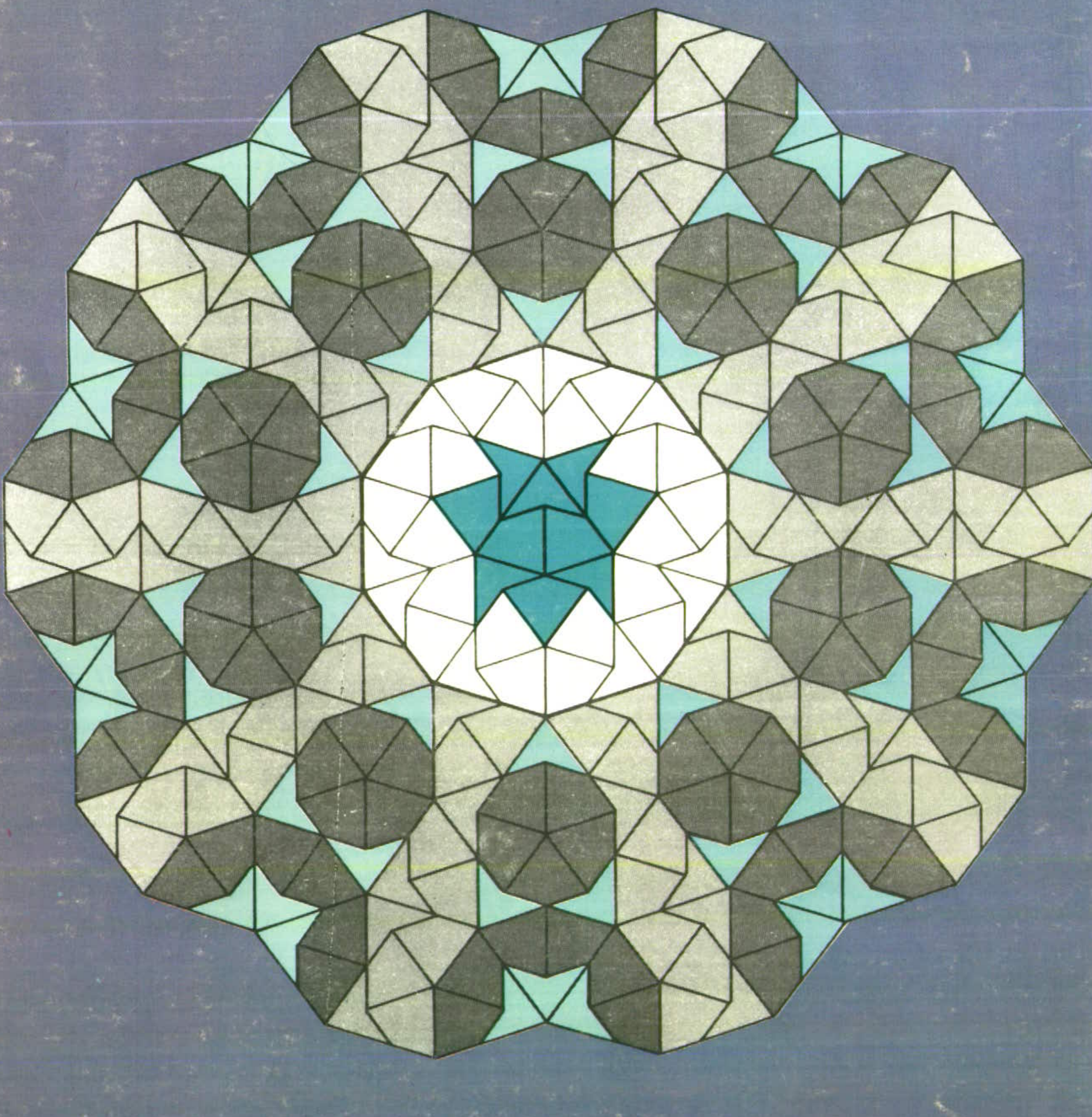
رشد آموزش ریاضی

سال هفتم ــ تابستان ۱۳۶۹ ــ شمارهٔ مسلسل ۲۶

بها: ۱۰۰ ریال



بسم‌الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یکبار از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی منتشر می‌شود هدف از انتشار این مجله اعتلای دانش ریاضی دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلّم است. علاوه بر این ایجاد ارتباط متقابل بین معلّمین ریاضی و دفتر تحقیقات، به منظور تبادل تجارب، ارائه روشهای جدید آموزش ریاضی، معرفی جنبه‌های تاریخی، فلسفی، کاربردی ریاضیات در سطح پیش دانشگاهی است هیأت تحریریه از مشارکت و همکاری همهٔ علاقه‌مندان بویژه دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان در ارائه مقالاتی در زمینه‌های زیر استقبال می‌کند:

الف) آموزش ریاضی (طرح و بررسی آموزش ریاضی، بویژه آموزش ریاضی در دوره‌های پیش دانشگاهی).

ب) تاریخ ریاضی (مشتمل بر سیر تحول مفاهیم ریاضی، شرح و احوال ریاضیدانان و کارهای علمی آنها، بویژه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی).

ج) فلسفه ریاضی (تبیین مفاهیم ریاضی، ریاضیات چیست، بررسی مکاتب ریاضی، بررسی ارتباط تاریخ و فلسفه ریاضی).

ریاضی کاربردی (مشتمل بر مباحثی در زمینه‌های آنالیز عددی، کامپیوتر و برنامه‌ریزی، تحقیق در عملیات، آمار و احتمال).

د) سایر مباحث ریاضی (مشتمل بر مقالات مختلفی در زمینه‌های مختلف، ارائه راه‌حلهای مختلف برای مباحث ریاضی، ارائه مسائل نمونه).

رعایت نکات زیر در مورد مقالات ارسالی ضروری است:

۱) مقالات ارسالی باید در چهارچوب اهداف فوق و با سبکی مشابه با سبک مقالات چاپ شده در رشد ریاضی باشد و در سطحی عرضه شوند که ضمن داشتن محتوی مطلوب دارای کیفیت عرضه مطلوب هم باشند؛

۲) مقالات باید با خط خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) و به صورت یک سطر در میان و با در نظر گرفتن جای کافی در حاشیه تهیه شود و صفحات به طور دقیق شماره‌گذاری شود؛

۳) فهرست مراجع مقاله به طور کامل و در دو قسمت فارسی و خارجی و به ترتیب الفبایی و طبق استاندارد مقالات علمی درج شود؛

۴) مقالات ترجمه شده از زبانهای خارجی همراه با متن اصلی ارسال شود؛

۵) مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور به چاپ رسیده باشد؛

۶) رد یا قبول و حک و اصلاح و ویراستاری مقالات به عهدهٔ هیأت تحریریه است.

رشد آموزش ریاضی

سال هفتم ـ تابستان ۱۳۶۹ ـ شمارهٔ مسلسل ۲۶

نشریهٔ گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تلفن ۴ ــ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۵۰)

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر دانش‌پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. جهت ارتقاء کیفی آن نظرات ارزنده خود را به صندوق پستی تهران ۳۶۳ ــ ۱۵۸۵۵ ارسال فرمائید.

فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

درشمارهٔ اخیرجنگ دانشجو، نقدی بر کارنامهٔ شش ساله مجله به قلم آقای امیر اکبر مجدآباد نو نوشته شده است. هیأت تحریریه مجله ضمن تشکر از آقای مجدآباد نو مراتب خوشحالی خود را از اینکه نقد و بررسی در مجموع منصفانه و ماهرانه بوده است ابراز داشته‌اند. در حاشیهٔ این امر نکاتی ملحوظ است که ذیلاً به اختصار یادآوری می‌گردد.

نقد و بررسی منصفانه نوشتارها، کتب تألیف و ترجمه‌ای و مجلات علمی امری است که به خودی خود نشانه‌ای از رشد تعالی یک جامعه سالم فرهنگی و پویا می‌باشد. در دنیای پرتکاپوی علم نه تنها این مهم امری عادی و پذیرفتنی است بلکه در اغلب موارد برای بهتر عرضه کردن محتوای کتب و مقالات تخصصی، خاصه در ریاضیات، بیشتر مجلات علمی بخشی از کار خود را به نقد و بررسی اختصاص داده‌اند و برخی نیز منحصراً به انتشار نقد و بررسیهای انجام شده در مورد مقالات علمی تازه منتشره مشغولند.

البته گو آنکه همهٔ آنچه را که نویسندهٔ گرامی مقاله مذکور به رشتهٔ تحریر درآورده‌اند مورد تأیید هیأت تحریریه نیست چرا که این امر می‌بایست با توجه به محدوده امکانات این مجله با حداقل نیروی انسانی و امکانات فیزیکی سنجیده گردد. بهر حال جای خوشحالی است که بیشتر پیشنهادات ذکر شده قبلاً درهیأت تحریریه مطرح ومجله در راستای اجرای این پیشنهادات تصمیماتی گرفته است.

لازمه تقابل آراء و افکار سازنده در جهت بهتر شکوفا شدن استعدادهای بالقوه جامعه رشد، تقویت وتحمل انتقادپذیری است. بدون شک در هر مرحله‌ای از پیشرفت باید اذعان داشت که کاستی‌هایی موجود و راههایی برای بهبود و گسترش فعالیتها و خدمات میسر خواهد بود. رشد تفکر اجتماعی و فرهنگی بدون نقد و بررسی خالصانه و درعین حال جسورانه این امور میسر نخواهد بود. خاصه در این برهه از زمان که بازسازی کشور و بویژه بازسازی نیروی انسانی مطرح است ارائه انتقادها به‌همراه پیشنهادات سازنده باید با آغوش باز مورد پذیرش هر واحد انتشاراتی و فرهنگی قرار گیرد.

تدریس نظریه اعداد به روش دیگر[1]

تنظیم از: جواد لالی
عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت معلم

مقدمه: تأسیس نظریه اعداد براساس قضیهٔ اصلی علم حساب؛ یعنی، یکتایی تجزیه اعداد طبیعی بـه حاصلضرب عوامل اول، است. این قضیه، همچنین، بـــزرگترین مقسوم‌علیه مشترك و کـوچکترین مضرب مشترك، به‌کمك قضیه تقسیم و یـا احکام صادره ازآن بیان و ثابت می‌شود. این ترتیب مطالبی است که در اکثر کتابها مقدماتی، بالاخص، درکتاب ریاضیات جدید سال چهارم، ارائه گردیده است. ولـی، می‌توان بدون قضیه تقسیم به بیان مفاهیم فوق پرداخت. این روشی است کـه در اینجا بطور اجمال به بیان آن پرداخته می‌شود.

اگـر p_1، p_2، ...، p_n نمایش اعداد اول باشند، بنابر قضیه اصلـی علم حساب، هـر عدد طبیعی قطع نظر از ترتیب عوامل اول آن، نمایش منحصر بفردی به صورت،

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$$

دارد، که به ازای $1 \leqslant k \leqslant n$، $\alpha_k > 0$. صورت دیگر این قضیه چنین است؛ هر عدد طبیعی تا یك یا اول است و یا نمایش یکتایـی بـه حاصلضرب عوامل اول دارد. بیان چنین صورتی تنها بدین خـاطر است کـه عدد یك و عـدد اول p تجزیه‌ای بـه چند عامل اول ندارند. زیـرا، ضرب یك عمل دوتایی است و برای انجام آن، حداقل نیاز به دو عامل است. بنابراین، بیان این مطلب کـــه عدد اول P و عدد ۱ تجزیه یکتایی به حاصلضرب عوامل اول دارند بی‌معنی است. برای جلـوگیری از این تشتت و تعمیم قضیه اصلـی علـم حساب، تعریف حاصلضرب خالـی و حاصلضربی کـه دارای یك عامل دارند را می‌آورند؛ یعنی،

$$\prod_{k=1}^{0} p_k = 1 \quad \text{و} \quad \prod_{k=1}^{1} p = p$$

بالنتیجه، قضیه اصلی علم حساب بیانـــی بدین صورت خواهد داشت:

«هر عدد طبیعی تجزیه یکتایی بـه حاصلضرب عوامل اول دارد».

قضیه اصلی علم حساب ثابت می‌کند کـــه اعداد اول، به انضمام عمل ضرب «عناصر سازه‌ای» برای اعداد طبیعی تا یك است و هر عدد طبیعی تا یك را می‌توان به‌کمك اعداد اول و عمل ضرب تـولید کـرد. هاردی گفته‌ای نزدیك بدین مضمون دارد که طبیعی‌ترین عملی که برای اعداد صحیح مثبت می‌توان تعریف کرد عمل ضرب است نه جمع و تفریق و به همین جهت است که مسائلی که در نظریه اعداد مطرح می‌شوند و به نحوی در آنها عمل جمع و یا تفریق به کار رفته‌اند از مسائل مشکل نظریه اعداداند. نمونه‌ای از این نـوع مسائل قضیه بزرگ فرما و حدس گولد باخ است. گولد باخ در یکی از نامه‌های خود به اویلر کـه در سال ۱۷۴۲ نوشت، دو حدس به صورت ذیل عرضه کرد:

۱) هر عدد زوج بـزرگتر از ۲ حـاصلجمع دو عدد اول است،

۲) هـر عدد صحیح بـزرگتر از ۵ مجموع سه عـدد اول است.

همچنین، احکام (۱) و (۲) با یکدیگر معادلند. اگرچه‌صورت احکام فوق ساده است‌ولی هنوز به عنوان مسأله باز در قلمروی ریاضیات مطرح‌اند.

قضیه اصلی علم حساب مجموعه اعداد صحیح را به سه‌دسته کاملاً متمایز تقسیم می‌کند.

۱) اعداد اول، آن اعداد صحیحی هستند که بزرگتر از یك‌اند، و تنها مقسوم‌علیه‌های مثبت آنها ۱ و خود آن اعدادند. مانند، ۲، ۳، ۵، ... .

۲) اعداد مرکب، و آن اعدادی‌هستند که قدرمطلق آن بزرگتر از ۱ و اول نیستند. مانند، ۶، ۱۵.

۳) اعداد ۱ و ۱ـ ، این دو عدد نه اولند و نه مرکب. اگر چه تنها مقسوم‌علیه‌ها مثبت این دو عدد به غیراز ۱ وخود آنها اعداد دیگری نیستند، نبایدآنها را جزء اعداد اول به‌شمارآورد. اگر این اعداد را جزء اعداد اول به حساب آورده شوند، بیان قضیه اصلی علم حساب مختل می‌شود واکثر نتایج مهم‌این قضیه باطل می‌گردد وشاید این دلیل خارج کردن ۱ از اعداد اول باشد.

ازآنجائیکه درکتاب سال چهارم، ریاضیات جدید، رشته ریاضی فیزیك، قضیه اصلی علم حساب و تعریف بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك وکوچکترین مضرب مشترك آمده است از بیان مجددآنها صرفنظر می‌کنیم و به ارائه مطالبی می‌پردازیم که در این‌کتاب نیامده است.

ابتدا چند تعریف مقدماتی را می‌آوریم.

۱ـ تعریف. بنابر قضیه اصلی علم حساب، هر عدد طبیعی a، تجزیه یکتایی به صورت

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$$

دارد، که p_iها اعداد اول دوبدو متمایزند و α_iها اعداد صحیح نامنفی‌اند. این نوع تجزیه‌را تجزیه قانونی a می‌نامند. حال، اگر در تجزیه a، ترتیب مورد نظر باشد و عوامل اول، به ترتیب، ازکوچك به بزرگ و از سمت چپ به راست به دنبال یکدیگرآورده شوند، این نوع تجزیه را، تجزیه استانده گویند.

۲ـ مثال. تجزیه

$$\begin{aligned}700&=5^2\times 2^2\times 7\\&=2^2\times 5^2\times 7\end{aligned}$$

به ترتیب، تجزیه قانونی و استانده عدد ۷۰۰ است، که در اولی هیچگونه ترتیبی درنظر گرفته نشده است؛ درصورتی‌که در دومی عوامل ازکوچك به بزرگ، از سمت چپ به‌راست، به دنبال یکدیگر نوشته شده‌اند.

زمانی‌که تجزیه دو عدد در میان باشد، ممکن است‌که عوامل اول‌آن دو متمایز باشند. در بسیاری مواقع، وجود پایه‌های مشترك، در تجزیه دو عدد، از پیچیدگی برهان می‌کاهد و حل عملی مسأله را ساده می‌کند. چگونه می‌توان به انجام چنین امری دست یافت؟

برای انجام چنین مقصودی، ابتدا، دنباله اعداد اول را تعریف می‌کنیم.

فرض کنید $p_1=2$، $p_2=3$، $p_3=5$، $p_4=7$، ...، p_n؛ یعنی، nامین عدد اول. بنابراین، p_1، ...، p_n، ... را دنباله اعداد اول متوالی می‌نامند.

حال، اگر تجزیه دو عدد ۱۲ و ۲۰، با پایه‌های مشترك، مورد نظرباشد، ابتدا، تجزیه استانده‌آنها را درنظر می‌گیریم؛ یعنی،

$$12=2^2\times 3$$

$$20=2^2\times 5$$

سپس، ملاحظه می‌کنیم‌که عدد ۲۰ دارای عامل ۵ است‌که در عدد ۱۲ نیامده است، و عدد ۱۲ دارای عامل ۳ است‌که در ۲۰ نیامده است. در اینجا می‌توان عواملی را که در یکی آمده و در دیگری نیامده است با نماینده صفر واردکرد. بنابراین، نمایش اعداد فوق، با پایه‌های مشترك، چنین است:

$$20=2^2\times 3^0\times 5$$

$$12=2^2\times 3\times 5^0$$

این نوع تجزیه را، تجزیه ظاهری (متناهی) دوعدد ۱۲ و ۲۰ می‌نامند. در حالت‌کلی، اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، به طوری‌که p_n بزرگترین عامل اولی باشدکه در تجزیه قانونی یکی از این دو ظاهر شده باشدآنگاه

$$a=2^{\alpha_1}\times 3^{\alpha_2}+\cdots\times p_n^{\alpha_n}$$

$$b=2^{\beta_1}\times 3^{\beta_2}\times\cdots\times p_n^{\beta_n}$$

که به‌ازای $1\leqslant i\leqslant n$، $\alpha_i\geqslant 0$ و $\beta_i\geqslant 0$، یك تجزیه ظاهری a و b می‌نامند.

۳ـ مثال. تجزیه استانده و تجزیه ظاهری دو عدد ۲۲۰ و ۱۶۲۵ را بنویسید. تجزیه استانده‌آن دو عدد چنین است:

$$220=2^2\times 5\times 11$$

$$1625=5^3\times 13$$

بزرگترین عامل اول بین این دو عدد، عدد ۱۳ است. پس، تجزیه ظاهرآنها چنین است.

$$220 = 2^2\times 3^0\times 5\times 7^0\times 11\times 13^0$$
$$1625 = 2^0\times 3^0\times 5^3\times 7^0\times 11^0\times 13$$

ثابت می‌شود که هر عدد طبیعی، تجزیه ظاهری یکتایی به حاصلضرب عوامل اولی دارد که تعداد متناهی از نماینده‌های آنها ناصفراند.

سیری در اعداد اول[1]

در اینجا سعی می‌کنیم که نظری اجمالی به مجموعه اعداد اول داشته باشیم. بعضی‌از احکام مربوط به اعداد اول را، تنها به خاطر آگاهی از آن، ذکر می‌کنیم. از آنجائیکه اثبات آنها نیاز به مقدمات وسیعی دارد، از بیان آن صرفنظر می‌کنیم، مگر آنکه اثبات آن چندان دشوار و طولانی نباشد.

(الف) روشی که برای اثبات قضیه اقلیدس (مجموعه اعداد اول مجموعه نامتناهی است)، درکتاب ریاضیات جدید سال چهارم، ارائه شده است خود تکنیکی مفید برای اثبات بعضی‌از مسائل نظریه اعداد است. در این قضیه ثابت می‌کند عدد $p_1p_2\cdots p_n+1$ عامل اولی غیراز p_1، ...، p_n دارد. بنابراین،

$$p_n < p_{n+1} \leqslant p_1p_2\cdots p_n+1 \leqslant p_n^n+1$$

این نامساوی جنبه سازندگی دارد. زیرا، با داشتن n عدد اول متوالی، می‌توان، طی مراحل متناهی $n+1$امین عدد اول را به دست آورد. هنوز دستورکلی برای تعیین nامین عدد اول در دست نیست و تنها نامساویهای فوق کاربرد عملی دارد.

(ب) دنباله اعداد اول دنباله‌ای اکیداً صعودی و نامتناهی از اعداد طبیعی‌اند، تنها عدد اول زوج عدد ۲ است. تنها اعداد اولی، با فاصله یك، عدد ۲ و ۳ است. بقیه اعداد اول دارای فواصل بیشتر از ۲ هستند. بنابراین، به ازای هر $n \geqslant 2$،

$$p_n+2 \leqslant p_{n+1}$$

اگر فواصل دو عدد اول ۲ باشد، آن دو را اعداد اول دوقلو می‌نامند. مانند،

(۳، ۵) و (۵، ۷) و (۱۱، ۱۳) و ...

آیا مجموعه همه اعداد اول دوقلو مجموعه‌ای نامتناهی‌اند؟ این سؤال از جمله سؤالهایی است که تاکنون جواب درستی برای آن در دست نیست. [توزیع نامناسب اعداد اول در مجموعه اعداد طبیعی، سؤالات مشابهی را مطرح می‌کند که نه ثابت شده و نه ابطال گردیده است.]

(پ) به استقراء ثابت می‌شود که $p_n \geqslant n+1$. بنابراین $\lim_{n\to\infty} p_n=\infty$.

(ت) چگونه می‌توان وجود یك عدد اول را، در یك فاصله مشخص، بیان کرد. قضیه مشهوری بنام اصل موضوع برتراند[1]، حکم می‌کند که به ازاء هر عدد طبیعی n، عدد اولی مانند p موجود است که $n \leqslant p \leqslant 2n$ است. ما در اینجا، با همان روش برهان اقلیدس، حکم ضعیف‌تر از این را ثابت می‌کنیم؛

اگر $n > 2$ آنگاه عدد اولی، مانند p، موجود است که $n < p < n!$. زیرا عوامل اول

$$n!-1=n(n-1)\cdots 2\times 1-1$$

بزرگتر از n است. پس، بنابر قضیه اصلی علم حساب، عدد اولی مانند p هست که $p|n!-1$. بنابراین،

$$n < p \leqslant n!-1 < n!$$

(ث) بیان حکم فوق چنین تصوری را در ذهن القاء می‌کند که در هر شکاف دلخواهی از اعداد طبیعی، عدد اولی وجود دارد. درصورتی‌که چنین ادعایی درست نیست. ما می‌توانیم فواصلی هر قدر بزرگ به‌گونه‌ای اختیارکنیم که کلیه اعداد حاصل خالی از اعداد اول، باشند. این بیانگر پراکندگی اعداد اول در بین اعداد طبیعی است. حکم ذیل ثابت می‌کند: که اعداد اول در میان اعداد طبیعی، مانند واحدهای دورافتاده‌ای در صحرایی پهناور است.

۴ـ قضیه. به ازای هر عدد مثبت n، دنباله‌ای از n عدد صحیح متوالی موجود است که هیچیك از آنها اول نیستند.

برهان. اگر n یك عدد طبیعی دلخواهی باشد آنگاه اعداد

$$(n+1)!+2 \quad \text{و} \quad (n+1)!+3 \quad \text{و} \quad \ldots$$
$$(n+1)!+(n+1)$$

دنباله‌ای از n عدد صحیح متوالی است که هر یك مقسوم‌علیه‌ای غیراز ۱ وخودآن اعداد دارند. زیرا، اگر $2 \leqslant k \leqslant n+1$ آنگاه

$$k|(n+1)!+k$$

بنابراین، $(n+1)!+k$ عدد اول نیست.

روش دیگری براثبات حکم فوق چنین است. اگر

p_1، ...، p_n اعداد اول متوالی باشند و $a=p_1 \cdots p_n$ آنگاه کلیه اعداد ذیل اول نیستند.

$$a+2 \text{ و } a+3 \text{ و } \dots \text{ و } a+p_n$$

پس همواره می‌توان بین اعداد اول متوالی شکافهای به دلخواه ایجاد کرد.

تعیین تعداد مقسوم‌علیه‌ها

اگر تجزیه یك عدد به عوامل اول در دست باشد، کلیه مقسوم‌علیه‌های آن محاسبه‌پذیر است. تعیین مقسوم‌علیه‌ها به کمك قضیه ذیل است.

۵- قضیه. (ضابطه کلی بخشپذیری) فرض کنید

$$a=\prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k}$$

تجزیه قانونی a باشد و b یك عدد طبیعی دلخواه. در این صورت، $b|a$ اگر و فقط اگر

$$b=\prod_{k=1}^{n} p_k^{\beta_k}$$

به طوری که به ازای $1 \leqslant k \leqslant n$، $0 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k$.

برهان. ابتدا فرض کنید

$$b=\prod_{k=1}^{n} p_k^{\beta_k} \quad \text{و} \quad 0 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k$$

در این صورت،

$$\begin{aligned} a &= \prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k} \\ &= \prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k-\beta_k} p_k^{\beta_k} \\ &= \prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k-\beta_k} \prod_{k=1}^{n} p_k^{\beta_k} \\ &= c \times b \end{aligned}$$

که در آن،

$$c=\prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k-\beta_k}$$

و به ازای هر $1 \leqslant k \leqslant n$، $\alpha_k-\beta_k \geqslant 0$. بنابراین، $c \geqslant 1$ و $b|a$.

بالعکس، فرض کنید که $b|a$. در این صورت، بنابر تعریف عادکردن، عددی مانند c موجود است که $a=bc$

فرض کنید که تجزیه ظاهری b و c به صورت ذیل باشد:

$$b=\prod_{k=1}^{n} p_k^{\beta_k} \quad \text{و} \quad c=\prod_{k=1}^{n} p_k^{\gamma_k}$$

که به ازای هر $1 \leqslant k \leqslant n$، $\gamma_k \geqslant 0$ و $\beta_k \geqslant 0$.

از طرفی $a=bc$. بنابراین،

$$\prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k}=\prod_{k=1}^{n} p_k^{\beta_k} \prod_{k=1}^{n} p_k^{\gamma_k}=\prod_{k=1}^{n} p_k^{\beta_k+\gamma_k}$$

چون تجزیه منحصر بفرد است، پس به ازای

$$\beta_k+\gamma_k=\alpha_k \text{ ، } 1 \leqslant k \leqslant n$$

چون $\gamma_k \geqslant 0$، پس،

$$0 \leqslant \beta_k \leqslant \beta_k+\gamma_k=\alpha_k$$

بنابراین، حکم قضیه ثابت می‌شود.

قضیه فوق صورت نمایش مقسوم‌علیه‌های a را مشخص می‌کند. اگر b مقسوم‌علیه a باشد، باید نماینده عوامل اول b؛ یعنی، β_kها در شرط $0 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k$ صدق کنند و با تغییر β_kها مقسوم‌علیه‌های a معین می‌شوند. مثلاً، مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد $72=2^3 \times 3^2$ به صورت $2^\alpha \times 3^\beta$ است. که $0 \leqslant \alpha \leqslant 3$ و $0 \leqslant \beta \leqslant 2$. بنابراین، مقادیر ممکنه α برابر ۰، ۱، ۲؛ و مقادیر ممکنه βها برابر ۰، ۱، ۲، ۳ است. پس، کلیه مقسوم‌علیه مثبت آن، عبارتند از

$2^0 \times 3^0$	$2^0 \times 3^1$	$2^0 \times 3^2$
$2^1 \times 3^0$	$2^1 \times 3^1$	$2^1 \times 3^2$
$2^2 \times 3^0$	$2^2 \times 3^1$	$2^2 \times 3^2$
$2^3 \times 3^0$	$2^3 \times 3^1$	$2^3 \times 3^2$

اینك، حالت کلی را بررسی می‌کنیم.

۶- قضیه. فرض کنید

$$a=p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$$

که به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، $\alpha_i \geqslant 0$. همه مقسوم‌علیه‌های a عبارت‌اند از مجموعه همه جملات چند جمله‌ای که از حاصلضرب

$$(1) \quad (1+p_1+\cdots+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+\cdots+p_2^{\alpha_2}) \cdots (1+p_n+\cdots+p_n^{\alpha_n})$$

پدید می‌آیند.

برهان. اولاً بدیهی است که هر جمله از حاصلضرب (۱)

دارای نمایشی به صورت

$$(۲) \quad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n}$$

است، که به ازای $۱ \leqslant i \leqslant n$، $۰ \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$ بنابر قضیه قبل، $b|a$. از طرفی اگر $b|a$ آنگاه b نمایشی به صورت (۲) دارد که جمله‌ای از حاصلضرب (۱) است. بنابراین، حکم قضیه ثابت شد.

