 فاصله دو رأس دیگر چند ضلعی واقع برروی خط دیگر و l طول پاره خط حاصل از قطع چند ضلعی با خطی است‌که به موازات دو خط مفروض و به یك فاصله ازآنها رسم می‌شود و h فاصله بین دو خط موازی می‌باشد.

با توجه به اینکه شکل ذوزنقه است اثبات فرمول بالا بدیهی می‌باشد. در واقع داریم.

$$EF=l=\frac{1}{2}(AB+CD)=\frac{1}{2}(l_1+l_2)$$

$$S_{ABCD}=\frac{h}{2}(l_1+l_2)=\frac{h}{6}(3l_1+3l_2)$$

$$=\frac{h}{6}(l_1+l_2+2(l_1+l_2))$$

$$=\frac{h}{6}(l_1+l_2+4l)$$

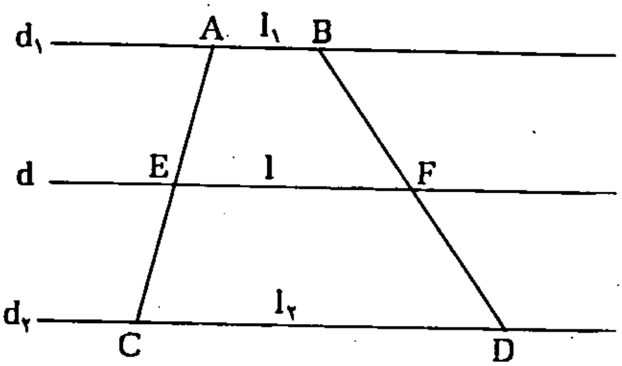
درحالت خاص‌که شکل به مثلث تبدیل می‌شود داریم

$$l_1=0$$

$$S=\frac{h}{6}(0+AB+4l)$$

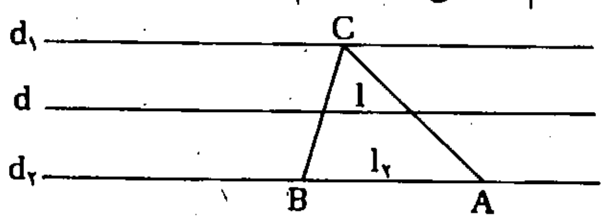
و ازآنجا

$$S=\frac{h}{6}\left(AB+4\left(\frac{1}{2}AB\right)\right)=\frac{h}{2}\cdot AB$$



شکل (۱)

به طوری که ملاحظه می‌شود به علت محدود بودن تعداد چند ضلعی‌های محدب واجد شرایط، کاربرد این فرمول محدود به همین دو شکل می‌شود. اما ازآنجاکه این فرمول در هندسه مسطحه هم صدق می‌کند به تعمیم فرمول کمك می‌کند.



شکل (۲)

اکنون اگر از هندسه مسطحه به هندسه فضایی برگردیم، نتایج آن جالب‌ترخواهد شد. یعنی به‌جای چند ضلعی محدب، چند وجهی محدب خواهیم داشت و به‌جای دو خط موازی، دو صفحه موازی. و خطی که به موازات دو خط و بیك فاصله از دو خط رسم می‌شود، به صفحه‌ای موازی با دو صفحه موازی و به‌یك فاصله ازآنها تبدیل خواهد شد و سرانجام طولهای l، l_1 و l_2 به سطوحی مانند S، S_1 و S_2 و سطح S در فرمول، به حجمی مانند V تبدیل می‌گردد یعنی حکم (۱) در مسطحه، به حکم (۲) در فضا تبدیل می‌شود که قبلاً هم به‌آن اشاره کرده‌ایم.

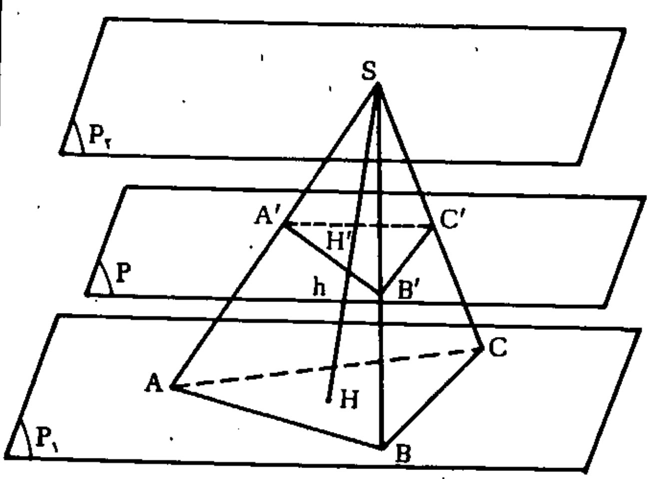
۲ــ اگر همه رئوس چند وجهی محدبی، برروی دو صفحه موازی قرار داشته باشند، حجم‌آن از فرمول زیر به دست می‌آید

$$V=\frac{h}{6}(S_1+S_2+4S) \qquad (2)$$

برای اثبات این موضوع باز به هندسه مسطحه بر می‌گردیم تا نحوه محاسبه مساحت سطوح را یکبار دیگر مرور کنیم. در هندسه مسطحه، پس‌از اثبات مساحت مستطیل و پس‌از پیدا کردن مساحت‌مثلث، برای پیدا کردن مساحت چند ضلعی‌های محدب، آنها را به چند مثلث تجزیه می‌کردیم مجموع مساحتهای این مثلث‌ها، مساحت چند ضلعی محدب را تشکیل می‌دادند.

اما در هندسه فضایی همزاد مثلث‌ها، چهار وجهی‌ها هستند، بنابراین فرمول بالا را ابتدا در مورد چهار وجهی‌ها به اثبات می‌رسانیم و سپس با تبدیل چند وجهی‌های محدب، به چند چهاروجهی، فرمول را برای چند وجهی‌های محدب، درحالت کلی تعمیم می‌دهیم.

اثبات فرمول ـ چهار وجهی $SABC$ را درنظر می‌گیریم، رأس‌آن را S و قاعده‌آن را ABC می‌نامیم. صفحه P_1 را برقاعده‌آن یعنی ABC مرورمی‌دهیم. واضح است که همواره از رأس S می‌توان صفحه‌ای به موازات قاعده رسم کرد. این صفحه را هم رسم و آن را P_2 می‌نامیم. صفحه P را هم بیك فاصله از P_1 و P_2 رسم می‌کنیم. مقطع حاصل یعنی مثلث $A'B'C'$ بانسبت $\frac{1}{2}$ با مثلث ABC متشابه است. در نتیجه مساحت مثلث $A'B'C'$ یك‌چهارم مساحت مثلث ABC



شکل (۳)

خواهد بود. می‌دانیم حجم چهاروجهی برابر است با مساحت قاعده در ثلث ارتفاع یعنی

$$V_{SABC}=\frac{h}{3}\cdot S_{ABC}$$

می‌خواهیم ثابت کنیم

$$V_{SABC}=\frac{h}{6}(S_1+S_2+4S)$$

اگر در این فرمول بـه جای S_1، S_2 و S مقدار قرار دهیم خواهیم داشت

$$V_{SABC}=\frac{h}{6}(0+S_{ABC}+4S_{A'B'C'})$$

اما ثابت کردیم

$$4S_{A'B'C'}=S_{ABC}$$

پس

$$V_{SABC}=\frac{h}{6}(S_{ABC}+S_{ABC})=\frac{h}{3}\cdot S_{ABC}$$

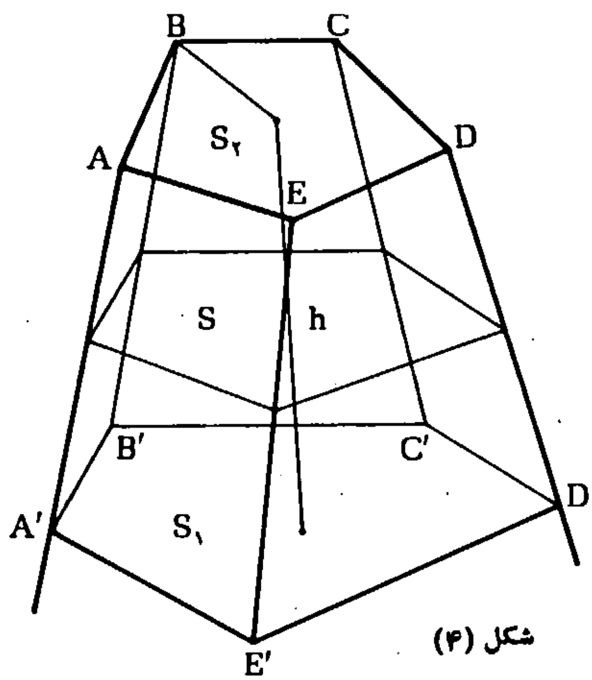
بـه این ترتیب فرمول در مـورد چهاروجهی‌ها صادق است. اکنون هرچند وجهی محدب راکـه همه رئوس‌آن برروی دو صفحه موازی قرار داشته باشند مـی‌توان به چهاروجهی‌هایی تبدیل کرد که همه رئوسشان درهمان دوصفحه قرار داشته‌باشند. ازآنجا با محاسبه حجم هـریك از این چهاروجهی‌ها مطابق فرمول بالا وجمع‌کردن حجم همه‌آنها، به‌اثبات فرمول بالا در حالت کلی می‌رسیم.

این فرمول نه تنها در مورد چند وجهی‌هـای محدب، بلکه درباره چند وجهی‌هـای غیر محدب هم‌کـه از نوع بالا باشند صادق است. علاوه‌بر آن، این فرمول را در مورد اجسام دوار هم‌که در واقع حد چند وجهی‌های محدب محسوب می‌شوند، می‌توان به‌کاربرد. مثالهای زیراین موضوع را تأیید می‌کنند.

مثال ۱- حجم هرم ناقص را حساب کنید.

می‌دانیم اگر S_1 و S_2 مساحتهای قاعده‌های هرم ناقص و S مساحت مقطع حاصل از قطع‌آن بـا صفحه‌ای موازی با دو قاعده و به‌یك فاصله ازآن باشد داریم:

$$S=\left(\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{2}\right)^2 \qquad \text{(چرا؟)}$$



شکل (۴)

و یا

$$S=\frac{1}{4}(S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2})$$

داریم

$$V=\frac{h}{6}[S_1+S_2+4S]$$

و یا

$$V=\frac{h}{6}[S_1+S_2+(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2]$$

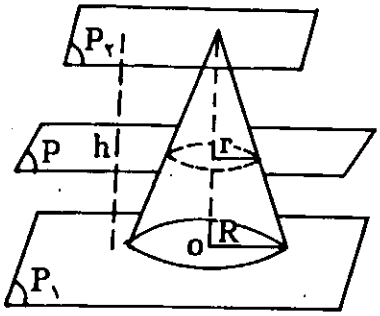
$$V=\frac{h}{6}[2S_1+2S_2+2\sqrt{S_1S_2}]$$

$$V=\frac{h}{3}(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$$

مثال ۲- حجم مخروط و مخروط دوار را حساب کنید.

مطابق شکل اگـر شعاع قاعده مخروط R و شعاع مقطع حاصل ازقطع مخروط باصفحه P که به‌یك فاصله از P_1 و P_2 رسم شده r باشد. داریم

$$V=\frac{h}{6}(S_1+S_2+4S)$$



شکل (۵)

اما می‌دانیم $r=\frac{R}{۲}$ یا $R=۲r$

پس

$$V=\frac{h}{۶}\left[۰+\pi R^{۲}+۴\left(\pi\frac{R^{۲}}{۴}\right)\right]$$

حجم هرم:

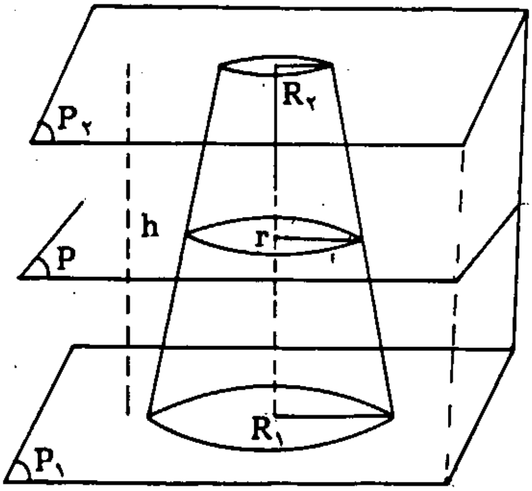
$$=\frac{h}{۶}(۲\pi R^{۲})=\frac{h}{۳}\cdot\pi R^{۲}$$

برای محاسبه حجم مخروط ناقص، داریم

$$V=\frac{h}{۶}(S_{۱}+S_{۲}+۴S)$$

می‌دانیم r شعاع مقطع برابر است با

$$r=\frac{R_{۱}+R_{۲}}{۲}$$



شکل (۶)

درفرمول بالا به جای $S_{۱}$ و $S_{۲}$ و S مقدار قرار می‌دهیم

$$V=\frac{h}{۶}\left[\pi R_{۱}^{۲}+\pi R_{۲}^{۲}+۴\pi\left(\frac{R_{۱}+R_{۲}}{۲}\right)^{۲}\right]$$

$$V=\frac{\pi h}{۶}[R_{۱}^{۲}+R_{۲}^{۲}+R_{۱}^{۲}+R_{۲}^{۲}+۲R_{۱}R_{۲}]$$

$$V=\frac{\pi h}{۳}(R_{۱}^{۲}+R_{۲}^{۲}+R_{۱}R_{۲})$$

نتیجه کاربرد این فرمول در مورد کره حیرت‌انگیز است. ابتدا حجم کره را محاسبه می‌کنیم (واضح است که کره را همواره می‌توان بین دو صفحه موازی قرار داد که فاصله آنها ۲R باشد)

$$V=\frac{h}{۶}(S_{۱}+S_{۲}+۴S)$$

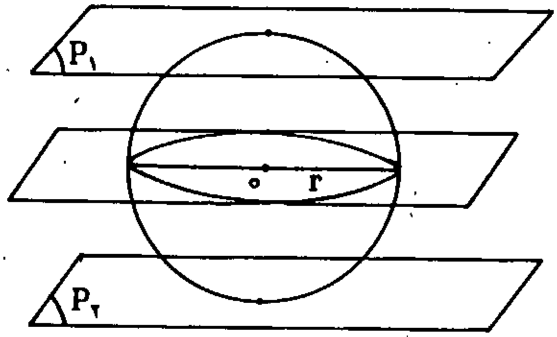
$$S_{۱}=۰ \text{ ، } S_{۲}=۰ \text{ و } h=۲R$$

$$V=\frac{۲R}{۶}(۰+۰+۴\pi R^{۲})=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$$

آیا براستی این حجم کره است که باچنین سهولتی قابل محاسبه است؟!

برای اینکه شبهه‌ای در بین نباشد، یادآور می‌شوم که حجم شبه مخروطها، یعنی حجم آن قسمت از کره که بین دو صفحه موازی قرار دارد، از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$V=\frac{h}{۲}(\pi r_{۱}^{۲}+\pi r_{۲}^{۲})+\frac{\pi h^{۳}}{۶} \qquad (۲')$$



شکل (۷)

که درآن r_1 و r_2 شعاعهای مقاطع کره با دو صفحه موازی و h فاصله بین دو صفحه می‌باشد. با استفاده از این فرمول همواره می‌توان حجم کره را محاسبه کرد. زیرا کافیست دراین فرمول مقادیر زیر را قرار دهیم

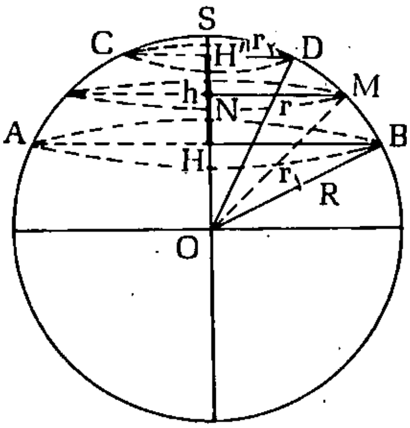
$$r_1=0 \text{ ، } r_2=0 \text{ و } h=2r$$

$$V=\frac{2r}{2}(0+0)+\pi\cdot\frac{8r^3}{6}=\frac{4}{3}\pi r^3$$

(یا ابتدا حجم نیمکره را حساب کرد و بعد دو برابر نمود). ثابت می‌کنیم فرمولهای (۲) و (′۲) دراینجا هم‌ارزیکدیگرند. برای این منظور ابتدا باید رابطه بین r_1 و r_2 یعنی شعاعهای مقاطع کره با صفحات موازی را با r یعنی شعاع مقطعی که بموازات دوصفحه مفروض و به‌یك فاصله از آنها رسم می‌شود، مشخص کنیم.

مطابق شکل از مثلث‌های قائم‌الزاویه OHB، ONM و OH′D داریم

$$R^2=r_1^2+OH^2=r^2+\left(OH+\frac{h}{2}\right)^2$$
$$=r_2^2+(OH+h)^2$$



شکل (۸)

از آنجا

$$\begin{cases} r_1^2=r_2^2+h^2+2OH\cdot h \\ r_1^2=r^2+\dfrac{h^2}{4}+OH\cdot h \end{cases}$$

در نتیجه

$$r^2=\frac{1}{2}\left(r_1^2+r_2^2+\frac{h^2}{2}\right) \qquad (*)$$

اکنون با توجه به (*) ابتدا فرمول (′۲) را به (۲) و سپس (۲) را به (′۲) تبدیل می‌کنیم. داریم

$$V=\frac{h}{2}(\pi r_1^2+\pi r_2^2)+\frac{\pi h^3}{6}$$
$$=\frac{h}{6}(3\pi r_1^2+3\pi r_2^2+\pi h^2)$$
$$=\frac{h}{6}\Big[\pi r_1^2+\pi r_2^2$$
$$+4\pi\underbrace{\left(\frac{1}{2}r_1^2+\frac{1}{2}r_2^2+\frac{h^2}{4}\right)}_{r^2}\Big]$$
$$=\frac{h}{6}(S_1+S_2+4S)$$

بالعکس اگر در فرمول (۲) به جای S_1، S_2 و S_3 مقدار قرار دهیم خواهیم داشت

$$V=\frac{h}{6}(S_1+S_2+4S)$$
$$=\frac{h}{6}(\pi r_1^2+\pi r_2^2+4\pi r^2)=\frac{h}{6}\Big[\pi r_1^2+\pi r_2^2$$
$$+4\pi\left(\frac{1}{2}r_1^2+\frac{1}{2}r_2^2+\frac{h^2}{4}\right)\Big]$$
$$=\frac{h}{6}(3\pi r_1^2+3\pi r_2^2+\pi h^2)$$
$$=\frac{h}{2}(\pi r_1^2+\pi r_2^2)+\frac{\pi h^3}{6}$$

به این ترتیب می‌توان فرمول (۲) را برای محاسبه حجم کره،

شبه مخروط ، از جمله حجم عرقچین کروی به کار برد. واضح است که این حجم از فرمول ($2'$) به سادگی به دست می‌آید.

اگر r شعاع عرقچین و h ارتفاع آن باشد، کافیست در فرمول ($2'$) به جای r_1 صفر و به‌جای r_2 ، r را قرار داد. داریم

$$\text{حجم عرقچین} = V = \frac{h}{2}\cdot \pi r^2 + \frac{\pi h^3}{6}$$

(شکل ۹) اما اگرشعاع خودکره را هم وارد محاسبات کنیم خواهیم داشت

$$R^2 = r^2 + (R-h)^2$$

از آنجا

$$r^2 + h^2 - 2Rh = 0$$

پس

$$V = \frac{h\pi}{6}(3r^2 + h^2)$$

$$= \frac{h\pi}{6}[r^2 + 2(2Rh - h^2) + h^2]$$

$$= \frac{h\pi}{6}(r^2 + 4Rh - h^2)$$

که درحالت خاص اگر $h = R = r$ آنگاه عرقچین به‌نیمکره تبدیل می‌شود و حجم‌آن برابر است با

$$V = \frac{2\pi}{3}R^3$$

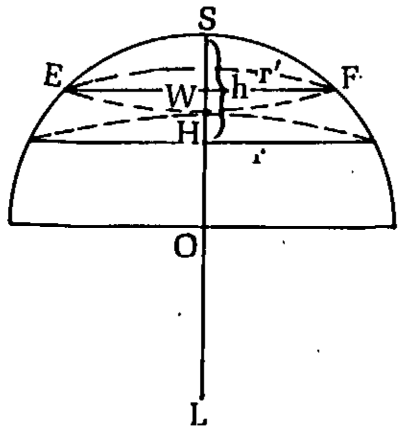
همین نتایج را از فرمول (۲) به دست می‌آوریم. مطابق شکل (۹).