تعداد جملات حاصلضرب (۱) همان تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت a است. اگر b نمایشی به صورت (۲) داشته باشد با تغییر βها جملات حاصلضرب (۱) پدید می‌آیند. از طرفی β_i از ۰ تا α_i تغییر می‌کند. بنابراین، عده مقادیری که βها می‌توانند اختیار کنند برابر $\alpha_i + ۱$ است که $۱ \leqslant i \leqslant n$ و اگر $i \neq j$، β_i مستقل از β_j تغییر می‌کند. از اینجا نتیجهٔ ذیل حاصل می‌شود.

نتیجه. اگر تعداد مقسوم‌علیه‌های a را با $\tau(a)$ نمایش دهیم،

$$\tau(a) = (\alpha_1 + ۱)(\alpha_2 + ۱) \cdots (\alpha_n + ۱)$$

و اگر مجموع مقسوم‌علیه‌های a را با $\delta(a)$ نمایش دهیم،

$$\delta(a) = (۱ + p_1 + \cdots + p_1^{\alpha_1})(۱ + p_2 + \cdots + p_2^{\alpha_2}) \cdots (۱ + p_n + \cdots + p_n^{\alpha_n})$$
$$= \frac{p_1^{\alpha_1 + ۱} - ۱}{p_1 - ۱} \cdots \frac{p_n^{\alpha_n + ۱} - ۱}{p_n - ۱}$$

۷- مثال. عده و مجموع مقسوم‌علیه‌های ۷۲ را به دست آورید.

چون، $۷۲ = ۲^۳ \times ۳^۲$، پس

$$\tau(۷۲) = (۳ + ۱)(۲ + ۱) = ۱۲$$

$$\sigma(۷۲) = \frac{۲^۴ - ۱}{۲ - ۱} \times \frac{۳^۳ - ۱}{۳ - ۱} = ۱۵ \times ۱۳ = ۱۹۵$$

مورد استعمال دیگری که تجزیه ظاهری دو عدد دارد تعیین بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک آن دو عدد است. قضیه ذیل گذشته از آنکه ادعای فوق را ثابت می‌کند بلکه راه‌حل عملی برای تعیین آنها نیز به‌دست می‌دهد.

۸- قضیه. اگر

$$a = \prod_{i=۱}^{n} p_i^{\alpha_i} \quad \text{و} \quad b = \prod_{i=۱}^{n} p_i^{\beta_i}$$

که $\alpha_i \geqslant ۰$ و $\beta_i \geqslant ۰$، تجزیه ظاهری a و b باشد آنگاه، با فرض

$$v_i = \mathrm{Max}\{\alpha_i , \beta_i\}$$
$$u_i = \min\{\alpha_i , \beta_i\}$$

خواهیم داشت

$$\text{(الف)} \quad (a , b) = \prod_{i=۱}^{n} p_i^{u_i}$$

$$\text{(ب)} \quad [a , b] = \prod_{i=۱}^{n} p_i^{v_i}$$

$$\text{(ج)} \quad [a , b](a , b) = ab$$

برهان. (الف)، فرض کنید که

$$d = \prod_{i=۱}^{n} p_i^{u_i}$$

چون به ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant n$، $u_i \leqslant \alpha_i$ و $u_i \leqslant \beta_i$، پس بنابر قضیه ۵، $d|a$ و $d|b$. حال اگر f یک مقسوم‌علیه مثبت a و b باشد و نمایشی به صورت

$$f = \prod_{i=۱}^{r} p_i^{f_i}$$

داشته باشد آنگاه $f_i \leqslant u_i$ و $f_i \leqslant \beta_i$ و $۱ \leqslant i \leqslant n$. پس، f_i هم از α_i و هم از β_i نا بیشتر است. بنابراین، $f_i \leqslant u_i$ و بنابر قضیه ۵، $f|d$؛ یعنی، d بزرگترین مقسوم‌علیه a و b است.

برهان. (ب)، شبیه (الف) است. برای برهان (ج)، توجه کنید که اگر $۱ \leqslant i \leqslant n$،

$$u_i + v_i = \alpha_i + \beta_i$$

بنابراین،

$$ab = \left(\prod_{i=۱}^{n} p_i^{\alpha_i}\right)\left(\prod_{i=۱}^{n} p_i^{\beta_i}\right) = \prod_{i=۱}^{n} p_i^{\alpha_i + \beta_i}$$
$$= \prod_{i=۱}^{n} p_i^{u_i + v_i} = \left(\prod_{i=۱}^{n} p_i^{u_i}\right)\left(\prod_{i=۱}^{n} p_i^{v_i}\right)$$
$$= (a , b).[a , b]$$

۹- مثال. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک ۱۲۹۶، ۹۷۲۰ را به دست آورید.

حل. ابتدا تجزیه قانونی این دو عدد را به دست می‌آوریم:

$$۱۲۹۶ = ۲^۴ \times ۳^۴$$

$$۶۷۲۰ = ۲^۳ \times ۳^۵ \times ۵$$

بنا براین،

$$(۱۲۹۶,\ ۹۷۲۰) = ۲^۳ \times ۳^۴ = ۶۴۸$$

$$[۱۲۹۶,\ ۹۷۲۰] = ۲^۴ \times ۳^۵ \times ۵ = ۱۹۴۴۰$$

در پایان، به تعریف یکی‌از توابع مهم نظریه اعداد می‌پردازیم.

۱۰- تعریف: $\varphi(n)$؛ یعنی، عدهٔ اعداد طبیعی تا بیشتر از n و متباین با n است.

مثال،

$$\varphi(۱) = \varphi(۲) = ۱$$

$$\varphi(۳) = \varphi(۴) = \varphi(۶) = ۲$$

$$\varphi(۵) = \varphi(۸) = \varphi(۱۰) = ۴$$

اگر p یك عدد اول باشد، $\varphi(p) = p - ۱$. زیرا، اعداد طبیعی نا بیشتر از p ومتباین باآن عبارتنداز ۱، ۲، ...، $p - ۱$ که عدهٔ‌آنها برابر $p - ۱$ است.

به طور کلی، اگر p یك عدد اول و α عدد طبیعی باشد آنگاه

$$\varphi(P^\alpha) = p^{\alpha-۱}(p-۱)$$

زیرا، در میان اعداد ۱، ۲، ...، p^α آنهایی‌که نسبت به p^α متباین نیستند عبارتند از مضاربی از p که از p^α نا بیشترند؛ یعنی،

$$p \text{ و } ۲p \text{ و } \dots \text{ و } p^۲ \text{ و } \dots \text{ و } p^\alpha$$

که عدهٔ‌آنها $p^{\alpha-۱}$ است. با حذف این اعداد از اعداد ۱، ۲، ...، P^α مجموعهٔ اعداد متباین با p^α حاصل می‌شود. بنابراین،

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-۱} = p^{\alpha-۱}(p-۱)$$

تعیین مقدار $\varphi(n)$، در حالت کلی، نیاز به مقدماتی داد. ما در اینجا با ذکر یك قضیهٔ بدون برهان حالت‌کلی $\varphi(n)$ را نتیجه می گیریم.

۱۱- قضیه: اگر m و n دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(m\ ,\ n) = ۱$ آنگاه،

$$\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$$

بنابراین، با پذیرفتن حکم قضیه فوق، اگر

$$n = p_۱^{\alpha_۱} \cdots p_i^{\alpha_i}$$

چون p_iها نسبت بهم متباین هستند. پس،

$$\varphi(n) = \varphi(^{\alpha_۱}_۱) \cdots \varphi(p_i^{\alpha_i})$$

$$= p_۱^{\alpha_۱-۱}(p_۱-۱)) \cdots p_i^{\alpha_i-۱}(p_i-۱)$$

$$= n\left(p - \frac{۱}{p_۱}\right) \cdots \left(۱ - \frac{۱}{p_i}\right)$$

بنابراین قضیه مهم ذیل ثابت شد.

۱۲- قضیه: اگر

$$n = p_۱^{\alpha_۱} \cdots p_i^{\alpha_j}$$

تجزیه قانونی n باشدآنگاه

$$\varphi(n) = n\left(۱ - \frac{۱}{p_۱}\right) \cdots \left(۱ - \frac{۱}{p_i}\right)$$

۱۳- مثال. عده اعداد اول نا بیشتر از ۱۴۰۰ و متباین با آن را محاسبه کنید.

حل. چون $۱۴۰۰ = ۲^۳ \times ۵^۲ \cdot ۷$، پس،

$$\varphi(۱۴۰۰) = ۱۴۰۰\left(۱ - \frac{۱}{۲}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۵}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۷}\right)$$

$$= ۴۸۰$$

مآخذ

۱ــ دکتر غلامحسین مصاحب، تئوری مقدماتی اعداد، جلد دوم، قسمتهای اول، دوم، سوم، انتشارات سروش، ۱۳۵۸.

۲ــ ویلیام وآدمز، ترجمه دکترآدینه محمد نارنجانی، آشنایی با نظریه اعداد، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۲.

۳ــ Calvin T. Long, Elementary Introduction to Number Theory, Heath & Company, 1972.

اعداد مختلط

محمود نصیری

از آنجا که قرار است آشنایی با اعداد مختلط در کتب جدید دوره متوسطه ارائه گـردد. از آقای محمود نصیری تقاضا شد تا مقاله‌ای درحد تدریس این مبحث ارائه نمایند. فلذا مقالهٔ حاضر را باید بـه منظور روشی بـرای تدریس این مبحث در دورهٔ نظری تلقی نمود. از همکاران و دبیران محترم تقاضا دارد چنانچه نظراتـی در این مـورد داشته باشند ما را در جریان بگذارند.

هیأت تحریریه

ابتدایی‌ترین نوع عدد، اعداد طبیعی است که کودکان آنها را برای شمارش اشیاء یاد می‌گیرند کوشش برای اینکه عمل تفریق، یعنی حـل معادله $x+a=b$ نسبت به x وقتی کـه a و b معلوم‌اند، میسر باشد به معرفی صفر و اعداد منفی منجر مـی‌شود در این صـورت مجموعـه اعـداد صحیح $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ساخته مـی‌شود. وقتی می‌خواهیم عمل تقسیم را انجام دهیم باید معادله $ax=b$ را کـه در آن a و b معلوم و a مخالف صفر است حـل کنیم. برای این‌کـه حل این معادلـه در تمام حالات ممکن بـاشد، احتیاج به معرفی اعداد گویا (کسرها) داریم. این اعداد را با نماد $\frac{b}{a}$ که در آن a و b صحیح و $a \neq 0$، نشان می‌دهیم.

اکنون چهـار عمل اصلی حساب، یعنی اعمال جمع، تفریق ضرب، تقسیم (به جز تقسیم بر صفر) قابل استفاده هستند.

اعداد گویا تا حدودی نیاز ما را در مسائل ابتدائی حساب برطرف می‌کند اما باز برای حل معادله $x^2=2$ دچار مشکل خواهیم‌شد. زیرا می‌توانیم ثابت‌کنیم که عدد $\sqrt{2}$ را نمی‌توان به‌صورت $\frac{p}{q}$ که درآن p و q صحیح باشند نوشت بنابراین این نوع اعداد گویا نیستند این اعداد را گنگ می‌نامیم. لذا با اضافه‌کـردن این اعداد بـه مجموعه اعداد گـویا مجموعه اعداد حقیقی را داریم.

برای مدتی طولانی اعتقاد براین بودکه با معرفی مجموعه کامل اعداد حقیقی علم حساب به حدکمال رسیده است. امـا دراوایل قرن شانزدهم اشتیاق زیادی برای حل معادلات جبری وجود داشت، مثلاً پیدا کـردن دو عدد کـه مجموع آنها ۴ و حاصلضرب آنهـا ۷ باشد با نمادگـذاری امروزی، دستگـاه

$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=7 \end{cases}$$

را داریم که با حذف y بین دو معادله به حل معادله

$$x^2-4x+7=0$$

منجر می‌شود که جوابهای آن

$$x = ۲ \pm \sqrt{-۳}$$

است لذا

$$x=۲+\sqrt{-۳} \quad ، \quad y=۲-\sqrt{-۳}$$

و برعکس. بنابراین جواب مسأله دو عبارت $۲+\sqrt{-۳}$ و $۲-\sqrt{-۳}$ است، ریاضیدانان آن زمان دریافته بودند که این اعداد، حقیقی نیستند. مربع هر عدد حقیقی مثبت است، بنابراین ۳− مربع هیچ عدد حقیقی نیست و لذا $\sqrt{-۳}$ نمی‌تواند حقیقی باشد. با این وجود وقتی دو جواب را باهم جمع می‌کنیم حاصل ۴ و اگر درهم ضرب کنیم،

$$(۲+\sqrt{-۳})(۲-\sqrt{-۳})=۴-(\sqrt{-۳})^۲=۷$$

حاصل می‌شود. اکنون در معادله درجه سوم وضعیت دیگری رخ می‌دهد درسال ۱۵۴۵ کاردانو ریاضیدان ایتالیائی فرمولی برای جواب معادله درجه سوم

$$x^۳+px+q=۰$$

به دست آورد. این فرمول به صورت زیر است.

$$x=\sqrt[۳]{-\frac{q}{۲}\pm\sqrt{\frac{q^۲}{۴}+\frac{p^۳}{۲۷}}}$$

$$-\frac{p}{۳\sqrt[۳]{\frac{-q}{۲}\pm\sqrt{\frac{q^۲}{۴}+\frac{p^۳}{۲۷}}}}$$

• (برای محاسبه این فرمول به مقاله آقای دکتر ذاکری در رشد شماره ۱۶ مراجعه کنید.)

اگر این فرمول را برای معادله

$$x^۳-۱۵x-۴=۰$$

که دارای جوابهای حقیقی ۴، $-۲+\sqrt{۳}$ و $-۲-\sqrt{۳}$ است به کار ببریم یکی از جوابها به صورت زیر است؛

$$x=\sqrt[۳]{۲+\sqrt{-۱۲۱}}+\frac{۱۵}{۳\sqrt[۳]{۲+\sqrt{-۱۲۱}}}$$

$$=\sqrt[۳]{۲+۱۱\sqrt{-۱}}+\frac{۵}{\sqrt[۳]{۲+۱۱\sqrt{-۱}}}!$$

چه اتفاقی افتاده است که به رادیکال‌های منفی برمی‌خوریم؟ صحت فرمول به اثبات رسیده و می‌دانیم هر سه ریشه این معادله حقیقی‌اند!

و جالبتر از آن؛ واضح است که

$$۲+۱۱\sqrt{-۱}=(۲+\sqrt{-۱})^۳$$

در نتیجه

$$x=۲+\sqrt{-۱}+\frac{۵}{۲+\sqrt{-۱}}$$

$$=۲+\sqrt{-۱}+\frac{۵(۲-\sqrt{-۱})}{(۲+\sqrt{-۱})(۲-\sqrt{-۱})}$$

$$=۲+\sqrt{-۱}+\frac{۵(۲-\sqrt{-۱})}{۴-(-۱)}$$

$$=۲+\sqrt{-۱}+۲-\sqrt{-۱}=۴!$$

یعنی این جواب همان $x=۴$ است.

خودتان را در وضع کاردان قرار دهید سال ۱۵۴۵ (۴۵۰ سال قبل) است. ریشه دوم اعداد منفی مشروعیتی ندارد، نظریه اعداد مختلط متولد نشده است. چگونه این نماد بی‌معنی را باید تعبیر کرد؟

ریاضیات نمی‌تواند متوقف شود، اگردراین مرحله متوقف می‌شد، ناقص و جادویی می‌نمود. معادله‌ای که به روشنی جواب دارد فرمول برای‌آن جوابی نمی‌داشت. این وضع بارها در تاریخ ریاضیات اتفاق افتاده بود. حال اگر نماد جدیدی برای ریشه دوم اعداد منفی معرفی کنیم خواهیم دید که این نقص نیز برطرف شدنی بوده و بازهم ریاضیات به سوی کمال پیش می‌رود. لذا باید نوع جدیدی عدد معرفی گردد. که در موردآنها قاعده مربع هرعددی مثبت است، برقرار نباشد. بیاییم $\sqrt{-۱}$ را i بنامیم. در این صورت ریشه دوم همه اعداد منفی معنی پیدا می‌کند. لذا درمعادله درجه دوم

$$x^۲-۴x+۷=۰$$

عبارات $۲+\sqrt{-۳}$ و $۲-\sqrt{-۳}$ یعنی $۲+\sqrt{۳}i$ و $۲-\sqrt{۳}i$ جواب مسأله می‌باشند و در معادله

$$x^۳-۱۵x-۴=۰$$

و فرمول کاردان دیگر مشکلی نخواهیم داشت. شما می‌توانید به i به عنوان عددی خیالی بنگرید. این مهم نیست، مهم‌آن است که همین عدد به ظاهر خیالی مشکل ما را حل کرده و ما را به دنیای جدیدی از واقعیت‌های ریاضی رهنمون می‌سازد. پس چیزی که ما را به واقعیت‌ها راهنمائی کند، خود نیز باید یك واقعیت باشد.

اکنون این اعداد را که در مورد آنها قاعده مربع هرعددی مثبت است برقرار نیست اعداد موهومی یا مختلط می‌نامیم.

حال اگر $a>0$، جذر عدد حقیقی $-a$ را درصورت وجود، می‌توان به صورت $\sqrt{-a}=\sqrt{-1}\sqrt{a}$ نوشت. اویلر ریاضیدان قرن هیجدهم نماد i را برای $\sqrt{-1}$ معرفی کرد، لذا $\sqrt{-a}=i\sqrt{a}$ و $i^2=-1$.

هرعبارت به صورت $a+ib$ را که $a, b \in R$ یک عدد مختلط می‌نامیم. به این ترتیب هر معادله درجهٔ دوم

$$ax^2+bx+c=0 \quad \text{و} \quad (a, b, c \in R)$$

اگر $b^2 \geqslant 4ac$ دارای دو جواب حقیقی

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

و اگر $b^2<4ac$ دارای دو جواب موهومی

$$x=\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

است.

تعریف ۱. عباراتی به شکل $z=a+ib$ را که در آن $a, b\in R$ و $i^2=-1$، عدد مختلط می‌نامیم مجموعه اعداد مختلط را به C نمایش می‌دهیم:

$$C=\{a+bi \mid a, b\in R,\ i^2=-1\}$$

اگر $a=0$ عدد bi را عدد مختلط محض یا عدد موهومی می‌نامیم.

تعریف ۲. دو عدد مختلط

$$z_1=a+bi \quad \text{و} \quad z_2=c+di$$

را مساوی گوئیم اگر و فقط اگر $a=c$ و $b=d$.
در این صورت $z_1=z_2$.

تعریف ۳. عدد مختلط $0+0i$ را صفر اعداد مختلط می‌نامیم و آن را به 0 نشان می‌دهیم.

$$a+bi=0 \Longleftrightarrow a=0 \ \text{و}\ b=0$$

تعریف ۴. مجموع دو عدد مختلط

$$z_1=a+bi \quad \text{و} \quad z_2=c+di$$

را چنین تعریف می‌کنیم:

$$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)$$
$$=(a+c)+(b+d)i$$

تمرین. ثابت کنید اعداد مختلط نسبت به عمل جمع دارای خواص جابجائی و شرکت پذیری است.

تعریف ۵. برای هر عدد مختلط $z=a+bi$ عدد مختلط $-z$ وجود دارد به طوری که

$$z+(-z)=0$$

یعنی

$$-z=-a-bi$$

لذا $-z$ را قرینه z نسبت به عمل جمع می‌نامیم.

تعریف ۶. اعداد مختلط

$$z_1=a+bi \quad \text{و} \quad z_2=c+di$$

مفروضند تفاضل z_2 از z_1 را چنین تعریف می‌کنیم:

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2)$$

بنابراین

$$z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i$$

تعریف ۷. حاصلضرب دو عدد مختلط

$$z_1=a+bi \quad \text{و} \quad z_2=c+di$$

را چنین تعریف می‌کنیم:

$$z_1z_2=(a+bi)(c+di)$$
$$=ac+adi+bci+bdi^2$$
$$=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

تمرین. ثابت کنید اعداد مختلط نسبت به عمل ضرب دارای خواص جابجائی و شرکت پذیری می‌باشند و همچنین عمل ضرب نسبت به جمع توزیع‌پذیر است.

مزدوج یک عدد مختلط
(Conjugate)

تعریف ۷. عدد مختلط $z=a+bi$ مفروض است، عدد مختلط $a-ib$ را مزدوج عدد z می‌نامیم و آن را با نماد $\bar{z}$ نشان می‌دهیم.

$$\bar{z}=a-ib$$

مشخص است که $z\bar{z}$ عددی حقیقی است.

$$z\bar{z}=(a+ib)(a-ib)=a^2-(ib)^2=a^2+b^2$$

لذا $z\bar{z}$ عددی حقیقی و مثبت است مگر در حالتی که $z=0$،

که در این صورت $z\bar{z}=0$.

اگر z_1 و z_2 اعدادی مختلط باشند روابط زیر همواره برقرارند که به سادگی قابل اثبات می‌باشند.

الف. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

ب. $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$

نتیجه؛ $(\overline{z^n})=(\bar{z})^n$

ج. $\bar{\bar{z}}=z$

د. $z=\bar{z} \iff z\in R$ (عدد حقیقی)

به عنوان نمونه (ب) را ثابت می‌کنیم.

$$\overline{z_1z_2}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}$$
$$=(ac-bd)-(ad+bc)i$$
$$\bar{z}_1\bar{z}_2=(a-bi)\,(c-di)$$
$$=(ac-bd)-(ad+bc)i\,.$$

اکنون عدد مختلط

$$z=0+1\cdot i=i$$

را درنظر می‌گیریم آیا عدد مختلطی مانند z' وجود دارد به طوری که $zz'=1$؟ جواب مثبت است. زیرا اگر فرض کنیم $z'=a+bi$،

$$zz'=1 \Longrightarrow i(a+bi)=1$$
$$\Longrightarrow ai+bi^2=1$$

یا

$$ai-b=1$$

بنابراین

$$-b+ai=1+0i$$

در نتیجه $b=-1$ و $a=0$ لذا $z'=-i$ و چون $(i)\,(-i)=1$ پس

$$z'=\frac{1}{i}=-i$$

در این صورت عدد $z'=\frac{1}{i}$ را وارون یا معکوس $z=i$ می‌نامیم. $z'=\frac{1}{z}$.

تعریف ۸. عدد مختلط

$$z=a+bi\neq 0$$

مفروض است اگر عدد مختلط

$$z'=a'+b'i$$

وجود داشته باشد به طوری که

$$zz'=z'z=1$$

آنگاه z' را معکوس یا وارون z می‌نامیم و چنین می‌نویسیم

$$z'=\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}$$

اگر عدد مختلط $z=a+bi$ مخالف صفر باشد وارون آن وجود داشته و به صورت زیر است.

$$z'=\frac{1}{a+bi}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{bi}{a^2+b^2}$$

زیرا، اگر

$$z'=a'+b'i$$

آنگاه

$$zz'=(a+bi)\,(a'+b'i)=(aa'-bb')$$
$$+(ab'+ba')i=1+0i$$

بنابراین با توجه به تساوی دو عدد مختلط، داریم:

$$\begin{cases} aa'-bb'=1 \\ ab'+ba'=0 \end{cases}$$

که از حل دستگاه فوق نسبت به a' و b' نتیجه می‌شود

$$a'=\frac{a}{a^2+b^2} \quad \text{و} \quad b'=\frac{-b}{a^2+b^2}$$

اگر $z=0$ آنگاه

$$a=b=0 \quad \text{و} \quad a^2+b^2=0$$

لذا وارون آن وجود ندارد. z' را با روش دیگری نیز می‌توانیم پیدا کنیم. اگر

$$z=a+bi\neq 0$$

آنگاه

$$z'=\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)\,(a-bi)}$$
$$=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{bi}{a^2+b^2}$$

حال آماده هستیم تا تقسیم دو عدد مختلط را نیز تعریف کنیم.

تعریف ۹. اگر z_1 و z_2 دو عدد مختلط و $z_2\neq 0$ آنگاه

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1\cdot\frac{1}{z_2}$$

بنابراین اگر

$$z_1=a+bi \quad \text{و} \quad z_2=c+di\ ،\ (z_2\neq 0)$$

مفروض باشند در این صورت داریم،

$$\frac{z_۱}{z_۲}=z_۱\cdot\frac{۱}{z_۲}=(a+bi)\cdot\frac{۱}{c+di}$$

$$=(a+bi)\cdot\frac{c-di}{c^۲+d^۲}=\frac{ac+bd}{c^۲+d^۲}+\frac{bc-ad}{c^۲+d^۲}i$$

نتیجه.

$$\overline{\left(\frac{z_۱}{z_۲}\right)}=\frac{\overline{z}_۱}{\overline{z}_۲}$$

اکنون تمام اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم را در مورد اعداد مختلط بیان کردیم. اعداد حقیقی نیز حالت خاصی از اعداد مختلط است در نتیجه هر خاصیت کلی اعداد مختلط در مورد اعداد حقیقی نیز برقرار است. اما باید درنظر داشت که عکس این حکم صحیح نیست. مثلاً، هیچ رابطه ترتیبی ساده‌ای بین اعداد مختلط وجود ندارد و لذا نماد $z_۱ < z_۲$ برای این اعداد تعریف نمی‌شود همچنین مثبت یا منفی بودن یك عدد مختلط معنی ندارد. اینها خواصی از اعداد حقیقی می‌باشندکه قابل انتقال به اعداد مختلط نیستند.

حال تا قبل‌از نمایش هندسی اعداد مختلط چند مثال بیان می‌کنیم. باید درنظر داشت‌که منظور از ساده‌کردن یك عدد مختلط یعنی تبدیل‌آن به فرم $x+iy$ که درآن x و y اعداد حقیقی می‌باشند.

مثال ۱. حاصل

$$S=۱+i+i^۲+\cdots+i^{n-۱}$$

را پیدا کنید.

حل.

$$S=\frac{۱-i^n}{۱-i}$$

اگر $n=۴k$ آنگاه، $i^n=(i^۴)^k=۱$ و لذا $S=۰$

اگر $n=۴k+۱$ آنگاه، $i^n=i$ و لذا $S=۱$

اگر $n=۴k+۲$ آنگاه،

$$i^n=i^{۴k}\cdot i^۲=-۱$$

و لذا

$$S=\frac{۲}{۱-i}=\frac{۲(۱+i)}{۱-i^۲}=۱+i$$

و بالاخره اگر $n=۴k+۳$ آنگاه

$$i^n=i^{۴k}\cdot i^۳=i^۳=-i$$

و در نتیجه:

$$S=\frac{۱+i}{۱-i}=\frac{(۱+i)^۲}{۱-i^۲}=\frac{۱+i^۲+۲i}{۲}=i$$

مثال ۲. اگر $a_۰$، $a_۱$، …، a_n اعداد حقیقی، وعدد مختلط $z=\alpha+\beta i$ ریشه معادله،

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱x+a_۰=۰$$

باشد.

ثابت‌کنید $\overline{z}=\alpha-\beta i$ (مزدوج z) نیز ریشه معادله $f(x)=۰$ است.

حل. چون $z=\alpha+\beta i$ ریشه معادله است لذا

$$f(z)=a_nz^n+a_{n-۱}z^{n-۱}+\cdots+a_۱z+a_۰=۰$$

اکنون با توجه به روابط

$$\overline{z_۱z_۲}=\overline{z}_۱\cdot\overline{z}_۲ \quad و \quad \overline{z_۱+z_۲}=\overline{z}_۱+\overline{z}_۲$$

و $\overline{(z^k)}=(\overline{z})^k$ چون ضرایب حقیقی‌اند،

$$\overline{a}_n=a_n\ ,\ \cdots\ ,\ \overline{a}_۰=a_۰$$

در نتیجه

$$\overline{f(z)}=a_n(\overline{z})^n+a_{n-۱}(\overline{z})^{n-۱}+\cdots+a_۱\overline{z}+a_۰=۰$$

یعنی

$$f(\overline{z})=\overline{f(z)}=۰$$

و لذا $\overline{z}$ نیز ریشه معادله است.

مثال ۳. معادله درجه دومی با ضرایب حقیقی پیداکنیدکه یك ریشه‌آن $\alpha=۳-۲i$ باشد.

حل. بنابر مثال قبل باید ریشه دیگر معادله $\overline{\alpha}=۳+۲i$ باشد. در نتیجه

$$\alpha\overline{\alpha}=۹+۴=۱۳ \quad و \quad \alpha+\overline{\alpha}=۶$$

یعنی

$$z^۲-۶z+۱۳=۰$$

معادله مطلوب است.

نمایش اعداد مختلط به صورت زوج مرتب و نمایش هندسی

همان طورکه می‌دانیم برای نمایش اعداد حقیقی محوری مانند $x'x$ و نقطه‌ای روی‌آن به نام مبدأ درنظر می‌گیریم و اعداد مثبت و منفی را به ترتیب در سمت راست و سمت چپ

مبدأ نشان می‌دهیم. در این نمایش برای هر عدد حقیقی نقطه‌ای روی محور وجود دارد و بالعکس.

حال می‌خواهیم روشی برای نمایش اعداد مختلط بیابیم. هر عدد مختلط $z=a+bi$ از دو قسمت تشکیل شده است. a که آن را قسمت حقیقی و b که آن را قسمت موهومی یا انگاری می‌نامیم. این عدد را می‌توان به صورت زوج مرتبی چون (a, b) از اعداد حقیقی نوشت بنابراین $z=(a, b)$ به جای $z=a+bi$ نوشته می‌شود. مثلاً عدد $z=۳-۲i$ را به صورت $z=(۳, -۲)$ نشان می‌دهیم. پس،

$$C=\{(a, b)|a, b\in R\}$$

باید توجه داشت که b یعنی قسمت انگاری z یك عدد حقیقی است. وقتی که $b=۰$، آنگاه عدد مختلط z به $a+۰i$ تبدیل می‌شود. در این حالت، قواعد جمع و ضرب به صورتهای

$$a+۰i+c+۰i=(a+c)+۰i$$

$$(a+۰i)(c+۰i)=ac+۰i$$

تبدیل می‌شوند. این قواعد نشان می‌دهد که جمع و ضرب اعداد حقیقی (جمع و ضرب R) با جمع و ضرب اعداد مختلط مطابقت دارد پس از این به بعد به جای $a+۰i$ می‌نویسیم a واز این‌رو اعداد حقیقی را حالت خاص اعداد مختلط یا زیر مجموعه‌ای از اعداد مختلط تلقی می‌کنیم. لذا با نمایش فوق،

$$R=\{(a, ۰)|a\in R\}$$

همچنین ضرب یك عدد حقیقی در یك عدد مختلط از قاعده ساده،

$$a(c+id)=ac+iad$$

نتیجه می‌شود. صفر اعداد مختلط و واحد اعداد مختلط همان ۰ و ۱ حقیقی هستند.

در این نمایش بعضی مفاهیمی راکه در مورد اعداد مختلط تعریف کردیم به صورت زیر می‌باشند.

۱. تساوی:

$$(a, b)=(c, d) \Longleftrightarrow a=c \text{ و } b=d$$

۲. جمع:

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d)$$

۳. ضرب:

$$(a, b)\cdot(c, d)=(ac-bd, ad+bc)$$

۴. مزدوج:

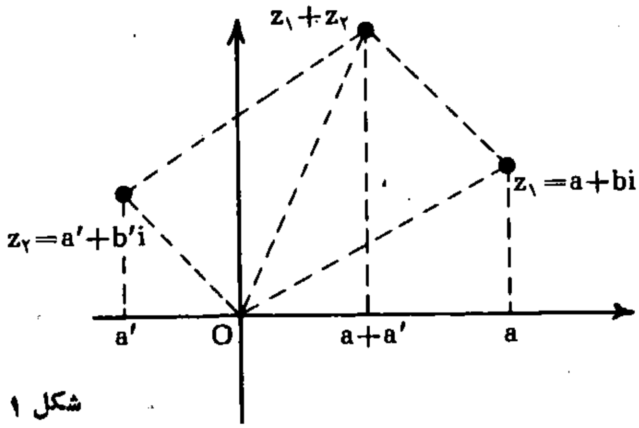
$$\overline{(a, b)}=(a, -b)$$

۵. تقسیم:

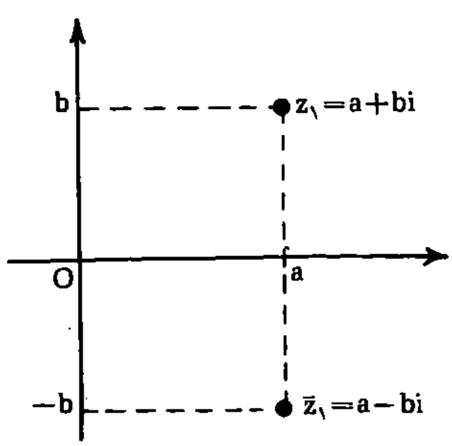
$$\frac{(a, b)}{(c, d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^۲+d^۲}, \frac{bc-ad}{c^۲+d^۲}\right)$$

طبق آنچه در دستگاه محورهای مختصات عمود برهم می‌دانیم زوج مرتب (a, b) را می‌توان به عنوان مختصات نقطه‌ای از صفحه این دو محور تلقی کرد. بنابراین صفحه‌ای را اختیار کرده و دو محور عمود برهم Ox و Oy را در آن رسم می‌کنیم. محور افقی یعنی Ox را محور حقیقی و محور قائم یعنی Oy را محور موهومی می‌نامیم. فرض کنیم عدد $z=a+bi$ به وسیله نقطه $M(a, b)$ نمایش داده شود. به این طریق می‌توان اعداد مختلط را به صورت نقاط یك صفحه مشخص کرد. بنابراین هر نقطه این صفحه نمایش یك عدد مختلط است و بالعکس. درحالتی که، $b=۰$ نمایش $(a, ۰)$ همان نقاط روی محور xها می‌باشد.

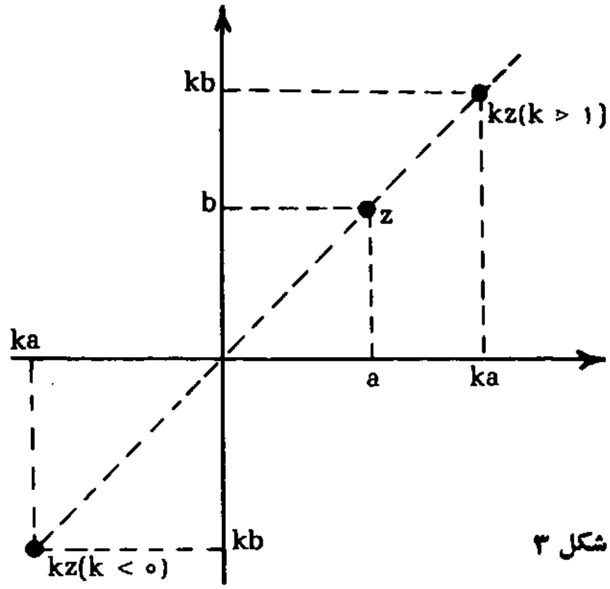
در ذیل نمایش هندسی $z_۱$، $z_۱+z_۲$، $z_۱-z_۲$ و $kz\ (k\in R)$ رسم شده است.



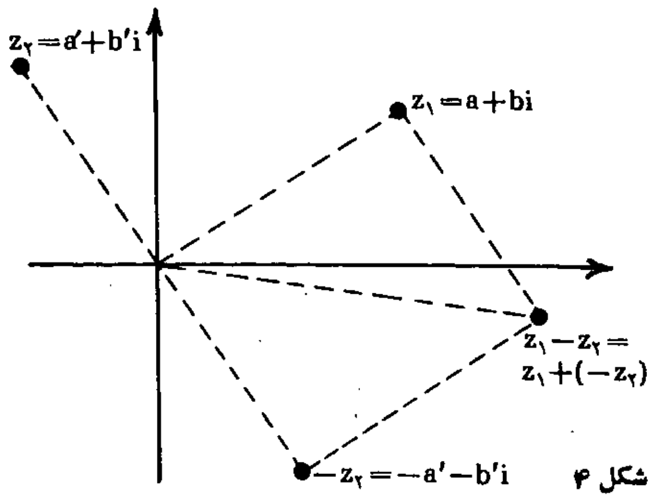
شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

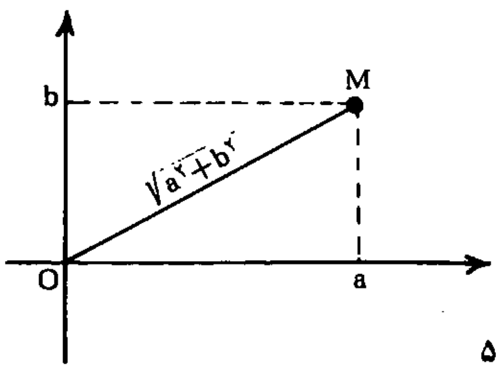


شکل ۴

$$kz=ka+kbi=k(a\ ,\ b)$$

قدرمطلق یا مدول – Absolute Value or Modulus

فرض‌کنیم نقطه M نمایش هندسی $z=a+bi$ باشد، فاصله



شکل ۵

$OM=\sqrt{a^2+b^2}$ را قدرمطلق یا مدول عدد z می‌نامیم و آن را با نماد $|z|$ نشان می‌دهیم پس،

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$|z|=0 \iff z=0$$

چون $a=a+0i$ مدول a برابر است با

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2}=|a|$$

یعنی اگر a عددی حقیقی باشد مدل a همان قدرمطلق معمولی a است.

بنابراین قدر مطلق یا مدول $z=a+bi$ همان فاصله مبدأ تا نقطه $(a\ ,\ b)$ است. اگر

$$z_1=a+bi \quad و \quad z_2=c+di$$

آنگاه $|z_1-z_2|$ همان فاصله از نقطه z_1 تا نقطه z_2 است.

$$|z_1-z_2|=|(a-c)+(b-d)i|$$

$$=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

به ازاء هر $z\in C$،

$$|z|=|\bar{z}|=\sqrt{a^2+b^2}$$

خواصی از قدرمطلق یا مدول

۱. به ازای هر $z\in C$،

$$|z|\geqslant 0 \quad و \quad |z|\in R$$

۲. $|z|^2=z\bar{z}$

۳. $|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|$

۴. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ ، $z_2\neq 0$

۵. $|z_1+z_2|\leqslant |z_1|+|z_2|$

۶. $|z_1-z_2|\geqslant \big|\,|z_1|-|z_2|\,\big|$

۷. اگر $z=a+bi$ آنگاه

$$|a|\leqslant |z| \quad و \quad |b|\leqslant |z|$$

۸. اگر z' وارون z باشد آنگاه

$$z'=\frac{\bar{z}}{|z|^2} \ ،\ (z\neq 0)$$

اثبات. (۱) و (۲) به سادگی ثابت می‌شوند برای (۳)

با توجه به (۲) چنین داریم.

$$|z_1z_2|^2=(z_1z_2)\,(\overline{z_1z_2})=(z_1z_2)\,(\bar{z}_1\bar{z}_2)$$
$$=z_1\bar{z}_1z_2\bar{z}_2=|z_1|^2|z_2|^2$$

و چون به ازاء هر $z\in C$، $|z|\geqslant 0$ لذا بدون هیچ مشکلی می‌توان از طرفین تساوی ریشه دوم گرفت.

برای اثبات (۴) چون $z_2\neq 0$، $|z_2|>0$ و بنابر (۳) چنین داریم

$$z_2\cdot\frac{z_1}{z_2}=z_1 \Longrightarrow \left|z_2\cdot\frac{z_1}{z_2}\right|=|z_1| \Longrightarrow$$
$$|z_2|\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=|z_1| \Longrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$$

اثبات ۵. با توجه به شکل در مثلث OAM اگر

$AM=OB=|z_2|$ و $OA=|z_1|$

و

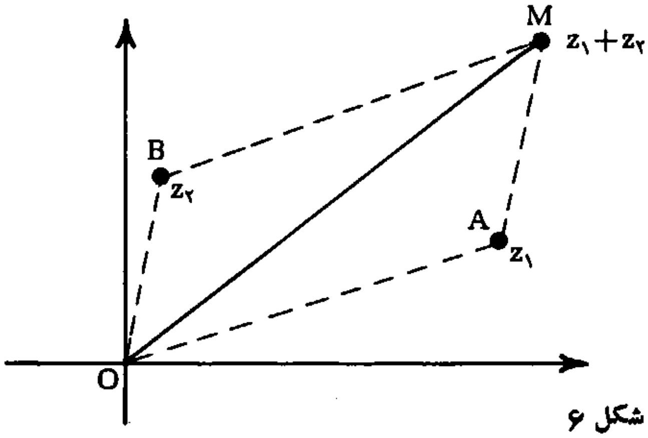
$$OM=|z_1+z_2|$$

آنگاه

$$OM<OA+AM$$

یعنی

$$|z_1+z_2|<|z_1|+|z_2|$$



شکل ۶

و تساوی وقتی برقرار است که مثلث از بین برود و سه نقطه روی یک خط راست قرار گیرند، $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. می‌توان مستقیماً با روش جبری نیز این حکم را ثابت کرد. اگر

$z_1=a+bi$ و $z_2=c+di$

با توجه به نامساوی

$$(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)\,(c^2+d^2)$$

نتیجه می‌گیریم

$$(ac+bd)^2\leqslant|z_1|^2|z_2|^2$$

که با جذر گرفتن از طرفین داریم

$$ac+bd\leqslant|z_1|\,|z_2|$$

اگر $ac+bd$ منفی باشد نیز این رابطه صحیح است. بنابراین:

$$|z_1+z_2|^2=(a+c)^2+(b+d)^2$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2+2(ac+bd)$$
$$\leqslant|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1|\,|z_2|$$
$$=(|z_1|+|z_2|)^2$$

در نتیجه با جذر گرفتن از طرفین چون همگی مثبت‌اند نامساوی ثابت می‌شود. و تساوی وقتی برقرار است که

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

نتیجه: چون $|-z|=|z|$ بنابراین

$$|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|-z_2|$$

یا

$$|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

اثبات ۶. بنابر (۵)،

$$|(z_1-z_2)+z_2|\leqslant|z_1-z_2|+|z_2|$$

در نتیجه

$$(1)\quad |z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|$$

با تبدیل z_1 و z_2 به یکدیگر از رابطه (۱) داریم.

$$|z_2-z_1|\geqslant|z_2|-|z_1| \Longrightarrow$$
$$-|z_1-z_2|\leqslant|z_1|-|z_2|$$

و لذا

$$-|z_1-z_2|\leqslant|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1-z_2|$$

یعنی

$$\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1-z_2|.$$

اثبات ۷. به سادگی به دست می‌آید. زیرا

$$|a|\leqslant\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{یا} \quad |b|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$$

اثبات ۸. چون $z\neq 0$ لذا

$$|z|^2=a^2+b^2\neq 0$$

و از رابطه

$$z\bar{z}=|z|^2$$

داریم

$$\frac{z\bar{z}}{|z|^2}=1$$

یعنی $\frac{\bar{z}}{|z|^{2}}$ وارون z است پس

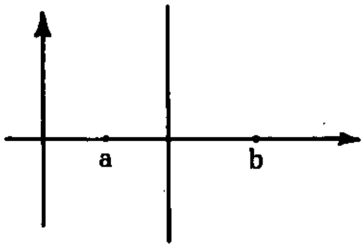
$$z'=\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^{2}}$$

مثال ۴. مکان نقاطی از صفحه را پیداکنیدکه در شرط

$$|z-a|=|z-b|$$

صدق می‌کند. (a و b حقیقی‌اند و $a\neq b$).

حل. با توجیه هندسی مکان به سادگی مشخص است نقاطی که فاصله‌آنها از a برابر فاصله‌آنها از b است یعنی عمود منصف پاره خطی‌که از a و b می‌گذرد با محاسبه نیز جواب مشخص می‌شود.



شکل ۷

$$|z-a|^{2}=|z-d|^{2}\implies$$
$$(z-a)(\bar{z}-a)=(z-b)(\bar{z}-b)\implies$$
$$(z+\bar{z})(a-b)=a^{2}-b^{2}\implies$$
$$z+\bar{z}=a+b\implies x=\frac{a+b}{2}$$
$$\mathrm{Re}\,z=\frac{a+b}{2}$$

($\mathrm{Re}\,z$ یعنی قسمت حقیقی z)

مثال ۵. معادله مکان نقطه‌ای از صفحه را پیداکنیدکه فاصله آن از نقطه $z_0=(a\,,\,b)$ کمتر، مساوی یـا بیشتر از مقدار ثابت r باشد. ($r>0$)

حل. می‌دانیم مکان نقطه‌ای از صفحه‌کـه فاصله‌آن از نقطهٔ ثابتی‌کمتر، مساوی یا بیشتر از مقدار ثابت r باشد بـه ترتیب نقاط داخل، روی یا خارج دایره‌ای بـه شعاع r است. اگر $M(x\,,\,y)$ نقطه‌ای از مکان باشد؛

این نقطه نمایش عدد مختلط $z=x+iy$ است لذا مکان به ترتیب

$|z-z_0|<r$ ، $|z-z_0|=r$ یا $|z-z_0|>r$

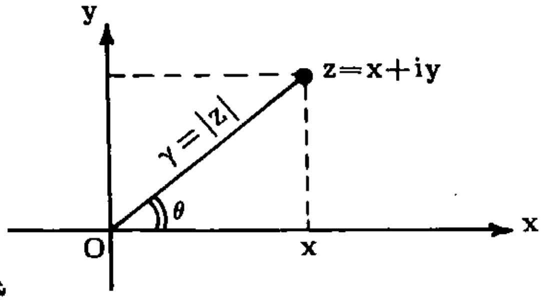
است. زیرا،

$$OM=\sqrt{(x-a)^{2}+(y-b)^{2}}$$

(O نمایش z_0 است).

نمایش مثلثاتی اعداد مختلط

$$\begin{cases} x=|z|\cos\theta \\ y=|z|\sin\theta \end{cases}$$



شکل ۸

نمایش عدد مختلط $z\neq 0$ را دریك صفحه جهت‌دار درنظر می‌گیریم و فرض مـی‌کنیم θ اندازه زاویه جهت‌دار بین خطی که از O و نمایش z می‌گذرد با محور xهـا باشد. (مقدار دورانی‌کـه باید محور xهـا گـرد نقطـه O دوران‌کند تا بـر نمـایش z منطبق شود. و این مقدار دوران مثبت است اگـــر در جهت مثبت صفحه (جهت مثلثاتـی) بـاشد و منفی است اگـــر در خـلاف آن بـاشد.) در این صورت θ را دامنه یـا شناسه (z(argument می‌نامیم. واضح استکـه اگر $\theta=\mathrm{Arg}\,z$، آنگاه می‌توان $2k\pi$ نیز به‌آن اضافه‌کرد. برای‌حل این مشکل همواره مقداراصلی θ را درنظر می‌گیریم یعنی اندازه‌ای از θ که $-\pi<\theta\leqslant\pi$. دراین صورت به ازای هر عدد مختلط غیرصفر z فقط وفقط یك مقدار θ وجود داردکه

$$\begin{cases} x=|z|\cos\theta \\ y=|z|\sin\theta \end{cases}$$

یا

$$(1)\quad \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \qquad (r=|z|=\sqrt{x^{2}+y^{2}})$$

$\mathrm{Arg}(0)$ را تعریف نمی‌کنیم. همچنین بنا بـه معادلات (۱) $tg\theta=\frac{y}{x}$ که باید توجه کـردکـه این رابطه θ را به طور

منحصر بفرد معین نمی‌کند. برای رفع این مشکل گوئیم

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctg}\frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta = \operatorname{Arctg}\frac{y}{x} + k\pi$$

و لذا شناسه با توجه به این‌که $-\pi < \theta \leqslant \pi$ برابر θ یا یکی از زوایای $\theta+\pi$ یا $\theta-\pi$ است با درنظر گرفتن علامات x و y می‌توان گفت کدام صحیح است.

در حالتی‌که $x=0$، اگر $y>0$ آنگاه $\theta=\frac{\pi}{2}$ و اگر $y<0$ آنگاه $\theta=\frac{3\pi}{2}$.

اکنون با توجه به مقدمات فوق هر عدد مختلط

$$z=x+iy \ ،\ (z\neq 0)$$

را می‌توان به صورت

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \quad \text{یا} \quad z=|z|\cos\theta+i|z|\sin\theta$$

نشان داد که آن را نمایش مثلثاتی z می‌نامیم.

مثال ۶. عدد

$$z=-3-\sqrt{3}\,i$$

را به صورت مثلثاتی نشان دهید.

حل.

$$tg\theta=\frac{-\sqrt{3}}{-3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

و

$$r=|z|=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$$

لذا

$$\theta=k\pi+\frac{\pi}{6}$$

چون x و y هردو منفی هستند بنابراین

$$\theta=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6} \quad \text{یا} \quad \theta=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$$

که واضح است روی دایره مثلثاتی انتهای این دو کمان یکی است. فقط جهت آنها مخالف است. در نتیجه،

$$z=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

یا

$$z=-2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

حال مـی‌توانیم جمع و تفریق و ضرب و تقسیم را در این نمایش نیز مشخص کنیم.

اگر

$$z_1=r_1(\cos\theta+i\sin\theta)$$

و

$$z_2=r_2(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

آنگاه،

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\alpha+i\sin\alpha)\\
&= r_1r_2[(\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha)\\
&\quad +i(\sin\theta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\theta)]\\
&= r_1r_2[\cos(\theta+\alpha)+i\sin(\theta+\alpha)]\\
&= r'(\cos\gamma+i\sin\gamma)
\end{aligned}$$

از رابطه فوق بلافاصله نتیجه می‌شود

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1|\,|z_2|$$

که قبلاً آن‌را ثابت کرده‌ایم. همچنین برای تعیین $\operatorname{Arg}(z_1z_2)$ گوئیم

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2+2k\pi$$

که $k=0$ یا $k=1$ یا $k=-1$ و این مقدار k با شرط $-\pi<\gamma\leqslant\pi$ مشخص می‌شود.

به همین ترتیب اگر

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

آنگاه،

$$\bar{z}=r(\cos\theta-i\sin\theta)=r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$$

و

$$\operatorname{Arg}\bar{z}=-\operatorname{Arg} z$$

و درحالتی‌که $z\neq 0$، چون

$$z'=\frac{1}{z}=\frac{z}{r^2}$$

لذا

$$z'=\frac{1}{z}=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

و

$$\operatorname{Arg}\frac{1}{z}=-\operatorname{Arg} z$$

و فقط در حالتی‌که z یك عدد حقیقی منفی مانند a باشد

$$\operatorname{Arg} a=\operatorname{Arg}\frac{1}{a}=\pi$$

با توجه به فرم مثلثاتی z و $\frac{1}{z}$ مـی‌توانیم خارج قسمت دو

عدد مختلط را نیز به صورت مثلثاتی بنویسیم.

فرض کنیم

$$z_1 = r_1(\cos\theta + i\sin\theta)$$

و

$$z_2 = r_2(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad \text{و} \quad z_2 \neq 0$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta + i\sin\theta)(\sin\alpha - i\sin\alpha)$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta-\alpha) + i\sin(\theta-\alpha))$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2}$$

و

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}\, z_1 - \mathrm{Arg}\, z_2 + 2k\pi$$

که درآن $k=0$، یا ۱، یا ۱−.

در حالت خاصی که

$$z=i \text{،} \quad |i|=1 \quad \text{و} \quad \mathrm{Arg}\, i = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

رابطه دو موآور (de Moivre)، توان و ریشه

فرض کنیم z_1، z_2، ...، z_n مجموعه‌ای از اعداد مختلط با فرم مثلثاتی باشند؛ مثلاً

$$z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k) \text{ ،} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

با به کار بردن مکرر فرمول ضرب دو عدد مختلط نتیجه می‌گیریم؛

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n [\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]$$

حال اگر

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$$

آنگاه

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$$

و اگر $r=1$ آنگاه رابطه فوق به‌صورت زیر تبدیل می‌شود که به قضیه دو موآور معروف است.

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

اگر z^0 را برابر ۱ بگیریم فرمول برای $n=0$ نیز برقرار است. اگر n عددی صحیح و منفی باشد، باز رابطه به‌سادگی ثابت می‌شود. فرض کنیم $n=-m$ که $m>0$،

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^n &= [(\cos\theta + i\sin\theta)^m]^{-1}\\ &= (\cos m\theta + i\sin m\theta)^{-1}\\ &= \cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta)\\ &= \cos n\theta + i\sin n\theta\end{aligned}$$

یکی از کاربردهای فرمول دو موآور محاسبه توانهای مختلف یك عدد مختلط است. ابتدا آن عدد را به فرم مثلثاتی تبدیل کرده و سپس توان را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۷. حاصل

$$z = (1 + i\sqrt{3})^{18}$$

را پیدا کنید.

حل.

$$\begin{aligned}1 + i\sqrt{3} &= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned}z &= 2^{18}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{18}\\ &= 2^{18}\left(\cos\frac{18\pi}{3} + i\sin\frac{18\pi}{3}\right)\\ &= 2^{18}(1 + i0) = 2^{18}\end{aligned}$$

با توجه به رابطه دو موآور توانهای صحیح z را بیان کردیم در این قسمت ریشه nام z یعنی $\sqrt[n]{z}$ را که در آن $n \neq 0$ عددی صحیح است بررسی می‌کنیم.

دو عدد مختلط z و u را درنظر می‌گیریم، اگر n عددی صحیح و مثبت باشد u را ریشه nام z می‌نامیم هرگاه $z = u^n$ و چنین می‌نویسیم

$$u = \sqrt[n]{z} \quad \text{یا} \quad u = z^{\frac{1}{n}}$$

فرض کنیم

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

و

$$u = R(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

چون $z = u^n$ در نتیجه

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = R^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

در این صورت لازم و کافیست که؛

$$R^n = r \quad \text{و} \quad n\alpha = 2k\pi + \theta$$

یا

$$R = \sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{|z|}$$

و

$$\alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad ، \quad k \in z$$

بنابراین:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$$

که k عددی است صحیح، باید توجه کنیم که همه مقادیر k مقادیر متمایزی برای $\sqrt[n]{z}$ به دست نمی‌دهد در واقع کافی‌است به k مقادیر $0, 1, 2, \cdots, n-1$ را بدهیم زیرا سایر مقادیر تکراری است. لذا هرعدد مختلط z دارای n ریشه nام است که به ازاء مقادیر

$$k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

به دست می‌آیند.

مثال ۸. جوابهای معادله

$$z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

را پیدا کنید.

حل. چون $z \neq 1$ طرفین معادله را در $z - 1$ ضرب می‌کنیم، داریم، $z^6 - 1 = 0$ پس جوابهای معادله همه ریشه‌های ششم عدد یك به جز خود یك است. $(z \neq 1)$

چون

$$1 = \cos(0) + i\sin 0$$

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

لذا،

$$\sqrt[6]{1} = \cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6} \qquad (k = 0, 1, \cdots, 5)$$

یا

$$\sqrt[6]{1} = \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3} \qquad (k = 1, 2, \cdots, 5)$$

به ازاء $k = 0$ جواب $z = 1$ به‌دست می‌آید که آن را حذف می‌کنیم. اگر $k = 3$ قرار دهیم، $z = -1$ به دست می‌آید که یك ریشه حقیقی معادله است.

مثال ۹. اگر

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$$

آنگاه

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha$$

حل.

$$x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = 0 \implies$$
$$x = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1}$$

بنابراین

$$x = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$$

و

$$x^n = \cos n\alpha \pm i\sin n\alpha$$

در نتیجه،

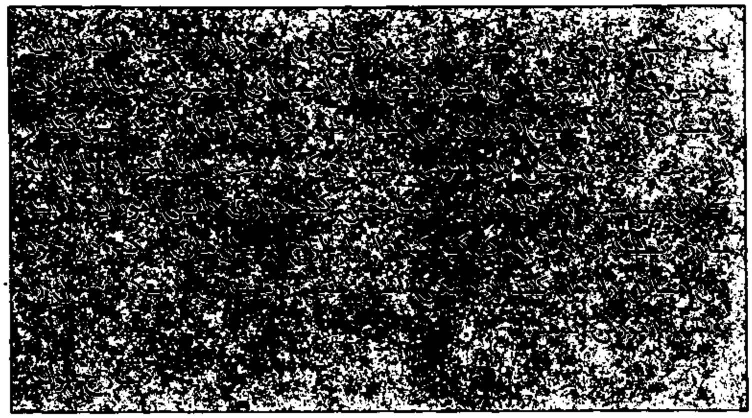
$$\frac{1}{x^n} = \frac{1}{\cos n\alpha \pm i\sin n\alpha} = \cos n\alpha \mp i\sin n\alpha$$

و لذا

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha.$$

منابع:

1. Calculus Michael Spivak Brandeis University.
2. Elementary Mathematics Selected Topics And Problem Solving Mir Publishers Moscow.
3. اعداد مختلط، والتر لدرمان، ترجمه دکتر علی‌اکبر مهرورز انتشارات مرکز نشر دانشگاهی.
4. مبانی ریاضیات، ایان استیوارت، دیوید تال، ترجمه دکتر محمدمهدی ابراهیمی، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی.



مسأله حل کردن در برنامهٔ ریاضی (۱)

از انتشارات انجمن ریاضی آمریکا

by: Alan Schoen Feld
ترجمه میرزا جلیلی

پیشنهاداتی برای مسأله حل کردن

روش صحیحی جهت حل مسأله وجود ندارد خیلی باید باشهامت بود تا راه یا راههایی برای بررسی مسائل پیشنهاد نمود. تعداد راههای خوب و مؤثر برای یاد دادن تفکر ریاضی برابر با تعداد معلمین خوب است. علاوه براین روشهایی که در یک کلاس به کارگرفته می‌شود نیزیک مسأله شخصی است. آنچه برای یک معلم کارآیی دارد شاید برای یك معلم دیگر قابل استفاده نباشد ویا برای استفاده ازآن باید مورد بازنگری قرار داده شود. پیشنهادات زیر با توجه به‌این واقعیت‌ها تنظیم می‌شوند. این پیشنهادات کارآیی‌خوبی درکلاسهای مختلف‌داشته است. خواهش این است‌که این پیشنهادات را مثل پیشنهادهای یك همکار نزدیك موردبررسی قرار دهید. سعی‌کنید آنهایی راکه بنظرتان درست و مناسب می‌آید آزمایش کرده سپس آنها را طوری طراحی نمائید که به راحتی بتوانید با آنها کارکنید.