اگر شعاع عرقچین کروی را r و ارتفاع آن را h بنامیم و صفحه P_1 را منطبق بر دایره عرقچین و P_2 را موازی آن درنقطه S درنظر بگیریم، شعاع دایره مقطع که به‌وسیله صفحه P موازی با P_1 و P_2 و به‌یك فاصله از آنها رسم می‌شود به طریق زیر محاسبه می‌کنیم. (شعاع این مقطع را با r' نشان داده‌ایم)

$$r'^2 = \frac{h}{2}\left(2R - \frac{h}{2}\right) = Rh - \frac{h^2}{4}$$

زیرا داریم

$$r'^2 = |WE \cdot WF| = |SW \cdot WL|$$



شکل (۹)

پس در فرمول قرار می‌دهیم

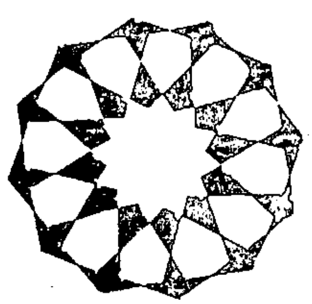
$$V = \frac{h}{6}\left[0 + \pi r^2 + 4\pi\left(Rh - \frac{h^2}{4}\right)\right]$$

$$V = \frac{h\pi}{6}(r^2 + 4Rh - h^2)$$

در حالت خاص که عرقچین کروی به نیمکره تبدیل می‌شود، $h = R = r$ در نتیجه

$$V = \frac{R\pi}{6}(R^2 + 4R^2 - R^2) = \frac{2}{3}\pi R^3$$

که دو برابرآن حجم خودکره است.



حل معادلهٔ درجهٔ چهارم

ازغلامرضا شجاع‌طلب

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \qquad a\neq 0$$

طرفین معادله را بر a تقسیم می‌کنیم

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$$

$$x=y-\frac{A}{4} \Rightarrow y^4+py^2+qy+R=0 \qquad *$$

فرض می‌کنیم که $q\neq 0$ باشد چرا که درغیر این صورت معادلهٔ * یک‌معادلهٔ دومجذوری خواهد شد که با فرض $z=y^2$. معادله بصورت $z^2+pz+R=0$ درخواهد آمد که حل آن ساده می‌باشد. در * داریم:

$$p=\frac{8B-3A^2}{8},\ q=\frac{A^3-4AB+8C}{8}$$

$$,\ R=\frac{16A^2B-3A^4-64AC+256D}{256}$$

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ *

$$\begin{cases} y_1y_2=M \\ y_1+y_2=N \\ y_3y_4=T \\ y_3+y_4=S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} TN+MS=-q & (1) \\ T+NS+M=p & (2) \\ N+S=0 & (3) \\ MT=R & (4) \end{cases}$$

بین ۴ معادلهٔ فوق، N و T را حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} (1) & \frac{R}{M}(-S)+MS=-q \\ (2) & \frac{R}{M}+(-S)(S)+M=p \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) & M^2+\frac{q}{S}M-R=0 \\ (2) & M^2-(S^2+p)M+R=0 \end{cases}$$

یادآوری: هر گاه دو معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ و $a'x^2+b'x+c'=0$ دارای یک ریشهٔ مشترک باشند و آن ریشهٔ مشترک را x_1 بنامیم. x_1 وشرط داشتن ریشهٔ مشترک بطریق ذیل بدست می‌آید.

$$x_1=\frac{a'c-ac'}{b'a-a'b}$$

$$a'(a'c-ac')^2+c'(a'b-b'a)^2-b'(a'c-ac')\times(a'b-b'a)=0$$

حال ریشهٔ مشترک وشرط داشتن‌ریشهٔ مشترک را برای معادلات (۱) و (۲) درنظرمی‌گیریم.

$$a=1,\ b=\frac{q}{S},\ C=-R$$

$$a'=1,\ b'=-(S^2+p),\ c'=R$$

$$1(-R-R)^2+R\left(\frac{q}{S}+S^2+p\right)^2+(S^2+p)(-2R)\times\left(\frac{q}{S}+S^2+p\right)=0$$

با فرض $\begin{cases} R\neq 0 \\ S\neq 0 \end{cases}$

$$4R^2S^2+R(q+S^3+PS)^2-2RS(S^2+P)(q+S^3+PS)=0$$

$$4RS^2+(q+S^3+PS)(q+S^3+PS-2S^3-2PS)=0$$

$$4RS^2+(q+S^3+PS)(q-S^3-PS)=0 \Rightarrow$$

$$4RS^2+q^2-(S^3+PS)^2=0$$

$$S^6+2PS^4+(P^2-4R)S^2-q^2=0$$

با فرض $V=S^2$، معادله بشکل ** درمی‌آید،

$$** \quad V^3+2PV^2+(P^2-4R)V-q^2=0$$

ریشهٔ مشترک $M=\dfrac{1(-R)-1(R)}{-(S^2+P)(1)-(1)(\frac{q}{S})} \Rightarrow$

$$M=\frac{2RS}{S^3+PS+q},\ T=\frac{S^3+PS+q}{2S},\ N=-S$$

راه دیگر برای بدست‌آوردن معادلهٔ * به‌این صورت می‌باشد که بین‌چهار رابطهٔ زیر، M، T و N را برحسب S بدست آوریم.

$$\begin{cases} TN+MS=-q \\ T+NS+M=p \\ N+S=0 \\ MT=R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M=\dfrac{S^3+PS-q}{2S} \\ T=\dfrac{S^3+PS+q}{2S} \\ N=-S \end{cases}$$

که اگر M و T را در رابطهٔ $MT=R$ جایگزین کنیم به‌معادلهٔ * خواهیم رسید.

$$\begin{cases} y_1+y_2=N=-S \\ y_1y_2=M=\dfrac{S^3+pS-q}{2S} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^2+Sy+\frac{S^3+pS-q}{2S}=0$$

معادله‌ای که y_1 و y_2 را به‌ما می‌دهد.

شرط داشتن جواب

$$\Delta\geqslant 0 \Rightarrow S^4+2pS^2\leqslant 2qS \Rightarrow \frac{pS-q}{S^3}\leqslant -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y_3+y_4=S \\ y_3y_4=T \end{cases} \Rightarrow y^2-Sy+\frac{S^3+pS+q}{2S}=0$$

معادله‌ای که y_3 و y_4 را به‌ما می‌دهد.

شرط داشتن جواب $\Delta\geqslant 0 \Leftarrow$ $\quad \dfrac{pS+q}{S^3}\leqslant -\dfrac{1}{2}$

چون $q\neq 0$ فرض کردیم پس $s\neq 0$ و بخاطر اینکه مقدار M معنی داشته باشد باید S^3+pS+q مخالف صفر باشد پس S باید دارای ۲ شرط ذیل باشد.

$$\begin{cases} S\neq 0 \\ S^3+pS+q\neq 0 \end{cases}$$

معادلهٔ درجه سوم * را که برحسب V می‌باشد، از یکی از روش‌هایی که می‌دانیم حل کرده و ازشش جواب احتمالی S آن S را که دارای ۲ شرط بالا باشد انتخاب می‌کنیم.

پس از ذکر نکته‌ای درباب تجزیه عبارت درجهٔ چهارم و حالتهای مختلف وجود ریشه برای معادلهٔ درجه چهارم با ذکر یك مثال به‌این بحث خاتمه می‌دهیم.

$$y^4+py^2+qy+R=\left(y^2+Sy+\frac{S^3+pS-q}{2S}\right)\times\left(y^2-Sy+\frac{S^3+pS+q}{2S}\right)=0$$

که با جایگزینی $y=x+\frac{A}{4}$ خواهیم داشت:

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=\left[x^2+\left(\frac{A}{2}+S\right)x+\frac{A^2}{16}+\frac{SA}{4}+\frac{S^3+pS-q}{2S}\right]\times\left[x^2+\left(\frac{A}{2}-S\right)x+\frac{A^2}{16}-\frac{SA}{4}+\frac{S^3+pS+q}{2S}\right]=0$$

با توجه به اینکه هرعبارت یا معادلهٔ درجهٔ چهارم را می‌توان به حاصلضرب ۲ عبارت درجهٔ دوم، تجزیه کرد پس خیلی راحت می‌توانیم در وجود و تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجه چهارم، تحقیق کنیم.

مثال

مسئلهٔ دکارت را حل کنید.

$$x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$$
$$x=y+1 \Rightarrow y^4-25y^2+60y-36=0$$
$$p=-25 \quad A=-4$$
$$q=60$$
$$R=-36$$
$$V^3-50V^2+769V-3600=0 \Rightarrow$$
$$V_1=25,\ V_2=9,\ V_3=16$$

$S=3$ را انتخاب می‌کنیم: توجه داریم که S^3+pS+q یا $27-75+60\neq 0$ می‌باشد.

$$x^4-4x^3-19x^2+106x-120=$$
$$\left(x^2+x+1-3+\frac{27-75-60}{6}\right)\left(x^2-5x+1+3+\frac{12}{6}\right)=(x^2+x-20)(x^2-5x+6)=0$$
$$(x-4)(x+5)(x-2)(x-3)=0 \Rightarrow$$
$$x_1=4,\ x_2=-5,\ x_3=2,\ x_4=3$$

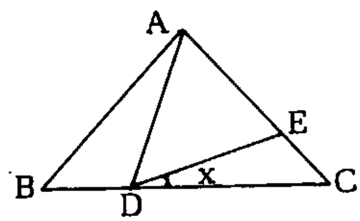
مثالی دیگر

$$x^4-8x^3+17x^2+2x-24=0$$
$$x=y+2 \Rightarrow y^4-7y^2+6y=0 \Rightarrow V^3-14V^2+49V-36=0 \Rightarrow V_1=1,\ V_2=4,\ V_3=9$$
$$S=-1 \quad (x^2-5x+6)(x^2-3x-4)=0$$
$$x_3=-1,\ x_4=4$$
$$x_1=2,\ x_2=3$$

مسایل ویژه دانش‌آموزان

تهیه و تنظیم از: ابراهیم دارابی

۱ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$ اگر مطابق شکل داشته باشیم $AD=DE$ ، $\widehat{BAD}=30^\circ$ زاویه EDC چند درجه است؟



۲ـ معادله زیر را حل کنید

$$\log\sqrt{5x-4}+\log\sqrt{x+1}=2+\log 0/18$$

جواب: $x=8$

۳ـ ثابت کنید

$$\sqrt{1+\cos 2\alpha}+\sqrt{1-\cos 2\alpha}+\sqrt{2}\,(\sin\alpha+\cos\alpha)=$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}\,(\sin\alpha+\cos\alpha) & \text{اگر}\quad 2k\pi \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}+2k\pi \\ 2\sqrt{2}\,\sin\alpha & \text{اگر}\quad \frac{\pi}{2}+2k\pi < \alpha < \pi+2k\pi \\ 0 & \text{اگر}\quad \pi+2k\pi \leqslant \alpha \leqslant \frac{3}{2}\pi+2k\pi \\ 2\sqrt{2}\,\cos\alpha & \text{اگر}\quad \frac{3}{2}\pi+2k\pi < \alpha < 2\pi+2k\pi \end{cases}$$

۴ـ مطلوبست محاسبه: $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(-\frac{17}{5}\pi\right)\right)$

راهنمایی: عبارت داده شده را برابر با y بگیرید از آنجا

$$\cos y=\cos\left(-\frac{17}{5}\pi\right)$$

۵ـ اگر α و β ریشه‌های معادله: $x^2+px+q=0$ و γ و δ ریشه‌های معادله: $x^2+Px+Qx=0$ باشند حاصلضرب

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)$$

را برحسب ضرایب معادلات بالا بنویسید.

۶ـ ضریب x^{20} درکدام یك از عبارات زیر بیشتر است؟

۱) $(1+x^2-x^3)^{1000}$

۲) $(1-x^2+x^3)^{1000}$

جواب: در اولی. در بسط عبارات x را به $-x$ تبدیل کنید و نتایج لازم را بگیرید.

۷ـ رابطه‌ای بین $\operatorname{Arcsin}\cos\operatorname{Arcsin}x$ و $\operatorname{Arccos}\sin\operatorname{Arccos}x$ پیدا کنید.

راهنمایی: ثابت‌کنید مجموع دومقدار برابر است با $\frac{\pi}{2}$

۸ـ روی اضلاع مثلث ABC مستطیل‌های ABB_1A_1، BCC_1B_2 و CAA_2C_2 را بنا می‌کنیم. ثابت‌کنید عمود منصف‌های A_1A_2 و B_1B_2 و C_1C_2 در یك نقطه متقاربند.

۹ـ اگر x_1، x_2، x_3، x_4 فواصل نقطه دلخواهی واقع در داخل یك چهاروجهی از وجوه‌آن و h_1، h_2، h_3، h_4 ارتفاعات نظیر از چهاروجهی مفروض باشند ثابت کنید:

$$\frac{x_1}{h_1}+\frac{x_2}{h_2}+\frac{x_3}{h_3}+\frac{x_4}{h_4}=1$$

۱۰ـ ثابت کنید

$$x^{9999}+x^{8888}+x^{7777}+x^{6666}+x^{5555}$$
$$x^{4444}+x^{3333}+x^{2222}+x^{1111}+1$$

بر

$$x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3$$
$$+x^2+x^1+1$$

بخشپذیر است.

۱۱ـ ثابت‌کنید اگر $a, b, c, d \geqslant 0$ آنگاه

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$$

۱۲ـ ثابت‌کنید به‌ازای هرمقدار دلخواه $n\in N$ نامساوی زیر برقرار است.

$$(2n+1)^n \geqslant (2n)^n+(2n-1)^n$$

راهنمایی: از بسط $(1\pm x)^n$ استفاده‌کنید.

۱۳ـ همه مقادیر α را تعیین کنید که در ازای هر یك از آنها، دنباله

$\cos\alpha$ ، $\cos 2\alpha$ ، $\cos 4\alpha$ ، $\cos 8\alpha$ ، $\dots$

تنها از اعداد منفی تشکیل شود.

راهنمایی: جواب $\alpha = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$

باید داشته باشیم $\cos\alpha \leqslant -\frac{1}{4}$

۱۴ـ تعداد چند جمله‌ای‌هایی به صورت ذیل را پیدا کنید

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

که در آن، n عدد صحیح نامنفی و a_iها اعداد صحیح، $a_0 > 0$ $(i = 0, 1, 2, 3, \dots, n)$ و

$$n + a_0 + |a_1| + \dots + |a_n| = 3$$

جواب: $3x^0$، $2x$، $x-1$، $x+1$ و x^2

۱۵ـ ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \infty$$

راهنمایی:

$$1 > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} > 2\times\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} > 4\times\frac{1}{8}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

سپس نتیجه بگیرید

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} > \frac{n}{2}$$

۱۶ـ پنج عدد طوری تعیین کنید که دو به‌دو نسبت بهم اول باشند و مجموع هرچند تا ازآنها باهم یك عدد مرکب به‌وجود آورد.

جواب: برای مثال $1, 7, 13, 19, 25$

۱۷ـ ثابت کنید اگـر p و q اعداد صحیح و نسبت بهم اول باشند، آنگاه

$$\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \left[\frac{3p}{q}\right] + \dots + \left[\frac{(q-1)p}{q}\right] = \left[\frac{q}{p}\right] + \left[\frac{2q}{p}\right] + \left[\frac{3q}{p}\right] + \dots + \left[\frac{(p-1)q}{p}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

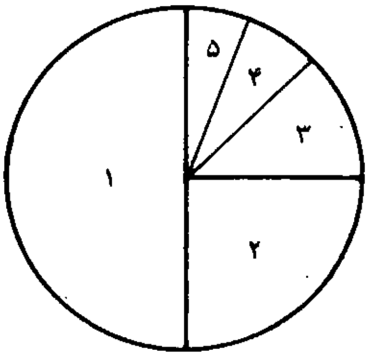
دراینجا $[x]$ جزء صحیح x است.

۱۸ـ هدف مطابق شکل زیر می‌تواند حول نقطه O بچرخد طوری‌کـه در ازای سرعت زاویه‌هـای بزرگ تشخیص قطاعهای دایره از یکدیگر ممکن نیست. شخصی از روی حدس به‌هدف شلیك می‌کند و قانون بازی طوری‌است که:

اگر تیر به قطاع (۱) برخوردکند، ۱ تومان برنده می‌شود.

»	»	(۲)	»	۱/۵	»	بازنده
»	»	(۳)	»	۲	»	برنده
»	»	(۴)	»	۲/۵	»	بازنده
»	»	(۵)	»	۳	»	برنده

آیا شرکت دراین بازی مقرون به صرفه است؟ چرا؟



راهنمایی: اگـر پیش‌آمد هر شلیك x تومان بـاشد، x می‌تواند مقادیر زیر را قبول کند

$$+1 ، -1/5 ، +2 ، -2/5 ، +3$$

با استفاده از فرمول $P(A) = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{m}{n}$

و جدول

x	۱	$-۱/۵$	۲	$-۲/۵$	۸
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

نمودار توزیع پیش‌آمـد را رسم و مسأله را بـه انجـام برسانید.

۱۹ـ دو جسم در یك لحظه، از یك نقطه و در یك جهت شروع به حرکت می‌کنند. اولی با سرعت

$$V = (6t^2 + 2t) \quad m/s$$

و دومی با سرعت

$$V = (4t + 5) \quad m/s$$

حرکت می‌کنند. بعداز ۵ ثانیه این دو جسم به چه فاصله از یکدیگر قرار می‌گیرند؟

راهنمایی:

$$S_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t)dt$$

$$S_2 = \int_0^5 (4t + 5)dt$$

روشی دیگر برای مفهوم حد تابع

دکتر خسروی
عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت معلم

ابتدا مختصری در مورد حد صحبت می کنیم تا اهمیت آن روشن‌شود و بعد به‌روش ارائهٔ آن می‌پردازیم. در یونان باستان اعداد را گویا می‌گرفتند و با اثبات اینکه طول قطر مربع به ضلع واحد عدد گویایی نیست بعضی‌از اثباتهای هندسی منجمله قضیهٔ تالس دچار نقص شد ولی ائودوکسوس[1] خیلی ماهرانه این نقص‌را برطرف‌کرد [۱] یا [۴]. شرط لازم و کافی برای آنکه $\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$ آن است که به‌ازای هرعدد گویای r داشته‌باشیم $r\leqslant\frac{AB}{CD}$ فقط‌وفقط وقتی که $r\leqslant\frac{A'B'}{C'D'}$. این در واقع همان تساوی ذیل است

$$\operatorname{Sup}\left\{r:\ r\leqslant\frac{AB}{CD}\ \text{و}\ r\ \text{گویا}\right\}$$

$$=\operatorname{Sup}\left\{r:\ r\leqslant\frac{A'B'}{C'D'}\ \text{و}\ r\ \text{گویا}\right\}$$

بعدها کانتورو ددکیند با استفاده از ایده‌هایش دستگاه اعداد حقیقی را به صورت اصل موضوعی بیان‌کردند و می‌توان اعداد حقیقی را حدود دنباله‌های اعدادگویا تعریف‌کرد (بسط اعشاری اعداد). برای محاسبهٔ سرعت لحظه‌ای وضریب زاویهٔ خط مماس برمنحنی به مشتق نیاز داریم و فرما با استفاده از حد تعریف دقیقی برای مشتق بیان‌کرد. در فیزیك برای خلأ و نورهای تك موجی باز به حد نیاز است و در هندسه هم دستور محاسبهٔ مساحت مستطیل و حجم مکعب مستطیل و قضیهٔ تالس با استفاده از حد به‌دست می‌آید [۴] و بعلاوه نقش حد در مطالب پیشرفتهٔ ریاضی برکسی پوشیده نیست لذا باید این مفهوم را به دانش‌آموزان و دانشجویان گفت و گرچه امروزه تکنیك ε و δ با میزان خطا و تقریب قابل توجیه است ولی در مراحل اول‌آموزش چندان موفق نبوده و مثلاً پرفسور پیم[2] می‌گوید نمی‌دانم چرا ریاضیدانها اصرار دارند حد را با استفاده از تکنیك ε و δ بگویند و مرتباً روشهای جدیدی برای حد می‌یابند. درمقاله [۳] هم سعی شده است که از تکنیك ε و δ صریحاً اسمی به میان نیاید و در مقالهٔ [۲] برای رهایی از حد با شرایط بیشتری بدون استفاده از حد خارج قسمت روش دیگری برای مشتق‌گفته شده و با توجه به اینکه در ریاضیات کاربردی به دنباله‌ها نیاز دارند و دانش‌آموزان بایدآنها را فراگیرند، در این یادداشت با استفاده از دنباله‌ها روش دیگری برای حد تابع ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱. یك دنبالهٔ حقیقی عبارت است از تابعی مانند a از مجموعهٔ اعداد طبیعی بتوی مجموعهٔ اعداد حقیقی و مقدار این تابع درنقطهٔ دلخواه n را به a_n نمایش می‌دهند و آن‌را جمله عمومی دنباله می‌نامند. اگر a دنباله‌ای با جملهٔ عمومی a_n باشدآن را دنبالهٔ $\{a_n\}$ می‌نامند.