الف- پیشینه و منطق اساسی

- اختلاف زیادی بین راهی که ما در ریاضی بکار می‌بریم و راهی که دانش‌آموزان آنرا می‌بینند وجود دارد - کار با ریاضی یک کار اساسی است و آن پیشروی در مراحل عمل، کشف و رسیدن به درك طبیعت خاص هدفها و دستگاههای ریاضی است. ما ابتدا به یک مطلب ریاضی برمی‌خوریم، همانطور که درآن غورمی‌کنیم این تصور درما رشد پیدا می‌کند و این گمان تقویت می‌شود که درآن چیز درستی باید وجود داشته باشد. با مثالهایی آنرا آزمایش می‌کنیم و به جستجوی مثال نقض می‌پردازیم. سعی داریم که درك کنیم که چرا آن چیز باید درست باشد. این کوششها ممکن است موفق یا ناموفق باشد. درشروع ممکن است بارها اشتباه کنیم راههای عوضی پیش برویم، کم‌حوصله ومأیوس بشویم ویا بازنگریهای پیگیر و موفقی داشته باشیم تا اینکه به‌نتیجه برسیم. بعضی از تجربه‌ها بسیار مهیج و راضی‌کننده است چه ما درقلمرو مجهولات تجسس

می‌کنیم وخود را درحل مسائل قوی می‌سازیم.

متأسفانه دانش‌آموزان کمتر آگاهی دارند که کار با ریاضی باید چنین باشد. تعجب‌انگیز آنکه، اغلب، دانش‌آموزان فدای حرفه‌ای بودن ما معلمین می‌شوند، مطالبی که باید به آنها داده شود زیاد است و ما نتایج مطالعات و کشفیات ریاضی خود را بصورت مرتب شده‌ایی به‌آنها ارائه می‌دهیم، درنتیجه، آنها زودتر مهارت پیدا می‌کنند اما پیدا کردن این مهارت نتایج نامیمونی نیز دربرخواهد داشت. چه دانش‌آموزان فکر می‌کنند که همهٔ ریاضیات شناخته شده است وباید آنها را مثل گرامر زبان‌آنقدر تکرارکرد تا یاد گرفته شود. و دراین یادگیری، برای آنها هیچ نوع هیجان، لذت کشف و خلاقیت وجود ندارد بلکه تنها یك رضایت کوچك وساده ازانجام کار دربرخواهد داشت. ما درکاربا ریاضی چنان‌آسان برخورد می‌کنیم‌که وقتی مسأله‌ایی برای دانش‌آموز مشکل است احساس ضعف می‌کند. آنها هیچ نوع آگاهی ندارند که خودما نیز برای درك مطالب نو در ریاضی باید تقلا وکوشش فراوان کنیم.

دیگر آنکه آنها هیچگونه اطلاعی ندارند که برای درك یك مطلب ریاضی باید با طرح سؤال وجواب مناسب آنرا خوب حلاجی کرد و اینکار تا آنجا ادامه داد که مطلب روشن و مفهوم شود. **درك ریاضی با دوباره تولید و تکرار کردن مطالبی که قبلا فراگرفته شده است، حاصل نمی‌شود.**

دراینجا من یك نکته بنظرم میرسد وآن اینکه ما می‌توانیم و وظیفه داریم‌که دانش‌آموزان را با روش یادگیری ریاضی آنطور که باید باشد آشنا سازیم. من اعتقاددارم که معلمین می‌توانند چنین‌کاری را با موفقیت انجام دهند.

به‌طور منطقی، دراوائل آموزش ریاضی باید روش مساله حل کردن را به دانش‌آموزان یاد داد. جای تأسف است که دانش‌آموزان بطور طبیعی فکر نمی‌کنند که درحل بعضی مسائل باید شکل کشیده شود تا مسأله روشن شود ویا کشیدن شکل ممکن‌است به حل مسأله کمك نماید وباز نمی‌دانند که باید درستی احکام را با حالات خاص آزمایش کنند وناراحت‌کننده‌تر آنکه به‌ندرت تشخیص میدهند که آنها نیز قادرند فکرکنند ویا اینکه میتوانند توانایی حل مسأله را با تجربه حاصل از شکست وموفقیت‌های قبلی، درخود تقویت نمایند. اگرچه ممکن است احمقانه بنظر برسد ولی شاید ارزش مطرح کردن داشته باشد که اصولاً ما از دانش‌آموزان‌خود می‌خواهیم از ریاضیات چه چیزی‌کسب نمایند؟

تقریباً آخرین برخورد، بیشتر دانش‌آموزان با ریاضی در محاسبات مشتق و انتگرال است. من حقیقتاً ارزش زیادی درکوشش برای محاسبهٔ سطح حادث از دوران یك منحنی نمی‌بینم این نیست‌که این مطلب ذاتاً ارزش نداشته باشد تصادفاً هم ریاضی‌است وهم زیبا. اما به‌طورکلی دانش‌آموزان‌هیچکدام از اینها را نمی‌بینند. در داد و ستد کنجکاوانهٔ ریاضی، کار محاسبهٔ یك سطح‌ می‌تواند یك کشف باشد و بعنوان یك کاربرد ماهرانه انتگرال ریمان (محاسبهٔ سطح زیرمنحنی) موردتحسین قرارگیرد و این نکته‌ای است‌که اغلب دانش‌آموزان متوجه آن نیستند و این محاسبات را یك کار شاق، دنبالهٔ انتگرال‌گیری می‌دانند.

بنظر می‌رسد که خدمت‌واقعی که ما می‌توانیم به‌دانش‌آموزان خود ارائه دهیم، هم به‌آنهائی که رشتهٔ ریاضی هستند و هم به غیرریاضی‌ها، این است‌که آنها را مجهز به‌مهارت تفکر و اندیشه کنیم تا بتوانند بعد از امتحانات و مدرسه آنرا بکار ببرند. مطمئناً ریاضی‌می‌تواند یك وسیلهٔ بسیار قوی برای اینکار باشد غیر ازاین راه بهتری برای آموزش اینکه «درك» یعنی چه وجود ندارد. تفکر ریاضی‌هم دقیق‌وهم منطقی‌است: تکنیك‌هائی که ما درحل مسائل بکار می‌بریم به‌طور وسیعی دراین زمینه قابل استفاده هستند اما دانش‌آموزان در این مایه‌ها نیستند که چنین برداشتی از «درك» بدست‌آورند و یا از آن روشها استفاده ببرند مگرآنکه به‌آنها تصریح شود. بعید بنظر می‌رسد که آنها بعد از یادگیری آن تکنیك‌ها تفکرریاضی خود را بالا ببرند **مگر آنکه ما دریادگیری آنها نقش کاتالیزور داشته باشیم کمك به یافتن راه حل کنیم نه حل نمائیم.** من معتقدم که معلمین می‌توانند چنین نقشی داشته باشند. آنچه از این بحث نتیجه می‌شود نکاتی است که من در حل مسائل توجه می‌کنم وبکارمی‌برم و دلایلی است که چرا چنین می‌کنیم.

ایده‌هائی درمسئله حل‌کردن

مسائل قلب ریاضیات هستند. هالموس

معلم درنقش راهنما

داستانی راجع به یکی از اساتید معروف ریاضی، که ارائه برهان اوچنان سریع بود که اغلب دانش‌آموزان را درابهام رها می‌کرد، نقل می‌کنند.

روزی در آغاز کلاس دانش‌آموزی دست بلند کرد و از استاد خواست که یکی ازمسائل تکلیف شب را حل‌کند. استادصورت مسأله را خواند و چند دقیقه‌ای فکر کرد و گفت بله جواب $\frac{\pi}{4}$ است و روی تخته سیاه نوشت $\frac{\pi}{4}$ دانش‌آموزکه زیرك بود درصدد کسب اطلاعات بیشتر برآمده و گفت: ببخشید استاد راه دیگری وجود ندارد؟ معلم‌پاسخ داد این‌یك سؤال‌جالب‌است، او برای یك لحظه درفکر عمیقی فرورفت سپس گفت: این یك‌مسأله ساده و سرراست است، البته محاسبات آن قدری ناجور است و به تخته برگشت ویك $\frac{\pi}{4}$ خیلی تمیز دیگرکنار $\frac{\pi}{4}$ قبلی نوشت‌و سپس از کلاس خواست اگر سؤال دیگری دارند مطرح کنند؟

بخشی از مشکلات آموزش مهارتهای تفکر ریاضی این‌است که خود ما به‌مطالب تسلط کامل داریم (مخصوصاً وقتی‌ریاضیات

مقدماتی را می‌آموزیم) طوریکه احتیاج به فکر کردن نداریم فقط به‌طور اتوماتیك عمل می‌کنیم. ما راه صحیح برخورد با بیشتر مسائلی که در کلاس مطرح می‌شود می‌دانیم اما دانش‌آموزان نمی‌دانند ونشان دادن راه درست به‌تنهایی کمك نمی‌کند که آنها تمام برخوردهای نادرست خود را با مسأله آزمایش نکنند. از اینجهت ما باید بعضی از تفکرهای ریاضی خود را ازپشت پرده بیرون بیاندازیم طوری که دانش‌آموزان بتوانند آنها را دنبال کنند. برای این کار سه راه که با هم در ارتباط مستقیم هستند وجود دارد.

(I)- رفتن بتوی جریان عمل برمبنای قدم به قدم (حتی وقتی ما جواب را می‌دانیم).

مسأله زیر را بعنوان مثال موردبررسی قرار دهید:

فرض کنید $p(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای با ضرائب با ترتیب معکوس باشند.

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

$$Q(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n$$

درحالی که $a_n\neq 0\neq a_0$. چه رابطه‌ای بین ریشه‌های این دو معادله وجود دارد؟ جواب خود را اثبات کنید.

البته این مسأله یك راه‌حل جالب دارد که در صفحات بعد خواهدآمد. اما من فکرمی‌کنم کاری به ترتیب زیر حتی اگر ساختگی بنظر آید، در درازمدت می‌تواند مفید باشد. شما وقتی با یك چنین مسأله‌ای مواجه می‌شوید چکارمی‌کنید؟ می‌دانیم یك روش کلی برای بدست‌آوردن ریشه‌های یك چندجمله‌ای وجود ندارد همچنین روشی برای مقایسهٔ ریشه‌های آنها نیز موجود نیست بهترین کاری که دراین شرایط می‌توان انجام داد جستجو برای یافتن چند مثال ساده است. امیدوارم که من بجای بررسی مستقیم دومعادله بتوانم تصوری شهودی ازآنها ایجاد کنم. شاید هم بایستی یك زوج سه‌جمله‌ای درجه دوم را درنظر بگیرم و آنها را حل کنم ببینم چه اتفاقی می‌افتد؟

$$P(x)=ax^2+bx+c$$

$$Q(x)=cx^2+bx+a$$

که ریشه‌ها به‌ترتیب عبارتند از:

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c} \text{ و } \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ظاهراً چیزی قابل بررسی در جوابها مشاهده نمی‌شود که بتوان مسأله را جلو برد ویا تعمیم داد، اگرچه صورت دو کسر یکی است. من دراینجا یکی دو دقیقه مکث می‌کنم و بعد چیز دیگری را مورد آزمایش وبررسی قرارمی‌دهم خوب، اجازه بدهید من دوجمله‌ای خطی را مورد مطالعه قرار بدهم

$$P(x)=ax+b$$

$$Q(x)=bx+a$$

که ریشه‌ها به ترتیب $\frac{-b}{a}$ و $\frac{-a}{b}$ بوده و عکس یکدیگرند ولی اینهم زیاد جالب نیست. من هنوز واقعاً برداشت دقیقی ندارم که در مورد ریشه‌ها چه اتفاقی می‌افتد لذا کار را با انجام یکی دومثال ساده‌تر ادامه داده به دنبال یك الگو خواهم گشت. یك کارجالب، ممکن است‌چندجمله‌ایهائی را امتحان‌کنم که قابل تجزیه باشند، بدین طریق آسانتر می‌توان ریشه‌ها را پی‌گیری کرد بسیار خوب، چیز ساده‌ای مثل $(x+3)(x+2)$ چطور است؟

$$P(x)=x^2+5x+6$$

که ریشه‌های‌آن -2 و -3 است.

$$Q(x)=6x^2+5x+1=(2x+1)(3x+1)$$

که ریشه‌های‌آن $-\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{3}$ است. اینها نیزمعکوس هم هستند واین نسبتاً جالب است راجع به‌معادلات زیرچطور؟

$$P(x)=(3x+5)(2x-7)=6x^2-11x-35$$

که ریشه‌های آن $\frac{-5}{3}$ و $\frac{7}{2}$ است.

$$Q(x)=-35x^2-11x+6=-(35x^2+11x-6)$$
$$=-(7x-2)(5x+3)$$

که ریشه‌های‌آن $\frac{-3}{5}$ و $\frac{2}{7}$ است.

اینجا نیز ریشه‌ها عکس‌یکدیگرند. این دیگر نمی‌تواند تصادفی باشد. بازهم بهتراست ادامه دهیم و در عوامل تجزیه دقت کنیم آیا ترتیب ضرائب آنها نیز معکوس یکدیگرند؟ راجع به معادلات زیرچطور؟

$$P(x)=(ax+b)(cx+d)=acx^2+(bc+ad)x+bd$$

$$Q(x)=bdx^2+(ad+bc)x+ac=(bx+a)(dx+c)$$

بله، آن هم درست است. من فکرمی‌کنم که این قابل تعمیم‌است. دراینجا برای ادامه کار دو راه وجود دارد بطور کلی فرض کنیم ریشه‌های چندجمله‌ای $P(x)$ معکوس ریشه‌های $Q(x)$ هستند (اگر هنوز هم مطمئن نیستیم باید باکثیرالجمله‌ای درجه ۳که قابل تجزیه باشد کار را ادامه دهیم). دراین مرحله سعی من این‌است که بحث بالا را تعمیم بدهم. اما همچنین ساده و سرراست نمی‌باشد اولاً هرچندجمله‌ایی قابل تجزیه نیست، ثانیاً پی‌گیری کردن ضرائب نیز کار آسانی نیست. **شاید اکنون ارزش مکث کردن ومجدداً حدس را از ابتدا آزمایش‌کردن داشته باشد. فرض‌کنیم $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ایی با ضرائب باترتیب معکوس باشند ثابت کنید ریشه‌های $P(x)$ و $Q(x)$ عکس یکدیگرند.** خوب‌اجازه بدهید دقت کنیم که مسأله چه می‌خواهد اینکه عددی مثل r ریشه $P(x)$ است به‌چه معنا می‌باشد؟ $P(r)=0$ به‌چه معناست؟ آیا اینکه عکس r باید ریشهٔ

$Q(x)$ باشد بمعنای $Q\left(\frac{1}{r}\right)=0$ است؟ عجب؟

برگردیم به معادله درجه ۲ و به بینیم درمورد آن چه اتفاقی می‌افتد.

فرض‌کنیم: $P(x)=ax^2+bx+c=0$

$Q(x)=cx^2+bx+a=0$

اگر r یك ریشه $P(x)$ باشد: $P(r)=ar^2+br+c=0$

حال به بینیم $Q\left(\frac{1}{r}\right)$ برابر چیست؟

$$Q\left(\frac{1}{r}\right)=c\left(\frac{1}{r}\right)^2+b\left(\frac{1}{r}\right)+a=0$$

لذا آن شدنی است $=\frac{c+br+ar^2}{r^2}=\frac{P(r)}{r^2}=0$

حالا این بحث قابل تعمیم خواهد بود ومن می‌توانم یـك قضیه وبرهان را بیان کنم.

قضیه‌ـ اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چند جملـه‌ایی با ضـرائب باترتیب معکوس باشند ریشه‌های $Q(x)$ عکس ریشه‌های $P(x)$ خواهد بود.

برهان‌ـ فرض کنیم r یـك ریشه $P(x)$ باشد به قسمی کـه $P(r)=0$ با توجه به‌اینکه $r\neq 0$ و $a\neq 0$ علاوه براین:

$$Q\left(\frac{1}{r}\right)=a_0\left(\frac{1}{r}\right)^n+a_1\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}+\dots+a_{n-1}\left(\frac{1}{r}\right)+a_n$$

$$=\left(\frac{1}{r_n}\right)(a_0+a_1r+a_2r^2+\dots+a_{n-1}r^{n-2}+$$

$$a_{n-1}r^{n-1}+a_nr^n)=\left(\frac{1}{r^n}\right)(P(r))=0$$

بنابراین $\frac{1}{r}$ یـك ریشه $Q(x)$ است. بـرعکس اگـر s یك ریشهٔ $Q(x)$ باشد متـوجـه میشویم که $P\left(\frac{1}{s}\right)=0$، بسیـار خـوب،

حالا موقع کالبدشکافی است این مسأله، مثل هر بحث کـلاسیك ریاضی، بطورروشنی نتایج فکری مراحل‌حل‌را (فرایند) ارائه می‌دهد. اما الهام راه‌حل از کجا آمد؟ اگربه مسیری که بحث در آن تکامل پیدا کرد برگردیم **دو راه نفوذی اساسی را مشاهده خواهیم کرد اولین آنها به درك مسأله و برداشتی کـه از آن بدست‌آورده میشود ارتباط پیدا می‌کند،** صورت‌مسأله، دربیان کلی، کمك بسیاراندکی به یافتن راه‌حل می‌کنـد. آنچه ما انجام دادیم این بود که به منظـوریافتن یـك الگو حالات خاص را موردآزمایش قرار دادیم، خاصه اینکه کوشش اولیـه در حالات خاص درمورد معادله درجه دوم بینش زیـادی بدست نداد و ما مجبور شدیم به‌حالات خاص‌تری متوسل شویم لذا کارما عبارت بود:

جستجو برای یافتن یکـری مثالهـای سرراست که محاسبه ریشه‌های آنها ساده باشد. بدین‌منظور که شاید بطورتصادفی الگوئی ظاهر گردد که قابل تعمیم باشد.

دراینجا ما درجستجوی یافتن ریشه‌های چنـدجمله‌ایی بودیم و برای اینمنظور آنهایی راکه به‌سادگی قابل‌تجزیه بودند انتخاب کردیم. البته موقعیت‌های مختلف ما را به انتخابهای مختلـف هدایت خواهد کرد. اما این استراتژی به ما اجازه حدس زدن می‌دهد.

دومین راه نفوذی، بعد ازحدس زدن پدیدار گشت. اگرچه ما تقریباً میدانستیم که چرا باید مطلب درست باشد. اما بحث‌قدری ناجور به‌نظر می‌آمد. لذا مکث کردیم تا برای یك لحظه دوباره مطلب را بررسی کنیم. آنچه ما در آن تـوقف انجام دادیم مهم است وغالباً ازنظرها دور می‌ماند.

ما به‌عقب و به مفروضات مسألـه برگشته آنها را پی‌گیری کرده و برای یافتن یـك ارتباط ملموس بین‌آنها و نتایجـی که می‌خواستیم تلاش کردیم.

سؤالاتی ازقبیل r ریشهٔ $P(x)$ است یعنی چه؟ معکـوس r چه خواهد شد؟ مفهوم $\left(\frac{1}{r}\right)$ ریشه $Q(x)$ است چیست؟ هر کـدام به تنهایی خیلی جزیی وبی‌ارزش بنظـرمی‌آید اما اینها توجه ما را درست به‌همان چیزهایی که ما را به‌یافتن راه‌حل کشانیـد، جلب کرد اکنون ممکن است بنظر آید که مطالب یکی دوصفحه آخر، شبیه «چوب زدن به مرده» باشد. ریاضی‌دانها مقدمتاً علاقمند به نتیجه هستند که در دو سطر حاصل میشود ولی فکـر مراحل حل (فرآیند) کـه به‌وجود آورنده آن برهان است بـرای آنهـا طبیعت‌دوم مسأله است تجربه من این است که این فکر فرآیند حل کاملاً برای دانش‌آموزان بیگانـه است این فرآیند دوچیز را روشن می‌سازد. یکـی اینکه مرموز بودن ریـاضی را ازبین می‌برد وآنرا بیشترعادی وقابل دسترس می‌سازد. به عبارت‌دیگر، وقتی دانش‌آموزان به‌بینند که ایده راه حل مسأله از کجا می‌آید دیگرحل یك مسأله برای آنان، مثل بیرون آوردن خـرگوش از زیرکلاه نخواهد بود.

دوم اینکه استراتژی که در بحث بالا مورد دقت قرار گرفت قابل تعمیم می‌باشد و درجاهای دیگر نیزممکن است مفید واقـع شود. یادگیری اینکه چگـونه آنها به‌کار گرفته شوند به دانش‌آموزان کمك می‌کند تا درحل مسأله توانا شوند.

هدف مقدماتی من از طـرح بحث بالا این است کـه «ارائهٔ درس» هنوزیك‌طرفه است. معلم بازتوضیح میدهد که دانش‌آموز چگونه باید با مسأله برخورد کنـد. اگـر مسأله حل کردن یـك تجربهٔ یادگیری شخصی است پس دانش‌آموز نیـز باید در آن درگیر گـردد وآن به‌راه دومی منتهی می‌شود کـه نقش و خدمت معلم بعنوان راهنماست.

(II)ـ حل‌مسأله باکمك دانش‌آموزان بابهره‌گیری ازایده‌های آنها

دراینجا مراد این است که کلاس، مسائل را با همکاری هم حل‌کنند و معلم تنها نقش هماهنگ‌کننده نظرات و ایده‌ها را داشته باشد. بدین معنا کـه بدون «خود محـور بودن» سؤالات مهمی را مطرح سازد و بحث را در مسیر صحیح خود

نگهدارد. معلم نباید راه‌حل مسائل را ارائه دهد بلکه درعوض باید بدانش‌آموزان کمک کند تا آنها به بهترین وجه از اطلاعات خود استفاده نموده درمسائل نفوذ کنند.

معلم ممکن است مسائلی را بعنوان تکلیف شب به دانش‌آموزان بدهد و درکلاس یکی را بطورمفصل مورد حل و بحث قراردهد.

درشروع کار، همانطور که برای یافتن راه حل مسأله تلاش وجستجو می‌کنیم معمولاً سؤالات زیرمطرح می‌گردد.

آیا کسی راه‌حلی پیشنهاد می‌کند؟ پیشنهادات دیگرچطور؟ چه چیز موجب شد که شما چنین فکرکنید؟ چه چیز باعث می‌شود که شما فکرکنید که این یک عمل منطقی است که باید انجام شود؟ بسیارخوب اکنون ما پیشنهاداتی داریم که چیزهای درستی نیز درآنها وجود دارد. با کدامیک باید شروع کنیم؟ چه چیز باعث می‌شود که شما فکرکنید که این یک راه‌حل بهتری است؟ آیا جواب معقول بنظر میرسد؟ آیا من باید آنرا امتحان کنم؟ وقس‌علیهذا.

پنج دقیقه است که این بحث‌ها را ادامه می‌دهیم و هنوز به جایی نرسیده‌ایم آیا شما واقعاً مطمئن هستید که منظور مسأله را خوب درك کرده‌ایم (صورت مسأله را خوب فهمیده‌ایم؟) چه چیزی را باید مورد بررسی قرار دهیم آیا چیزی از بحثهای اکتشافی ما جالب بوده است؟ وغیره

این گوشه‌ای ازگفتگوهای با کلاس را بما نشان میدهد. امید است که با پشتکار معلمین اینگونه پرسشها درنهایت، طبیعت ثانوی دانش‌آموزان شود وبه طرح کردن آنها عادت کنند. اگر پرسشها خوب‌ارائه وهدایت‌شود معلم در وسط سال درمرحله‌ایی ازپرسش‌ها میتواند از دانش‌آموزان خود سؤال کند «خوب حالا من قصد دارم چه سؤالی را مطرح کنم؟» ومعمولاً در پایان سال آنها باید بتوانند بخوبی به معلم پاسخ دهند ویا در مرحله‌ای از خودشان سؤال کنند «حالا من باید چه سؤالی را برای معلم مطرح بکنم؟»

(III)ـ کارمعلم درجا ـ حل مسائل نو

یاد دادن اینکه چگونه مسأله حل کنیم کار بسیار مشکلی‌است، زیرا قانون معینی در این زمینه وجود ندارد. درست وقتی که دانش‌آموزان فکرمی‌کنند که دیگرهمه چیز را یاد گرفته‌اند طرح یك مسأله جدیدآنها را به دردسر می‌اندازد. برای اینکه دانش‌آموزان‌نفسی تازه کنند و مرا نیز در وضع مشابهی ببینند (که من هم ممکن است به دردسر بیفتم) به‌آنها اجازه می‌دهم به من مسأله‌ای برای حل بدهند درست همانطورکه من مسأله برای‌حل کردن به‌آنها می‌دهم. آیا کسی مسأله‌ای برای من دارد؟

اگرآنها مسأله‌ای نو برای من داشتند من آنرا با صدای بلند روی تخته سیاه حل می‌کنم و بدین ترتیب آنها را تشویق می‌کنم که ملاحظه کنند که من چگونه استراتژی حل را، بدون شکل تکراری وتمرینی‌آن، که طبیعت مرموز حل مسأله را از بین می‌برد، بکارمی‌برم.

ب‌ـ معلم درنقش مربی ورزش

شنیده‌ام که بعضی ازهمکارانم، برای دانش‌آموزان خود، ریاضیات را بمثابه یك «ورزش درگیر» توصیف کرده‌اند منظور آنها این است که فرد باید درتجربه یادگیری ریاضی درگیر شود. کسی ازکنار گود نمی‌تواند فریاد بارك‌اله را بلند کند. یك تشابه دیگر دراین زمینه وجود دارد، معلم که نقش انتقال‌دهنده علم را دارد درضمن‌نقش شبیه مربی‌ورزش را هم‌ایفا می‌کند. البته ازبسیاری جهات، مهارتهای قهرمانی خیلی پیشرفته‌تر ازمهارتهای هوشی وفکری است. تصور ویژگیهای یك «مربی هوشی»ارزش کشف کردن را دارد.

آموزش یك فن ساده به یك ورزشکار را، مثلاً پرتاب یك توپ در بسکتبال ویا زدن سرو درتنیس را درنظر بگیرید. آن مربی که می‌گوید «تماشا کن که من چطور عمل می‌کنم و سپس برو همینطور تمرین بکن» بعنوان یك مربی خوب قلمداد نمی‌شود مسلماً چنین مربی برای مدت مدیدی شغل خود را حفظ نخواهدکرد. اما یك مربی‌خوب مراحل عمل را که توضیح می‌دهد به‌نمایش می‌گذارد وسپس این مراحل را به‌مرحله‌های جزئی ونکات بسیارکوچك تقسیم می‌کند و ورزشکار معمولاً از میان همهٔ این مراحل جزئی می‌گذرد ـ تا اینجا روش مثل روش یك معلم ریاضی است ـ همچنین ورزشکار برای زمانی به حال خود واگذاشته می‌شود که خود تمرین‌کند اما بعد ازمدتی، مربی برمی‌گردد وجزئیات حرکات او را تصحیح می‌کند مثلاً می‌گوید «شانه‌های شما خیلی پائین است، شما درموقع پرتاب به اندازهٔ کافی بلند نمی‌شوید» وغیره.

معمول نیست که مربی و ورزشکاربا کمك‌نوار ویدئوحرکات آهستهٔ ورزشکار را به‌بینند وبررسی کنند تنها کار موردنظر این است: **مراحل جزئی را از هم جدا کنید وبا تمرین آنها را پیشرفت دهید.**

این قسمت ازآموزش مربی به آنچه که می‌تواند «مهارتهای اساسی» یا «فرآیند استاندارد» نامیده شود مربوط می‌شود ـ اما معمولاً مربی‌های ورزش خیلی فراتر ازاین قدم می‌گذارند. در حقیقت بیشتر توجه‌آنها صرف این می‌شود که ورزشکارچگونه در موقع عمل ونمایش تصمیمات‌هوشمندانه بگیرد معمولاً، بیشترین گله وشکایت که ازطرف مربی بعد ازاشتباه یك ورزشکار شنیده می‌شود این است که «آن یك بازی بسیار سطح پائین و انجام آن مزخرف بود».

معادل هوشی آنرا درحل مسائل معمولی مورد بررسی قرار دهید. دریك امتحان از تکنیك‌های انتگرال، ۴۴ نفراز ۱۷۸ نفر دانش‌آموز درمحاسبهٔ $\int \frac{xdx}{x^{۲}-۹}$ از تجزیه کسرها استفاده

کرده‌اند و ۱۷ نفر تغییر متغیر $x = 3\sin\theta$ داده‌اند «استفاده از هریک از این راهها بی‌معنی و وقت‌گیر است» با کمی دقت می‌توان فهمیدکه مسأله با تغییرمتغیر ساده ومقدماتی $\mu = x^{2} - 9$ حل می‌شود.