تعریف ۲. گویند دنبالهٔ $\{a_n\}$ همگرا به عدد L است هرگاه به ازای هر عدد مثبت ε عددی طبیعی مانند N باشد بطوریکه‌به‌ازای هر n اگر $n\geqslant N$ آنگاه $|a_n-L|<\varepsilon$. عدد L را حد دنبالهٔ $\{a_n\}$ می‌نامند و دنبالهٔ $\{a_n\}$ را همگرا نامند هرگاه دارای حدی مانند L باشد.

قضیه ۱. حد یك دنباله درصورت وجود منحصربفرد است.

اثبات. فرض‌کنید دنبالهٔ $\{a_n\}$ همگرا به L_1 و نیز همگرا به L_2 باشد و $L_1\neq L_2$. پس به ازای $\varepsilon=\frac{|L_1-L_2|}{2}$ چون $\{a_n\}$ همگرا به L_1 است عددی مانند N_1 هست به‌طوریکه به ازای هر n اگر $n\geqslant N_1$ آنگاه

$$|a_n-L_1|<\frac{|L_1-L_2|}{2}$$

و چون $\{a_n\}$ همگرا به L_2 است عددی مانند N_2 هست

به طوریکه به ازای هر n اگر $n \geqslant N_2$ آنگاه

$$|a_n - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{2}$$

حال اگر $n \geqslant Max\{N_1 , N_2\}$ آنگاه

$$|L_1 - L_2| = |(a_n - L_1) - (a_n - L_2)|$$
$$\leqslant |a_n - L_1| + |a_n - L_2|$$
$$< \frac{|L_1 - L_2|}{2} + \frac{|L_1 - L_2|}{2} = |L_1 - L_2|$$

و این یك تناقض است.

حال می‌توان برای حد یك دنباله نمادی انتخاب کرد و بجای اینکه بگوئیم $\{a_n\}$ همگرا به عدد L است می‌نویسیم

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

به عنوان حالت خاصی از توابع می‌توان حاصلجمع، تفاضل، حاصلضرب و خارج قسمت دو دنباله از اعداد را تعریف کرد.

تعریف ۳. اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله از اعداد باشند:

الف) حاصلجمع آنها دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n + b_n$ است.

ب) تفاضل $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$؛ یعنی، $\{a_n\} - \{b_n\}$ دنبالهٔ $\{a_n - b_n\}$ است.

ج) حاصلضرب $\{a_n\}$ در $\{b_n\}$ دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n b_n$ است.

د) خارج قسمت $\{a_n\}$ بر $\{b_n\}$، بشرطی‌که همواره $b_n \neq 0$ دنبالهٔ با جملهٔ عمومی a_n / b_n است.

قضیه ۲. اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ همگرا به A و دنبالهٔ $\{b_n\}$ همگرا به B باشد آنگاه:

الف) دنبالهٔ $\{a_n\} + \{b_n\}$ همگرا به $A + B$ است.

ب) دنبالهٔ $\{a_n\} - \{b_n\}$ همگرا به $A - B$ است.

ج) دنبالهٔ $\{a_n\} \cdot \{b_n\}$ همگرا به AB است.

د) اگر $B \neq 0$ دنبالهٔ $\{a_n\}/\{b_n\}$ همگرا به A/B است.

تعریف ۴ (حد تابع): حد تابع $f(x)$ وقتی x به سمت C میل کند مساوی L است هرگاه به ازای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ اگر همهٔ x_nها متمایز از C و $\{x_n\}$ همگرا به C باشد دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ همگرا به L باشد. عدد L را حد تابع f در نقطهٔ C می‌نامند.

بسادگی می‌توان از قضایای نظیر برای دنباله‌ها دو قضیهٔ ذیل را در مورد حد توابع نتیجه گرفت.

قضیه ۳ (یکتایی حد توابع): حد تابع در یك نقطه در صورت وجود منحصر بفرد است.

قضیه ۴. اگر توابع f و g بترتیب در C دارای حدود A و B باشند آنگاه داریم:

الف) تابع $f + g$ در C دارای حد $A + B$ است.

ب) تابع $f - g$ در C دارای حد $A - B$ است.

پ) تابع $f.g$ در C دارای حد AB است.

د) اگر $B \neq 0$ آنگاه تابع f/g در C دارای حد A/B است.

تعریف ۵ (پیوستگی): تابع f در نقطهٔ C پیوسته است هرگاه f در C تعریف شده باشد وحد f وقتی x به سمت C میل کند مساوی $f(C)$ باشد.

قضیه ۵. تابع f در نقطهٔ C پیوسته است هرگاه به ازای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ اگر $\{x_n\}$ همگرا به C باشد دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ همگرا به $f(C)$ باشد.

قضیه ۶. اگر توابع f و g در نقطهٔ C پیوسته باشند آنگاه توابع $f \pm g$ و $f \cdot g$ در C پیوسته‌اند و اگر بعلاوه $g(C) \neq 0$ تابع f/g هم در C پیوسته است.

قضیه ۷. اگر تابع f در C پیوسته و تابع g در $f(C)$ پیوسته آنگاه تابع $g \circ f$ در C پیوسته است.

اثبات قضایای فوق ساده است و برای نمونه قضیه ۷ را ثابت می‌کنیم.

فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا به C باشد، بنا بر پیوستگی f در C دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ همگرا به $f(C)$ است و چون تابع g در $f(C)$ پیوسته دنبالهٔ $\{g(f(x_n))\}$ همگرا به $g(f(C))$ است و بنابر قضیهٔ ۵ تابع $g \circ f$ در C پیوسته است.

حال آماده‌ایم تا معادل بودن دو تعریف را ثابت کنیم.

قضیه ۸. تابع f در نقطهٔ C دارای حد L است هرگاه به ازای هر عدد مثبت ε عدد مثبتی مانند δ باشد به طوریکه به ازای هر x اگر $0 < |x - C| < \delta$ آنگاه

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

اثبات. فرض کنید تابع f در نقطهٔ C دارای حد L باشد و $\varepsilon > 0$ ای باشد که به ازای هر عدد مثبت δ عددی مانند x باشد که $0 < |x-C| < \delta$ و $|f(x)-L| \geqslant \varepsilon$.

پس به‌ازای هر عدد طبیعی n، نظیر $\delta_n = \frac{1}{n}$، عددی مانند x_n هست که

$$(1) \quad 0 < |x_n - C| < \frac{1}{n} \quad \text{و} \quad |f(x_n) - L| \geqslant \varepsilon$$

اما $\{x_n\}$ همگرا به C است و همه x_nها از C متمایزند و لذا $\{f(x_n)\}$ همگرا به L است. درنتیجه، Nای هست که اگر $n \geqslant N$ آنگاه $|f(x_n)-L| < \varepsilon$ که با (۱) تناقض دارد.

بعکس فرض کنید تابع f در نقطهٔ C دارای حد L نباشد پس دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ همگرا به C هست که همواره x_nها متمایز از C اند و $\{f(x_n)\}$ همگرا به L نیست. از طرف دیگر بنا به فرض اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد $\delta > 0$ ای هست به طوریکه اگر $0 < |x-C| < \delta$ آنگاه

$$(2) \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

و چون $\{x_n\}$ همگرا به C است عددی مانند N هست به‌طوریکه اگر $n \geqslant N$ آنگاه $|x_n - C| < \delta$ ولی همواره $x_n \neq C$ پس اگر $n \geqslant N$ آنگاه $0 < |x_n - C| < \delta$ و بنابر (۲) برای این nها داریم $|f(x_n)-L| < \varepsilon$ و لذا $\{f(x_n)\}$ همگرا به L است و با این تناقض قضیه ثابت می‌شود.

زیرنویسها:

1. Eudoxus. 2. Pym.

منابع

۱. آشنائی با تاریخ ریاضیات، تألیف ایوز، ترجمهٔ محمد قاسم وحیدی‌اصل، مرکز نشر دانشگاهی.
۲. مشتق بدون استفاده از حد خارج قسمت، خسروی مجله رشد ریاضی (۲۵)
۳. مطالبی در مورد حد، خسروی مجله رشد ریاضی (۲۴)
۴. هندسه‌های اقلیدسی و نا اقلیدسی، تألیف گرینبرگ، ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی.

بقیه از صفحهٔ ۳

شکی نیست که تحقیق و تتبع علمی، نگارش مطالب مفید و ارزنده، چیزی نیست که به خودی خود و بدون مطالعه و بررسی و پژوهش انجام گیرد. اگر قرار است آموزش و پرورش بیش‌از پیش به‌شکل فرایندی پویا درآید، برهمهٔ معلمان و دبیران و اساتید فرض است که به دانسته‌های خود اقناع نکرده و هر روز و هرساعت همچنان که یاد می‌دهند خود به یادگیری مشغول باشند.

در دنیایی که سالی صدها هزار قضیه جدید ریاضی اثبات می‌شود و دهها هزار اختراع و ابداع جدید در زمینه‌های گوناگون صنعت و تکنولوژی به ثبت می‌رسد، چنانچه به دانسته‌های کلاسیك خود که در مدرسه و دانشگاه فراگرفته‌ایم بسنده کنیم خیلی زود دانشمان کهنه شده و با زبان و محتوای رشته تخصصی خود بیگانه می‌شویم.

از جمله طرقی که به وسیله آن می‌توان به دانش افزایی پرداخت وخود انگیزه‌ای برای پژوهش وبررسی علمی می‌باشد، مطالعه کتب جدیدالانتشار ریاضی، شرکت درکنفرانس‌ها و سمینارهای منطقه‌ای وملی، بحث وتبادل نظردرمسائل ومحتوای ریاضیات با همکاران و شرکت درکنفرانس‌ها و سمینارهای ریاضی و آموزش ریاضی در سطح بین‌المللی است. در این رابطه دانستن حداقل یك زبان خارجی جهت تبادل نظر علمی در سطحی متوسط لازم می‌نماید.

خوشبختانه با تشویق و ترغیب مقامات محترم وزارت آموزش وپرورش ما شاهد حضور دبیران ریاضی در سالهای اخیردرکنفرانس سالانه انجمن ریاضی ونیزتشکیل سمینارهای تخصصی آموزش ریاضی درسطح بعضی از استانها مثلاً کرمان بوده‌ایم. امیدواریم که شاهد شرکت فعال همکاران دبیر در کنفرانس بین‌المللی آموزش ریاضی که در تابستان سال ۱۳۷۲ درکشور کانادا برگزارخواهد شد باشیم. واین خود انگیزه‌ای برای پژوهش و مطالعه بیشتر این عزیزان باشد.

سردبیر

تولید و انتشار خطا

تنظیم از: دکتر اسماعیل بابلیان
عضو هیأت علمی
دانشگاه تربیت معلم

درسهایی از آنالیز عددی (۳)

در درس شمارهٔ (۱) صورت علمی نمایش اعداد را بیان کردیم. در این نمایش هر عدد اعشاری به صورت $a \times 10^{b}$ نمایش داده می‌شود که

$$1 \leqslant |a| < 10,$$

این نمایش را نمایش ممیز سیار نیز می‌نامند و محاسبه با این اعداد را حساب ممیز سیار گویند. قبل از اینکه نحوهٔ تولید و انتشار خطا را توضیح دهیم لازم است در مورد چگونگی انجام چهارعمل اصلی روی اعداد ممیزسیار مطالبی بیان کنیم. برای سادگی مثالها فرض می‌کنیم فقط ۳ رقم از ارقام مانتیس هرعدد اعشاری را می‌توانیم نگهداریم.

جمع و تفریق

برای به دست آوردن حاصلجمع یا تفاضل دو عدد ابتدا نماها را یکسان می‌کنیم، درصورت لزوم با افزایش نمای عدد کوچکتر، سپس حاصل عمل را به‌دست می‌آوریم و بالاخره جواب به دست آمده را به صورت ممیز سیار، به صورت علمی و با ۳ رقم اعشار، نمایش می‌دهیم. مثلاً،

$$۳/۱۲ \times ۱۰^{۱} + ۸/۳۴ \times ۱۰^{۱} = ۱۱/۴۶ \times ۱۰^{۱} \longrightarrow ۱/۱۵ \times ۱۰^{۲}$$

$$۶/۴۸ \times ۱۰^{۱} + ۱/۴۵ \times ۱۰^{-۱} = ۶/۴۸ \times ۱۰^{۱} + ۰/۰۱۴۵ \times ۱۰^{۱} = ۶/۴۹۴۵ \times ۱۰^{۱} \longrightarrow ۶/۴۹ \times ۱۰^{۱}$$

$$۳/۵۶ \times ۱۰^{-۱} - ۲/۶۷ \times ۱۰^{-۱} = ۰/۸۹ \times ۱۰^{-۱} \longrightarrow ۸/۹ \times ۱۰^{-۲}$$

ضرب

در ضرب دو عدد ممیز سیار نماها جمع و مانتیسها ضرب می‌شوند سپس نتیجه نهائی با گردکردن به صورت علمی نمایش داده می‌شود. مثلاً،

$$(۳/۲۵ \times ۱۰^{۱}) \times (۲/۴۶ \times ۱۰^{۱}) = ۷/۹۹۵ \times ۱۰^{۲} \longrightarrow ۸/۰۰ \times ۱۰^{۲}$$

$$(۷/۴۸ \times ۱۰^{۳}) \times (۳/۳۷ \times ۱۰^{-۲}) = ۲۵/۲۰۷۶ \times ۱۰^{۱} \longrightarrow ۲/۵۲ \times ۱۰^{۲}$$

تقسیم

برای تقسیم دوعدد ممیزسیار ابتدا تفاضل نماها را به‌دست می‌آوریم، سپس مانتیسها را برهم تقسیم می‌کنیم و حاصل را به صورت علمی درمی‌آوریم. مثلاً،

$$\frac{۵/۴۳ \times ۱۰^{۱}}{۴/۵۵ \times ۱۰^{۲}} = ۱/۱۹۳۴۰\cdots \times ۱۰^{-۱} \longrightarrow ۱/۱۹ \times ۱۰^{-۱}.$$

$$\frac{۲/۷۵ \times ۱۰^{۲}}{۹/۸۷ \times ۱۰^{-۲}} = ۰/۲۷۸۶۲۲\cdots \times ۱۰^{۴} \longrightarrow ۲/۷۹ \times ۱۰^{۳}$$

ملاحظه می‌شود که حتی اگر عوامل عملیات دقیق باشند نتایج، معمولاً، گرد شدهٔ حاصل دقیق عملیات هستند. خطایی که به این صورت وارد می‌شود خطای تولید شده نام دارد.

محاسبهٔ عبارات

ممکن است دریك عبارت محاسباتی چهارعمل اصلی شرکت داشته باشند، دراین صورت، عملیات همانندآنچه توضیح داده شد انجام می‌گیرند تا حاصل نهائی به دست آید. مثلاً،

$$\frac{۶/۱۸\times ۱۰^{۱}+۱/۸۴\times ۱۰^{-۱}}{(۴/۷۲\times ۱۰^{۱})\times(۶/۳۸\times ۱۰^{۱})}\longrightarrow$$

$$\frac{۶/۲۰\times ۱۰^{۱}}{۳/۰۱\times ۱۰^{۳}}=۲/۰۵۹۸۰۰\cdots\times ۱۰^{-۲}\longrightarrow$$

$$۲/۰۶\times ۱۰^{-۲}$$

در مثال بالا مقادیر صورت و مخرج کسر دوم شامل خطاهای تولید شده هستند واین اعداد تقریبی برهم تقسیم شده و بازهم نتیجهٔ نهائی شامل خطای تولید شدهٔ دیگری است. واضح است که خطاهای تولید شده درصورت و مخرج کسر دوم انتشار پیداکرده روی مقدار جواب نهائی اثر می‌گذارند. هدف از بقیه این درس بررسی انتشار خطاهاست.

تبصرهٔ مهم: در حساب ممیز سیار، با هر تعداد رقم که بتوان نگهداری کرد، قوانین حساب معمولی، نظیر وجود عضو بی‌اثر برای جمع، شرکت پذیری و ... عموماً برقرار نیستند. مثلاً، در حساب ممیزسیار سه رقمی هر عددکوچکتر از ۵×۱۰^{-۳} راکه با عدد ۲/۷۵ جمع‌کنیم حاصل ۲/۷۵ خواهد بود. به عنوان مثال،

$$۲/۷۵\times ۱۰^{۰}+۴\times ۱۰^{-۳}=۲/۷۵\times ۱۰^{۰}+۰/۰۰۴\times ۱۰^{۰}=۲/۷۵۴\times ۱۰^{۰}\longrightarrow ۲/۷۵\times ۱۰^{۰}$$

همچنین شرکت‌پذیری برقرار نیست. مثلاً، در محاسبهٔ

$$۲/۷۵+۴\times ۱۰^{-۳}+۳\times ۱۰^{-۳}$$

داریم

$$۲/۷۵+۴\times ۱۰^{-۳}=۲/۷۵۴\longrightarrow ۲/۷۵$$

و ازآنجا

$$۲/۷۵+۳\times ۱۰^{-۳}=۲/۷۵۳\longrightarrow ۲/۷۵$$

اما،

$$۴\times ۱۰^{-۳}+۳\times ۱۰^{-۳}=۷\times ۱۰^{-۳}$$

و

$$۲/۷۵+۷\times ۱۰^{-۳}=۲/۷۵۷\longrightarrow ۲/۷۶$$

یعنی، در حساب ممیزسیار سه رقمی، حاصل عبارات

$$(۲/۷۵+۴\times ۱۰^{-۳})+۳\times ۱۰^{-۳}$$

و

$$۲/۷۵+(۴\times ۱۰^{-۳}+۳\times ۱۰^{-۳})$$

یکسان نیست. ثابت می‌شودکه درحساب ممیز سیار بهتر است اعداد را ازکوچك به بزرگ باهم جمع‌کنیم. برای درك بیشتر این مطلب، اگر کامپیوتر در اختیار دارید، مقدار دو عبارت زیر را، که از نظر ریاضی باهم برابرند، حساب‌کنید خواهید دیدکه دو جواب متفاوت به دست می‌آید!

$$\sum_{n=۱}^{۱۰۰۰۰}\frac{۱}{n^{۲}}\quad \text{و}\quad \sum_{n=۱}^{۱۰۰۰۰}\frac{۱}{(۱۰۰۰۱-n)^{۲}}$$

درحالت‌کلی اگر A و B دو عدد و a و b تقریبهایی از آنها باشند و $\otimes$ نماد یك عمل باشد در کامپیوتر این عمل با $\otimes^{*}$ تقریب می‌شود و در واقع آنچه ماشین به ما می‌دهد $a\otimes^{*} b$ است و داریم

$$\begin{aligned}|A\otimes B-a\otimes^{*} b|&=|(A\otimes B-a\otimes b)+(a\otimes b-a\otimes^{*} b)|\\&\leqslant \underbrace{|A\otimes B-a\otimes b|}_{\text{خطای منتشر شده}}+\underbrace{|a\otimes b-a\otimes^{*} b|}_{\text{خطای تولید شده}}\end{aligned}$$

یعنی، خطای کل از مجموع خطای منتشر شده و تولید شده بیشتر نیست.

درآنچه ذیلاً خواهدآمد حداکثر خطای منتشر شده را برای چهارعمل اصلی به‌جای $\otimes$ محاسبه می‌کنیم. معمولاً در عمل به خطای تولید شده توجه زیادی نمی‌شود هر چندگاهی اوقات سبب دریافت جوابهای غیر قابل قبول می‌شود.

انتشار خطا

در این قسمت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد تقریبی‌را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

الف ـ جمع اعداد تقریبی

در حساب ممیزسیار، مثلاً سه رقمی، داریم

$$\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\simeq ۱/۴۱+۱/۷۳=۳/۱۴$$

ملاحظه می‌کنیدکه تقریبی از $\sqrt{۲}$ را با تقریبی از $\sqrt{۳}$ جمع

کرده‌ایم. اینك می‌خواهیم معین کنیم که خطای ۳/۱۴ حداکثر چقدر است و چه ارتباطی با خطای ۱/۴۱ و ۱/۷۳ دارد. درحالت کلی داریم.

قضیه ۱: اگر a و b تقریبهایی از A و B و این اعداد جملگی مثبت باشند داریم:

$$e(a+b) \leqslant e(a)+e(b)$$

$$\delta(a+b) \leqslant \operatorname{Max}\{\delta(a)\ ,\ \delta(b)\}.$$

برهان

بنابر تعریف خطای یك تقریب، چون $a+b$ به عنوان تقریبی از $A+B$ پذیرفته می‌شود، داریم

$$e(a+b)=|A+B-(a+b)| \leqslant |A-a|+|B-b|=e(a)+e(b).$$

برای اثبات حکم قسمت دوم قضیه، قرار می‌دهیم

$$(*)\quad \Delta=\operatorname{Max}\{\delta(a)\ ,\ \delta(b)\}$$

در این صورت، بنابر قسمت اول قضیه و تعریف خطای نسبی،

$$\delta(a+b) \simeq \frac{e(a+b)}{a+b} \leqslant \frac{e(a)+e(b)}{a+b} = \frac{e(a)}{a+b}+\frac{e(b)}{a+b} = \frac{e(a)}{a}\cdot\frac{a}{a+b} + \frac{e(b)}{b}\cdot\frac{b}{a+b}$$

$$\leqslant \Delta\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\right)=\Delta. \quad [\text{بنابر } (*)]$$

نتیجه ۱: حداکثر خطای $a+b$ مجموع خطاهای a و b است و دقت $a+b$ می‌تواند همانند دقت نادقیقترین a و b باشد. لذا، در اندازه‌گیری کمیتها بهتر است آنها را با یك واحد اندازه‌گیری کنیم.