یك توصیهٔ استاندارد: عملاً دامنهٔ عملیات خود را کوتاه کنید وهیچ راه‌حل مشکل و پرکاری را ادامه ندهید مگر آنکه مطمئن شوید که راه‌حل ساده‌تری برای مسأله وجود ندارد.

این از نوع توصیه‌هایی است که یك مربی ورزش نیز ممکن است انجام دهد.

بنظرمی‌رسد که توجه به این مطلب خیلی باارزش‌تر ازاین باشد که به دانش‌آموز راه حل مسأله داده شود.

ج- بیش از یك راه برای پوست کندن گربه ریاضی وجود دارد

ازآنجا که بیشتر مسائلی را که درکلاس حل می‌کنیم تمرین است ما معمولاً به‌یك راه‌حل، که شبیه تکنیك‌های آموزش داده شده است، بسنده می‌کنیم و وقتی‌آن مسأله حل شد به سراغ مسأله دیگر می‌رویم وکار حل تمرین همینجا تمام می‌شود. **اما بعد ازحل تمرینات دانش‌آموزان فکرمی‌کنند که آنها راه حل صحیح مسأله را یاد گرفته‌اند و برای حل هرمسأله تنها یك راه صحیح وجود دارد** واین برداشت درست نیست. مثلاً، به راه‌حل‌های زیادی‌که برای اثبات قضیه فیثاغورث وجود دارد توجه کنید، هرکدام ازما چقدر خوشحال خواهیم شد اگر موفق شویم راه جدیدی براین راهها بیفزائیم.

قسمتی از لذت ریاضی شامل کشف چیزهای نواست و قسمتی نیزکشف ارتباط بین‌حقایقی است که اکنون وجود دارد وهمچنین یافتن راههای جدید برای قضایا و مسائلی است که اکنون راه‌حلی دارند. وجود مقالات فراوان در مجلات ریاضی تحت‌عنوان «یك برهان جدید برای فلان قضیه» این مطلب را به اندازهٔ کافی روشن می‌سازد. دیگرآنکه اطلاع جزئی ازیك چیز ممکن است گمراه‌کننده باشند.

درك یك حقیقت ریاضی یا دستگاه ریاضی بمعنای درك تمام پیوندهای ممکن و موجود است.

درك من ازمجموع گوس $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ تمامی غنای‌آنست، زیرا من به‌آن چنین می‌اندیشم.

۱- بعنوان نتیجه $\frac{n}{2}$ زوج جهائی که مجموع هر کدام $n+1$ است.

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-2)+(n-1)+n$$

۲- ازنظر تصویری، نصف مساحت شکل ارائه شده در زیر یعنی نصف $n(n+1)$ می‌باشد.

۱	n
۲	$n-1$
۳	$n-2$
$n-2$	۳
$n-1$	۲
n	۱

که ازنظرمحاسبات حسابی می‌توان‌آنرا به‌صورت زیر ارائه داد:

$$S = 1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n$$
$$S = n+(n-1)+(n-2)+\cdots 3+2+1$$
$$2S = \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)}_{\text{به‌تعداد } n \text{ مرتبه}}$$

۳- بعنوان یك گزاره که درستی آن با روش استقراء قابل بیان است.

۴- بعنوان یك حالت خاص ازیك معادله دیفرانسیل وغیره

[یا محاسبه تعداد اقطار یك n ضلعی محدب $\frac{n(n-3)}{2}$ را می‌توان ازطریق هندسی، آنالیز ترکیبی $\binom{n}{2} - n$ و استقراء مورد بحث قرار داد].

اگرمن تنها یکی از این راهها را یاد گرفته باشم ممکن است به‌نوعی مغبون باشم. اما این مغبون بودن تنها قسمتی از داستان است. هریك ازاین راههایی که راجع به‌مسأله فکری شود یك بینش خاصی ازتفکر را مجسم می‌سازد که به‌صورتهای مختلف می‌تواند تعمیم پیدا کند.

وقتی من با یك مسأله جدید روبرو می‌شوم هر یك از این راهها ممکن است کلیدی برای راه‌حل‌آن مسأله باشد.

همچنین اطلاع ازاینکه مسائل می‌توانند با راههای مختلف حل شوند در روشی که دانش‌آموزان با مسائل برخورد می‌کنند تأثیر خواهد گذاشت. دانش‌آموزی که فکرمی‌کند که تنها یك «راه درست» برای حل مسأله وجود دارد ممکن است روی مسأله خاصی مدتی فکرکند واگر توفیقی حاصل نکرد آنرا رها کند ومنتظر بماند تا درکلاس تکنیك حل به او ارائه شود و این الگویی است‌که بیشتر دانش‌آموزان ما درمدرسه بکارمی‌گیرند. شاگردی که فکرمی‌کند جا برای کشف ریاضی وجود دارد واز آن استفاده می‌کند. احتمال زیاد دارد که با مسأله بیشتر درگیر شود، پیوندهایی برای خودش پیدا کند و شاید به‌یك راه‌حل غیرمنتظرانه‌ای دست‌یابی پیدا نماید.

ادامه دارد

انواع خطاها

درسهایی از آنالیز عددی (۲)

تنظیم از: دکتر اسماعیل بابلیان دانشیار دانشگاه تربیت‌معلم

همانگونه که در درس قبل ملاحظه شد بخاطر محدودیت در نگهداری ارقام بسط اعشاری اعداد، مجبوریم داده‌های یك‌مسئله وثابتهای موجود در فرمولها را، با تحمل خطاهایی، گرد کنیم و بجای اعداد اصلی تقریبهایی از آنها را درنظر بگیریم. اما، تقریبهای اعداد همیشه ازطریق گرد کردن بدست نمی‌آیند. مثلاً اعداد زیرجملگی تقریبهایی ازعدد یك هستند:

$$۰/۵\ ,\ ۰/۶۶۶۶۶۷\ ,\ ۰/۷۵\ ,\ ۰/۸\ ,\ ۰/۸۳۳۳۳۳\ ,\ \dots\ ,\ \frac{n}{n+۱}\ ,\ \dots$$

بخصوص چون همواره $\frac{n}{n+۱}<۱$ هیچیك ازاعداد فوق‌برابر یك نیست. اصولاً درآنالیز عددی همیشه با چنین وضعی روبرو هستیم یعنی، دنباله‌ای ازاعداد می‌سازیم‌که به‌جواب (یاجوابهای) مسئله موردنظرمان همگراباشد. لذا، باید بطورکلی خطای‌موجود درتقریبهای یك عدد را تعریف کنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم A یك عدد (تحقیقی)و a تقریبی ازآن باشد.

تعریف ۱- اگر a تقریبی از A باشد

$$e(a)=|A-a|$$

را خطای مطلق a نامند. واضح است که هرچه $e(a)$ کوچکتر باشد a به A نزدیکتر خواهد بود. (e حرف اول کلمه *error* به‌معنی خطا می‌باشد.)

مثال ۱

خطای مطلق $\frac{n}{n+۱}$ بعنوان تقریبی ازعدد ۱ چقدراست؟

$$e\left(\frac{n}{n+۱}\right)=\left|۱-\frac{n}{n+۱}\right|=\frac{۱}{n+۱}$$

ملاحظه می‌شود که هرچه n را بزرگتراختیار کنیم $\frac{n}{n+۱}$ نیز مقداری نزدیکتر به ۱ بما می‌دهد. اگر بخواهیم خطای $\frac{n}{n+۱}$ بعنوان تقریبی از ۱ کوچکتر از ۰/۰۰۱ باشد کافی است قرار دهیم $n=۱۰۰۰$ وعدد $\frac{۱۰۰۰}{۱۰۰۱}$ را بدست‌آوریم. ▲

اما، همیشه اوضاع به‌این خوبی نیست که عدد A را داشته باشیم. معمولاً A مجهول است ویا حتی درحالت معلوم بودن، $e(a)$ براحتی قابل‌محاسبه نیست.

مثال ۲

میدانیم که ۱/۴ تقریبی از $\sqrt{۲}$ است خطای مطلق‌آن چیست؟

$$e(۱/۴)=|\sqrt{۲}-۱/۴|=\sqrt{۲}-۱/۴$$

اگر بسط اعشاری $\sqrt{۲}$ را، با استفاده از ماشین حساب، بنویسیم یعنی،

$$\sqrt{۲}=۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲\ (۹D)$$

خواهیم داشت:

$$e(۱/۴)=۰/۰۱۴۲۱۳۵۶۲\dots$$

ملاحظه می‌شود که $e(۱/۴)$ بسادگی قابل بیان نیست و شاید همان $\sqrt{۲}-۱/۴$ بیان ساده‌تر و دقیقتری ازآن باشد.

اگر ازاین مطلب استفاده کنیم که

$$۱/۴۱<\sqrt{۲}<۱/۴۲$$

$\sqrt{۲}$

۰ ۱/۴۱ ۱/۴۲

آنگاه

$$۰/۰۱<e(۱/۴)<۰/۰۲$$

بدیهی است که ۰/۰۲ یك کران بالا برای $e(۱/۴)$ است وتا حدود زیادی مقدارنزدیکی ۱/۴ را به $\sqrt{۲}$ نشان‌می‌دهد. معمولاً دراکثر روشهای‌تعیین جواب‌مسائل درآنالیز عددی حدود جواب، یعنی کرانهای بالا وپایینی برای جواب، قابل‌محاسبه است که از آنجا کران بالایی برای $e(a)$ بدست می‌آید. با توجه به این مطالب تعریف زیر را داریم.

تعریف ۲- هرعدد ناکمتر از $e(a)$ را، که با e_a نمایش می‌دهیم، یك خطای مطلق حدی a نامند. بنابراین، همواره $e(a)\leqslant e_a$ و e_a منحصربفرد نیست.

ازتعریف فوق مشهود است که هرچه کرانهای بالا و پایین A دقیقترباشند e_a نیزبه $e(a)$ نزدیکتر خواهد بود.

مثال ۳

میدانیم که $۲/۵<e<۳$ مطلوبست کران بالایی برای خطای

مطلق ۲/۷. (در اینجا $A=e$ عدد نپر است و $a=2/7$ تقریبی از آن می‌باشد.)

واضح است که

$$-0/2<e-2/7<0/3$$

یعنی، $|e-2/7|<0/3$

و $e_a=0/3$ یك خطای مطلق حدی برای ۲/۷ است.

اگر ازنامساویهای دقیقتر $2/71<e<2/72$ استفاده می‌کردیم $e_a=0/02$ که نشان‌می‌دهد نامساویهای دقیقتر درمورد A چگونه نزدیکی a را به A بهترنشان می‌دهند.

اگر e_a یك خطای مطلق حدی a باشد داریم

$$|A-a|\leqslant e_a$$

که با توجه به‌خواص قدرمطلق نتیجه می‌دهد

$$a-e_a\leqslant A\leqslant a+e_a$$

$a-e_a$ $\qquad$ $a+e_a$

یعنی، $A\in[a-e_a , a+e_a]$، از این رابطه کاملاً مشهود است که یك خطای مطلق حدی کوچك حدود A را با تقریب خوبی مشخص می‌کند.

قرارداد: ازاین بعد قرارمی‌گذاریم که هروقت $|A-a|\leqslant e_a$ بنویسیم $A=a\pm e_a$.

مثال ۴

میدانیم که $l=1/24\pm 0/006$ حدود l را تعیین کنید.

بنابه قرارداد فوق

$$1/234\leqslant l\leqslant 1/246$$

ازاین نامساویها معلوم می‌شود که ارقام ۱/۲ حتماً در بسط اعشاری l خواهندآمد ولی دو رقم بعدی بین ۳۴ تا ۴۶خواهند بود.

حال سؤال این است که خطای مطلق دقت یك تقریب را کاملاً مشخص می‌کند؟ به‌سؤالات زیر توجه کنید، جواب شما پاسخ سؤال فوق را نیزمی‌دهد.

الف- دوماشین‌نویس را درنظر بگیرید که یکی در ماشین کردن ۱۰ صفحه ۴ غلط دارد و دیگری درماشین‌کردن ۲۰ صفحه. کدام ماشین‌نویس با دقت بیشتری کلمات را ماشین‌کرده است؟

ب- فرض کنید یك تحویلدار بانك در یك روز یك میلیون تومان رد وبدل کرده و درخاتمه کارش متوجه شده که ۱۰۰ تومان اشتباه کرده است! و دیگری ۱۰۰۰۰۰ تومان رد وبدل کرده و او هم ۱۰۰ تومان اشتباه کرده است (کم‌آورده یا زیاد آورده!) بنظرشما کدام تحویلدار دقیقتر بوده است؟

ملاحظه می‌کنید که عامل مهم در دقت، خطا در واحد کمیت است که آن را خطای نسبی نامند وبا $\delta(a)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۳- اگر a تقریبی از A باشد.

$$\delta(a)=\frac{|A-a|}{|A|}$$

را خطای نسبی a نامیم. (در این تعریف $A\neq 0$ فرض می‌شود)

مثال ۵

اگر $a=1/4$ و $A=\sqrt{2}$ خطای نسبی a را حساب‌کنید.

$$\delta(1/4)=\frac{\sqrt{2}-1/4}{\sqrt{2}}=\frac{0/014213562\ldots}{1/414213562\ldots}$$

$$=0/010050506$$

مثال فوق‌نشان می‌دهد که حتی اگرمقدار A معین باشد محاسبهٔ $\delta(a)$، بطور دقیق، متضمن عملیات زیاد است و حتماً باید از وسیله‌ای، مثلاً ماشین‌حساب برای تعیین‌آن استفاده کرد. اگر A معین نباشد چی؟ یعنی چگونه می‌توان بدون داشتن A متوجه شد که خطای نسبی a درچه حدود است؟

دراینجا نیز سعی می‌کنیم با توجه به‌مقدار a و یك e_a حدودی برای $\delta(a)$ معین کنیم با توجه به‌اینکه $|A-a|\leqslant e_a$ داریم

$$|a|-|A|\leqslant|A-a|\leqslant e_a$$

یعنی $|A|\geqslant|a|-e_a$. بنابراین،

$$\delta(a)=\frac{|A-a|}{|A|}\leqslant\frac{e_a}{|a|-e_a}$$

ملاحظه می‌شود که کسر سمت راست نامساوی فوق قابل‌محاسبه است (زیرا، a را بعنوان تقریبی از A داریم و e_a را نیز باتوجه به‌حدود A می‌توان حساب کرد). ضمناً اگر e_a در مقایسه با a کوچك باشد می‌توان از آن صرفنظر کرد و نوشت $\delta(a)\leqslant\frac{e_a}{|a|}$. (بعضی ازکتابها کسر $\frac{e_a}{|a|}$ را خطای نسبی a می‌گیرند.) ازاین بعد ما نیز فرض می‌کنیم $\delta(a)\simeq\frac{e_a}{|a|}$.

تعریف ۴- اگر a تقریبی از A باشد و $\delta(a)\leqslant\delta_a$ آنگاه δ_a را یك خطای نسبی حدی a نامیم. مثلاً، $\delta_a=\frac{e_a}{|a|-e_a}$.

با توجه به‌تعریف فوق اغلب بجای $\delta(a)$ می‌توان δ_a را حساب کرد.

مثال ۶

اگر $A=\sqrt{7}$ و $a=2/6$ $\delta(a)$ مطلوبست. ضمناً با توجه به‌اینکه $2/6<\sqrt{7}<2/65$ مقدار δ_a را نیزحساب کنید.

$$\delta(a)=\frac{\sqrt{7}-2/6}{\sqrt{7}}=/017\ (2s)$$ و

$$\delta_a=\frac{0/05}{2/6}=/019\ (2s)$$

ملاحظه می‌شود که گرچه $0/017<0/019$ ولی محاسبهٔ δ_a بسیار ساده‌تر از محاسبهٔ $\delta(a)$ است. بخصوص اگر A در دست نباشد $\delta(a)$ قابل‌محاسبه نیست ولی δ_a با داشتن حدود A بسادگی قابل‌محاسبه است.

ارقام با معنای درست یك تقریب

هریك از اعداد زیر یك تقریب برای عدد π هستند:

$3/1415927$ و $3/14159$ و $\frac{22}{7}=3/\overline{142857}$ و $3/14$

یکی از راههای تعیین دقت این تقریبها آنستکه خطای نسبی آنها را حساب کنیم. سؤال این است که راه دیگری نیز هست که دقت این اعداد تعیین شود؟ مثلاً، از روی تعداد ارقام هر تقریب یا خصوصیات دیگری؟ واضح است که تعداد ارقام با معنای یك تقریب‌مؤید دقت آن تقریب نمی‌باشد. پس چگونه از روی ارقام یك تقریب می‌توان به‌دقت آن تقریب پی برد؟ اینجاست که پای مفهوم ارقام با معنای درست یك تقریب بمیان می‌آید، این‌مفهوم دقیقاً از گردکردن یك‌عدد نشأت می‌گیرد. به‌عبارت دیگر، اگرعدد

$$\pi = 3/141592654\ldots$$

را تا k رقم اعشار گرد کنید $k+1$ رقم با معنای درست خواهد داشت (به‌تمرینهای آخراین درس مراجعه کنید). قبل از ارائه تعریف دقیق ارقام با معنای درست یك تقریب یك مثال‌می‌آوریم.

مثال ۷

فرض‌کنید $A=6/000$ و $a=5/997$ و $a'=6/08$.
ملاحظه می‌شود که a' درست دو رقم مساوی با ارقام A دارد (با حفظ ارزش هر رقم) اما، هیچیك ازارقام a جزء ارقام A نیست. آیا می‌توان گفت که a' ارقام درست بیشتری دارد؟ مفهوم ارقام درست یك تقریب‌رابطهٔ تنگاتنگ با دقت‌آن‌تقریب دارد. دراینجا

$$e(a)=0/003 \quad و \quad e(a')=0/08$$

یعنی، باید a ارقام درست بیشتری داشته باشد! تعداد ارقام با معنای درست چگونه بدست می‌آید؟ اگر a را تا دو رقم اعشار گرد کنید عدد $6/00$ حاصل می‌شود. لذا، a سه رقم با معنای درست دارد. اگر a' را تا رقم یکان گرد کنید 6 حاصل می‌شود یعنی، a' تنها یك رقم با معنای درست دارد (هرچند که دو رقم آن دقیقاً دربسط A دیده می‌شود).

تعریف ۵ـ فرض کنید

$$a=a_m\times 10^m+a_{m-1}\times 10^{m-1}+\ldots \quad (a_m\neq 0)$$

بسط اعشاری a و d تعداد ارقام با معنای a باشد (d ممکن‌است بینهایت باشد) دراین صورت بزرگترین عدد صحیح نامنفی n که $n\leqslant d$ و

$$|A-a|\leqslant 5\times 10^{m-n}$$

تعداد ارقام با معنای درست a نامیده می‌شود. واضح است که اگر $e_a\leqslant 5\times 10^{m-n}$ آنگاه a حداقل $\min(n \text{ و } d)$ رقم با معنای درست دارد (چرا؟).

برای روشن شدن تعریف فوق باید نحوهٔ بدست‌آوردن m و بررسی نامساوی مندرج درتعریف را تشریح کنیم.

مثال ۸

اگر $a=3/12$ داریم

$$a=3\times 10^0+1\times 10^{-1}+2\times 10^{-2}\Rightarrow m=0$$

اگر $a=0/0078$ آنگاه

$$a=7\times 10^{-3}+8\times 10^{-4} \quad m=-3$$

اگر $a=12/7$ آنگاه

$$a=1\times 10^1+2\times 10^0+7\times 10^{-1}\Rightarrow m=1$$

با توجه به‌مثال فوق بسادگی معلوم می‌شود که m برابر مفسر لگاریتم $|a|$ است. لذا، اگر $1\leqslant |a|$ آنگاه

$$m=(\text{تعداد ارقام } [|a|]-1)$$

و برای aهایی که $0<|a|<1$

$$m=-((\text{تعداد صفرهای‌بعد ازممیز دربسط اعشاری } |a|)+1)$$

(m مساوی قرینه تعداد صفرهای قبل و بعد از ممیز در بسط اعشاری $|a|$ است.)

مثال ۹

اگر $A=6/000$، $a=5/997$ و $a'=6/08$ تعداد ارقام با معنای درست a و a' را بدست‌آورید.

با توجه به‌مثال ۸، برای a و a' داریم $m=0$.

$$e(a)=|A-a|=0/003<5\times 10^{-3}$$

پس $m-n=-3$ که چون $m=0$ داریم $n=3$. یعنی، a سه‌رقم با معنای درست دارد.

$$e(a')=|A-a'|=0/08<0/5=5\times 10^{-1}$$

پس $m-n=-1$ که چون $m=0$ داریم $n=1$ یعنی a' تنها یك رقم با معنای درست دارد. تعداد ارقام با‌معنای درست یك تقریب دقت‌آن تقریب را بخوبی نشان می‌دهد. این مطلب را ذیلاً ضمن بررسی رابطهٔ بین خطای نسبی و تعداد ارقام با معنای درست یك تقریب روشن می‌کنیم.

لم‌ـ اگر a تقریبی از A با n رقم با معنای درست باشد و $k\in Z$ که درآن $B=10^k\times A$ و $b=10^k\times a$ آنگاه b نیز تقریبی از B با n رقم با معنای درست است وخطای نسبی a و b یکسان است.

برهان‌ـ فرض می‌کنیم

$$a=10^m\times a_m+10^{m-1}\times a_{m-1}+\ldots$$

دراین صورت،

$$b=10^{m+k}a_m+\ldots$$

بنابراین m مربوط به b برابر $m+k$ است و داریم

$$|B-b|=10^k|A-a|\leqslant 10^k\times 5\times 10^{m-n}$$
$$=5\times 10^{(m+k)-n}$$

که نشان می‌دهد b نیز دارای n رقم با معنای درست است.
همچنین داریم

$$\delta(b)=\frac{|B-b|}{|B|}=\frac{10^k|A-a|}{10^k A}=\frac{|A-a|}{|A|}=\delta(a).\blacktriangle$$

لم فوق دراکثر قضایا ومسائل مربوط به‌ارقام با معنای درست وخطای نسبی بکارمی‌رود.

مثال ۱۰

اگر a گرد شدهٔ A تا n رقم بامعنا باشد ثابت کنید این n رقم بامعنای درست هستند.

با توجه به لم فوق می‌توان فرض کرد که

$$a = 0/c_1 c_2 \cdots c_n$$

که درآن $c_1 \neq 0$. (چه اگر چنین نباشد با انتخاب kی مناسب می‌توان $a\times 10^k$ را به‌این شکل درآورد. چگونه؟)

با توجه به اینکه (به نامساوی (۲) از درس (۱) مراجعه کنید)

$$|A-a| \leqslant 5\times 10^{-(n+1)} = 5\times 10^{-1-n}$$

و درمورد a داریم $m = -1$ نتیجه می‌گیریم که a دارای n رقم بامعنای درست است. (توجه کنید که ممکن است $|A-a|\leqslant 5\times 10^{-n'}$, $n'>n+1$)

چون $\pi = 3/14159265\ldots$ اعداد $3/142$ و $3/141593$ به ترتیب دارای ۴ و ۷ رقم با معنای درست هستند. (این مطلب را مستقیماً با استفاده ازتعریف ۵ ثابت کنید.)

قضیه ۱ـ اگر a تقریبی از A و دارای n رقم با معنای درست باشد خطای نسبی a از 5×10^{-n} کمتر است، بشرط آنکه رقمهای درست a شامل یك رقم یك و $n-1$ صفر درجلوی آن نباشد.

برهانـ با توجه به لم فوق می‌توان فرض کرد که $a = u/c_1 c_2\ldots$ که درآن u ازارقام درست a تشکیل شده‌است. بنابراین، m مربوط به a برابر $n-1$ است و ازاینجا

$$|A-a|\leqslant 5\times 10^{(n-1)-n} = 0/5$$

درنتیجه

$$|A|\geqslant |a| - 0/5$$

اما، بنابفرض قضیه $u\neq 10^{n-1}$ پس، $|a|\geqslant u \geqslant 10^{n-1}+1$ که درنتیجه

$$|A|\geqslant 10^{n-1}+0/5 > 10^{n-1}$$

بنابراین،

$$\delta(a) = \frac{|A-a|}{|A|} \leqslant \frac{0/5}{10^{n-1}} = 5\times 10^{-n}$$

با توجه به اینکه استثناء مندرج درصورت قضیه ۱ بندرت اتفاق می‌افتد درعمل به‌آن توجه نمی‌شود وحکم قضیه را برای هر a بکارمی‌برند.

مثال ۱۱

تقریبی از π ارائه دهیدکه خطای‌نسبی‌آن از 10^{-3} کمترباشد.

یکی ازطرق تعیین این تقریب اینستکه عدد π را تا یك رقم، دورقم، ... اعشار گرد کنیم وخطای نسبی هریك را حساب‌کنیم تا کمتراز 10^{-3} باشد. یعنی، کسرهای زیر را حساب کنیم

$$\frac{\pi-3/1}{\pi} \text{ و } \frac{\pi-3/14}{\pi} \text{ و } \frac{|\pi-3/142|}{\pi}, \ldots$$

اما، با استفاده ازقضیه ۱ بسادگی می‌توان تقریبی از π با خطای نسبی کمتراز 10^{-3} یافت. با توجه به‌اینکه

$$5\times 10^{-4} < 10^{-3}$$

اگر a را چنان اختیارکنیم که ۴ رقم با معنای درست داشته باشد بنابرقضیه ۱

$$\delta(a) < 5\times 10^{-4} < 10^{-3}$$

بنابراین، a را گرد شدهٔ π تا چهار رقم بامعنا اختیارمی‌کنیم (به‌مثال ۱۰ توجه کنید). پس، $a = 3/142$ تقریب موردنظر است. اینك به اثبات قضیه‌ای که تقریباً عکس قضیه ۱ است می‌پردازیم.

قضیه ۲ـ اگر $a>0$ تقریبی‌از A باشد و $\delta(a)\leqslant 0/5\times 10^{-n}$ آنگاه a حداقل n رقم با معنای درست دارد.

برهانـ با فرض $a = 10^m\times a_m + \ldots$ داریم $a < 10^{m+1}$ (چرا؟) وبا توجه به‌اینکه $\delta(a)\simeq \frac{e(a)}{a}$ می‌توان نوشت

$$e(a)\simeq a\times\delta(a)\leqslant 10^{m+1}\times 0/5\times 10^{-n} = 5\times 10^{m-n}$$

لذا، $e(a)\leqslant 5\times 10^{m-n}$. چون ممکن است nی بزرگتر دراین نامساوی صدق کند بنابراین، a حداقل n رقم با معنای درست دارد.

با توجه به‌اینکه خطای نسبی یك تقریب دقت آن تقریب را نشان‌می‌دهد قضایای ۱و ۲ بخوبی ارتباط بین‌دقت یك تقریب‌را با تعداد ارقام با معنای درست‌آن نشان می‌دهند. در بعضی مسائل خطای نسبی تقریب را می‌توان بدست‌آورد (مثلاً، درحل‌دستگاه معادلات خطی) که درنتیجه با استفاده ازقضیه ۲ می‌توان حداقل تعداد ارقام با معنای درست تقریب بدست‌آمده را تعیین کرد. در برخی دیگر ازمسائل می‌توان تعداد ارقام با معنای درست یك تقریب را معین‌کرد (مثلاً، در روش نیوتن برای تعیین تقریبی از ریشه‌های $f(x)=0$) که با توجه به‌قضیه ۱ می‌توان خطای نسبی و درنتیجه دقت‌آن تقریب را حساب کرد.

تمرین

۱ـ میدانیم که $e = 2/718281828\ldots$. فرض کنید a_k گرد شدهٔ e تا k رقم اعشار باشد. به ازای $k = 1, 2, 3, 4, 5$ با استفاده از تعریف ۵ نشان دهید که a_k دارای $k+1$ رقم بامعنای درست است.

۲ـ مسئله ۱ را درمورد $\pi = 3/1415926\ldots$ حل کنید.

۳ـ تقریبی از $\sqrt{3}$ وتقریبی از $\sqrt{7}$ ارائه دهید که خطای نسبی آنها از 10^{-3} کمتر باشد.

۴ـ اگر $a = a_m\times 10^m + \ldots > 0$ تقریبی از A و دارای n رقم با معنای درست‌باشد ثابت‌کنید (فرض کنید $\delta(a)\simeq\frac{e(a)}{a}$)

$$\delta(a)\leqslant \frac{5\times 10^{-n}}{a_m}.$$

مطالبی راجع به هندسه (۱)

حسین غیور

ایراد خیام و خواجه نصیرالدین طوسی به اصل پنجم اقلیدس

هندسهٔ اقلیدسی در قرون اولیهٔ اسلامی همراه با فلسفهٔ و سایر علوم از یونانی به عربی ترجمه شده و از قرن سوم تا هشتم هجری قمری مورد توجه شدید دانشمندان ایرانی که مولفات خود را به زبان عربی می‌نوشتند بوده است.