ب ـ تفریق اعداد تقریبی

در مورد تفریق اعداد تقریبی به‌سادگی می‌توان نشان دادکه

$$e(a-b) \leqslant e(a)+e(b)$$

اما، بنابر تعریف

$$\delta(a-b) \simeq \frac{e(a-b)}{a-b}$$

و اگر $a-b$ کوچك باشد خطای نسبی $a-b$ می‌تواند بزرگ باشد، که در نتیجه $a-b$ نادقیق خواهد بود.

مثلاً، در حساب ممیز سیار سه رقمی داریم:

$$(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})-\pi \simeq (۱/۴۱+۱/۷۳)-۳/۱۴=۰$$

و همچنین

$$(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})-\frac{۲۲}{۷} \simeq ۰$$

بخصوص اگر A و B نزدیك بهم باشند و هدف محاسبهٔ $\frac{۱}{A-B}$ باشد خطا می‌تواند فاحش باشد. مثلاً، با حساب ممیزسیار چهار رقمی،

$$C=\frac{۱}{(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})-\pi}$$

$$\simeq \frac{۱}{(۱/۴۱۴+۱/۷۳۲)-۳/۱۴۲}$$

$$=\frac{۱}{۰/۰۰۴}=۲۵۰$$

درصورتی که، اگر به‌جای اعداد موجود درکسر C تقریبهایی تا ۹ رقم اعشار قرار دهیم و جواب را تا چهار رقم گرد کنیم حاصل می‌شود $C=۲۱۴/۱$.

در حالت کلی باید، حتی‌المقدور، از تفریق اعداد تقریبی نزدیك به هم احترازکرد. اصولاً، با توجه به ارتباط بین تعداد ارقام با معنای درست و دقت یك تقریب، علت اصلی نادقیق بودن $a-b$ کم شدن تعداد ارقام بامعناست که باید احتراز شود. مثلاً، به‌جای محاسبهٔ $\sqrt{۲}-۱$ بهتر است $\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}$ را به دست آوریم، هرچند محاسبه آن مشکل تر است.

(مسائل انتهای این درس را ملاحظه کنید.)

ج ـ ضرب اعداد تقریبی

در مورد ضرب اعداد تقریبی قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲: اگر a و b تقریبهایی از A و B و این اعداد جملگی مثبت باشند، دراین صورت،

$$e(ab) \lesssim ae(b)+be(a)$$

$$\delta(ab) \lesssim \delta(a)+\delta(b)$$

($\lesssim$ یعنی تقریباً کوچکتر از)

برهان

با توجه به تعریف خطای مطلق داریم

$$e(ab)=|AB-ab|=|AB\underbrace{-aB+aB}_{\circ}-ab|$$

$$\leqslant B|A-a|+a|B-b|=Be(a)+ae(b)$$

اما داریم

$$B=b+\varepsilon_b$$

که در آن

$$|\varepsilon_b|=e(b)$$

در نتیجه

$$Be(a)=be(a)+\varepsilon_b e(a)$$

اما، $\varepsilon_b e(a)$ درمقایسه با $be(a)$ قابل اغماض است ومی‌توان نوشت

$$Be(a)\simeq be(a)$$

که در نتیجه حکم قضیه به دست می‌آید.

برای اثبات قسمت دوم قضیه، با توجه بـه تعریف خطای نسبی و قسمت اول قضیه، داریم

$$\delta(ab)\simeq\frac{e(ab)}{ab}\lesssim\frac{ae(b)+be(a)}{ab}$$

$$=\frac{e(b)}{b}+\frac{e(a)}{a}\simeq\delta(a)+\delta(b).$$

نتیجه ۲: قسمت اول قضیه ۲ نشان می‌دهدکه اگر a یا b بزرگ باشد خطای ab می‌تواند قابل توجه باشد. لذا، باید حتی‌المقدور از ضرب اعـداد تقریبی بزرگ احترازکـرد و درصورت اجبار دقت این اعداد را بـالا برد، مثلاً بـا دقت مضاعف کارکرد. قسمت دوم قضیه ۲ نیز نشان می‌دهدکه ab می‌تواند نادقیقتر از a و b باشد. مثال زیر نشان می‌دهدکه ضرب اعداد تقریبی گاهی‌اوقات مـا را به جوابهای غیر قابل قبول هدایت می‌کند!

مثال:

فرض کنید

$$I_n=\int_{\circ}^{\text{۱}}x^n e^{x-\text{۱}}dx\qquad(n\geqslant \text{۱})$$

به‌سادگی، به‌وسیلهٔ انتگرالگیری جزءبه‌جزء، ثابت می‌شودکه

$$(*)\quad I_n=\text{۱}-nI_{n-\text{۱}}\qquad(n\geqslant \text{۲})$$

ضمناً، با توجه به اینکه

$$\circ\leqslant x\leqslant \text{۱}$$

داریم

$$e^{-\text{۱}}\leqslant e^{x-\text{۱}}\leqslant e^{\circ}$$

و از اینجا

$$\frac{e^{-\text{۱}}}{n+\text{۱}}=e^{-\text{۱}}\int_{\circ}^{\text{۱}}x^n dx\leqslant I_n$$

$$\leqslant\int_{\circ}^{\text{۱}}x^n dx=\frac{\text{۱}}{n+\text{۱}}$$

پس، همواره $\circ<I_n$ و $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=\circ$

۱ حـال فرض‌کنید هدف تعیین $I_{\text{۹}}$ باشد. برای افرادی کـه کمتر بـه اشکالات محاسبات تقریبی واقف هستند طبیعی! بنظر مـی‌رسدکـه $I_{\text{۱}}$ را حساب‌کنیم و $I_{\text{۹}}$ را بـا استفاده از (*) به دست‌آوریم. نتیجه به قرار زیر است:

$$I_{\text{۱}}=\int_{\circ}^{\text{۱}}xe^{x-\text{۱}}dx=\text{۱}-\int_{\circ}^{\text{۱}}e^{x-\text{۱}}dx=e^{-\text{۱}}$$

حال اگر قرار دهیم

$$e^{-\text{۱}}\simeq \circ/\text{۳۶۷۸۷۹}$$

خواهیم داشت:

$$I_{\text{۲}}=\text{۱}-\text{۲}I_{\text{۱}}=\circ/\text{۲۶۴۲۴۲}\ (\text{۶}D)$$

$$I_{\text{۳}}=\text{۱}-\text{۳}I_{\text{۲}}=\circ/\text{۲۰۷۲۷۴}\ (\text{۶}D)$$

$$I_{\text{۴}}=\text{۱}-\text{۴}I_{\text{۳}}=\circ/\text{۱۷۰۹۰۴}$$

$$I_{\text{۵}}=\text{۱}-\text{۵}I_{\text{۴}}=\circ/\text{۱۴۵۴۸}$$

$$I_{\text{۶}}=\text{۱}-\text{۶}I_{\text{۵}}=\circ/\text{۱۲۷۱۲}$$

$$I_{\text{۷}}=\text{۱}-\text{۷}I_{\text{۶}}=\circ/\text{۱۱۰۱۶}$$

$$I_{\text{۸}}=\text{۱}-\text{۸}I_{\text{۷}}=\circ/\text{۱۱۸۷۲}$$

$$I_{\text{۹}}=\text{۱}-\text{۹}I_{\text{۸}}=-\circ/\text{۰۶۸۴۸}$$

با توجه به اینکه همواره $I_n>\circ$ بالبداهه جواب فوق غلط است. علت به دست‌آمدن این جواب چیست؟

ملاحظه می‌کنیدکه

$$I_{\text{۱}}\simeq\circ/\text{۳۶۷۸۷۹}$$

یعنی $I_{\text{۱}}$ خطایی حـدود $\text{۴}/\text{۴}\times\text{۱۰}^{-\text{۷}}$ دارد. خطای $I_{\text{۲}}$ دو برابر خطای $I_{\text{۱}}$، صرفنظر از علامت خطا، خطای $I_{\text{۳}}$ سه برابر خطای $I_{\text{۲}}$، و یا ۶ برابرخطای $I_{\text{۱}}$، است و... در نهایت خطای

$I_۹$ برابر خطای $I_۱$ ضربدر $۹!$ است و داریم

$$۴/۴\times ۱۰^{-۷}\times ۹!=۰/۱۵۹۶۶۷۲$$

ملاحظه می‌کنید که خطای اولیه $۴/۴\times ۱۰^{-۷}$ منجر به خطای نهائی حدود ۰/۱۶ شده است. اصطلاحاً گفته می‌شود که روش فوق برای تعیین $I_۹$ ناپایدار است.

لذا، باید $I_۹$ را به طریقی دیگر محاسبه کرد. یکی از روشهای محاسبهٔ $I_۹$ آن است که رابطهٔ (*) را به صورت زیر بنویسیم

$$I_{n-۱}=\frac{۱-I_n}{n} \qquad ,n\geqslant ۲$$

و با قرار دادن، مثلاً، $I_{۱۶}=۰$ به ترتیب $I_{۱۵}$، $I_{۱۴}$، ...، $I_۹$ را حساب کنیم. در این صورت

$$I_{۱۵}=\frac{۱}{۱۶}=۰/۰۶۲۵$$

$$I_{۱۴}=\frac{۱-I_{۱۵}}{۱۵}=۰/۰۶۲۵$$

$$I_{۱۳}=\frac{۱-I_{۱۴}}{۱۴}=۰/۰۶۶۹۶۴۳\ (۶D)$$

$$I_{۱۲}=۰/۰۷۱۷۷۲۰\ (۶D)$$

و

$$I_{۱۱}=۰/۰۷۷۳۵۲۳\ (۶D)$$

و

$$I_{۱۰}=۰/۰۸۳۸۷۷۱\ (۶D)$$

و

$$I_۹=۰/۰۹۱۶۱۲۳\ (۶D)$$

اینك خطای این مقدارمحاسبه شده برای $I_۹$ را، به‌طور تقریبی، حساب می‌کنیم. می‌دانیم که $I_{۱۶}<\frac{۱}{۱۷}$. لذا، با قرار دادن $I_{۱۶}=۰$ خطایی به اندازهٔ ε مرتکب شده‌ایم که $\varepsilon<\frac{۱}{۱۷}$. اما، در محاسبهٔ $I_{۱۵}$ این خطا بر ۱۶ تقسیم می‌شود بعد بر ۱۵ تقسیم می‌شود و ... و در نهایت بر ۱۵ تقسیم می‌شود. بنابراین، خطای $I_۹$، که به طریق فوق به دست آمد، کمتر از

$$\frac{۱}{۱۰\times ۱۱\times \cdots \times ۱۷}\simeq ۱/۰۲\times ۱۰^{-۹}$$

است. پس تمام ارقام ۰/۰۹۱۶۱۲۳ درست هستند!

د ـ تقسیم اعداد تقریبی

خطای تقسیم اعداد تقریبی تقریباً همانندضرب اعداد تقریبی است و تعیین آن در مسائل آخر این درس گنجانده شده است.

مسائل

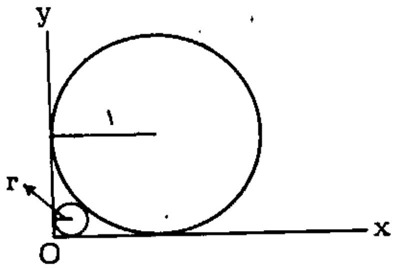
۱ـ اگر

$$A=a+\varepsilon_a \quad و \quad B=b+\varepsilon_b$$

ثابت کنید

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right)\lesssim\left|\frac{\varepsilon_a}{a}-\frac{\varepsilon_b}{b}\right|$$

۲ـ دایره‌ای داریم به شعاع واحد که برمحور xها و محور yها مماس است بین این دایره و محورها دایره‌ای به شعاع r



قرار دارد که بر دایره بزرگتر، محور xها و محور yهامماس است:

الف ـ ثابت کنید

$$r=\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}+۱}$$

ب ـ نشان دهید که حجم کره به شعاع r برابر است با

$$V=\frac{۴\pi}{۳}\left(\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}+۱}\right)^۳=\frac{۴\pi}{۳}(\sqrt{۲}-۱)^۶$$

$$=\frac{۴\pi}{۳(\sqrt{۲}+۱)^۶}=\frac{۴\pi}{۳(۹۹+۷۰\sqrt{۲})}$$

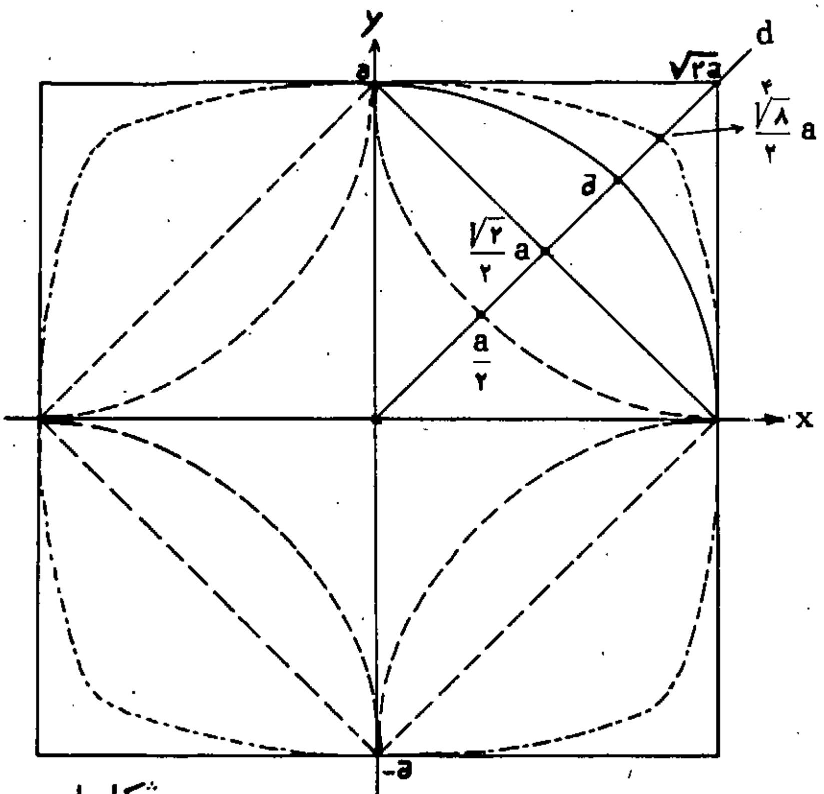
ج ـ با فرض

$$\pi=۳/۱۴۲(۴D) \quad و \quad \sqrt{۲}=۱/۴۱۴(۴D)$$

مطلوبست محاسبهٔ چهار مقدار مندرج درقسمت (ب). کدام‌یك از اعدادی که به دست می‌آید به مقدار واقعی حجم کرهٔ مورد نظر نزدیکتر است؟ چرا؟

$\frac{r}{2}$— دایره‌ها* و $\frac{r}{2}$— کره‌ها**

مبحث: هندسه دیفرانسیل مقدماتی



شکل ۱

مهدی نجفی‌خواه
دانشجوی ریاضی دانشگاه علم وصنعت ایران

ذیلاً به شرح دو دستهٔ مهم از منحنی‌ها و سطوح تحت عنوان $\frac{r}{2}$— دایره‌ها و $\frac{r}{2}$— کره‌ها می‌پردازیم. دلیل انتخاب این اسم این بوده است که همانطور که مشاهده خواهید کرد برای $r=2$، ۱— دایره و ۱— کره حاصل میشود که درست همان دایره و کرهٔ معمولی هستند.

تعریف ($\frac{r}{2}$— دایره). به منحنی C که در صفحهٔ دکارتی به صورت:

$$C:\ |x|^r+|y|^r=a^r$$

و درصفحهٔ قطبی

$$C:\ p(\theta)=a\sqrt{\cos^{\frac{4}{r}}\theta+\sin^{\frac{4}{r}}\theta}$$

تعریف شده درصورتی یک $\frac{r}{2}$— دایره می‌گوئیم که: a ،$r\in R^+$

تعریف ($\frac{r}{2}$— کره) به رویهٔ C تعریف شده بصورت

$$C:\ |x|^r+|y|^r+|z|^r=a^r$$

یک $\frac{r}{2}$— کره گوئیم اگر a ،$r\in R^+$

---

* $\frac{r}{2}$ — Circles

** $\frac{r}{2}$ — Spheres

$\frac{r}{2}$ — دایره‌ها: چون x و y بصورت قدر مطلق ظاهر شده‌اند، $\frac{r}{2}$ — دایره‌ها نسبت به مبدأ متقارن هستند درصورتی که شاخه سمت راست خط $x=y$ را d بنامیم ملاحظه میشود که مقطع این نیم خط d با $\frac{r}{2}$ — دایره C چنین است:

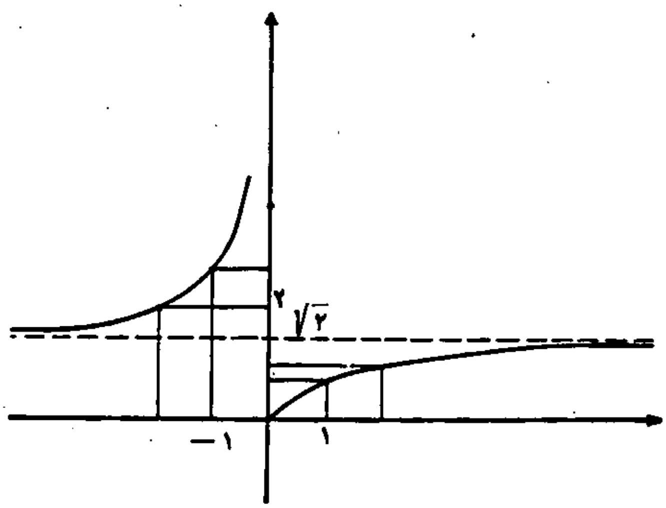
$$\left|\begin{array}{l}|x|^r+|y|^r=a^r\\ \\ y=x\ ,\ x\geqslant 0\end{array}\right. \longrightarrow x=y=2^{-\frac{1}{r}}a$$

حال اگر فاصلهٔ این نقطه را از مبدأ تعیین کنیم

$$d_{(r)}=\sqrt{(2^{\frac{-1}{r}}a)^2+(2^{\frac{-1}{r}}a)^2}=a\cdot 2^{\frac{1}{2}(1-\frac{2}{r})}$$

به $d_{(r)}=a\cdot 2^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}$ فاصله مشخصه $\frac{r}{2}$ — دایره C می‌گوئیم.

حال بسته به مقدار r داریم:



شکل ۲

شکل ۲ اذعان می‌دارد که اگر

۱. $r\in(0\ ,\ 2)\rightarrow d<a$

۲. $r=2\rightarrow d=a$

۳. $r\in(2\ ,\ +\infty)\rightarrow d>a$

و همچنین

۴. $\lim\limits_{r\rightarrow 0^+} d(r)=0$ ۵. $\lim\limits_{r\rightarrow +\infty} d(r)=\sqrt{2}a$

تعابیر ۱ تا ۵ چنین است:

۱— در صورتیکه $r\in(0\ ,\ 2)$، $\frac{r}{2}$ — دایره در دایره‌ای به شعاع a و مرکز در مبدأ می‌گنجد.

۲— در صورتی که $r=2$، $\frac{r}{2}$ — دایره یك دایره به شعاع a و مرکز در مبدأ است.

۳— درصورتیکه $r\in(2\ ,\ +\infty)$، $\frac{r}{2}$ — دایره مذکور یك دایره به شعاع a و مرکز مبدأ را در بردارد.