شرح، ما اشکلَ من مصادر اقلیدس تالیف حکیم عمرخیام، رساله ایست که در آن این دانشمند اولین بار (لااقل در ایران) به اصل پنجم اقلیدس ایراد می‌گیرد، که چرا اقلیدس این اصل را بدیهی فرض کرده، در صورتی که برای احکام بدیهی‌تر از آن اقامهٔ برهان نموده است. خود برای اثبات این اصل، هشت قضیه مطرح می‌کند. و در اثبات قضیهٔ هشتم (دو خط عمود بریک خط با هم موازیند) برهان فلسفی می‌آورد. دو قرن بعد، خواجه‌نصیرالدین طوسی ایراد خیام را به اقلیدس می‌پذیرد و می‌گوید خیام برای اثبات قضیهٔ هشتم دلیل فلسفی آورده در صورتیکه باید برهان آن هندسی، ومتکی به چهار اصل قبلی کتاب اقلیدس باشد. و خود برای اثبات اصل پنجم برهانی اقامه می‌کند که بعدها مورد قبول واقع نمی‌شود.
خواجه نصیرالدین طوسی از حکما و ریاضی‌دانان بزرگ قرن هفتم هجری قمری است. که کتاب تحریر اقلیدس او که به زبان عربی نوشته شده از جمله کارهای بزرگ ایرانیان در اینرشته است... شک خیام و نوشته‌های خواجه نصیرالدین دربارهٔ اصل پنجم در زمانهای بعد ادامه پیدا می‌کند تا در قرن نوزدهم منتهی به کارهای گاوس و پیدایش فضاهای جدید و هندسه‌های لباچفسکی و ریمانی می‌شود.

سیر تحوّل علوم و بویژه هندسه از قرن هفتم تا سیزدهم هجری قمری در این مقوله موردنظر نیست و خواننده می‌تواند به تحقیقات مرحوم دکتر مصاحب و آقای ابوالقاسم قربانی رجوع کند.

۱ــ در سال ۱۲۶۸ هـ ق که مدرسهٔ دارالفنون به همت و پایمردی وزیر مقتدر میرزا تقی‌خان امیرکبیر ۱۲۲۳ـ۱۲۶۸ هـ ق تاسیس، و معلّمین و کارشناسان برای تدریس در رشته‌ها مختلف از اروپا به ایران دعوت شدند. جالب توجه این است که دستور وزیر چنین بود که دعوت شدگان از کشورهایی انتخاب شوند که منافع استعماری در ایران نداشته باشند. متاسفانه به این دستورها عمل نشد و... و تاسیس دارالفنون و ورودِاین معلّمین به ایران مصادف با روزگار شومی بود که امیرکبیر به دسیسهٔ دربار قاجار و کشورهای روس و انگلیس آخرین روزهای زندگی پرافتخار خود را درباغ فین کاشان در حال تبعید سپری می‌کرد.

در اینجا لازم می‌دانم که برای کسب اطلاع صحیح خوانندگان مقالهٔ آقای دکتر علیرضا جمالی را در اینجا بیاورم. این مقاله را به عنوان مقدمه به اولین کتاب هندسه‌ای که در دارالفنون تدریس شده در اختیار این جانب است نوشته‌اند.

«تدریس ریاضی برمبنای اطلاعات اروپایی از زمان تاسیس دارالفنون (۱۲۶۸ هـ ق) در ایران آغاز شد دو معلم اول این علم در دارالفنون کرشیش اطریشی و ملکم‌خان بودند. در روزنامهٔ آن زمان وقایع اتفاقیه چنین آمده است.« کرشیش علم توپخانه و علم هندسه و حساب و علم جغرافیا و مشق توپ تدریس می‌کرد و ملکم‌خان نیز به شاگردان خود دو درس می‌گفت یکی درس حساب و هندسه که جمیع شاگردان می‌خواندند و یکی درس خاص که به دوازده نفر از شاگردان با استعداد مطالب عالیهٔ هندسه را از قواعد محکمه و صنعت نقاشی (ظاهراً مراد پرسپکتیو یا علم مناظر و مرایا است) و علم جغرافیا درس می‌گفت...» در سال ۱۲۷۰ هجری قمری مسیو بوهلر [بوهلر] فرانسوی به ایران آمد و تدریس ریاضی و مهندسی نظام دارالفنون را بعهده گرفت وبعد از او مسیو تمبرک فرانسوی عهده‌دار تدریس هندسهٔ مدرسه گشت. چون محصلین اعزامی زمان ناصرالدین شاه به ایران بازگشتند چندتن از آنها مانند عبدالرسول‌خان میرزا نظام کاشانی و میرزاعباس‌خان که تحصیلات خود را در ریاضیات ادامه داده بودند چندگاهی به تدریس ریاضیات مدرسه مامور شدند. متداول‌ترین درس ریاضی آن زمان حساب و هندسه بود.»

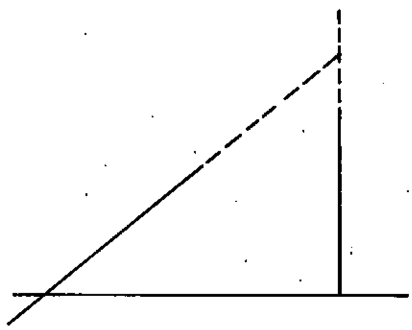
۲ــ معرفی اولین کتاب هندسه اقلیدسی که در ۱۲۷۳ هـ ق چاپ شده است. این کتاب هندسه ـ به‌طوری که از مقدمهٔ آن برمی‌آید از درسهای مسیو بوهلر فرانسوی اقتباس و بوسیلهٔ عبدالرسول‌خان مهندس چاپ، و در اختیار علاقه‌مندان قرار گرفته گویا اولین کتاب هندسه است که در ۱۲۷۳ چاپ شده. این کتاب باستانی متمم هندسه شامل مطالبی است که امروز در دبیرستانها تدریس می‌شود. از شش کتاب (فصل) تشکیل شده است. که پنج کتاب آن مربوط به هندسه و کتاب (فصل)

ششم شامل مثلثات است با مختصری از نقشه‌برداری.

در مثلثات بجای نمادهای sinA, cosA, tagA, cotgA, sécA و cosécA را بترتیب نمادهای جیب، جیب‌تمام، ظل، ظل‌تمام، قطرظل و قطر ظل تمام، به‌کار رفته است.

بجای اصل موضوع اقلیدس، (اصل پنجم) حکم زیر را می‌آورد.

تنبیه هرگاه دو خط مستقیم قائم شده باشند برخطی و یکی از آنها عمود باشد و دیگری مایل، لامحاله آن دو خط در حالت امتداد تلاقی خواهند کرد.



آنگاه از روی تنبیه اصل پنجم به این شرح را ثابت کرده است

- از هر نقطه که خارج خطی باشد بیش ازیک خط نمی‌توان اخراج نمود که موازی باشد با خط مفروض.

۳ ــ اصول هندسهٔ نجم الدوله ـ تالیف حاج عبدالغفار نجم الدوله است که در تاریخ ۱۳۱۸ ه ق. ۴۵ سال بعد از هندسه اول چاپ و انتشار پیدا کرده است.

اصل موضوع اقلیدس در این کتاب مانند کتاب درسهای بوهلر که شرح آن داده شد ثابت شده است. با این تفاوت که این حکم را که جانشین اصل موضوع اقلیدس شده (دو خط عمود و مایل برخط مفروض یکدیگر را قطع می‌کنند) در کتاب مسیو بوهلر عنوان (تنبیه) و در این کتاب عنوان (حکم) دارد.

کتاب اصول هندسهٔ نجم الدوله ۴۴۴ صفحه دارد که دارای هشت مقاله و ضمائم آنهاست. و شامل همه مطالب هندسهٔ مسطحه و فضایی و متمم هندسه است که بزبان فارسی چاپ و منتشر شده بغیر از تبدیل انعکاس که از قلم افتاده است.

علاوه برانیها در ضمیمهٔ مقالهٔ چهارم قضیه راجع به ما گزیمم و می‌نیمم و این دو خاصیت مهم دایره مطرح شده است:

دایره با محیط ثابت بزرگترین مساحت و با مساحت ثابت کوچکترین محیط را دارد. در کره راجع به مثلث کروی شرح مفصلی دارد و همینطور در اجسام افلاطونی که در کتب فارسی دیده نمی‌شود.

در مقالهٔ چهارم درپایان محاسبهٔ ضلع چند ضلعی‌های منتظم محاط در دایره برحسب شعاع دایره و تعداد اضلاع. علاوه بررسم ۴،۶،۵،۱۰،۱۵ واضعاف ضلعی آنها تحت عنوان تنبیه در صفحهٔ ۱۹۵ اشاره به کشف مهم گاوس می‌کند به این شرح تنبیه ـ مدتی مهندسین براین اعتقاد بودند که چند ضلعی‌های منتظم برحسب اصول هندسه محدود به رسم ۴، ۵، ۶، ۱۰، ۱۵ و اضعاف آنهاست ریاضی‌دان بزرگ گاوس ثابت کرد رسم ۱۷ ضلعی منتظم و به طورکلی آنچه دارای 2^n+1 ضلع باشد مشروط براینکه... .... اما طریق رسم اینگونه اشکال مرکب است و مناسب نیست در کتاب اصول نقل شود.

۴ ــ هندسهٔ رهنما[1] (مقدمهٔ طبع اول)

بعدالحمد من بند؛ که قریب بیست سال است در راه خدمت به معارف صرف عمر نموده و در طریق تعلیم تجاربی اندوخته‌ام بعد از تتبع بسیار سبکی را که مؤلفین و مصنفین آلمانی برای تعلیم هندسه اختیار نموده‌اند بغایت پسندیده و مفتخ یافتم چه هرچند درس هندسهٔ دبیرستانها تقریباً همان تحریر اقلیدس است لیکن مسلم است برای اینکه دانش آموزان صاحب امکان نظر و دارای قوهٔ تصرف گردند البته کیفیت و اسلوب کتب تحصیلی دخالت تامه دارد و چنانکه برارباب فطانت پوشیده نیست تحصیل هندسه نه فقط فراگرفتن یکعده قضایا و حفظ براهین آنست بلکه شرط است که دانش آموز خود بتواند صاحب رأی باشد و دماغ وی قابلیت استخراج و استنباط مطالب و براهین را پیدا کند و این ملاحظه در تألیفات آلمانی کاملاً رعایت شده و منظور آمده.

علیهذا این بنده با اینکه از تألیف و تصنیف به عللی چند حتی‌المکان برکنارم دریغ داشتم از وسیلهٔ تعمق و تحقیق در هندسه محروم باشند. لازم و واجب شمردم که کتابی موافق این سبک و رویه برای دبیرستانها تألیف نموده طالبین را به این طرز آشنا ساخته و وسیلهٔ عوز و تدقیق را تا اندازه‌ای برای دانش آموزان فراهم سازم تنها شرط استفاده کامل از این مختصر آنست که دبیران محترم مخصوصاً در ابتدا سعی فرمایند که دانش آموز مطالب کتاب را روی دقت و تعقل فراگیرد و باصطلاح طوطی‌وار نگذرد و بعلاوه حتی‌المکان شاگرد را به حل مسائل و تمرینات وادار نمایند امید است این خدمت ناقابل در پیشگاه دانشمندان مملکت و کارکنان معارف موقع قبول یابد که بهترین اجر نگارنده همین است و بس.

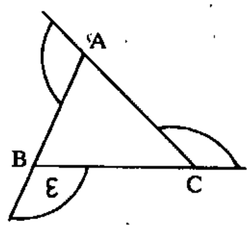
(غلامحسین رهنما)

دراین کتاب بعد از تعریف زاویه و تعریفها و قضیه‌های راجع به آن در صفحه ۲۴ بند ۹۸ قضیه زیر را مطرح می‌کند.

«۹۸ قضیه ــ مجموع سه زاویه خارجه مثلث چهار قائمه است.

[1] هندسهٔ رهنما ــ چاپ نهم ۱۳۱۶ (این کتاب از طرف ادارهٔ برنامه‌ریزی عکس برداری شده و یک نسخه از آن دراختیار این جانب است. ح. غیور

برهان ــ فرض می‌کنیم متحرکی بر محیط مثلث ABC شکل ۱۹ از نقطهٔ مانند P بر ضلع AB شروع به حرکت نموده براس B آمده و از آنجا به رأس C بعد به رأس A رفته و بالاخره به نقطهٔ B معاودت کند فوراً ملاحظه می‌شود که متحرک مزبور ناچار است در سه نقطه B و C و A امتداد حرکت خود را تغییر دهد از این قرار که در رأس B باندازهٔ زاویهٔ ε بچرخد و



کذالک در دو رأس C و A باندازهٔ دو زاویهٔ φ و δ دوران کند اما به مناسبت استقامت ضلع در هیچیک از نقاط دیگر دورانی ندارد ولی چون همواره در یک جهت چرخیده عاقبت بهمان جهت اول متوجه است معلوم می‌شود که در ضمن حرکت یکدوره یعنی $360°$ یا چهار قائمه به دور خود دوران نموده و لهذا

۴ قائمه = $\delta + \varphi + \varepsilon$.»

بعد در قضیه ۹۹ ثابت می‌کند مجموع سه زاویهٔ هر مثلث دو قائمه است.

امروزه میدانیم با قبول این که مجموع سه زاویهٔ مثلث دو قائمه است، اصل پنجم اقلیدس ثابت می‌شودولی در صفحهٔ ۵۵ بند ۱۸۱ اصل پنجم اقلیدس به این شرح مطرح می‌شود.

«اصل موضوع ــ بر نقطهٔ مفروضه در خارج خط مفروض یک خط بموازات آن مرور می‌کند نه بیش (اصل موضوع حکمی است محقق که نتوان برهانی بر آن اقامه نمود و باید فقط تجربه آن را ثابت کرده باشد، و اصل موضوع فوق را به اقلیدس نسبت می‌دهند)»

اگر در کتاب هندسهٔ مرحوم رهنما قضیه اینکه مجموع زوایای خارجی مثلث چهار قائمه است به عنوان اصل موضوع مطرح می‌شد و برای بیان و توجیه آن (نه برهان هندسی) حرکت متحرک فرض در محیط مثلث موردبحث قرار می‌گرفت، و بعد در صفحهٔ ۵۵ شماره ۱۸۱ حکم از نقطهٔ خارج خط بیش از یک خط نمی‌توان به موازات آن رسم کرد به عنوان قضیه می‌آمد، ظاهراً اشکالی پیش نمی‌آمد به نظر نگارنده در این مقاله اشکال بیشتر متوجه مؤلفین و مصنفین کتاب آلمانی است که مرحوم رهنما هندسه را از آنها اقتباس کرده است.

گذشته از این موضوع، سبک تحریر و سیاق کلام و مرتب بودن مسائل و مطالب از نظر آموزشی بر هندسه‌های قبلی رجحان کامل دارد. کسی که این هندسه را مطالعه می‌کند در می‌یابد که چرا مؤلف دانشمند این کتاب میرزا غلامحسین خان رهنما رئیس دانشکدهٔ فنّی و وزیر اسبق فرهنگ و معلّم استادان عصرما تا این اندازه روی شاگردان و کسانی که از محضر درس او استفاده کرده‌اند اثر گذاشته و آنها را مسحور و مجذوب خود کرده است.

در هندسهٔ رهنما در هر فصل ترسیمات مربوط به قضایای آن فصل، و احکامی که به سادگی از روی قضایا قابل اثبات است، و در حل مسائل و تمرینات رهنمای دانش آموزان می‌شود، و مطالب مهمی که به عنوان مسئله اصلی در متن کتاب آمده و اثبات شده، دست و فکر دانش آموز و خواننده را به کار وادار می‌کند، وجود دارد. بدیهی است هندسه رهنما و تمام هندسههایی که بعد از آن در ایران چاپ و منتشر شده از تحریر اقلیدس سرچشمه می‌گیرد. توضیح اینکه بعد از نهضت علمی اروپا تحریر اقلیدس بوسیلهٔ مصنفین و مؤلفین برای استفادهٔ عموم مورد بررسی و تنقیح و تشبیب واقع شد و بصورت فعلی درآمد در هر کشور برای استفاده دانش آموزان و دانشجویان کتابهای هندسه از این رهگذر ترجمه و چاپ و منتشر می‌گردد. درایران گذشته از چند کتابی که ذکر شد مولفات جالبی هست که نمونه‌هایی از آنها برای چاپ در رشد ریاضی ذکر می‌شود که قدردانی از خدمات فرهنگی بانیان آنها باشد.

۱ ــ هندسه مخصوص کلاس ششم دبیرستانها تألیف حسین هورفر ۱۳۱۳ (هـ ش)

۲ ــ توابع مستدیره مثلثات مستقیم‌الخط و کروی نگارش غلامحسین مصاحب و احمد احسنی ۱۳۱۴ هـ ش

۳ ــ دورهٔ هندسهٔ علمی و عملی برای دانشکده‌ها در ۲۲۳ صفحه آذرماه ۱۳۲۰ تألیف مهندس رضا.

در مقدمهٔ این کتاب این جمله به نظر می‌آید «در آرزوی پیشرفت علوم و صنایع ایران این کتاب را به جوانان برگزیدهٔ کشور تقدیم می‌دارم. فضل‌اله رضا،

استاد دانشمند پرفسور تقی فاطمی مقدمه‌ای جامع بر این کتاب نوشته است.

۴ ــ نه مقاله تألیف دانشمندان محترم ابوالقاسم قربانی و حسن صفاری شامل هندسه مسطحه و فضایی و مخروطات و حاملها کتابیست کم نظیر و جامع ۷۱۵ صفحه دارد.

۵ ــ هندسهٔ سال ششم ریاضی تألیف محمدحسین رزاقی خمسی شامل ۶۸ صفحه، مختصر و بسیار جامع و مفید.

۶ ــ کتاب بازآموزی و بازشناخت هندسه. برای دانش آموزان و معلمان دبیرستا، مؤلفان هـ. س. م کوکس تیر. س. ل کویتزر ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی

۷ ــ هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی نوشته ماروین گوتنبرگ ترجمه م. ه شفیعها

۸ ــ هندسه سال اول و دوم و سوم تألیف احمد بیرشگ محمد طاهر معیری.

۹ ــ هندسه سال چهارم متوسطهٔ سابق تألیف حسین مجذوب (نایاب)

۱۰ ــ هندسه چهارم ریاضی تألیف حسین غیور حسین مجذوب محمد طاهر امیری

قصد داشتم مطالبی دربارهٔ هندسه اقلیدسی از آغاز تا قرن بیستم بنویسم مطالبی هم تهیه کرده بودم. مطالعهٔ مقالهٔ مهندس رضا را که در سال ۱۳۲۰ یعنی ۴۸ سال قبل نوشته‌اند خواندم و تصمیمی گرفتم که قسمتی از مقدمه‌ای را که در کتاب دوره هندسه علمی و عملی برای دانشکده‌ها نوشته‌اند عیناً نقل کنم که شرط امانت رعایت شده باشد و خوانندگان از نثر بدیع و سادهٔ ایشان و اسامی و اصطلاحاتی که برای اشکال هندسی بکار رفته استفاده کنند.

نقل از کتاب دورهٔ هندسهٔ علمی و عملی نگارش مهندس رضا

هندسهٔ اقلیدسی ــ اقلیدس در سده سوم پیش از میلاد در اسکندریه میزیسته و نخستین کسی است که هندسه را بر اساس محکمی بنا نهاده است. کتاب اقلیدس از حیث صحت و دقت و نظم و ترتیب کمتر نظیر دارد و از همین جهت بیش از دو هزار سال بر کشور عقول فرمانروائی کرده است. این کتاب شامل مقدمات حساب و هندسه با ساختمان منطقی است به سیزده مقاله تقسیم می‌شود: چهارمقاله هندسه مقالهٔ پنجم کلیات اندازه‌ها و نسبتها ــ مقاله ششم پهنه‌ها (مساحت‌ها) سه مقاله حساب ــ مقالهٔ دهم پیکرهای گنگ. سه مقاله هندسه فضائی

هندسهٔ اقلیدسی بر سه گونه فرض استوار شده: تعریفها ــ اصل موضوعها ــ اصلهای متعارف اینک (فرض‌های مقالهٔ اول کتاب اقلیدس را که اهمیت فراوان دارند از نظر می‌گذرانیم.

تعریفها ــ نقطه چیزیست که بعد نداشته باشد. خط درازائی است بی‌پهنا ــ بُن‌های هر خط نقطه می‌باشند. خط راسته (مستقیم) خطی است که در تمام نقطه‌های خود همانند خویش است رویه چیزی است که فقط درازا و پهنا داشته باشد. هامن (صفحه) رویه‌ایست که برای تمام خطهای خود همانند باشد. اگر از یکی از نقطه‌های خطی خطی رسم کنیم که با آن دو گوشهٔ (زاویه) مجاور یکسان بسازد هر یک از آن دو گوشه راست (قائمه) و دو خط را عمود برهم گویند.

دو خط یک هامن (صفحه) موازیند هنگامی که آنها را تا بینهایت ادامه دهیم به یکدیگر نرسند.

اصل موضوعها ــ شمارهٔ آنها پنج است.
۱ ــ دو نقطه را می‌توان با یک خط راست بهم پیوست. ۲ــ خط محدودی را می‌توان تا بینهایت ادامه داد ۳ ــ ترسیم دایره‌ای به مرکز و شعاع مفروض ۴ ــ تمام گوشه‌های راست (زاویه‌های قائمه) یکسانند ۵ــ اگر خطی دو خط دیگر را چنان ببرد (قطع کند) که رویهم گوشه‌های (مجموع زاویه‌های) درونی یک‌طرف آن کمتر از دو گوشهٔ راست (زاویهٔ قائمه) باشد آن دو خط در همان طرف خط که گوشه‌ها قرار دارند همرسند. اصل موضوع اول و دوم خط راسته (مستقیم) را معلوم می‌دارند باین ترتیب که دو نقطه یک خط راسته را مشخص می‌کنند و خط راسته تا بینهایت ادامه دارد. اصل موضوع پنجم به‌نام آغازهٔ اقلیدس (اصل موضوع اقلیدس) معروف است و برای اثبات آن دانشمندان کوششها نمودند و در نتیجهٔ همین کوششها هندسه‌های غیر اقلیدسی پدید آمد. اصلهای متعارف ــ این اصلها در تمام دانشهایی که در آنها از اندازه بحث می‌شود مشترک و شمارشان هشت است.

۱ــ دو چیز که با چیز سومی برابر باشد با هم برابرند. ۲ــ اگر بر اندازه‌های برابر چیزهای برابر بیفزائیم نتایج برابرند ۳ــ اگر بر اندازه‌های نابرابر چیزهایی برابر بیفزایم نتایج نابرابرند. ۴ــ اگر از اندازه‌های برابر چیزهای برابر بکاهیم نتایج برابرند ۵ ــ دو تعداد برابر با اندازه‌های برابر برابرند ۶ــ نیمهای (نصف‌های) اندازه‌های برابر برابرند ۷ــ اندازه‌هایی که کاملاً بر روی هم منطبق شوند برابرند ۸ ــ کل بزرگتر از جزء است اقلیدس با تذکر این اصول برابری کمیات را بیان کرده ویژه (بخصوص) به‌کمک اصل مستقیم یکسانی پیکرهای هندسی را توجیه می‌نماید.

پس از اقلیدس دو دانشمند بزرگ ارشمیدس و آپولونیوس پدید آمدند که در نتیجهٔ کوشش ایشان علوم ریاضی توسعهٔ فراوان یافتند.

ارشمیدس (۲۸۷ ــ۲۱۲ پیش از میلاد) ــ ارشمیدس بدون شک بزرگترین ریاضی دان دورهٔ قدیم بشمار می‌رود. یافتن نسبت پیرامون دایره به‌قطر و پهنهٔ (مساحت) سهمی و گُنج (حجم) بیضوی و پارابلوئید هیپرلیک و قانون اهرمها و پایداری اجسام شناور و بسیاری از پایه‌های هندسه و آمار از آثار اوست. آپلونیوس (۲۰۰ــ۲۶۰) قسمت اعظم زندگانی خویش را در اسکندریه نزد جانشینان اقلیدس بسر برد. کتاب بسیار معروفی راجع‌به مقاطع مخروطی نوشته‌که مشتمل بر هشت جلد و جلد آخر آن در دست نیست. این دانشمند بر عکس پیشینیان خود به‌تعریف جداگانه مقاطع مخروطی قناعت نکرده و آنها را بصورت مقاطع مختلف مخروط مایل مستدیر القاعده در نظر گرفت. کتاب آپولونیومن بطور کلی آنچه را که ما امروز از قطرها واسمها (محورها) و مرکزها، مجانبهای مقاطع مخروطی میدانیم شامل بوده. ولی با وجود این در آن کتاب نامی از خطهای هادی برده نشده

است.. اقلیدس و ارشمیدس و آپلونیوس بزرگترین دانشمندان هندسه عهد قدیم بشمار میروند و پس از آنها هندسه ترقی شایانی نکرده و قریب هیجده قرن به همان حال باقی مانده است.میراث علمی یونانیان به عربها و ایرانیان رسید، و در نزد ایشان توسعه و تکامل یافت و سرزمین باختر بیش از هزار سال در تیرگی بسر برد تا انکه در سدهٔ یازدهم میلادی هندسه نیز در ضمن جنبش علمی و ادبی دوباره در آن سرزمین پدیدار گردید. یکی از دانشمندان بزرگ هندسه در قرون وسطی خواجه نصیرالدین طوسی است.(۱۲۰۱،۱۲۷۴) که در تمام رشته‌های علوم زمان خود کتب مبوط نگاشته مخصوصاً در هندسه بسیاری از قضایای هندسهٔ اقلیدس را از راههای دیگری اثبات کرده بویژه در اصل موضوع پنجم تعمق و تامل شایانی نموده است.

در سدهٔ هفدهم ریاضی‌دانان بزرگی در باختر (مغرب) پدید آمدند که در پرتو افکارشان نهضت علمی عهد قدیم از نو بر پاشد. در رشته‌های مختلف علوم اکتشافات تازه به‌ظهور پیوست. پیرو این نهضت ریاضیات و فلسفهٔ اساسی محکم و ونوین یافته و بر روی آنها دانشهای نو بنیاد شد.

کپلر (۱۶۳۱_۱۵۷۵) همان دانشمندی که هیات نوین را بنا نهاد استعمال بی‌نهایت را نیز برای نخستین‌بار در هندسه گوشزد کرد. پس از او دکارت و فرما و ربروال تقریباً در یک‌زمان مسئلهٔ مماس برخمها (منحنی‌ها) را مورد بحث قرار داده و هر یک در اطراف آن تحقیقات گرانبها نمودند دکارت (۱۶۵۰_۱۵۹۶) فیلسوف عظیم‌الشان فرانسوی بسال ۱۶۳۷ کتابی بنام بکار بردن جبر در تئوری خمها به انظمام کتاب گفتار در روش درست راه بردن عقل و طلب حقیقت منتشر ساخت که در آنها جزئی اقتباسی از افکار پیشینیان بعمل نیامد. و همه از ابتکارات اندیشهٔ توانای وی بکار می‌رود کتاب نخست استعمال دستورهای جبری را در هندسه وسیلهٔ عبور از موانع قرار داده و با اختراع هندسه تحلیلی هندسهٔ قدما را از تنگنا بدر آورد.

دزارگ (۱۶۶۲ _۱۵۹۳) از پایه‌گذاران بزرگ هندسهٔ نو بشمار ست و چون در زمان او پیکر نگاران و معماران زبردست در باختر پدید آمدند اندیشهٔ وی به‌سوی مناظر و مرایا گرائید و کتاب معروفی در این باب نگاشت. دزارگ و پاسکال هر دو از موجدین هندسهٔ نو به‌شمار میروند و بوسیلهٔ ایشان نوعی از هندسه بنام تحلیلی شهرت و اهمیت یافت. دزارگ نخستین کسی است که نقاط بی‌نهایت را در هندسه معمول داشت بدین‌وسیله بر قدرت مسائل هندسه افزوده است. مشارالیه خطهای موازی را خطهای همرس در نقطهٔ بی‌نهایت می‌نامید. [تبدیل قطبی معکوس، بطور کلی تئوری قطب و قطبی از دزارگ است] آقای مهندس رضا بعد از مونژ کاشف هندسهٔ ترسیمی و اغازه پیوستگی اوصحبت می‌کند و بعد از پونسله و شال تا به هندسهٔ غیر اقلیدسی میرسد که از شرح آنها صرفنظر شد.

هندسه‌های غیراقلیدسی

گفتیم که اقلیدس چند اصل موضوع را پایهٔ هندسهٔ خویش قرار داد که یکی از آنها بخصوص بنام او معروف شد وهمین اصل موضوع سبب جستجوهای بسیاری گردید که در پرتو آن ریاضیات توسعهٔ فراوان یافت اینک پیش از ذکر این جستجوها اصل موضوع اقلیدس را مورد بحث قرار می‌دهیم. اقلیدس پس از فرض ادامهٔ خط که دو خط موازی را اگر تا بینهایت ادامه دهیم به‌یکدیگر نمی‌رسند آنگاه اصل موضوع معروف خود را چنین بیان کرد: اگر خطی دو خط دیگر را چنان ببرد (قطع کند) که مجموع گوشه‌های (زاویه‌های) درونی حاصل کوچکتر از دو قائمه باشد ادامهٔ این دو خط همدیگر را در طرفی که رویهم (مجموع) گوشهٔ (زاویه‌ها) کوچکتر از دو قائمه است قطع می‌کنند. اقلیدس از این اصل موضوع نتایج زیر را بدست آورد

۱_ از یک نقطه فقط یک خط میتوان موازی با خط دیگر رسم کرد

۲_ مجموع زاویه‌های هر سه بر (مثلث) دو قائمه است

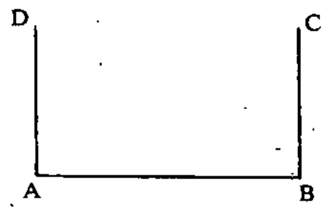
۳_ شکلهای همانند (متشابه) شکل مفروض وجود دارند.

هندسه دانان نخست کوشیدند که اصل موضوع اقلیدس را از دفتر هندسه حذف کنند بدین‌طریق بدون دخالت اصل موضوع‌های نوینی ثابت نمایند (در ایران ابتدا عمر خیام و بعد خوجه نصیرالدین طوسی) و در طی همین جستجوها ثابت شد که با پذیرفتن اصل موضوع‌های دیگری بجای اصل موضوع اقلیدس هندسه‌های دیگری امکان منطقی خواهد یافت (این جستجوها از زمان خیام تا نیمه اول قرن بیستم طول کشید)

دانشمند یونانی پرو کلوس (proclus ۴۸۵_۴۱۰) نخستین کسی است که برای اثبات اصل موضوع اقلیدس کوشش نمود پس از او ریاضی‌دان ایرانی خواجه نصیر الدین طوسی (تاریخ هندسهٔ شال صفحات ۲۸۴ و ۵۰۱) در این زمینه مطالعات گرانبها بعمل آورد

(۱) «نقل از کتاب هندسهٔ نااقلیدسی ترجمهٔ احمدبیرشگ صفحهٔ ۱۱ سطر ۷ حکیم ابوالفتح عمر خیام یا خیامی ــ نیشابوری (۴۳۹ ــ ۵۲۶

ه ق) حکیم، فیلسوف، شاعر، اخترشناس و ریاضی‌دان در درستی اصل پنجم به عنوان اصل موضوع تردید کرد و نظریهٔ خطوط متوازی خود را بر اصلی استوار ساخت که به‌قول خودش از استاد، یعنی ارسطو، گرفته بود. نخست ثابت کرد که دو خط عمود بر یک خط نمی‌توانند همگرا یا واگرا باشند آنگاه ثابت کرد که به حکم تقارن دو خط عمود بر یک خط نمی‌توانند متقاطع شوند و همه‌جا از یکدیگر به یک فاصله‌اند. برای بررسی موضوع دو خط متوازی، بر دو انتهای پاره‌خط AB دو عمود متساوی BC و AD را



اخراج کرد و از C به D وصل نمود. برای زاویه‌های C و D سه امکان فرض کرد حاده بودن، منفرجه بودن، قائمه بودن، در فرض اول CD درازتر از AB و در فرض دوم کوتاه‌تر از آن می‌شد در نتیجه دو عمودی که بر AB اخراج شده بودند بایستی نابرابر باشند و فرض متساوی بودن آنها نقض می‌شد، پس دو فرض اول صورت نمی‌گرفت و زوایای C و D قائمه بودند که خود مبین هم فاصله بودن CD و AB بود.

اکنون اگر آنچه را که ساکری کرد در متن می‌بینید با کار خیام بسنجید شاید شما هم بر این عقیده شوید که برای چهار ضلعی ABCD که ، چهار ضلعی ساکری موسوم است نام خیام برازنده‌تر باشد که حق‌تقدم با اوست.»

در سدهٔ هفدهم والیس ثابت کرد که اگر وجود مثلثی متشابه با مثلث مفروض را بپذیریم اصل موضوع اقلیدس قابل اثبات خواه بود. ساکری (saccheri ۱۶۶۷_۱۷۳۳) دانشمند ایتالیایی راه نوینی در این مبحث یافت بدین روش که مشارالیه چهار ضلعی ABCD را در نظر می‌گرفت که پهلوهای AD وBC آن برابر و عمود بر AB باشند و سه حالت تمیز می‌داد ۱ـ C و D هر دو قائمه باشد در این حالت مجموع زاویه‌های هر مثلث دو قائمه بوده و از آن، فرض اقلیدس را می‌توان نتیجه گرفت ۲ـ دو گوشهٔ (زاویه) C و D هر دو حاده می‌باشند در این‌حالت مجموع زاویه‌های هر مثلث کمتر از دو قائمه می‌باشد. ۳ـ دو زاویه C و D هر دو منفرجه می‌باشند در این حالت مجیوع زاویه‌های مثلث بیشتر از دو قائمه می‌باشد ولی نتیجهٔ اخیر با فرض ادامهٔ نامحدود خط متناقض است. ساکری تبصرهٔ مهمی افزوده می‌گوید اگر در یک مثلث مجموع زاویه‌ها برابر دو قائمه باشد در تمام مثلثها این قضیه ثابت خواهد بود. چنین به‌نظر می‌رسد که مشارالیه نخستین کسی است که امکان منطقی هندسه‌ای که در آن رویهم گوشه‌های هر مثلث کمتر از دو قائمه باشد در نظر گرفته است. پس از او هندسه‌دان سویسی لامبرت و هندسه‌دان فرانسوی لاگرانژ و لاپلاس و لژاندر و کارنو و فوریه نیز در این زمینه مطالعاتی به‌عمل آوردند که در میان آنها کارهای لژاندر فوق‌العاده مهم است و مشارالیه بدون بکار بردن اصل موضوع اقلیدس ثابت کرده است که مجموع زاویه‌های هر مثلث کمتر یا بیشتر یا برابر دو قائمه است هندسهٔ لوباچفسکی (logeomerie lobtchefskienne) ـ از شرح هندسه لوباچفسکی صرف‌نظر می‌کنیم علاقه‌مندان به کتاب دوره هندسهٔ علمی و عملی نگارش مهندس رضا در صفحه ۱۶ تا ۱۸ مراجعه کنند.

هندسهٔ ریمانی (geometrie riemannienn) دربارهٔ اصل موضوع اقلیدس سه فرض می‌توان کرد بدین‌طریق که اگر خط a و نقطهٔ A در صفحه‌ای باشند

۱ـ از A یک خط می‌توان رسم کرد که A را قطع نکند (هندسهٔ اقلیدسی)

۲ ـ از A بی‌نهایت یک خط می‌توان رسم کرد که A را قطع نکند (هندسهٔ لباچسفکی)

۳ـ از A خطی نمی‌توان رسم کرد که A را قطع نکند (هندسهٔ ریمانی)

ناگفته نگذاریم که اگر امکان نامحدود خط را بپذیریم هندسه ریمانی صادق نخواهد بود. با پذیرفتن هندسهٔ ریمانی ناچاریم که فرض ادامه نامحدود خط را بدور افکنیم. پس در هندسهٔ ریمان اساساً توازی وجود نداشته و درازای خط محدود است از این‌رو نتیجه می‌شود که مجموع زاویه‌های هر مثلث بیش از دو قائمه باشد. امکان منطقی هندسهٔ ریمانی به تحقق پیوسته و تاکنون هیچ‌گونه تناقضی از آن پدید نیامده است ولی این نکته معلوم نمی‌دارد که هندسه ریمان تحقق فیزیکی داشته باشد.

شکل هندسی جهان- برای مطالعه این قسمت خوانندگان علاقه‌مند به هندسه دوره علمی و عملی از صفحه ۱۸ تا ۲۲ مراجعه کنند.

فقط به این چند سطر توجه کنید که از سطر پنجم صفحهٔ ۱۹ تا نه سطر نوشته شده است پس از اکتشافات دانشمند نامی اینشتاین با حساب و آزمون معلوم شد که نور هنگام عبور از نزدیکی احرام بزرگ آسمانی منحرف شده و بنابراین مسیر آن با خط راست هندسه اقلیدسی متفاوت است. فقط در فضاهای دور از جرمهای سنگین مسیر نور خط راست اقلیدسی بوده و چنین هندسه‌ای را می‌توان در آنجا حکمفرما دانست. در کنار ستاره‌های سنگین، فضا و نور هر دو خمیدگی می‌یابند و در چنین فضایی هندسهٔ ریمانی صادق خواهد بود. اینشتاین نیز در حسابهای خود همین هندسه را بکار برده است.

تعریف عدد e به کمک اصل تمامیت (کمال)

جواد آلی

مقدمه: درشماره قبل، تحت‌عنوان معرفی عدد e، به روش مقدماتی، این‌عدد را تعریف کردیم. دراینجا، می‌خواهیم به‌روش دیگر، با مقدمات لازم، به‌معرفی این عدد بپردازیم. اگرچه بیان چنین مقدماتی نیاز به‌مقالات‌جداگانه است؛ ولی، بخاطرکوتاهی مطلب، و رسیدن به بیان اصلی کـه همان معرفـی عدد e است، فهرست‌وار ازمفاهیم ارائه شده می‌گذریم.

۱ــفرض‌کنید A زیرمجموعه‌ای‌ازاعداد حقیقی با نسبت‌کوچکتری؛ یعنی، $>$، باشد. این نسبت مجمـوعه A را مرتب می‌کنـد، به گونه‌ایکه هردو نقطه متمایز آن مقایسه پذیرانـد؛ یعنی، اگر x و y دونقطه متمایز A باشندآنگاه $x>y$ یا $y>x$. همین‌موضوع می‌تواند مبنای تعریف ذیل باشد.

۱.۱ تعریف: فرض کنید که A زیرمجمـوعه ناتهی از اعداد حقیقی باشد. دراین‌صورت؛

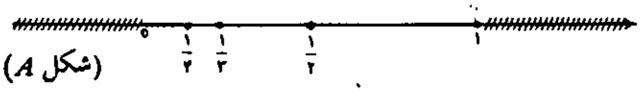
(الف) عدد حقیقی a را یك کران بالای A خوانیم درصورتی که، به‌ازای هر x از A، $x\leqslant a$. اگرچنین aای موجود نباشد، این مجموعه را ازبالا بیکران خوانیم.

(ب) عدد b را یك کران پایین A خوانیم در صورتی که، به ازای هر x از A، $b\leqslant x$. اگـرچنین bای موجـود نباشد، این مجموعه را ازپایین بیکران خوانیم.

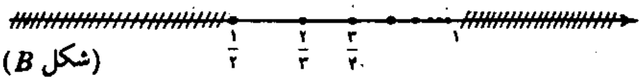
(ت) مجموعه A را کراندار خوانیم در صورتی که از پایین وبالا کراندار باشد. درغیراین صورت، A را بیکران می‌خوانیم. اگرمجموعه‌ای بیکران باشد، این مجموعه ازبالا یا پائین کرانی ندارد؛ یعنی، اگرازبالا (از پایین) بیکران باشد آنگاه به‌ازای هرعدد حقیقی a، A عضوی بزرگترازآن (کوچکتر از آن) دارد.

۲.۱ مثال فرض کنید.

$$B=\left\{\frac{n}{n+۱}\,\middle|\,n\in N\right\} \text{ و } A=\left\{\frac{۱}{n}\,\middle|\,n\in N\right\}$$



(شکل A)



(شکل B)

با توجه به شکل (قسمت هاشورزده)؛ عدد یك وهر عدد بزرگتر ازآن، یك کران بالای A و B است. صفر وهرعدد کوچکتر از آن، یك‌کران پایین A است؛ و $\frac{۱}{۲}$ وهرعدد کوچکتر از آن، یك کران پائین B است.

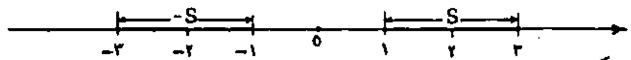
۳.۱ مثال : فرض کنید که $C=\{x|x\leqslant ۲\}$. هرعدد بزرگتر یا مساوی ۲ یك کران بالای C است. مجموعه C ازپایین‌کرانی ندارد. بنابراین، بیکران است.

(شکل C)

۴.۱ مثال : فرض کنید $S\subseteq R$ و $S\neq\phi$. مجموعه $-S$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$-S=\{-x|x\in S\}$$

به‌عنوان مثال، اگر $S=\{x|\ 1\leqslant x\leqslant 3\}$ آنگاه $-S=\{x|-3\leqslant x\leqslant -1\}$.



(شکل ۱)

یعنی، مجموعه $-S$ نسبت به مبدأ مختصات حالت تقارن دارد.

ازتعریف فوق نتیجه مهم ذیل حاصل می‌شود:

قرینه هرکران بالای S یک‌کران پایین $-S$ است، وبالعکس. بنابراین، اگر a یک کران بالای S باشد، $-a$ یک کران پایین $-S$ است، زیرا، به‌ازای هر x از S،

$x\leqslant a$ اگروفقط اگر $-a\leqslant -x$.

بعداً به‌این مثال مهم بازمی‌گردیم.

با توجه به‌مثالهای ارائه شده درمی‌یابیم کـه اگرمجموعه‌ای دارای کران بالا (پایین) باشد، تعدادآنها بیشماراست. اما دربین آنها یکی‌ازهمه مهمتراست‌وآن کوچکترین کران بالا (بزرگترین کران پایین) است که این اعداد اطلاعات دقیقتری از مجموعه بما ارائه می‌دهنـد. بنابراین، استحقـاق آن را دارند کـه نام جداگانه‌ای داشته باشند.

۵.۱ تعریف: فرض کنید که S زیرمجموعه ناتهی از اعداد حقیقی باشد. دراین‌صورت؛ (الف) کوچکتـرین کران بالای S را سوپرموم S می‌نامند وآن را با نماد

$$\sup S$$

نمایش می‌دهند. اگر سوپرموم یک مجموعه عضو آن مجمـوعه باشد، آن را ماکزیموم مجموعه می‌خوانند بنابراین، $\sup S=a$ اگروفقط اگر؛

۱) به‌ازای هر x از S، $x\leqslant a$ (یعنی، a کران‌بالای S است)،

۲) به‌ازای هر $U<a$، عضوی از S، مانند x، موجود باشد که $U<x$ (این به‌این معنی است که a کوچکتـرین کران بالای S است).

اگر $a\in S$ آنگاه گوییم ماکزیمـوم S برابـر a است وآن را با نماد ذیل نمایش می‌دهیم.

$$\max S=a$$

(ب) فرض‌کنید S مجموعه‌ای ناتهی واز پایین کراندارباشد. بزرگترین کران پائین S را اینفیموم S می‌نامیم و آن را با نماد

$$\text{Inf } S$$

نمایش می‌دهیم. اگر اینفیموم یـک مجموعه عضو آن مجمـوعه باشد، آن را مینیموم مجموعه می‌نامیم:

با توجه به‌مثال ۴.۱، نتیجه مهم ذیل حاصل می‌شود؛

«a سوپرمـوم S است اگر و فقط اگر $-a$ اینفیموم $-S$ باشد».

بنابراین، بسیاری از احکام را برای سوپرموم مجموعه ثابت می‌کنند، وسپس، این‌احکام را، به‌کمک مثال ۴.۱، برای‌اینفیموم نتیجه می‌گیرند.

۶.۱ مثال: در مثال ۲.۱، سوپرمـوم A و B یـک است؛ و اینفیموم آنها، به‌ترتیب، صفر و $\frac{1}{2}$ است. درمثال ۳.۱، سوپرموم C عدد ۲ است. ولی، اینفیموم‌ندارد. همچنین، ماکزیموم A عدد یک است ($1\in A$)، ولی، ۱ ماکـزیموم B نیست (زیرا، $1\notin B$). اثبات دقیق بعضی ازاحکام فوق نیازبه‌خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی دارد.

سؤالی‌که دراینجا مطرح است این است‌که آیا هرمجموعه‌ای دارای سوپرموم و یا اینفیموم است؟ ویا وجـود سوپرموم و یا اینفیموم براساس‌کدام اصل وکدام حکم است؟ جهت روشن‌شدن این پرسش، ابتـدا، ساختمان اعداد حقیقی را مورد نظـر قرار می‌دهیم. فرض کنید که هدف اصلـی ما این باشد کـه بخواهیم مجموعه اعداد حقیقی را، با کمترین اطـلاعات ممکن، بسازیم. برای این‌منظور، فرض کنیـد F مجمـوعه‌ای باشد کـه دارای خواص ذیل است:

۱) F حداقل دارای دوعضو است و درآن دوعمل تعـریف شده است. جهت روشن‌شدن مطلب اعمال را، به‌ترتیب، جمع و ضرب می‌نامیم.

۲) تحت‌عمل جمع یک گروه جابجایی باشد[1]، عضوخنثای آن را صفر؛ ۰، می‌نامیم.

۳) $F-\{0\}$ تحت عمل ضرب یـک گروه جابجـایی باشد، عضو خنثای‌آن را یک؛ ۱، می‌نامیم.

۴) عمل ضرب نسبت به‌عمل جمع توزیع‌پذیرباشد.

۵) رابطه‌ای، مانند $<$، در F تعـریف شده کـه یک نسبت ترتیبی درآن ایجاد می‌کند.

اگریک ماشین‌حساب یا دستگـاهی قادر به انجام اعمال فوق (باخواص مذکور) باشد، به‌کمک اعداد ۱ و ۰، زیرمجموعه‌های مأنوس اعداد حقیقـی (N، Z، Q) تا اعداد گـویا را می‌توان ساخت، [1] وبیش ازآن نمی‌توان عدد دیگری را بدست آورد. برای گسترش F به‌همه اعداد حقیقی؛ R، نیاز به‌اصلی داریم‌که F را به R توسیع می‌دهند وآن را به‌مجموعه کامل (تام، تمام) تبدیل می‌کند وآن اصل تمامیت است. این اصل رخنه‌های‌موجود بین اعداد گویا را پرکرده وهرعضو F را متناظر نقطه‌ای برخط

راست، که به‌محور اعداد حقیقی معروف است، قرار می‌دهد.

۷.۱ اصل تمامیت. هرمجموعه ناتهی ازاعداد حقیقی، که از بالا کراندار است، دارای کوچکترین کران بالا (سوپرموم) است.

یکی ازنتایج مهم اصل تمامیت، خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی است و آن این است که مجموعه اعداد طبیعی، N، در مجموعه اعداد حقیقی، کران بالا ندارد. اگرچه، این خاصیت بسیاربدیهی ومقدماتی بنظرمی‌آید، ولی صورتهای معادل آن احکام مهمی را بیان می‌کنند. درضمن، برهان‌آن مستقل از اصل تمامیت نیست. البته، میدان مرتب دیگری برمجموعه اعداد حقیقی موجود است که خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی در آن صدق نمی‌کند [۳].

۸.۱ (خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی) مجموعه اعداد طبیعی N، در R، ازبالا بیکران است.

برهان. فرض کنیم چنین نباشد. یعنی، N بر مجموعه اعداد حقیقی ازبالا کراندارباشد. بنابراصل تمامیت، کوچکترین کران بالای N موجود است. فرض کنید که a کوچکترین کران بالای آن‌باشد. بدیهی است‌که $a-1$ نمی‌تواند کران بالای N باشد. بنابراین، عضوی در N، مانند n_0 موجود است‌که $a-1<n_0$. یا $a<n_0+1$ و $n_0+1\in N$. اما، این با این فرض که a کران بالای N است تناقض دارد. با این تناقض حکم ثابت می‌شود.

دراینجا، صورتهای معادل دیگری از خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی را بیان می‌کنیم، که تمایز بیان ظاهری آن، کاربرد مفیدی دراحکام بعدی دارد. ما دراینجا، از اثبات معادل بودن آنها صرفنظرمی‌کنیم.

۹.۱ قضیه: هریك ازاحکام ذیل معادل خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی است.

(الف) به‌ازای هر $x\in R$، عدد طبیعی مانند n موجود است‌که $n>x$.

(ب) به‌ازای هر $x>0$ وهرعدد حقیقی y، عددی مانند $n\in N$ موجود است که $nx>y$.

(پ) به‌ازای هر $x>0$، عددی، مانند $n\in N$، موجود است که $0<\frac{1}{n}<x$.

اینك ابزار کافی برای اثبات اینکه سوپرموم مجموعه $B=\left\{\frac{n}{n+1} \mid n\in N\right\}$ برابریك است به‌دست‌آورده‌ایم. برای اثبات ادعای خود، ابتدا ثابت می‌کنیم که عدد ۱ یك کران بالای B است وآن بدیهی است. زیرا، به‌ازای هرعدد طبیعی n،

$$\frac{n}{n+1}\leqslant 1$$

حال ثابت می‌کنیم که ۱ کوچکترین کران بالا است؛ یعنی، اگر U عدد حقیقی مثبت کوچکتراز ۱ باشد، عضوی از B موجود است‌که از U بزرگتراست. به‌عبارت دیگر، U واجد خاصیت کران بالا نیست. پس فرض کنید $0<U<1$ بنابرخاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی (حکم معادل (ب))، با انتخاب $x=1-u$ و $y=1$ عدد طبیعی، مانند n، موجود است که

$$n(1-u)>1$$

یا

$$\frac{n-1}{n}>U$$

بدیهی است که $n\neq 1$، بنابراین، $\frac{n-1}{n}\in B$ و این ادعای ما را ثابت می‌کند.

اینك مبحث فوق را رها کرده بعضی ازمفاهیم دنباله‌ها را یادآوری می‌کنیم.

۲ـ دنباله (یا رشته)

دنباله تابعی است که دامنه آن مجموعه اعداد طبیعی است. اگر S یك دنباله باشد، معمولاً، مقدارآن را درنقطهٔ n، بجای $S(n)$ با نماد S_n نمایش می‌دهند. ممکن است یك دنباله را به صورت $\{S_n\}_{n\in N}$ یا

$$S_1 , S_2 , S_3 , \dots$$

نمایش‌دهند،که درآن، S_1 اولین‌جمله، S_2 دومین جمله، ...، S_n، nمین جمله دنباله باشد.

۱.۲ تعریف: دنباله $\{S_n\}$ را همگرا (متقارب) به عددحقیقی S می‌نامند درصورتی که به‌ازای هر $\varepsilon>0$، عدد طبیعی مانند N موجود باشدکه به‌ازای هر n، اگر $n>N$ آنگاه $|S_n-S|<\varepsilon$.

اگر $\{S_n\}$ به S همگرا باشد، گوئیم حد این دنباله S است و چنین نمایش می‌دهیم؛

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S \text{ یا } S_n\to S\cdot(n\to\infty)$$

اگر دنباله‌ای همگرا به‌عدد حقیقی S نباشد، آن را واگرا (متباعد) می‌خوانند.

دراین قسمت ازاعمال جبری برحدود دنباله‌ها صرفنظر کرده تنها به‌قضیه بسیارمهمی،که مبنای کار ما درآتیه است، می‌پردازیم. این قضیه برروی دنباله‌های **یکنوا (صعودی یا نزولی)** عمل می‌کند. همانطوری که درتعریف حد مشاهده کردید، بیان آن مستقل ازمقدارحد نیست. آنچه راکه ما درپی‌آن هستیم این‌است که آیا می‌توان همگرایی و واگرایی یك دنباله را، بدون تعیین مقدارحد، تشخیص داد؟ قضیه ذیل پاسخ مثبتی دراین زمینه است. ابتدا، چند تعریف را می‌آوریم.

۲.۲ تعریف: (الف) دنباله $\{S_n\}$ را یکنوا خوانیم درصورتی که صعودی یا نزولی باشد.

(ب) دنباله $\{S_n\}$ را کراندار (ازبالا، پایین) خوانیم در صورتی که مجموعه جمله‌های آن؛ یعنی، $\{S_1, S_2, S_3, \dots\}$ کراندار (ازبالا، پایین) باشد؛

حکم فوق معادل این است که عدد مثبتی مانند M موجود باشد که به ازای هر عدد طبیعی n، $|S_n|<M$ ($S_n\leqslant M$، $-M\leqslant S_n$).

۳.۲ قضیه: (قضیه همگرایی دنباله‌های یکنوا) هر دنباله یکنوا همگرا است اگر وفقط اگر کراندار باشد.

برهان: فرض کنید که $\{S_n\}$ به عدد S همگرا باشد. پس، متناظر $\varepsilon=1$، عدد طبیعی مانند N هست که به‌ازای هر $n>N$،

$$|S_n-S|<1$$

حال اگر $n>N$،

$$|S_n|=|S_n-S+S|\leqslant|S_n-S|+|S|<1+|S|$$

بنابراین، اگر

$$M=\text{Max}\{|S_1|,|S_2|,\dots,|S_N|,|S|+1\}$$

آنگاه به‌ازای هرعدد طبیعی n،

$$|S_n|\leqslant M$$

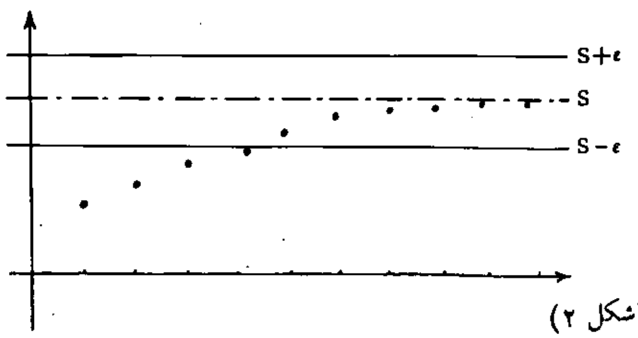
یعنی، $\{S_n\}$ کرانداراست.

بالعکس، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که اگر $\{S_n\}$ دنباله‌ای صعودی باشد، $\{-S_n\}$ دنباله‌ای نزولی است. پس کافی است، حکم قضیه را برای دنباله‌های صعودی ارائه دهیم.

فرض کنید که $\{S_n\}$ دنباله‌ای صعودی وازبالا کراندارباشد و

$$A=\{S_1,S_2,S_3,\dots\}$$

A مجموعه‌ای ناتهی و ازبالا کراندار است. بنابراصل تمامیت، A دارای کوچکترین کران بالا است که آن را S می‌نامیم. ادعا می‌کنیم که $\{S_n\}$ به S همگرا است.



(شکل ۲)

فرض کنید ε عدد مثبت دلخواهی باشد، چون $S-\varepsilon$ کران بالای A نیست، پس عضوی از A، مانند S_N، موجود است که

$$S-\varepsilon<S_N$$

ازطرفی $\{S_n\}$ دنباله‌ای صعودی است و S ازهرجمله این دنباله ناکمتراست. بنابراین، اگر $n>N$ آنگاه

$$S-\varepsilon<S_N\leqslant S_n\leqslant S<S+\varepsilon$$

یا

$$|S_n-S|<\varepsilon.$$

بنابرتعریف حد، $\{S_n\}$ به S همگرا است. واین اثبات قضیه را تمام می‌کند.

کاربرد این قضیه را می‌توان بخوبی درمثالهای ذیل مشاهده کرد.

۴.۲ مثال: فرض کنید که $S_1=1$ و $S_{n+1}=\sqrt{1+S_n}$. ثابت کنید که این دنباله همگرا است، سپس مقدارحد این‌دنباله را به‌دست‌آورید.

حل. ابتدا، چند جمله دنباله را، جهت تشخیص صعودی یا نزولی بودن آن، محاسبه می‌کنیم.

$$S_2=\sqrt{1+S_1}=\sqrt{2}$$

$$S_3=\sqrt{1+S_2}=\sqrt{1+\sqrt{2}}$$

$$S_4=\sqrt{1+S_3}=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}$$

حدس می‌زنیم که این دنباله صعودی باشد و ادعای خود را به استقراء ثابت می‌کنیم. شروع استقراء، بدیهی‌است که $S_1<S_2$. فرض کنید که $S_{n-1}\leqslant S_n$. دراین‌صورت،

$$S_n=\sqrt{1+S_{n-1}}\leqslant\sqrt{1+S_n}=S_{n+1}$$

بنابراین، حکم استقراء نیز برقراراست. بالنتیجه به‌ازای هرعدد طبیعی n، $S_n\leqslant S_{n+1}$. حال ثابت می‌کنیم که $\{S_n\}$ از بالا کرانداراست. با محاسبه تقریبی‌جملات این دنباله حدس‌می‌زنیم که ۲ یك کران بالای این‌دنباله باشد، چنین حدسی را به‌استقراء ثابت می‌کنیم. اولاً، $S_1=1\leqslant 2$. فرض کنید که $S_{n-1}\leqslant 2$ ($n>1$) دراین‌صورت،

$$S_n=\sqrt{1+S_{n-1}}\leqslant\sqrt{1+2}<\sqrt{4}=2$$

بنابراین، این دنباله ازبالا کرانداراست وچون صعودی است، بنابرقضیه ۳.۲، دنباله‌داری حد است. اگرحد آن را S بنامیم، بدیهی است که $1\leqslant S_n\leqslant S\leqslant 2$. این نامساوی، رابطه بسیار مفیدی را جهت محاسبه تقریبی مقدارحد بما ارائه می‌دهد. ولی ما می‌توانیم با استفاده از احکام دنباله‌ها، مقدار دقیق آن را محاسبه کنیم.