۴— اگر r را به صفر میل دهیم، منحنی C به دوخط متقاطع ذیل مبدل می‌شود (درحد):

$$d_1: x=0\ ,\ -a\leqslant y\leqslant a \qquad d_2: y=0\ ,\ -a\leqslant x\leqslant a$$

۵— اگر r را به بی‌نهایت‌میل دهیم، d به $r=a$ می‌رسد (در حد) و منحنی C به‌صورت یك مربع ظاهر می‌شود.

$$e:\ \begin{array}{l}x=\pm a\ ,\ -a\leqslant y\leqslant a\\ \\ y=\pm a\ ,\ -a\leqslant x\leqslant a\end{array}$$

نمونه‌هایی از این نوع منحنی‌ها در شکل ۱ آورده شده است.*

$\frac{r}{2}$ — کره‌ها: دراینجا بحث همان است‌که در $\frac{r}{2}$ — دایره‌ها آمد. محور d را خطی می‌گیریم که از وسط یك‌هشتم اول گذرمی‌کند $d: x=y=z$

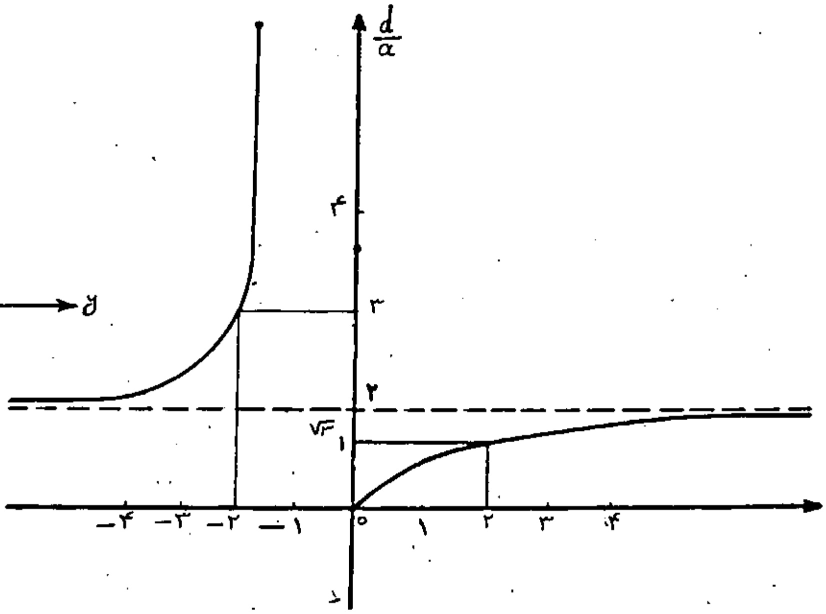
حال $d(r)$ را (فاصله میان مبدأ تا مقطع d و $\frac{r}{2}$ — کره) تعریف می‌کنیم

$$M\left\{\begin{array}{l}|x|^r+|y|^r+|z|^r=a^r\\ \\ x=y=z\end{array}\right. \longrightarrow M: x=y=z=3^{-\frac{1}{r}}a$$

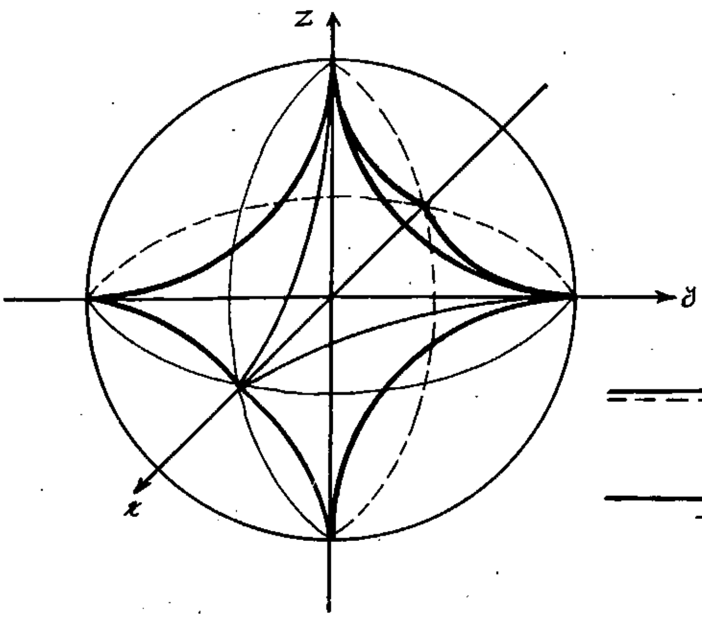
$$d(r)=\overline{MO}=\sqrt{3^{-2/r}a^2+3^{-2/r}a^2+3^{-2/r}a^2}$$

$$=a\cdot 3^{\frac{1}{2}(1-\frac{2}{r})}=a\cdot 3^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}$$

* اگر قیود $r\in R^+$ را در تعریف با $r\neq 0$ عوض کنیم به تعمیمی ازاین منحنی‌ها می‌رسیم. اگر $r<0$ آنگاه $d>r=a$ ولذا یك مربع به ضلع $2a$ و بمرکز مبدأ درمنحنی C می‌گنجد و اگر $r\rightarrow -\infty$ آنگاه خطوط $x=y$ و $y=-x$ مجانبهای C خواهند شد. به‌همین دلیل است‌که ما با آوردن قید $r\in R^+$ این دسته را از مطالعه خارج کرده‌ایم وآنهایی را گزینش‌کرده‌ایم که در مربعی بضلع $2a$ ومرکز مبدأ می‌گنجند.



شکل ۳



در اینجا نسبت بسته به r:

۱ـ اگر $r\in(0\ ,\ 2)$ آنگـاه $d<a$ و این یعنی رویهٔ موردنظر بطـور کامل در کره‌ای به مرکز درمبدأ وشعاع a قرارمی‌گیرد.

۲ـ اگر $r=2$، رویهٔ مذکور به یك کره به‌شعاع a ومرکز درمبدأ مبدل می‌شود.

۳ـ اگر $r\in(2\ ,\ +\infty)$، آنگاه $\frac{r}{2}$ — کره موردنظر چنان است که یك کره به شعاع a ومرکز درمبدأ درآن می‌گنجد.

۴ـ اگر $r\to 0^+$، آنگاه $\frac{r}{2}$ — کره به سه صفحه متعامد به‌این شرح مبدل می‌شود.

$$\begin{cases} P_1:\ x=0 \quad |y|\ ,\ |z|\leqslant a \\ P_2:\ y=0 \quad |x|\ ,\ |z|\leqslant a \\ P_3:\ z=0 \quad |x|\ ,\ |y|\leqslant a \end{cases}$$

۵ـ اگر $r\to+\infty$، آنگاه $\frac{r}{2}$ — کره به یك مکعب به ضلع $2a$ ومرکز درمبدأ مبدل می‌گردد:

$$P_{1\ ,\ 2}:\ x=\pm a \quad |y|\ ,\ |z|\leqslant a$$
$$P_{3\ ,\ 4}:\ y=\pm a \quad |x|\ ,\ |z|\leqslant a$$
$$P_{5\ ,\ 6}:\ z=\pm a \quad |x|\ ,\ |y|\leqslant a$$

جالب توجه اینجاست که اگر $r=1$، یـك هشت‌وجهی حاصل می‌گردد:

سطح هشت وجهی:

$$\begin{cases} P_1:\ x+y+z=a \\ P_2:\ x+y-z=a \\ P_3:\ x-y+z=a \\ P_4:\ x-y-z=a \\ P_5:\ -x+y+z=a \\ P_6:\ -x+y-z=a \\ P_7:\ -x-y+z=a \\ P_8:\ -x-y-z=a \end{cases}$$

درشکل ۴ یك $\frac{r}{2}$ — کره نمایش داده شده.

اسامی خوانندگانی که حل مسائل شماره ۲۳ را فرستاده اند

تنظیم از:

ابراهیم دارایی

آقای بهروزجوهری دبیر دبیرستان اهواز
۱-۲-۳-۴-۷-۸-۱۱-۱۳-
خانم آرزو حبیب‌زاده دانش‌آموز ازتبریز ۱-۱۱-۱۴-
آقای پیام ناصر طیوب دانش‌آموزازشیراز
۱-۲-۵-۱۰-۱۴-۱۹
آقای بهرام برنا ازپولادشهر اصفهان ۱۹
خانم هما راسعی دانش‌آموز ازمشهد ۲-۵-۶-۱۰-۱۹
آقای حمید زارع دانش‌آموز
۱-۲-۳-۴-۸-۱۱-۱۴-۱۹
خانم فرشته دادالی دانش‌آموز ۱-۸-۱۹
آقای امیرعطا صهبایی ۲-۱۰-۱۱-۱۴-۱۵-۱۹
آقای داریوش سعیدکیا دانش‌آموز
۱-۲-۱۰-۱۴-۱۶-۲۰
آقایان کورش بهاری، محمد اسفندیار ازفریدونکنار
۱-۹-۱۰-۱۴-۲۰
آقای فرشید نوربخش دانش‌آموز ازمشهد،
۱-۱۴-۱۶-۱۷-
آقای محمدمهدی امینی دانش‌آموز ازقرچك ورامین
۷-۱۱-۱۷-۱۹
آقایان بهرام پیری وافشین خاشعی دانش‌آموز ازتهران
۱-۲-۳-۴-۵-۶-۷
۹-۱۱-۱۲-۱۳-۱۴-۱۶-۱۸
آقای وحید آقایانی دانش‌آموز ازکرج ۸-۱۱-۱۴

خانم پوپك اعرابی دانش‌آموز از زنجان ۲-۳
آقای بهزاد مهرانفر دانش‌آموز ازمشهد، ۱۴
آقای رسول طارمی دانش‌آموز ازقزوین ۱-۲ - ۱۱
آقای آرتا - آریا یاد دانش‌آموز از رشت
۱-۳-۶-۱۰-۱۱-۱۹
۸-
آقای رضا برهمندپور دانش‌آموز از کرج
۲-۸-۱۰-۱۱-۱۶-۱۹
آقای محمدرضا شجاع دانش‌آموز ازتهران ۲-
آقای آرش جعفری باستانی دانش‌آموز ازکرج ۱-۲
آقای مهدی همتی دانشجو ازتبریز ۲-۸
آقای حسین پیرهمادی دانش‌آموز ازتهران ۳-۱۰
آقای اتابك اتابكی دانش‌آموز ازتهران ۸-۱۱-
آقای حمیدرضا ابراهیمی دانش‌آموز ازشیراز
۱-۳-۷-۱۱-۱۷
آقای سعید مقصودی دانش‌آموز ازاصفهان ۱-۲-
آقای علی فخری، دبیر ریاضی ازتبریز
۱-۲-۳-۴-۵-۸-۹-۱۰-۱۱-۱۲-۱۳-۱۴-۱۵
آقای امیرحسین صبوری دانش‌آموز چهارم ازمشهد
۱-۲-۱۰-۱۹
خانم نادیا حبیبر اروجان دیپلمه ازتهران ۱-۷-۸
آقای حمیدرضا کدخدایی دانشجو ازتهران ۱
آقای سیروس زمانی دانش‌آموز ازشیراز ۱-۲
آقای تورج خرمی تاج، دانشجو ازتهران
۱-۲-۸-۹-۱۱-۱۳-۱۴-
۱۷-۱۸-۲۰
آقای داریوش هایزاده دانشجو ازتهران
۱-۲-۱۰-۱۷-۲۰
آقای محمد رضا نوری دانش آموز
۱-۲-۷-۱۰-۱۱-۱۷-۱۹
آقای ابراهیم آشوری دانش‌آموز از اراك ۱
آقای مصطفی ابراهیمی دانش‌آموز از اصفهان ۱-۸-۱۷
آقای غلامرضا پیرهادی دانش‌آموز از تهران ۲-۱۹
آقای محسن بهپور دانش‌آموز از بندر انزلی
۷-۱۱-۱۷-۱۹

محاسبهٔ سری $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$

نوشتهٔ نیکولاشی
ترجمهٔ مرتضی صفرعلی
دانشجوی ریاضی دانشگاه تهران

۱ـ مقدمه: منحنی $y=1/x^2$ را برای $x\geqslant 1$ درنظر بگیرید. طول آن نامعین است ولی مساحت محدود به منحنی، محور xها وخط $x=1$ برابراست با:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty=1$$

حال منحنی $y=1/x$ را برای $x\geqslant 1$ درنظر بگیرید. مساحت محدود به‌این منحنی، محور xها وخط $x=1$ نامعین است، در حالیکه وقتی این ناحیه حول محور xها می‌چرخد، حجم ایجاد شده مقداری معین است و داریم:

$$\text{مساحت}=\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx=\left[\ln x\right]_1^\infty=\infty$$

$$\text{حجم}=\pi\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx=\pi$$

این حقایق در ابتدا مقداری شگفت‌انگیز جلوه می‌کنند، آنها از ابعاد مختلف طول، سطح وحجم نشأت می‌گیرند.

این نتایج را برای منحنی $y=1/x$ می‌توانیم تأیید کنیم اگر سطح را بوسیلهٔ مستطیلهائی مانند شکل ۱ وحجم را بوسیلهٔ استوانه‌هایی مانند شکل ۲ تخمین بزنیم. خواهیم دید که:

$$\text{مساحت}>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdot$$

$$\text{حجم}<\pi\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdot\right)$$

سری $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdot$ همگرا نیست. این رامی‌توان بوسیلهٔ بحث دربارهٔ اولین جمله، سپس دوتای نزدیک به‌یکدیگر بعدی، سپس چهارتای نزدیک بهم بعدی وهمینطور الی آخر مشاهده کرد. یعنی:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2},$$

والی‌آخر، خواهیم دید که:

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdot+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots\cdot+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$\geqslant\frac{n}{2}\searrow\infty$$

بنابراین مقدار سری فوق بینهایت است. ازطرف دیگر برای سری مربعات داریم:

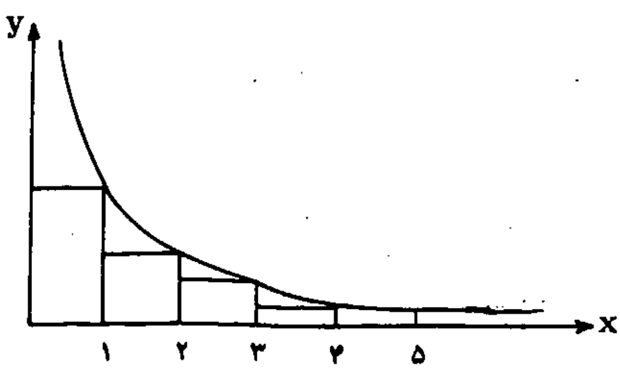
$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}<\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}=\frac{4}{4^2}=\frac{1}{4}$$

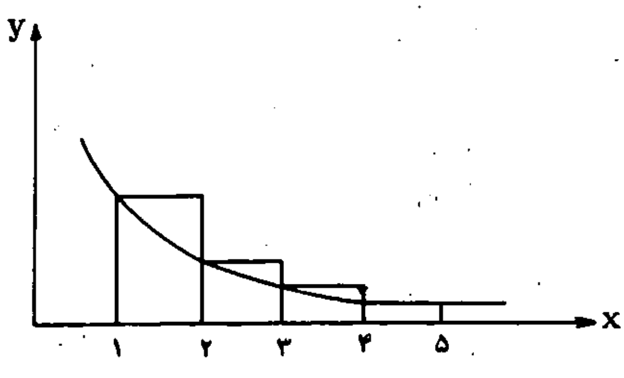
$$\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{10^2}+\cdots\cdot+\frac{1}{15^2}<8\times\frac{1}{8^2}=\frac{1}{8}$$

وهمینطور الی‌آخر، بنابراین:

$$\frac{1}{1^2}+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\cdots\cdot+\frac{1}{7^2}\right)+\left(\frac{1}{8^2}\right.$$



شکل ۱



شکل ۲

$$+\dots+\frac{1}{15^2}\Big)+\dots<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$$

و این یك سری هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{2}$ و دارای مقدار $2=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ می‌باشد. بنابراین سری مربعات همگراست. یك سؤال طبیعی که بوجود می‌آید اینست که این مجموع چیست؟

من باید کوشش خود را دربدست‌آوردن این‌جمع شرح دهم. اولین دلیل برای نقطهٔ شروع من بوسیلهٔ لئونارداویلر، ریاضیدان سوئیسی قرن هجدهم بدست‌آمد. اویلر روش کارهایش را توضیح نداده و من نتوانستم بفهمم چگونه این فرمول بدست می‌آید.

۲ـ روش اویلر: چندجمله‌ای $a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ را از درجهٔ n با $a_0\neq 0$ در نظر بگیرید که دارای ریشه‌های $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ است مجموع معکوس ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha_1}+\dots+\frac{1}{\alpha_n}=\frac{-a_1}{a_0}$ می‌باشد.

اویلر بیان کرد که، اگر ریشه‌های یك چندجمله‌ای نامعین یا سری توانی $a_0+a_1x_1+a_2x^2+\dots$ با $a_0\neq 0$ را بوسیلهٔ α_1 و α_2 و ... مشخص کنیم داریم $\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\dots=-\frac{a_1}{a_0}$

اگرچه هنوز واضح نیست که این رابطه را چگونه می‌توان برای سریهای توانی توجیه کرد. حالا

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$$

را درنظر بگیرید، این رابطه به‌ازای $x=0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\dots$ صفراست.

بنابراین:

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\dots=0$$

وقتی که $x=\pm\pi,\ \pm 2\pi,\dots$. اگر قرار دهیم $y=x^2$ خواهیم داشت:

$$1-\frac{y}{3!}+\frac{y^2}{5!}-\dots=0$$

وقتی که $y=\pi^2,\ (2\pi)^2,\dots$. بنابراین، بزطبق نظریهٔ اویلر،

$$\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{(2\pi)^2}+\frac{1}{(3\pi)^2}+\dots=-\frac{-\frac{1}{3!}}{1}=\frac{1}{6},$$

و ازاینجا،

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots=\frac{\pi^2}{6}$$

۳ـ سطحهای لگاریتمی:

وقتی برسریهای لگاریتمی همت گماشتم موفق‌تر بودم و دو روش برای محاسبهٔ مجموع سریها پیدا کردم. اول،

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2\left(x+\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{5}+\dots\right)$$

اگر x را با $e^{i\theta}$ عوض کنیم، داریم:

$$\ln\frac{e^{-\frac{1}{2}i\theta}+e^{\frac{1}{2}i\theta}}{e^{-\frac{1}{2}i\theta}-e^{\frac{1}{2}i\theta}}=2\left(e^{i\theta}+\frac{e^{3i\theta}}{2}+\frac{e^{5i\theta}}{5}+\dots\right),$$

$$\ln\frac{2\cos\frac{1}{2}\theta}{-2i\sin\frac{1}{2}\theta}=2\left(e^{i\theta}+\frac{e^{3i\theta}}{3}+\frac{e^{5i\theta}}{5}+\dots\right)$$

$$\ln i+\ln\cot\frac{1}{2}\theta=2\left(e^{i\theta}+\frac{e^{3i\theta}}{3}+\frac{e^{5i\theta}}{5}+\dots\right).$$

قرارمی‌دهیم $\ln i=a+ib$ با a و b حقیقی، داریم:

$i=e^a e^{ib}=e^a(\cos b+i\sin b)$.

بنابراین $a=0$ و $b=\frac{1}{2}\pi$، پس، $\ln i=\frac{1}{2}i\pi$. بنابراین اگر قسمتهای موهومی را برابر قرار دهیم، بدست می‌آوریم:

$$\frac{1}{2}\pi=2\left(\sin\theta+\frac{\sin 3\theta}{3}+\frac{\sin 5\theta}{5}+\dots\right),$$

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\pi\,d\theta=2\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}\left(\sin\theta+\frac{\sin 3\theta}{3}+\frac{\sin 5\theta}{5}+\dots\right)d\theta,$$

$$\frac{1}{2}\pi\Big[\theta\Big]_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}=2\Big[-\cos\theta-\frac{\cos 3\theta}{3^2}-\frac{\cos 5\theta}{5^2}-\dots\Big]_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi},$$

$$\frac{1}{2}\pi\left(\pi-\frac{1}{2}\pi\right)=2\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots\right],$$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots=\frac{\pi^2}{8},$$

وازطرفی داریم:

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots=$$

$$=\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\dots\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots\right)-\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots\right)$$

$$=\frac{۳}{۴}\left(\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۴^۲}+\cdots\right).$$

بنا براین:
$$\frac{۳}{۴}\left(\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۴^۲}+\cdots\right)=\frac{\pi^۲}{۸}$$

واز اینجا،
$$\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۴^۲}+\cdots=\frac{\pi^۲}{۶}$$

که همان جواب اویلرمی‌باشد.

اصلاح بعدی من ازاین روش نتیجه مستقیم‌تری بدست می‌دهدکه در زیرمی‌آید:

$$\ln(۱+e^{i\theta})=e^{i\theta}-\frac{e^{۲i\theta}}{۲}+\frac{e^{۳i\theta}}{۳}-\cdots,$$

$$\ln e^{\frac{۱}{۲}i\theta}\left(e^{\frac{۱}{۲}i\theta}+e^{-\frac{۱}{۲}i\theta}\right)=e^{i\theta}-\frac{e^{۲i\theta}}{۲}+\frac{e^{۳i\theta}}{۳}-\cdots,$$

$$\frac{۱}{۲}i\theta+\ln\left(۲\cos\frac{۱}{۲}\theta\right)=e^{i\theta}-\frac{e^{۲i\theta}}{۲}+\frac{e^{۳i\theta}}{۳}-\cdots,$$

بنا براین، با درنظرگرفتن قسمتهای موهومی داریم:

$$\frac{۱}{۲}\theta=\sin\theta-\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta+\frac{۱}{۳}\sin ۳\theta-\cdots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\theta\times\frac{۱}{۲}\theta\,d\theta-\int_{-\pi}^{\pi}\theta\left(\sin\theta-\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta+\frac{۱}{۳}\sin ۳\theta\cdots\right)d\theta$$

$$\left[\frac{۱}{۶}\theta^۳\right]_{-\pi}^{\pi}=\left[\theta\left(-\cos\theta+\frac{۱}{۲^۲}\cos ۲\theta-\frac{۱}{۳^۲}\cos ۳\theta+\cdots\right)\right]_{-\pi}^{\pi}-\left[-\cos\theta+\frac{۱}{۲^۲}\cos ۲\theta-\frac{۱}{۳^۲}\cos ۳\theta+\cdots\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\frac{۱}{۳}\pi^۳=۲\pi\left(\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\cdots\right),$$

$$\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\cdots=\frac{\pi^۲}{۶}$$

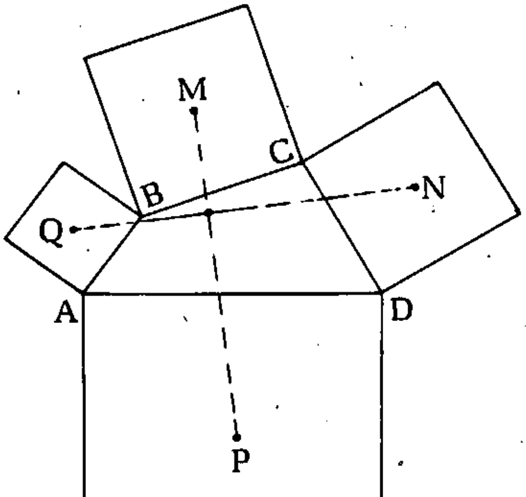
اثبات دو قضیه به روش برداری

ترجمه: محمود نصیری

اثبات‌هائی که برای دو قضیه ذیل ارائه می‌کنیم یك اثبات به کمك بردارها می‌باشد واین وقتی می‌تواند مفید باشد که زوایائی راکه به‌کار می‌بریم درحالتهای‌خاص ۹۰° یا ۶۰° باشد.

۱. قضیه چهارضلعی آبل. [۱]

برروی اضلاع چهارضلعی $ABCD$ مطابق شکل چهار مربع رسم می‌کنیم. اگر مرکزهای این مربعها M و N و P و Q باشند ثابت کنید، $MP=NQ$ و MP بر NQ عمود است.



شکل ۱

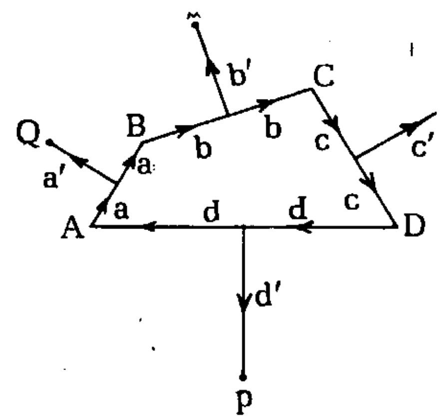
حل. برای هر بردار V درصفحه بردار V' را دوران یافته V به اندازه زاویه ۹۰° درجهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌نامیم. دراین‌صورت

$$(KV)'=KV' \text{ و } V''=-V \text{ و } (U+V)'=U'+V'$$

فرض کنیم $\overrightarrow{AB}=2a$، $\overrightarrow{BC}=2b$، $\overrightarrow{CD}=2c$ و $\overrightarrow{DA}=2d$. سپس

$$\overrightarrow{QN}=-a'+a+2b+c+c'$$

$$\overrightarrow{MP}=-b'+b+2c+d+d'$$



شکل ۲

چون $a+b+c+d=0=a'+b'+c'+d'$ داریم

$$(\overrightarrow{MP})'=(-b'+b+2c+d+d')'=$$
$$(-a-a'-2b'+c-c')'=-a'+a+2b+c'+c$$
$$=\overrightarrow{QN}$$

لذا $\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{MP}$ و $\overrightarrow{MP}$ بر $\overrightarrow{QN}$ عمود است.

۲. قضیه ناپلئون. [۲]

برروی هرضلع مثلث ABC، یک مثلث متساوی‌الاضلاع مطابق شکل می‌سازیم اگر P و Q و R مرکزهای این سه مثلث باشند ثابت کنید مثلث PQR متساوی‌الاضلاع است.

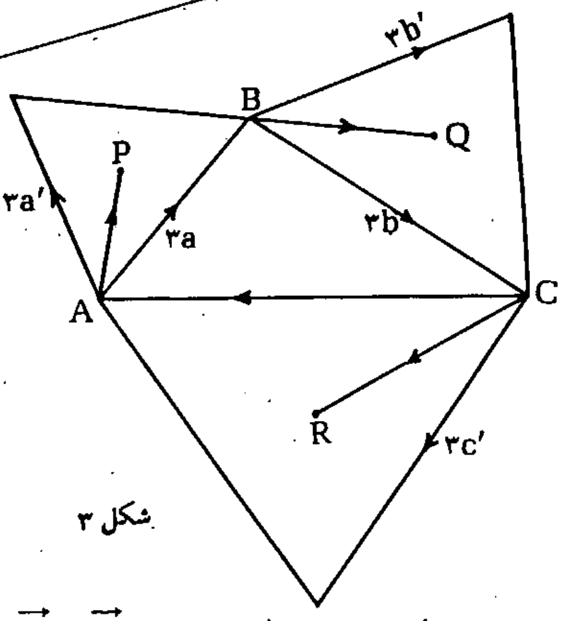
اثبات. برای‌هر بردار V درصفحه، بردار V' را دوران یافته بردار V به‌اندازه زاویه ۶۰° درخلاف جهت‌عقربه‌های ساعت‌می‌نامیم. لذا روابط ذیل را داریم؛

$$(KV)'=KV' \text{ و } (U+V)'=U'+V' \text{ و } V''=V'-V$$

فرض کنیم $\overrightarrow{AB}=3a$، $\overrightarrow{BC}=3b$ و $\overrightarrow{CA}=3c$.

سپس

$$\overrightarrow{AP}=a+a' \quad \text{و} \quad \overrightarrow{BQ}=b+b' \quad \overrightarrow{CR}=c+c'$$



شکل ۳

بنابراین

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ}=-a-a'+3a+b+b'$$
$$\text{و} \quad =2a-a'+b+b'$$

$$\overrightarrow{PR}=-a-a'-2c+c'$$

چون $a+b+c=0=a'+b'+c'$ داریم

$$(\overrightarrow{PR})'=(a-2a'+2b-b')'=a'-2a'+2a+2b'$$
$$-b'+b=-a'+2a+b'+b=\overrightarrow{PQ}$$

پس $\overrightarrow{PQ}$ دوران‌یافته $\overrightarrow{PR}$ به اندازه زاویه ۶۰° است و اثبات تمام است.

منبع؛

the mathematical gazette volume 71 1987

[۱] VON AUBE' S QUADRILATERAL

[۲] NAPOLEON' S THEOREM

مرجع.

AMERICAN MATHEMATICAL
MONTHLY Volume 21 1988/89 Number 2

مسائل چهل و نهمین مسابقه ریاضی پاتنام

ترجمه و تنظیم از: محمود نصیری

الف ـ مقدمه. در سال ۱۹۲۱ شخصی آمریکائی به نام ویلیام لوول پاتنام با الهام از مسابقه‌های ورزشی یك مسابقه علمی را با انتشار مقاله‌ای مطرح ساخت و پس از مرگ وی، همسرش برای عملی کردن فکر او در سال ۱۹۲۷ مبلغ ۱۲۵۰۰۰ دلار وقف کرد.

اولین مسابقهٔ ریاضی پاتنام در سال ۱۹۳۸ توسط دانشگاه هاروارد برگزار گردید که دربین تیم‌های شرکت‌کننده از دانشگاههای آمریکا و کانادا تیم دانشگاه تورنتو از کانادا برنده مسابقه بود. البته خود دانشگاه هاروارد به منظور رعایت بی‌طرفی دراین مسابقه شرکت نکرد.

این مسابقه تا سال ۱۹۴۳ ادامه یافت اما دراین سال به علت مشکلات زمان جنگ متوقف گردید و سپس درسال ۱۹۴۶ از سر گرفته شد که اکنون عمری پنجاه ساله دارد. تیمها و افراد شرکت‌کننده در این مسابقه از سوی دانشگاههای آمریکا وکانادا معرفی می‌شوند. هردانشگاه یا مؤسسه می‌تواند حداکثر سه نفر از دانشجویان دوره کارشناسی خود را در مسابقه شرکت دهد.

سؤالات مسابقه از زمان شروع تاکنون فراز و نشیب‌هائی داشته است که متأثر از تغییر برنامه‌های دبیرستانی ودانشگاهی بوده است.

تا مسابقه نهم محتوای اصلی سؤالات از حساب دیفرانسیل و انتگرال، هندسه‌های مقدماتی و تحلیلی، معادلات دیفرانسیل و مکانیك بوده است. از مسابقه نهم به بعد مکانیك از مسابقه حذف و مسائلی از جبر، آنالیز و توپولوژی جایگزین آن می‌شوند. و از مسابقه پانزدهم نظریه اعداد نیز به طورمستقل وارد می‌شود.

تعداد مسائل مسابقه‌های اول تا دهم از ۱۱ تا ۱۵ در نوسان بوده است و از مسابقه یازدهم تا بیست‌ودوم به تعداد ثابت ۱۴ باقی می‌ماند و از مسابقه بیست‌وسوم تاکنون تعداد سؤالات به ۱۲ عدد ثابت مانده است.

درحال‌حاضر به برندگان این مسابقه جوایزی به قرار زیر اعطا می‌شود. به تیمهای برنده مقامهای اول تا پنجم به ترتیب ۵۰۰۰، ۲۵۰۰، ۱۵۰۰، ۱۰۰۰ و ۵۰۰ دلارجایزه تعلق می‌گیرد. و به هریك از افراد تیم‌های اول تا پنجم به ترتیب جوایزی به ارزش ۲۵۰، ۲۰۰، ۱۵۰، ۱۰۰ و ۵۰ دلار داده می‌شود.

جامعه ریاضی آمریکا به شش نفر اول مسابقه بورس اعطا

مـی‌کند و هـریك از این افراد ۵۰۰ دلار نیز از بنیاد پاتنام دریافت می‌کنند.

به نفر اول مسابقه در دانشگاه هاروارد برای ادامه تحصیل بورس داده می‌شود.

در چهل‌وششمین مسابقه‌که در سال ۱۹۸۸ برگزار گردید ۲۷۵ مؤسسه شرکت داشته‌اندکه برنده اول مسابقه دانشگاه هاروارد بوده است.

در هیأت تحریریه مجله رشد تصمیم گرفته شدکه مسائل‌این مسابقه در مجله درج گردد. امیدواریم مورد استفاده علاقمندان و مشتاقان ریاضی قرار گیرد.

قبل‌از بیان صورت مسائل توجه خوانندگـان گرامی را به ذکر چند نکته جلب می‌کنم:

۱. بیش‌از نیمی از مسائـل این مسابقه از سطح بـرنامه دبیرستانی خارج است و لذا اگر دانش‌آموزان عزیز در حل آنها ماندند ناامید نشوندحتی بعضی‌ازآنها برای دانشجویان نیز ممکن است مشکل باشند.

۲. دراین شماره صورت مسائل را ذکر مـی‌کنیم و انشاالله در شماره بعد حل‌آنها را می‌آوریم.

۳. برای‌آنکه تعداد بیشتری از خوانندگان‌گرامی بتوانند مسائل را حل‌کنند در پایان صورت مسائل راهنمائی مختصری برای بعضی‌ازآنها بیان شده است.

ب ـ مسائل

A-۱. فـرض‌کنیم R ناحیه‌ای شامل نقاط (x, y) در صفحه مختصات دکارتی باشدکه در دو رابطه؛

$$|x|-|y| \leqslant 1 \quad \text{و} \quad |y| \leqslant 1$$

صدق‌کنند. نمودار R و مساحت‌آن را پیداکنید.

A-۲. این غیرعادی نیست‌که با محاسبات نادرست عقیده داشته باشیم‌کـه قضیه مشتق حاصلضرب دو تابع بـه صورت $(fg)'=f'g'$ است.

اگـر داشته باشیم $f(x)=e^{x^2}$، ثابت‌کنید، کـه بازه باز (a, b) و تابـع غیر صفر g کـــه روی (a, b) تعریف مـی‌شود وجود دارند به‌طوری‌کـه این قضیه نادرست مشتق حاصلضرب برای‌آن دربازهٔ (a, b) صحیح است.

A-۳. مجموعه‌اعداد حقیقی x را پیداکنیدکه به‌ازاء‌آنها

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\csc\frac{1}{n}-1\right)^x$$

همگرا باشد.

A-۴. (a) اگـر هر نقطه یك صفحه به یکی از سه رنگ متمایز باشد، آیا لازم است دونقطه بـا رنگ یکسان وجـود داشته بـاشندکـه دقیقاً به فاصله یك اینچ از هـم قرار داشته باشند؟

(b) اگـر بجای سه رنگ، نه رنگ داشته باشیم جـواب چگونه است؟

A-۵. ثابت‌کنید یك تابع منحصربفرد f از مجموعه R^+ (اعداد حقیقی مثبت) به R^+ وجود دارد به طوری‌که

$$f(f(x))=6x-f(x)$$

و به ازاء هر $x>0$، $f(x)>0$.

A-۶. اگـر تبدیل خطی A روی یك فضای بـرداری n بعدی شامل $n+1$ بردار ویژه، به طوری‌کـه هر nتای‌آنها مستقل خطی‌اند تعریف شده باشد،آیا این نتیجه می‌دهدکه A یك مضرب عددی تبدیل همانـی است؟ پاسخ خـود را ثابت کنید.

B-۱. یـك عـدد مـرکب (صحیح و مثبت) بـه صورت حاصلضرب ab است‌کـــه لازم نیست a و b در مجموعه $\{2, 3, 4, \dots\}$ اعداد صحیح، متمایز باشند. نشان دهید هـر عدد مـرکب، قابل نمایش به صورت $xy+xz+yz+1$ است،که درآن x و y و z اعداد صحیح و مثبت‌اند.

B-۲. ثابت یا ردکنید: اگر x و y اعداد حقیقی باشند، به‌طوری‌که $y \geqslant 0$ و

$$y(y+1) \leqslant (x+1)^2$$

آنگاه

$$y(y-1) \leqslant x^2$$

B-۳. برای هر n در مجموعه،

$$z^+=\{1, 2, \dots\}$$

از اعـداد صحیح مثبت، فـــرض‌کنیم r_n مقدار مینیمم $|y-x\sqrt{3}|$ بـرای تمـام اعـداد صحیح و نامنفی x و y باشدکه $x+y=n$.

برای هـر n در z^+، کـوچکترین عدد حقیقی g را پیدا کنید (با اثبات)که $r_n \leqslant g$.

B-۴. ثابت‌کنید اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یك سری همگرا از اعداد حقیقی مثبت باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{n}{n+1}}$ نیز چنین است.

B-۵. برای عدد صحیح و مثبت n، فرض‌کنیم M_n یك ماتریس متقارن چپ (ماتریس پاد متقارن) از مرتبه $(2n+1)(2n+1)$ باشد به‌طوری‌که هر درایه روی اولین n قطر فرعی‌که زیر قطر اصلی قرار دارند، برابر ۱ و بقیه درایه‌های زیر قطر اصلی برابر ۱− باشند. رتبه M_n را با اثبات پیداکنید. (طبق تعریف رتبه یك ماتریس بزرگترین مقدار k است به طوری‌که یك زیر ماتریس $k\times k$ وجود داشته باشدکه دترمینان آن مخالف صفر باشد).

در ذیل دو نمونه از ماتریس M_n نشان داده شده است.

$$M_1=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$M_2=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

B-۶. ثابت‌کنید تعداد نامتناهی زوجهای مرتب (a , b) از اعداد صحیح وجود دارد به طوری‌که برای هرعدد صحیح مثبت t عدد $at+b$ یك عدد مثلثی باشد، اگر و فقط اگر t یك عدد مثلثی باشد.

ج ـ راهنمائی بعضی‌از مسائل

مسأله A-۱ کاملاً مقدماتی و اکثر دانش‌آموزان می‌توانند به حل آن مبادرت کنند.

برای حل مسأله A-۲ ذکر این نکته لازم است‌که اگر $y=e^u$ آنگاه

$$\int\frac{du}{u}=\ln|u|+c \quad \text{و} \quad y'=u'e^u$$

مسأله A-۳ مقدماتی نبوده و برای حل‌آن می‌توان از بسط $\sin x$ و آزمون مقایسه استفاده‌کرد.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

مسأله A-۴ مقدماتی اما بیشتر جنبه هوشی دارد.

این مسأله مربوط به مقطع خاصی نیست.

برای مسأله A-۵ به ازاء هر $x>0$، دنباله a_n را به صورت

$$a_{n+1}=f(a_n) \quad \text{و} \quad a_0=x$$

تعریف‌کنید. $n=0, 1, 2, \dots$ و ثابت‌کنید $a_n=k2^n$ که k مقداری ثابت است. بنابراین

$$f(x)=2x$$

مسأله A-۶ مقدماتی نیست.

مسائل B-۱ و B-۲ مقدماتی و توصیه می‌شود دانش‌آموزان روی‌آنها فکرکنند.

در مسأله B-۳ باید توجه‌کردکه عدد $|y-x\sqrt{3}|$ دو برابر فاصله عمودی نقطه (x , y) از خط $y=\sqrt{3}x$ است.

مسأله B-۴ نیز مقدماتی نیست. فرض‌کنید

$$S=\{n:\ a_n^{\frac{n}{n+1}}<2a_n\}$$

اگر $n\notin S$ آنگاه

$$a_n^{\frac{n}{n+1}}\geqslant 2a_n$$

یا

$$a_n^{\frac{n}{n+1}}\leqslant\frac{1}{2^n}$$

مسأله B-۵ نیز مقدماتی نبوده و تا حدی مشکل است. در M_n، مجموع درایه‌های هرسطر(یا هرستون) برابر صفراست. بنابراین

$$\det M_n=|M_n|=0$$

و لذا رتبه M_n کوچکتر از $2n+1$ است.

فرض‌کنید S ماتریسی باشدکه از حذف سطر iام و ستون iام ماتریس M_n به دست می‌آید. سپس ثابت‌کنید دترمینان S مخالف صفر و لذا رتبه M_n برابر $2n$ است.

مسأله B-۶ مقدماتی است. مجموعه زوجهای $\left((2m+1)^2 ,\ \frac{m(m+1)}{2}\right)$ به ازاء $m=1, 2, \dots$ دارای خواص مورد نظر می‌باشد.

مسائل شماره ۲۷

محمود نصیری

۱. مجموعه $\{۱۵ , \dots , ۳ , ۲ , ۱\}$ را به سه مجموعه ۵ عضوی جدا از هم طوری تقسیم کنید که مجموع اعضای مجموعه‌ها باهم برابر باشند.

همچنین مجموعه $\{۸۱ , \dots , ۳ , ۲ , ۱\}$ را به نه مجموعه ۹ عضوی جدا از هم به گونه‌ای تقسیم کنید که مجموع اعضای همه مجموعه‌ها باهم برابر باشند.

با الهام از مسأله المپیاد ریاضی ۸۹.

فرستند میتراطبائی دبیرستان فرزانگان تهران.

۲. فرض کنیم $a \geqslant ۱$ و m و n دو عدد صحیح مثبت متمایز باشند. ثابت کنید؛

$$\left(a^{۲^m}+۱ \quad \text{و} \quad a^{۲^n}+۱\right)=\begin{cases} ۱ & ۲ \mid a \\ ۲ & ۲ \nmid a \end{cases}$$

۳. اگر n عدد، صحیح مثبت بزرگتر از ۱ باشد، و فرض کنیم

$$M_n=\operatorname{Min}\sum_{i=۱}^{n} a_i$$

که $a_۱$ ، $a_۲$ ، ... ، a_n اعداد حقیقی نامنفی می‌باشد که درشرط

$$\sum_{i=۱}^{n} a_i a_{i+۱}=۱ \qquad (a_{n+۱}=a_۱)$$

صدق می‌کنند. ثابت کنید $M_۲=\sqrt{۲}$ و $N_۳=\sqrt{۳}$

و به ازاء هر $n \geqslant ۴$ ، $M_n=۲$.

۴. گروه G را دوری گوئیم درصورتی که عضوی از G مانند a باشد به‌طوری که $G=\{a^n | n \in z\}$

الف ـ ثابت کنید Z یک گروه دوری است.

ب ـ اگر G متناهی باشد چند مولد می‌تواند داشته باشد؟

ج ـ اگر G نامتناهی باشد چند مولد می‌تواند داشته باشد؟

۵. اگر تابع f درفاصله بسته $[a , b]$ یک‌به‌یک و پیوسته باشد ثابت کنید f دراین فاصله اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

۶. اگر تابع f به ازای هر x از R پیوسته و متناوب با کوچکترین دورهٔ تناوب T باشد ثابت کنید

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_۰^{T} f(x)dx$$

که در آن a عدد حقیقی دلخواهی است.

۷. می‌دانیم اگر n عددی طبیعی باشد عدد

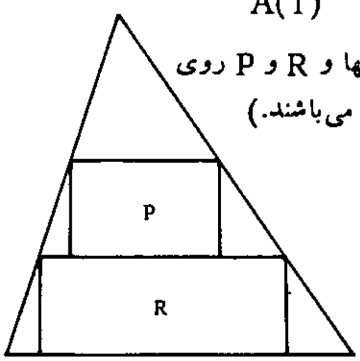
$$\sum_{i=۱}^{n} i=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

را عدد مثلثی می‌نامند. ثابت کنید؛ عدد

$$A=\left(\frac{۱}{۸}\right)n(n+۱)(n+۲)(n+۳)$$

یک عدد مثلثی است.

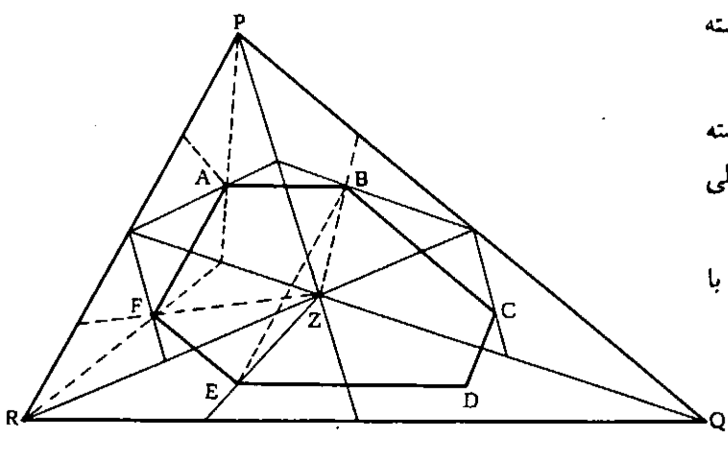
۸. فرض کنیم T یک مثلث با زوایای حاده باشد. دو مستطیل R و P را مطابق شکل در آن محاط کرده‌ایم. فرض کنیم مساحت هر چند ضلعی X را با $A(X)$ نشان دهیم. دراین صورت ماکزیمم $\dfrac{A(R)+A(P)}{A(T)}$ را پیدا کنید (که T روی دامنه همه مثلثها و R و P روی دامنه تمام مستطیل‌های فوق می‌باشند.)



۹. اگر a و b و c اضلاع و S مساحت مثلث ABC و p، q، r اعداد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید:

$$\frac{p}{q+r}a^۲+\frac{q}{r+p}b^۲+\frac{r}{p+q}c^۲ \geqslant ۲S\sqrt{۳}$$

۱۰. در مثلث PQR، سه میانه را رسم می‌کنیم مثلث به شش زیر مثلث معادل تقسیم می‌شود اگر مرکز ثقل‌های این مثلث‌ها را به ترتیب A، B، C، D، E و F بنامیم، ثابت کنید مساحت شش ضلعی $ABCDEF$ برابر $\frac{۱۳}{۳۶}$ مساحت مثلث ABC و محیط آن نصف محیط مثلث ABC است.



مسابقه ریاضی
دانشجویان کشور - اسفند ٦٨ - دانشگاه اصفهان

دکتر زاهد زاهدانی

سؤالات معلومات عمومی ریاضی

مدت ۱ ساعت

۱- مجموعهٔ n عضوی S مفروض است. خانوادهٔ

$$\mathcal{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$$

شامل n زیر مجموعهٔ متمایز از S را درنظر می‌گیریم. نشان دهیدکه یك عضو x از S وجود دارد به طوری‌که مجموعه‌های

$$A_1\cup\{x\}, A_2\cup\{x\}, \cdots, A_n\cup\{x\}$$

متمایز باشند.

۱۵ امتیاز

۲- یك مؤسسه انتشاراتی تصمیم دارد۱۳۶۹عنوان ازکتابهای منتشرهٔ خود را به‌نمایش بگذارد. ترتیب نمایش‌چنین است که هرروز صد عنوان روی میز قرار می‌گیرد و هیچ دو عنوانی بیش‌از یکبار روی میز قرار نخواهدگرفت. حداکثر روزهای ممکن نمایش را معین کنید.

۱۵ امتیاز

۳- تمام اعداد حقیقی غیر صفر $a_1, a_2, \cdots, a_n$ را بیابید به‌طوری‌که

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^m=\sum_{i=1}^{n} a_i \quad و \quad m=1, 2, \cdots, n+1.$$

۲۰ امتیاز

سؤالات جبر

مدت ۲ ساعت

۱- ثابت‌کنید هرگاه G یك p- گروه متناهی (p عدداول) باشدآنگاه $G'\neq G$، که درآن G' زیرگروه جابجاگر G است.

۲- فرض می‌کنیم G یك‌گروه متناهی و K زیرگروه نرمالی از G ازمرتبهٔ p باشدکه درآن p کوچکترین عدد اولی است‌که $|G|$ را عاد می‌کند. ثابت‌کنیدکه K زیرگروه $Z(G)$ است،که درآن $Z(G)$ مرکز گروه است.

۳- مثالی از یك حلقه R ارائه دهیدکه دارای دو عضو باشد بقسمی‌که این دو عضو در حلقهٔ R بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك داشته باشند ولی کوچکترین مضرب مشترك نداشته باشند.

۴- ثابت‌کنید هرگاه F یك میدان و n عدد صحیح بزرگتر از یك باشدآنگاه $x^ny+x^{n-1}+1$ در $F[x, y]$ تحویل ناپذیر است. درحالت $n=1$ چه می‌توان گفت؟

۵- فرض می‌کنیم V یك فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F و V_1 و V_2 زیر فضاهایی از V باشندکه $\dim V_1=\dim V_2$. ثابت‌کنیدکه زیر فضایی از V مانند U وجود دارد به طوری‌که

$$U\oplus V_1=U\oplus V_2$$

هر سؤال ۲۰ امتیاز دارد

مسابقه دانشجوئی آنالیز دانشگاه اصفهان

سؤال ۱- فرض کنید تابع حقیقی f به ازای $x \neq x_\circ$ دارای مشتقات اول و دوم بوده و

$$\begin{cases} f'(x) < \circ < f''(x) & \text{و} \quad x < x_\circ \\ f'(x) > \circ > f''(x) & \text{و} \quad x > x_\circ . \end{cases}$$

ثابت کنید مشتق f در $x_\circ$ موجود نیست.

(۳۰ نمره)

سؤال ۲- فرض کنید تابع حقیقی g روی $\mathcal{R}$ پیوسته بوده و $g(x) > \circ$ برای $x \neq \circ$ و $g(\circ) = \circ$. همچنین فرض کنید تابع حقیقی f روی $\mathcal{R}$ پیوسته یکنواخت و کراندار بوده و ترکیب $g \circ f$ روی $\mathcal{R}$ انتگرال‌پذیر است. ثابت کنید

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \circ .$$

(۳۵ نمره)

سؤال ۳- تابع حقیقی f روی $\mathcal{R}$ پیوسته است. فرض کنید برای فواصل بسته $[a , b]$ و $[c , d]$ مفروضی شرط $[a , b] \subset f([c , d])$ برقرار است. ثابت کنید فاصله‌ای مانند $[r , s]$ در $[c , d]$ وجود دارد به قسمی که

$$f([r , s]) = [a , b]$$

(۳۵ نمره)

موفق باشید

معرفی کتب و نشریات ریاضی

۱- آشنایی با نابرابریها: ا. بکن باخ، د. بلمن، ترجمه محمدحسین افقهی، ناشر مرکز نشر دانشگاهی (از سری ریاضیات پیش دانشگاهی).

۲- مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا: چارلز ت. سالکیند، ترجمه سید حسین جوادپور و محمد قزل‌ایاق؛ از سری ریاضیات پیش دانشگاهی، مرکز نشر دانشگاهی.

۳- دانستنیهای اعداد بزرگ: فیلیپ ج. دیویس، ترجمه علی عمیدی، از سری ریاضیات پیش دانشگاهی مرکز نشر دانشگاهی.

۴- مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا، جلد دوم: چارلز ت. سالکیند، ترجمهٔ علی کافی؛ ریاضیات پیش دانشگاهی، مرکز نشر دانشگاهی.

۵- حساب دیفرانسیل و انتگرال چیست: و. و. سویر، ترجمهٔ محمدحسن مهدوی اردبیلی؛ ریاضیات پیش دانشگاهی، مرکز نشر دانشگاهی.

تازه‌های ریاضیات

بزرگترین عدد اول شناخته شده

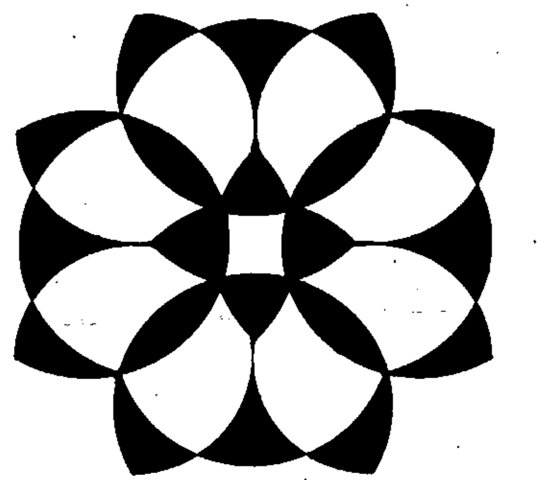
در تاریخ ۶ اوت ۱۹۸۹ عدد اول

$$(۳۹۱۵۸۱) \times ۲^{۲۱۶۱۹۳} - ۱$$

به دست آمد. آزمون لوکا در مورد اول بودن عددی به این بزرگی در کامپیوتر Amdahl ۱۲۰۰E، ۳۳ دقیقه طول کشیده است شرط $n >$ ۲۱۶۰۹۱ بدین منظور انتخاب شده است که عدد اول حاصل، بزرگترین عدد اول شناخته شده باشد؛ یعنی از عدد اول کشف شده توسط اسلودینسکی بزرگتر باشد.

این خبر به نقل از ماهنامه آمریکایی ریاضیات، از شماره ۱ سال ۱۳۶۹ خبرنامه انجمن ریاضی ایران اخذ شده است.

جواب نامه‌های رسیده



تهیه و تنظیم از: ابراهیم دارایی

اهواز، آقای محمد بیات،دانش‌آموز ـ ضمن تشکر از ابراز قدردانی شما از اعضای هیئت تحریریه از مسایل ارسالی شما، درصورت لزوم استفاده خواهیم‌کرد. درمورد سئوال شما ومعرفی کتاب، ریاضی، درنظر است نقد بعضی کتابهای ریاضی در صفحات مجله بگنجانیم.

تبریز، آقای علیرضا دانش محبی هنرجو. بهتر است مسئله خودتان را به رشد فیزیک بفرستید تا از نظر اهمیت و محتوا، بدرستی سنجیده شود.

خرم‌آباد لرستان آقای پرویز مرادی‌پور ـ نامه شما مورد بررسی قرارگرفت. مطالبی که درمورد توان دوم، سوم، ... اعداد دورقمی وچندرقمی نوشته بودید درست است، ولی به خاطر فرمولهای غیرمنظم و محاسبه بعدی که باید بعد از دستورالعمل انجام داد اینگونه روشها کاربرد عملی ندارند. در مورد شگفتیهای اعداد، مطالب مشابهی درمجله درج شده است.

تهران آقای فرشید طلوعی دانش‌آموز ـ ساختن توابع پیچیده ساده است ولی پاسخ گفتن به سئوالات مطرح شده همیشه آسان نیست. مثلاً برای تابعی که شما مثال زده‌اید دامنه می‌تواند $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ باشد. اصولاً پایه نباید منفی باشد و $f(x)$ باید معین باشد. $x\neq\pi+K\pi$، $x\neq\frac{\pi}{2}$، $x\neq 2K\pi$.

وقتی تابع دراین نقاط نامعین است صحبت از متناوب بودن تابع خطاست. متغیر x است! ومشتق آن درنقاطی که معین است قابل محاسبه می‌باشد.

تهران، آقای پیمان نظریان،دانشجوی دانشگاه صنعتی شریف، هیئت تحریریه مجله فرصت تحقیق روی حدسیات خوانندگان را ندارد. شما را به‌دست‌اندرکاران سازمان تحقیقات فیزیک‌ـریاضی که از اعضای هیأت علمی دانشگاه صنعتی شریف هستند، ارجاع می‌دهیم.

ارومیه، آقای محمد عثمان حسین دانشجو، فرمول اول شما غلط است ($x=2, n=3$) فرمول دوم شما بدیهی و بدون کاربرد است.

مشهد، آقای سیدهادی تقوی‌سادات فرمولی‌که ارسال‌داشته‌اید بسط دوجمله‌ای نیوتن است زیرا اگر $\overline{ab}$ یك عدد صحیح باشد، b اولین رقم وبقیه ارقام $\overline{a}$ است. دراین صورت،

$$(10\,\overline{a}+b)^n=\sum\binom{n}{K}(10\,a)^K b^{n-K}$$

باختران،آقای فریدون عباسی،دانش‌آموز، ازمسایل ارسالی شما تنها مسئله اول، آنهم با اصلاح قابل درج درمجله است به این صورت: درمثلث ABC نقطه M را در درون مثلث طوری پیدا کنید که $A_1=B_1=C_1=\alpha$ باشد وثابت کنید.

$$\text{cotg}\,\alpha=\text{cotg}\,A+\text{cotg}\,B+\text{cotg}\,C$$

آقای سیدهادی نقوی سادات دستوری که برای محاسبه قوه n یك عدد صحیح فرستاده‌اید کاربرد عملی چندان مفیدی ندارد ولی به‌عنوان یك مسئله ریاضی قابل ملاحظه است. زیرا اگر $x=\overline{ba}$ یك عدد صحیح باشد و a رقم یکان وبقیه ارقام b باشد آنگاه $x^n=(10b+a)^n$ که هریك ازجملات عبارت فوق را به‌عنوان یك رقم درنظر گرفتن برداشت درستی نیست زیرا ارقام بین صفر و ۹ است ولی ممکن است محاسبه جملات فوق ازاین محدوده تجاوز کند بالنتیجه محاسبات با مشکلات زیادی همراه است.

آقای فرغام سپهری،دانشجو. هیچ‌یك از مطالب ارسالی شما برای دانش‌آموزان متوسط تازگی ندارد. شاگردان ضعیف راهم گمراه می‌کند که تصورمی‌کنید برای مساحت مثلث باید همه این دستورها را یاد بگیرند. هیچ کدام ازاین دستورات لازم نیستند. مساحت مثلث برابر است با قاعده ضرب در نصف ارتفاع و یا نصف حاصلضرب دوضلع مثلث درسینوس زاویه بین آنها و یا $r=\sqrt{P(p-a)(p-b)(p-c)}$ برای تعیین‌مساحت nضلعی منتظم هم مساحت یکی از مثلث‌ها را تعیین کرده در n ضرب می‌کنیم.

تهران، آقای علیرضا ولی‌جانی، دانشجو امتحان ضرب یکی‌از خاصیتهای همنهشتی‌هاست واین یك شرط لازم است ولی کافی

نیست. یعنی اگرهدف بررسی صحت ضرب ۱۳۰۸ = ۶ × ۲۱۸ باشد، اگر به‌جای ۱۳۰۸ اعداد ۱۰۳۸ ویا ۸۳۱۰ و ۰۰۰... را قراردهیم امتحان ضرب نشان میدهد که باید محاسبه ضرب‌درست باشد، اما چنین نیست. بنابراین مینودشت، آقای علی‌اکبرسرایلو، درمورد شگفتیهای اعداد، مطالبی‌که ارسال داشته‌اید بدون برهان بوده وبرای ما مشخص نیست چگونه این اعداد را بدست آورده‌اید. ما خلاصه‌ای‌ازمطالب ارسالی‌شما را برای‌خوانندگان می‌آوریم تا دیگران‌روشی جهت‌ارائه این اعداد به‌دست‌آورند.

مسئله، کلیه اعدادی را به‌دست‌آورید که جمع وضرب آنهابدون درنظرگرفتن صفر واعشار، دارای ارقام یکسانی باشند. به‌عنوان مثال برای اعداد دو رقمی داریم

$$\begin{cases} ۱۲+۶۰=۷۲ \\ ۱۲\times ۶۰=۷۲۰ \end{cases} \qquad \begin{cases} ۲۲/۵+۱۸=۴۰/۵ \\ ۲۲/۵\times ۱۸=۴۰۵ \end{cases}$$

که در ضمن با خواص فوق می‌توان از اعداد (۱۴ و ۳۵)، (۱۵ و ۳۰)، (۱۲/۵ و ۵۰) هم نام برد.

تهران، آقای عادل خانزاده دانش‌آموز، تثلیث زاویه یکی از مسایل لاینحل هندسه اقلیدسی است. یعنی ثابت کرده‌اند که با قبول اصول‌هندسه، این مسئله حل‌نمی‌شود. برای اینکه این‌مشکل برای شما حل شود، اصول هندسه را با دقت بخوانید و یاد بگیرید.

آمل، آقای بابك معتقدی‌دانش‌آموز اینکه می‌نویسید مسئله به‌صورت دیگرقابل طرح است با شما موافقیم. این مسئله بروش هندسی برحسب θ قابل حل نیست.

اصفهان، آقای افشین احمدی دانش‌آموز، تساوی $MH=\frac{HC-BH}{۲}$ که در آن M وسط پاره‌خط BC و H نقطه‌ای‌ازآن است نیاز به‌استفاده ازقضیه فیثاغورث ندارد. توجه کنید،

$$MB=MC \Rightarrow (BH+HM)=HC-HM \Rightarrow$$
$$۲MH=HC-HB$$

اگر AH به‌جای ارتفاع، نیمساز زاویه هم باشد بازتساوی‌درست است.

بطور کلی اگر H نقطه دلخواهی از BM باشد تساوی برقرار می‌شود.

قزوین، آقای مسعود طاهرخانی با پرگار وخط‌کش نمی‌توان پاره‌خطی به‌طول $\sqrt[۳]{۲}$ را رسم کرد.

شهرکرد، خانم کافیه کیومرثی دانش‌آموز با تشکر از ابراز علاقه شما نسبت به مجله، مسایل ارسالی شما را دریافت کردیم. بموقع ازآنها استفاده خواهیم کرد.

پولادشهر اصفهان، آقای بهرام برنا از مسایل ارسالی شما متشکریم. درصورت نیازاستفاده خواهیم کرد.

گرج، آقای وحید آقایانی‌دانش‌آموز مسایل شما را دریافت کردیم. متأسفانه همراه حل نبود.

آقای‌یوسف مهرداد،دانش‌آموز مسایل ارسالی شما دریافت‌شد. سعی‌کنید بیشترمسائلی را برای مجله بفرستید که درکتابهای دیگر چاپ نشده باشد.

قم، آقای رجبعلی‌حاجیلو مسایل ارسالی شما را دریافت‌کردیم، ازشما متشکریم. ازاین پس مسائل را با حل بفرستید.

لنگاین، آقای حسن عبداله بیکی،دانش‌آموز مسایل ارسالی‌شما را دریافت کردیم ازلطف شما متشکریم.

خوانندگانی که حل مسایل شماره ۲۳ را برای ما فرستاده‌اند

آقای حسین‌تقی‌لو دبیر، از زنجان ۱۶

آقای حمیدرضا امیدواری ازتهران ۱۱—۹—۴—۳—۲—۱

اهواز، آقای سیامك جعفری، مقاله جالب شما را دریافت‌کردیم اما مطالب آن مناسب‌مجله رشد تشخیص داده نشد. از زحمات‌شما تشکرمی‌کنیم.

تبریز، آقای علی‌اصغرنادری فرجام، دانشجو

مطالب ارسالی شما بیانگر زحمات بیش ازحد شما دراین زمینه است واین منصفانه نیست فکر واندیشه خود را برروی‌مسئله‌ای بگذارید که دانشمندان بزرگ ریاضی، با تئوریهای بسیار قوی، نسبت به پاسخ‌آن عاجز مانده‌اند. بهتربود قبل ازبررسی قضیه فرما، حالتهای خاص آن را درکتابهای نظریه اعداد مشاهده می‌کردید تا دشواری کاربرای شما نمایان گردد. این قضیه سالهای سال است در قلمرو ریاضیات مطرح است وتا به‌حال راه‌حل کلی برای آن ارائه نگردیده است. پیشنهاد ما این است به‌کتابهای نظریه اعداد مراجعه کنید وبعضی ازبرهانهای‌مقدماتی آنرا که برای حالتهای m مساوی با ۳ و ۴ و ۷ ارائه گردیده ببینید.

$$x^m+y^m=z^m$$
$$\left(\frac{x}{z}\right)^m+\left(\frac{y}{z}\right)^m=۱ \quad ،(z\neq ۰)$$

که به‌ازای $m=۳$ این نقاط برروی‌کره‌ای به‌شعاع ۱ قراردارد. درصورتیکه اعداد صحیحی که در رابطه فوق صدق کند، وجود ندارد.

رشت، آقای شجاع‌طلب مطالب ارسالی شما درمورد عدد تام، قبلاً درمجله رشد آموزش ریاضی سال چهارم شماره مسلسل ۱۳ و ۱۴ تحت‌عنوان، مطالبی درباب‌اول ازآقای دکترعلیرضاجمالی به‌چاپ رسیده است. درضمن می‌توانید اینگونه مطالب را در

کتاب تئوری اعداد، تألیف دکتر غلامحسین مصاحب مشاهده کنید. همچنین برای ما معلوم نیست که درمطلب ارسالی چرا $\beta = 1$ و $x = a^a$. درضمن فرمولی که برای اعداد اول بدست آورده اید قضیه ویلسون است و برای اینکه P عدد اول باشد کافیست ثابت کند که $1 + !(P - 1)$ بر P بخشپذیر است ولی این فرمول به خاطر بزرگی اعداد $1 + !(P - 1)$ فایده عملی چندانی ندارد.

تهران، آقای رشید زارع نهندی درمقاله ارسالی شما فقط توابع مولد بدست آمده اما مسئله مطرح شده، حل نشده است. درك مطالب مقاله برای دانش آموزان مشکل است.

اصفهان، نجف آباد، آقای هادی هادی زاده، مسئله ارسالی شما دربخش مسایل مورد استفاده قرار می گیرد. درمورد قضیه ویلسون باید گفت که همان فرمول ضابطه ای برای اعداد اول است.

اردبیل، خانم قبادزاده حکم ریاضی که برای ما ارسال داشته اید، بدون برهان است چه دلیلی برای اثبات ادعای خودتان دارید؟ پیشنهاد می کنیم حکم خود را برای چند عدد آزمایش کنید.

تهران، آقای ابراهیم کرمی، مطالب ارسالی شما بخاطر استفاده کردن ازیك علامت که برای ما معنی آن مشخص نیست، مبهم است. بهتراست هرحکم کلی که بیان می کنید ابتدا درستی آن را درحالتهای خاص بررسی کنید واگر ادعای شما درست بود، برای حالت کلی، برهانی ارائه دهید.

آقای فریدون نوری، دانش آموز حل مسایل هرشماره را بموقع برای ما بفرستید.

آقای آرش بیگدلی، دانش آموز حل مسایل را بموقع بفرستید تا درشماره بعدی نتیجه آن اعلام شود.

آقای فرشید دلگشا، دانش آموز مجله رشد فرصت تحقیق در باره یافته های شما را ندارد. برای هر یافته ای اثبات آنرا هم بفرستید. درضمن حل مسایل را هم باید بموقع فرستاد تا نتیجه آن درشماره بعدی درج گردد.

ایلام، آقای جلال حمزه، دانش آموز ضمن تشکر اگر لازم شد، ازمسایل ارسالی شما به موقع استفاده خواهد شد. برای مسایل خودتان منبع هم بنویسید.

رشت، آقای سیف پور ابوالحسنی، دانش آموز حل مسایل را بموقع بفرستید تا نتیجه آن درشماره بعدی اعلام گردد. برای مسایلی که فرستاده اید منبع ذکر نکرده اید.

شیراز، آقای عبدالرسول عزیزی، دانشجوی

قضیه عکس برای نیمساز خارجی همواره صحیح است. یعنی اگر درمثلث ABC خط AD دربیرون مثلث BC را طوری قطع کند که $AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC$ آنگاه AD نیمساز خارجی زاویهٔ A است ولی عکس قضیه برای نیمساز داخلی همواره قابل قبول نیست. درصفحه اول نوشته شده اگر درمثلث ABC نقطه D ما بین B و C باشد داشته باشیم

$$\overline{AD}^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC$$

آنگاه AD نیمساز زاویه A است. با استفاده از قضیه استوارت ازتساوی بالا این نتیجه بدست می آید که

$$(AB - AC)(AC \cdot BD - AB \cdot DC) = 0$$

حالا می توان گفت عکس قضیه نیمسازهای داخلی درمثلث درست نیست زیرا اگرمثلث متساوی الساقین و یا متساوی الاضلاع باشد، صدق نمی کند.

آقای جعفر عشریه، دانش آموز حکم شما مبنی بر اینکه K يك زیرمیدان باشد، دارای يك فرض اضافه است. اگرنسبت به عمل تفریق وتقسیم بسته باشد کفایت می کند.

خانم فرحناز واعظ دلیلی دانش آموز، این شما عکس مسئله ساده درفصل تساوی مثلث ها می باشد. یعنی ابتدای هندسه به این شرح (درمثلث متساوی الساقین نیمسازهای داخلی نظیر دوساق با هم برابرند.) تشابه به مبحث نزدیك به پایان هندسه اقلیدسی است. راه حل مفصل تشابه برای چنین مسئله ای قابل درج در مجله نمی باشد.

آقای محسن حسینی، دانش آموز اول راهنمایی راه حل شما برای رسم نیمساز داخلی يك زاویه درست است موفقیت بیشتر شما را آرزومندیم.

مشهد، آقای وحید دباغیان، دانشجو از اظهارلطف شما نسبت به مجله کمال تشکر را داریم. مسایل ارسالی شما با تغییرات جزیی دربخش مسایل مورد استفاده قرارمی گیرد.

تهران، آقای محمدمهدی توانای آشتیانی

اهر، آقای حسن سبزپروری

مسئله اول شما نتیجه ساده ای ازمحاسبه قطعه هایی که از تماس دایره محاطی روی اضلاع برحسب اضلاع حاصل می شود، می باشد. وقابل درج درمجله نمی باشد. مسئله دوم محاسبه يك فرجه از کنج برحسب سه زاویه α، β و γ یعنی زوایای کنج است که جزو دستورهای تعیین زاویه مثلث کروی برحسب اضلاع آن است، درعین حال مسئله خوبی است درهمین زمینه مقاله ای درمجله رشد درج گردیده است.

تهران، آقای محمدمهدی توانای آشتیانی

ادعای شما همان اثبات قضیه بزرگ فرما است واستدلال آن به این سادگی نیست. شما باید حالتهایی که n فرد، زوج، است یا c عدد صحیح مثبت ویا منفی باشد، درنظر بگیرید که توجهی بدان نداشته اید موفقیت شما را درتحصیل علم آرزومندیم.

دانشجو نریمان صداقت، تهران
تا بحال نامه‌های فراوانی جهت اثبات قضیه فرما داشته‌ایم که همگی نادرست بوده است. شما خودتان را سرزنش نکنید چرا که قضیه فرما مسئله‌ایست که باید به‌کمک امثال شماها، برای آن پاسخی مناسب داده شود.

گرگان، آقای اکبرمرشد اسکی،دانش‌آموز
نامه شما به‌دستمان رسید که خلاصه آن جهت آگاهی خوانندگان چنین است؛ برای به‌دست‌آوردن رقم یکان یک عدد بتوان n کافیست که رقم یکان آن را بتوان باقیمانده n بر ۴ برسانیم؛ که رقم یکان حاصل همان رقم یکان عدد بتوان n است: البته، حکم فوق را درچندین صفحه آقای اکبر مرشد اسکی توضیح داده‌اند که اثبات‌آن را بعهده خوانندگان می‌گذاریم.

ماکو،دانش‌آموزان‌سال‌چهارم،آقایان ابراهیم اکبری‌اصل و عباس جلیل‌زاده مسأله شما مبنی براینکه اگر

$$(P-1)! \equiv -1 \quad (\text{پیمانه } P)$$

آنگاه P اول است،همان عکس قضیه ویلسون است که یکی‌از قضایای معروف نظریه اعداد می‌باشد. برهان‌آن چندان مشکل نیست، زیرا اگر P مرکب باشد، آنگاه $P=a\times b$ که $1<a<p$ و $1<b<P$، چون

$$ab=P|(P-1)!+1$$

پس a و b عدد ۱ را عاد می‌کنند که تناقض است. پس P عدد اول است.

تبریز، آقای حسین ابراهیم‌نژادصدیق معادله پارامتری بیضی که ازتکیه دادن AC روی محورهای مختصات xoy پدید می‌آید، سابقه دارد. همینطور بیضی نگار: که از تکیه دادن AC روی محورها،که دو استوانه روی‌آنها تعبیه شده و داخل دو استوانه‌که دو شکاف منطبق بر مولد استوانه و دو گلوله‌که در داخل شکافها جابه‌جا می‌شود، و قلمی‌که نوک‌آن نقطه B است، تشکیل می‌شود. این دستگاه نیازی به پرگار سه شاخه ندارد. امید است با رشته علمی و صنعتی که انتخاب کرده‌اید، درآینده بتوانید منشاءآثار بکر، در علم و صنعت کشور باشید.

کاشان، آقای پورفیضی دانش‌آموز دوم ریاضی کافیست در $\sin A \sin B \sin C$

$$A=90 \quad \text{و} \quad B=C=45$$

فرض کنید که نتیجه $\frac{1}{2}$ می‌شود و از $\frac{1}{4}$ بیشتر است.

اهواز، خانم غزاله احمدی، دوم تجربی حل مسائل شما را دیر دریافت کردیم متأسفانه از دقت لازم هم برخوردار نبود.

تهران، آقای شاهین هدایتی با تشکر از تذکرات مفید شما، و اشاره به مسائلی‌که در مجلات دیگر چاپ شده‌اند به اطلاع‌شما می‌رسانیم حتی‌المقدور سعی ما براین است که چنین مسائلی درج نشود و شما تصدیق می‌کنید در بیش‌از پانصد مسأله‌ای‌که در مجله رشد چاپ شده، احتمال چاپ مسائلی‌که قبلاً در مجلات دیگر چاپ شده همیشه وجود دارد با توجه به اینکه منبع بیشتر این مسائل هم یکی هستند، امکان چاپ‌آنها در دو جا همیشه وجود دارد. با همه اینها از این پس بیشتر دقت خواهیم‌کرد و راضی نخواهیم شد تا اعتقاد شما خواننده باریک‌بین به قول خودتان متزلزل بشود. اما اینکه حل همه مسایل در یك شماره‌آورده نشده، به‌خاطر تنظیم صفحات مجله است‌که گاه اجتناب ناپذیر می‌شود.

مشهد، آقای بهرام هجرانی، سوم ریاضی فیزیك مشهد از توجه شما به مجله صمیمانه تشکر می‌کنیم. پیشنهادهای شما را حتی‌الامکان مراعات خواهیم‌کرد.

باختران، آقای فریدون نوری دانش‌آموز سوم ریاضی، از توجه شما نسبت به مجله صمیمانه تشکر می‌کنیم. متأسفانه مسائل رشد شماره ۲۲-۲۱ را خیلی دیر برای ما فرستاده‌اید. پیشنهاد شما را در مورد المپیاد مطرح خواهیم‌کرد.

بندرانزلی، خانم نازنین دانش‌آموز سوم ریاضی، نامه شما را دریافت‌کردیم وآدرس درست بود.

تهران، آقای حسین پیرهادی،دانش‌آموز سوم ریاضی ضمن تشکر از توجه شما به مجله یادآوری می‌کنیم‌که به موقع از انتشار مجله‌های شماره قبل مطلع خواهید شد.

تهران، آقای مسعود ترکمن دانش‌آموز چهارم ریاضی وقتی همه دروس را دوره‌کرده‌اید. جای نگرانی نیست. خونسرد باشید موفقیت پیش روی شماست.

اطلاعیه

دربارهٔ نشریات رشد آموزش تخصصی

مجلات رشد آموزش مواد درسی مدارس کشور که بمنظور ارتقاء سطح دانش معلمان و ایجاد ارتباط متقابل میان صاحبنظران، معلمان و دانشجویان با برنامه‌ریزان امور درسی از سوی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش هر سه ماه یکبار ــ چهار شماره در سال ــ منتشر می‌شود در حال حاضر عبارتند از:

۱ ــ آموزش ریاضی ۲۶
۲ ــ آموزش شیمی ۲۴
۳ ــ آموزش جغرافیای ۲۳
۴ ــ آموزش ادب فارسی ۲۲
۵ ــ آموزش زیست‌شناسی ۲۱
۶ ــ آموزش زبان ۲۵
۷ ــ آموزش زمین‌شناسی ۱۸
۸ ــ آموزش فیزیک ۲۲
۹ ــ آموزش معارف اسلامی ۱۱
۱۰ ــ آموزش علوم اجتماعی ۴

دبیران، دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر علاقمندان به اشتراک این مجلات می‌توانند جهت دریافت چهار مجلّه در سال مبلغ ۴۰۰ ریال به حساب ۹۲۹ خزانه بانک مرکزی ــ قابل پرداخت در کلیه شعب بانک ملّی ــ واریز و فیش آن را همراه با فرم تکمیل شده زیر به نشانی تهران، جادّه آبعلی، خیابان سازمان آب بیست‌متری خورشید مرکز توزیع انتشارات کمک آموزشی کدپستی ۱۶۵۹۸ ــ تلفن ۷۷۵۱۱۰ ــ ارسال دارند. ضمناً: معلمان، کارشناسان، مدیران، پژوهشگران و سایر علاقمندان به امور تعلیم و تربیت جهت آگاهی بیشتر از یافته‌های صاحبنظران می‌توانند با پرداخت مبلغ ۸۰۰ ریال در هر سال ۴ جلد **فصلنامه تعلیم و تربیت** دریافت نمایند.

مجلات رشدتخصصی در مراکز استان در کتابفروشیهای زیر و سایر شهرستانها در فروشگاههای معتبرمطبوعات بصورت فروش آزادعرضه می‌شود

تهران:	انتشارات مدرسه ــ اوّل خیابان ایرانشهر شمالی
اهواز:	کتابفروشی ایرانپور زیتون کارمندی خیابان کمیل بین زاویه و زهره پلاک ۲۰
اصفهان:	کتابفروشی مهرگان چهار باغ ابتدای سید علی خان
ارومیه:	کتابفروشی زینالپور نمایندگی و خبرنگاری روزنامه
اراک:	کتابفروشی گنج دانش بازارچه امیرکبیر
بندرعباس:	کتابفروشی مالوک خیابان سید جمال الدین اسدآبادی
باختران:	کتابفروشی دانشمند خیابان مدرس مقابل پارکینگ شهرداری
خرم‌آباد:	کتابفروشی آسیا خیابان شهدا شرقی
رشت:	کتابفروشی فرهنگستان خیابان نامجو جنب دانشگاه
زنجان:	کتابفروشی شهید بهشتی خیابان آیت‌ا... طالقانی
سنندج:	کتابفروشی شهریار خیابان فردوسی
ساری:	شرکت ملزومات و معارف خیابان انقلاب روبروی اداره برق داخل کوچه
شیراز:	پیام قرآن میدان شهدا جنب اداره آموزش و پرورش مرکز فرهنگی
کرمان:	فرهنگ‌سرای زمین پارک مطهری
مشهد:	انتشارات آستان قدس رضوی خیابان امام خمینی روبروی باغ ملی
یاسوج:	کتابفروشی فرهنگ جنب سینما دنا خیابان شهید هرمزپور.

*** دانشجویان مرکز تربیت معلم می‌توانند با ارسال فتوکپی کارت تحصیلی خود از ۵۰٪ تخفیف برخوردار شوند.**

فرم اشتراک مجلات رشد تخصصی

اینجانب .... با ارسال فیش واریز مبلغ ۴۰۰ ریال، متقاضی اشتراک یکسالهٔ مجلهٔ رشد آموزش .... هستم.

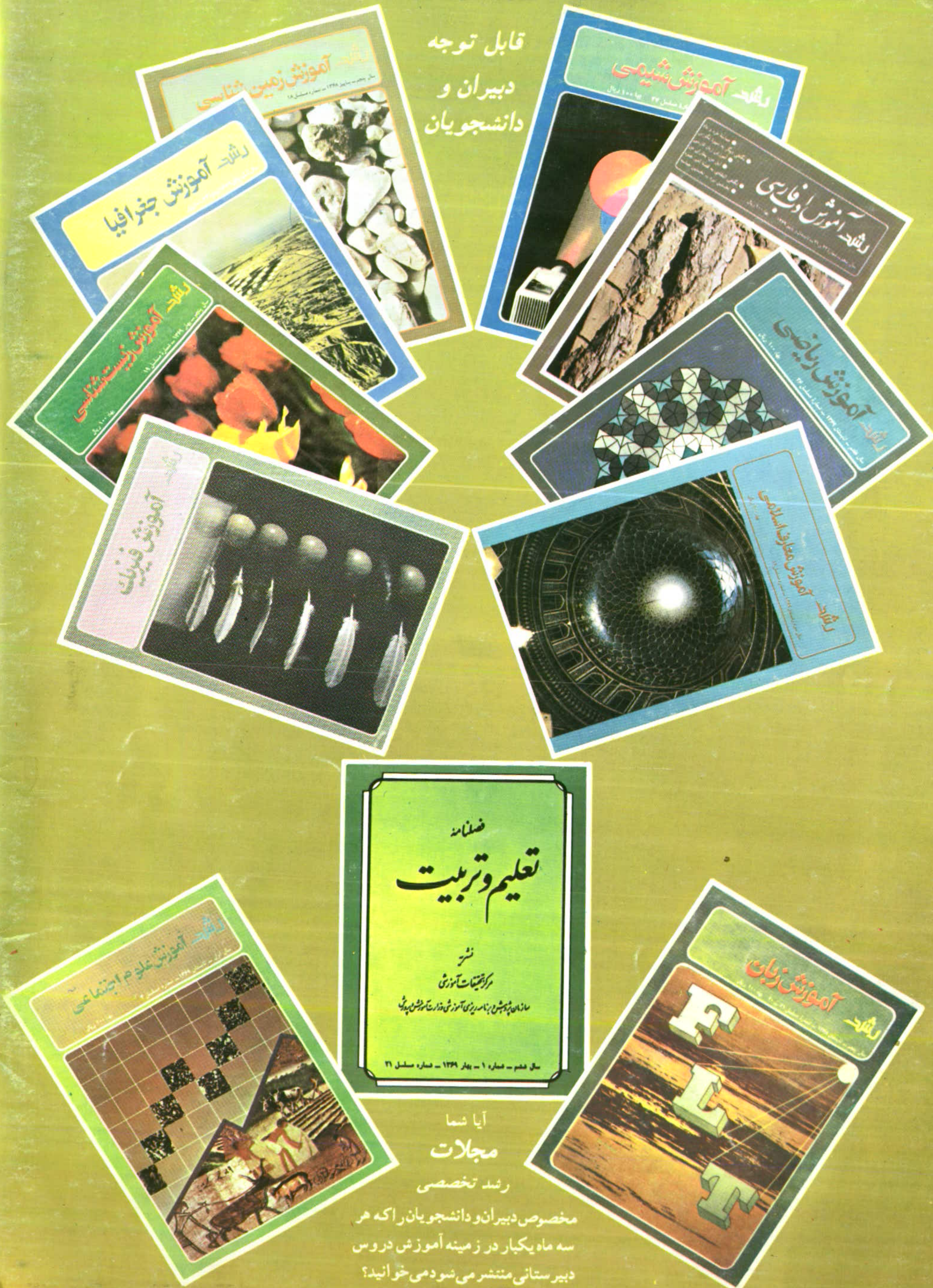
نشانی دقیق متقاضی: استان .... شهرستان .... خیابان ....

کوچهٔ .... پلاک .... کُدپستی .... تلفن ....

Contents

Roshd, Magazine of Mathematical Education, Vol VII No. 27, Autumn 1990 Mathematics Section, 274 BLDG - No. 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave., Tehran - Iran.

A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.



قابل توجه
دبیران و
دانشجویان
رشد آموزش زمین شناسی
رشد آموزش شیمی
رشد آموزش جغرافیا
رشد آموزش ادب فارسی
رشد آموزش زیست شناسی
رشد آموزش ریاضی
رشد آموزش فیزیک
رشد آموزش معارف اسلامی
فصلنامه
تعلیم و تربیت
نشر
مرکز تحقیقات آموزشی
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش
سال ششم ـ شماره ۱ ـ بهار ۱۳۶۹ ـ شماره مسلسل ۲۱
رشد آموزش علوم اجتماعی
رشد آموزش زبان
ELT
آیا شما
مجلات
رشد تخصصی
مخصوص دبیران و دانشجویان را که هر
سه ماه یکبار در زمینه آموزش دروس
دبیرستانی منتشر می شود می خوانید؟