بسادگی می‌توان ثابت کردکه $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=S$.

بنابراین،

$$S=\sqrt{1+S},$$

$$S^2-S-1=0,$$

$$S=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$$

چون، $1\leqslant S\leqslant 2$، پس‌حد این‌دنباله عدد $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ است.

دراینجا مقدمات لازم جهت معرفی عدد e مهیا شده است، و تنها کمبود ما نامساوی مهمی‌است که ذیلاً به‌بیان‌آن می‌پردازیم.

۵.۲ قضیه (نامساوی برنویی) اگر $1+h\geqslant 0$ آنگاه، به ازای هرعدد طبیعی n،

$$(1+h)^n\geqslant 1+nh.$$

تساوی فقط وفقط وقتی برقرارمی‌شود که $h=0$ یا $n=1$.

برهان: به‌استقراء حکم قضیه‌را ثابت‌می‌کنیم. به‌ازای $n=1$، حکم برقرار است. فرض کنید که به‌ازای n برقرار باشد؛ یعنی، $(1+h)^n\geqslant 1+nh$. دراین‌صورت،

$$\begin{aligned}(1+h)^{n+1}&=(1+h)^n(1+h)\\&\geqslant(1+nh)(1+h)=1+(n+1)h+nh^2\\&\geqslant 1+(n+1)h.\end{aligned}$$

اینك، حالت تساوی را بررسی می‌کنیم. بدیهی است که اگر $n=1$ یا $h=0$، تساوی برقرارمی‌شود. بالعکس، اگر $1+nh=(1+h)^n$ آنگاه $h=0$ یا $n=1$. زیرا،

$$\begin{aligned}1+nh&=(1+h)^n=(1+h)^{n-1}(1+h)\\&\geqslant[1+(n-1)h](1+h)\\&=1+nh+(n-1)h^2\end{aligned}$$

با حذف عبارتهای مساوی، از دوطرف نامساوی فوق، نتیجه می‌شود که $(n-1)h^2=0$. بنابراین $h=0$ یا $n=1$.

۶.۲ نتیجه، به‌ازای هرعدد حقیقی h وهرعدد طبیعی n، اگر $1+h\geqslant 0$ آنگاه

$$\sqrt[n]{1+h}\leqslant 1+\frac{h}{n}$$

وتساوی فقط وفقط وقتی برقرار می‌شود که $h=0$ یا $n=1$.

برهان: چون $1+\frac{h}{n}\geqslant 1-\frac{1}{n}\geqslant 0$، پس کافی است که قضیه فوق را برای $1+\frac{h}{n}$ به‌کار ببریم.

اینك، وجود عدد e را به‌کمك قضیه ذیل ثابت می‌کنیم.

۷.۲ قضیه : حد دنباله $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ یك عدد حقیقی‌است.

برهان: ابتدا ثابت می‌کنیم که $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی است.

چون $1-\frac{1}{(n+1)^2}\geqslant 0$، پس بنابرنامساوی برنویی،

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$$

$$\geqslant\left(1-\frac{n+1}{(n+1)^2}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

دوطرف را بر $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ تقسیم می‌کنیم. بنابراین،

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\geqslant\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

یا $a_{n+1}\geqslant a_n$.

حال ثابت می‌کنیم که این دنباله ازبالا کراندار است. برای اثبات این حکم ابتدا ثابت می‌کنیم که دنباله $\{b_n\}$، با ضابطه $b_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$، دنباله‌ای صعودی است.

$$\begin{aligned}b_{n+1}/b_n&=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\Big/\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\\&=\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)\\&\geqslant\left(1+\frac{n+1}{n^2-1}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)=\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)=1\end{aligned}$$

که نامساوی‌آخری نتیجه نامساوی برنویی است. بنابراین به ازای هر $n\geqslant 2$،

$$b_n\geqslant b_2=\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

یا $4b_n\geqslant 1$. حال فرض کنید $n\geqslant 2$. بنابراین،

$$a_n=a_n\times 1\leqslant 4a_nb_n=4\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=$$

$$4\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\leqslant 4$$

بالنتیجه $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی و ازبالا کراندار است. پس بنابرقضیه ۳.۲، این دنباله دارای حد است و حد آن یك عدد حقیقی است.

۸.۲ تعریف: حد $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ را، وقتی‌که n به‌بینهایت میل‌می‌کند. عدد e می‌نامند. بنابراین،

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ازآنجائیکه $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی است، محاسبه جملات‌این دنباله مقدارتقریبی برای عدد e می‌دهد و به‌ازای مقادیر بزرگ n، جملات دنباله اعدادگویایی نزدیك به‌عدد e است. بامحاسبه جملات این دنباله، به‌کمك یك ماشین‌حساب، جدولی مطابق ذیل تنظیم نموده‌ایم،که دقیقاً، مقدار e را تا ۵رقم اعشار نشان‌می‌دهد.

n	$1+\frac{1}{n}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
۱	۲	۲
۱۰	۱/۱	۲/۵۹۳۷۴
۱۰۰	۱/۰۱	۲/۷۰۴۸۱
۱۰۰۰	۱/۰۰۱	۲/۷۱۶۹۲
۱۰,۰۰۰	۱/۰۰۰۱	۲/۷۱۸۱۵
۱۰۰,۰۰۰	۱/۰۰۰۰۱	۲/۷۱۸۲۷
۱,۰۰۰,۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۱	۲/۷۱۸۲۸

بنابراین، مقدار تقریبی e، تا ۵ رقم اعشار، $e = 2/71828$، که اگرمحاسبات جدول فوق را ادامه دهیم تقریبهای دقیقتری، با اعشار بیشتر، برای عدد e حاصل می‌شود. تا بحال دو روش جهت معرفی عدد e ارائه داده‌ایم، اینك، به روشی دیگر، عدد e را معرفی می‌کنیم.

روش سوم:

دراین‌روش، اگرچه ازقضیه مهم ۳.۲، استفاده می‌شود، ولی، تکنیکهای ارائه شده چنین امکانی را بما می‌دهد که ثابت کنیم e عدد اصم است.

ابتدا، لم ذیل را ثابت می‌کنیم.

۱.۳ لم: به‌ازای هرعدد طبیعی n، $\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ (که $n! = n(n-1)\cdots 2\times 1$).

برهان. اگر $n=1$، حکم برقرار است. پس فرض کنید که $n>1$. دراین صورت

$$n! = n(n-1)\cdots 2\times 1 > 2\times 2\times \cdots 2 = 2^{n-1}$$

بنابراین $\frac{1}{n!}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$.

۲.۳ قضیه. دنباله

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

صعودی وازبالا کراندار است. بنابراین، حد این دنباله یك عدد حقیقی است.

برهان:

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} \geqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = a_n$$

پس، به‌ازای هر n، $a_{n+1}\geqslant a_n$. اینك، ثابت‌می‌کنیم که این دنباله ازبالا کراندار است. باتوجه به‌لم ۱.۳ ومحاسبه مجموع جملات یك تصاعد هندسی،

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1 + 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \Rightarrow a_n < 1+2 = 3$$

پس، به‌ازای هر n، $a_n < 3$. بنابراین، این دنباله صعودی و از بالا کراندار است، بالنتیجه. بنابرقضیه ۳.۲، این دنباله حد دارد و مقدار آن یك عدد حقیقی است.

۳.۳ تعریف: عدد e چنین تعریف می‌شود

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

تعریف مجدد e، با ضابطه دیگر، چنین تصوری را در ذهن القاء می‌کند که مقدارآن احتمالاً، متناظرعدد حقیقی دیگری است. ثابت می‌کنیم که چنین تصوری نادرست است.

۴.۳ قضیه.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

برهان: فرض کنید که $a_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ و $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

بنابرقضیه دوجمله‌ای نیوتن،

$$b_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

که اگرعبارت تحت حاصلجمع را تقریب کنیم، نامساوی ذیل حاصل می‌شود

$$\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\; n^k}$$

$$= \frac{1}{k!}\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n}$$

$$= \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$< \frac{1}{k!}\times 1\times 1\times\cdots\times 1 = \frac{1}{k!}$$

که درآن $1\leqslant k\leqslant n$. بنابراین، به‌ازای $n\geqslant 2$،

$$b_n = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} = a_n$$

پس، به‌ازای هر n،

$$b_n \leqslant a_n \qquad (1)$$

حال عکس نامساوی فوق را ثابت می‌کنیم. فرض کنید که n و p دوعدد طبیعی‌دلخواهی‌باشد بطوری‌که $n>p$. دراین‌صورت،

$$b_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k + \sum_{k=p+1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$\geqslant \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

حال اگر p ثابت باشد و n به بینهایت میل‌کند، خواهیم داشت

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots$$

$$\left(1-\frac{k-1}{n}\right)=\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\times 1\times 1\times \cdots \times 1=a_p$$

اینك، دنباله $\{c_n\}$ را چنین تعریف می‌کنیم؛

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k - a_p = c_n$$

با این تعریف، خواهیم داشت،

$$b_n \geqslant a_p + c_n \qquad (2)$$

که درآن $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

حال اگر $p<n$، ونامساویهای (۱) و (۲) را درنظر بگیریم، نامساوی ذیل حاصل می‌شود.

$$c_n+a_p\leqslant b_n\leqslant a_n$$

با ثابت نگهداشتن p ومیل دادن n به بینهایت، نتیجه می‌شودکه

$$a_p\leqslant \lim_{n\to\infty} b_n\leqslant \lim_{n\to\infty} a_n = e$$

حال اگر $p\to\infty$، $e=\lim\limits_{p\to\infty} a_p \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant e$. یا

$$\lim_{n\to\infty} b_n = e$$

واین همان اثبات حکم قضیه است.

چون $a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ یك دنباله صعودی است. پس

$$a_2=1+1=2$$
$$a_3=2+\frac{1}{3!}=\frac{13}{6}\simeq 2.16$$
$$a_4=\frac{13}{6}+\frac{1}{4!}=\frac{53}{24}\simeq 2.20$$

بنابراین، به‌ازای هر n، $a_n\leqslant e$ ومحاسبه جملات دنباله a_n مقدارتقریب دیگری برای عدد e است کـه $2<e<3$. حال نامساوی ارائه می‌دهیم که مقدارخطای a_n از e را با هر تقریب دلخواه بدست می‌دهد.

۵.۳ قضیه. به‌ازای‌هرعدد طبیعی n، اگر $a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ آنگاه،

$$0<e-a_n<\frac{1}{n!\,n}$$

برهان:

$$0<e-a_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$
$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\cdots$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right]$$
$$<\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\right]$$

داخل کروشه یك تصاعد هندسی، با قدرنسبت $\frac{1}{(n+1)}<1$ است، بنابرحد مجموع جملات یك تصاعد هندسی،

$$0<e-a_n<\frac{1}{(n+1)!}\times\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!\,n}$$

بالنتیجه، نامساوی حاصل می‌شود.

این نامساوی مقدارخطای a_n را از e، با تقریب $\frac{1}{n!\,n}$ نشان می‌دهد. نتیجه مهم دیگری که از این نامساوی حاصل می‌شود اصمیت عدد e است.

۶.۳ قضیه: e عدد اصم است.

برهان: فرض کنید کـه e عدد گویا باشد، بنابراین، دو عدد صحیح، مانند، p و q موجود است کـه نسبت بهم اولند و $e=\frac{p}{q}$. با توجه به‌نامساوی فوق

$$0<\frac{p}{q}-a_q<\frac{1}{q!\,q}$$

دوطرف نامساوی را در $q!$ ضرب می‌کنیم، چون، حاصل

$$q!\,a_q=\sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!}$$

یك عدد طبیعی است، بالنتیجه،

$$0<(q-1)!\,P-q!\,a_q<\frac{1}{q}$$

که تفاضل دوعدد طبیعی است وحاصل آن بین صفر و $\frac{1}{q}$ است واین یك تناقض است. با این تناقض حکم خلف باطل می‌شود. بنابراین، e اصم است.

پانوشت:

[۱]. مجموعه‌ای با عمل جمع تشکیل یك گروه جابجایی می‌دهد درصورتی‌که بسته، شرکتپذیر، جابجایی و دارای عضوخنثی باشد؛ همچنین هرعضوآن دارای عضو قرینه باشد.

[۲]. برای ساختن مجموعه اعداد حقیقی، با توجه به اصول داده شده، چنین عمل می‌کنیم؛
عنصر صفر ویك را می‌شناسیم. چون F تحت عمل جمع بسته است، پس، (۱+۱) عضو F است، که آن را با نماد ۲ نمایش می‌دهیم. ازاصول موضوعه ترتیب نتیجه می‌شود کـه ۲ عنصری متمایز از ۰ و ۱ است. بهمین ترتیب، عناصر دیگر به صورت ذیل تعریف می‌شوند؛

$$۳=(۱+۱)+۱$$
$$۴=((۱+۱)+۱)+۱$$
$$\dots \qquad \dots$$

اعداد فوق را اعداد طبیعی گویند ومجموعه آنها را با نماد N نمایش می‌دهند. چون‌هرعدد طبیعی، مانند n عضو قرینه؛ $-n$، دارد پس اعداد صحیح چنین تعریف می‌شود:

$$Z=N\cup\{۰\}\cup\{-n|n\in N\}$$

ازطرفی هرعضو $F-\{۰\}$، نسبت به‌عمل ضـرب، معکوسپذیر است، پس اعداد گویا چنین تعریف می‌شود:

$$Q=\left\{\frac{m}{n}\mid m\in Z\ ,n\in N\right\}$$

بدون اصل تمامیت، گسترش Q به مجموعه جدیدی امکانپـذیر نیست، به‌کمك این اصل است که وجود اعداد اصم بیان وگسترش آن به‌اعداد حقیقی امکانپذیر می‌شود. بالاخره، با روش اتخاذ شده، با شروع ازمجموعه $\{۰\ ,\ ۱\}$، زیرمجمـوعه‌ها ذیل ساخته می‌شود:

$$N\subseteq Z\subseteq Q\subseteq R$$

هر یك ازمجموعه‌های فوق واجد خاصیتی است که مجموعه‌های وسیعترفاقد آنند. مثلاً، مجموعه اعداد طبیعی واجد این خاصیت است که خوشترتیب است، ولی، مجمـوعه اعداد صحیـح، که حاصل‌گسترش مجموعه اعداد طبیعی‌است، فاقدآن است. خاصیت خوشترتیبی با اصل استقراء ریاضی معادل است. ازآنجائیکه هر زیرمجموعه متوالی ازاعداد صحیح، که ازپایین کراندار است، خوشترتیب است، پس اصل استقراء ریاضی برای اعداد طبیعی، وهر زیرمجموعه متوالی ازاعداد صحیح کـه ازپایین کراندار باشد برقراراست‌درصورتی که برای اعداد صحیح برقرارنیست. این بدین‌خاطراست که یکی ازنتایـج خاصیت خوشترتیب این استمجموعه را به‌صورت متوالی مرتب‌می‌کند؛ اگر n ,$(n+۱)$ دوعدد متوالی باشندآنگـاه n را سابق‌بلافصل $n+۱$، و عـدد $(n+۱)$ را تالی‌بلافصل n، می‌نامنـد. مجموعه اعداد صحیـح گذشته ازآنکه هرعضوآن تالی‌بلافصل وسابق‌بلافصل دارد، اصل استقراء به‌صورت متعارف‌آن، برآن صـادق نیست. اما مجموعه اعداد صحیح دارای این‌خاصیت است که نسبت به‌عمل جمع یك گروه جابجایی است، درصورتی کـه مجموعه اعداد طبیعی فاقد آن است. گسترش اعداد صحیـح به‌اعداد گویا موجب می‌شود که خاصیت متوالی بودن دوعضو خود را از دست بدهد، ولی، در مقابل واجد این خاصیت باشد کـه نسبت به عمل جمع، و همچنین، با حذف عضـو صفر، نسبت به‌عمل ضرب یـك گروه جابجایی باشد. همچنین، اعداد گویا به‌صورتی متراکم وفشرده درکنارهم به‌گونه‌ای قرار دارند که بین هردو عضو آن عضوی از آن قراردارد؛ یعنـی اگر a و c دوعدد صحیـح و b و d اعداد طبیعی باشند به‌طوری‌که $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ آنگاه به ازای هـر $m\in N$، $\frac{a}{b}<\frac{a+mc}{b+md}<\frac{c}{d}$. حتی می‌توان ثابت کرد که بین هردو عدد حقیقی یك عدد گویا وجود دارد. این خاصیـت را با بیان اینکه اعداد گویا درمجمـوعه اعداد حقیقی چگال هستند بیان می‌کنند. گسترش مجموعه اعدادگویا به‌مجموعه اعداد حقیقی واجد این خاصیت می‌شود که هرمجموعه ناتهـی و ازبالا کراندار، دارای کوچکترین کران بالا باشد؛ درصـورتی که مجموعه اعداد گویا فاقد چنین خاصیتی است.

[۳] فرض کنید f، g، ...، p و q چندجمله‌ای باشند و F عبارت ازهمه چندجمله‌ایهایی به‌صورت $\frac{p}{q}$ باشد. F تحـت عمل جمع وضرب چندجمله‌ایها یك میدان است. نسبت ترتیبی در F را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\frac{p}{q}=\frac{a_nx^n+\dots+a_۰}{b_kx^k+\dots+b_۰}>۰$$

درصورتی که a_n، b_k هم‌علامت باشند. بنابراین $\frac{p}{q}>\frac{f}{g}$ اگر و فقط اگر $\frac{p}{q}-\frac{f}{g}>۰$

با نسبت تـرتیبی فوق، F یك میدان مرتب است و شامل N، Q است، ولی خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی را ندارد.

منابع :

۴ــ نخستین درس درآنالیز ریاضی، تألیف جی. سی.بورکیل، ترجمه علی اکبر رحیمزاده، لآلی، دکتر قاسم وحیدی، انتشارات فاطمی.

۵ــ آنالیز ریاضی، جلد دوم، تألیف دکترغلامحسین‌مصاحب،

۶ــ PRINCIPLES OF MATHEMATICAL ANALYSIS, WALTER RUDIN.

۷ــ ANALYSIS , AN INTRODUCTION TO PROOF, STEVEN R. LAY.

۸ــ CALCULUS, HOWARD ANTON.

مسایل ویژه‌دانش‌آموزان

تنظیم از: ابراهیم دارابی

۱- ثابت کنید $[x]+[2x+2y]\geq[2x]+[y]+[x+y]$

(راهنمایی $x=K+\alpha$ و $y=m+\beta$ و $K, m\in Z$ و $0<\alpha, \beta<1$)

فرستنده مسعود طاهرخانی ازقزوین

۲- اگر a و b و c سه عدد حقیقی باشند به قسمی که $0<a, b, c<\frac{1}{2}$ و $a+b+c=1$ ثابت کنید

$$\sqrt{a(1-2a)}+\sqrt{b(1-2b)}>\sqrt{c(1-2c)}$$

فرستنده مسعود طاهرخانی ازقزوین

۳- دستگاه را حل کنید

$$\begin{cases} x+[y-1]+\{z\}=2.5 \\ y+[z+2]+\{x\}=8 \\ z+[x]+\{y\}=3.5 \end{cases}$$

$[x]$ جزء صحیح x و $\{x\}$ جزء کسری x است.

۴- ثابت کنید درهر چهاروجهی محدب وجهی وجود دارد که کمتر ازشش ضلع دارد.

(راهنمایی از $N-K+M=2$ فرمول اولر استفاده کنید)

۵- طول وعرض مستطیلی را پیدا کنید که مساحت ماکزیمم داشته و در داخل مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع ۱۸ و ۲۴ و ۳۰ محاط شده باشد. (راهنمایی: می‌دانیم در زاویه قائمه، مثلث ومستطیل مشترک هستند.)

۶- اگر a و b طولهای دو یال متنافر یک چهاروجهی و α و β فرجه‌های نظیر آنها باشند، ثابت کنید

$$a^2+b^2+2ab\,\mathrm{cotg}\,\alpha\,\mathrm{cotg}\,\beta$$

بستگی به انتخاب یالها ندارد (قضیه برتشنایدر)

۷- طول هریک ازپنج یال یک چهاروجهی کمتر از واحد است. ثابت کنید حجم چهاروجهی از $\frac{1}{8}$ کمتر است.

(راهنمایی ثابت کنید حجم این چهاروجهی کمتر از حجم چهاروجهی‌ای است که دو وجه‌آن مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ و برهم عمود هستند).

۸- درمثلث قائم‌الزاویه ABC که در آن $A=30^\circ$، روی ضلع AB و از طرف B به اندازه $\frac{AB-BC}{2}$ جدا کرده و آنرا N می‌نامیم. از N بوسط وتر مثلث یعنی M وصل می‌کنیم. خط BL که بموازات MN رسم می‌شود، برروی AC دو پاره‌خط AL و LC را پدید می‌آورد، ثابت کنید

$$AL=LC\sqrt{3}$$

فرستنده امیر حمیدی دانش‌آموز ازتهران

۹- اگر

$$(b-c)\,\mathrm{cotg}^2\frac{A}{2}+(c-a)\,\mathrm{cotg}^2\frac{B}{2}+(a-b)\,\mathrm{cotg}^2\frac{C}{2}=0$$

و A و B و C زوایا و a و b و c اضلاع مثلثی باشند نوع مثلث را تعیین‌کنید. (راهنمایی: ثابت کنید متساوی‌الاضلاع است)

فرستنده عبدالحسین کلهری دانشجو ازتهران

۱۰- دریک ساختمان ۱۲ طبقه، درطبقه اول ۹ نفر سوار آسانسور می‌شوند. اگر آنها بخواهند در دسته‌های ۲ و ۳ و ۴ نفری در طبقات مختلف از آسانسور پیاده شوند، بچند طریق این کار را می‌توانند انجام دهند. درصورتیکه می‌دانیم آسانسور درطبقه دوم توقف نمی‌کند.

(جواب $A_{10}^{3}=720$)

۱۱- مجموع جملات تصاعد $a_1+a_1q+a_1q^2+\dots+a_1q^{n-1}+\dots$ را حساب کنید درصورتیکه a_1 ماکزیمم تابع $f(x)=(16x^2-x^3-16)/8$ در فاصله $[1,5]$ و $q=\lim_{x\to 0}(1-\cos x)/x^2$.

۱۲- مطلوبست $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{7}+\frac{1}{49}-\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{7^{n-1}}\right)$

(جواب $\frac{7}{8}$)

۱۳- اولاً ثابت کنید $\operatorname{Arctg}\frac{1}{n^2+n+1}=\operatorname{Arctg}\frac{1}{n}-\operatorname{Arctg}\frac{1}{n+1}$

ثانیاً اگر $\operatorname{tg} a_n=\frac{1}{n^2+n+1}$، مطلوبست $\lim_{n\to\infty} S$ $\quad S=a_1+a_2+\dots+a_n$

(جواب: $S=\frac{\pi}{4}$)

فرستنده خانم کافیه کیومرثی دانش‌آموز از شهرکرد

۱۴- اگر $\begin{cases}ab\,cd=1\\ a^2+b^2=1\end{cases}$ آنگاه ثابت کنید $c+d$ برحسب a و b قابل تعریف است.

(راهنمایی $-1\leqslant a,b\leqslant 1$ پس $a=\sin\alpha$، $b=\cos\alpha$)

فرستنده محمدرضا شجاع‌طلب دانش‌آموز از تهران

۱۵- K را طوری تعیین کنید که معادله $Kx^2-(1-K)x+K-2=0$ ریشه‌های گویا داشته باشد.

فرستنده آرش جعفری باستانی دانش‌آموز از کرج

۱۶- ثابت کنید اگر $a>0$ و $b>0$ آنگاه برای هر x و y داریم $\sqrt{a^2+b^2+1}\cdot\sqrt{4^x+9^y+1}\geqslant a\times 2^x+b\times 3^y+1$

(راهنمایی طرفین نامعادله مثبت‌اند طرفین را بتوان دو برسانید).

۱۷- مطلوبست محاسبه $\sum_{k=2}^{n}\log\left(1-\frac{1}{K^2}\right)$

۱۸- تمام اعداد ۵ رقمی را بطوری تعیین کنید که خود آنها از ۵ رقم متوالی متمایز یا صفر تشکیل شده باشد و مربع آنها از همه ارقام ۱ تا ۹، بدون تکرار، تشکیل شده باشند

(راهنمایی اگر n درشرایط مسئله صدق کند آنگاه مجموع ارقام n^2 بر ۹ بخشپذیر است. پس n بر ۳ بخشپذیر می‌شود، و $n^2<10^9$).

۱۹- مطلوبست $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\,dt}{x\operatorname{tg}(x+\pi)}$

حل مسائل هفدهمین المپیاد ریاضی آمریکا

ترجمه: محمود نصیری

۱. ثابت کنید اگر عدد اعشاری متناوب مرکب به صورت کسر تحویل‌ناپذیر $\frac{p}{q}$ نوشته شود آنگاه q مخرج آن بر ۲ یا ۵ یا بر هردو بخش‌پذیر است.

حل. فرض‌کنیم کسرمولد عدد اعشاری $0/b_1\ldots b_m\overline{a_1\ldots a_k}$ برابر $\frac{p}{q}$ $((p,q)=1)$ باشد.که درآن $b_1,\ldots,b_m\,,\,a_1,\ldots,a_k$ ارقام و $\overline{a_1\ldots a_k}$ یک دورهٔ گردش است. به‌کمک محاسبات مقدماتی وتصاعد هندسی داریم؛

$$\frac{p}{q}=\frac{(10^k-1)\,b_1\ldots b_m+a_1\ldots a_k}{10^m(10^k-1)}=$$

$$\frac{10^k b_1\ldots b_m+(a_1\ldots a_k-b_1\ldots b_m)}{10^m(10^k-1)}\qquad(1)$$

اکنون باید مشخص کنیم که هرگاه کسر (۱) به‌صورت یک کسر تحویل‌ناپذیر نوشته شود چه اتفاقی می‌افتد. برای این منظور تعریف زیر را بیان می‌کنیم:

یک عدد اعشاری متناوب دارای خاصیت ویژه است (درست معرفی شده است) هرگاه قسمت گردش آن تا حدامکان به سمت چپ حرکت کرده باشد.

بدون‌آنکه به‌کلیت برهان خللی وارد شود، می‌توان فرض کرد که عدد اعشاری $0/b_1\ldots b_m\overline{a_1\ldots a_k}$ دارای خاصیت ویژه است. چون عدد فوق یک عدد اعشاری مرکب است، $m\,,\,k\geqslant 1$. با کمی دقت می‌توان نشان داد که عدد اعشاری فوق دارای‌خاصیت ویژه است‌اگر وفقط اگر $a_k\neq b_m$. بنابراین $(a_1\ldots a_k-b_1\ldots b_m)$ و درنتیجه $10^k b_1\ldots b_m+(a_1\ldots a_k-b_1\ldots b_m)$ بر ۱۰ بخش‌پذیر نیستند. لذا هرگاه‌کسر را به‌یک کسر تحویل‌ناپذیر تبدیل کنیم بعضی (یا تمام) ۲ ها ممکن است حذف شوند، یا بعضی (یا تمام) ۵ها ممکن است حذف شوند، اما هردو با هم حذف نخواهند شد ولذا مخرج بر ۲ یا ۵ یا برهردو بخش‌پذیر است.

۲. معادله درجه سوم $x^3+ax^2+bx+c=0$ دارای سه ریشه حقیقی می‌باشد. نشان دهید $a^2-3b\geqslant 0$، و $\sqrt{a^2-3b}$ از تفاضل‌بین بزرگترین وکوچکترین ریشه‌هاکوچکتریا مساوی‌است.

حل. فرض کنیم α و β، γ سه ریشه معادله باشند به طوری که $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$. دراین‌صورت،

$$\alpha+\beta+\gamma=-a \quad \text{و} \quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=b$$

درنتیجه

$$a^2-3b=(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)=$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma$$

اما، داریم

$$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\geqslant 0$$

که درنتیجه

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geqslant\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$ لذا $a^2-3b\geqslant 0$.

برای قسمت دوم چهارنامساوی ذیل معادلند.

$$a^2-3b\leqslant(\gamma-\alpha)^2$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\alpha\gamma\leqslant\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma-\alpha\gamma-\beta^2\geqslant 0$$
$$\alpha(\beta-\gamma)+\beta(\gamma-\beta)\geqslant 0$$

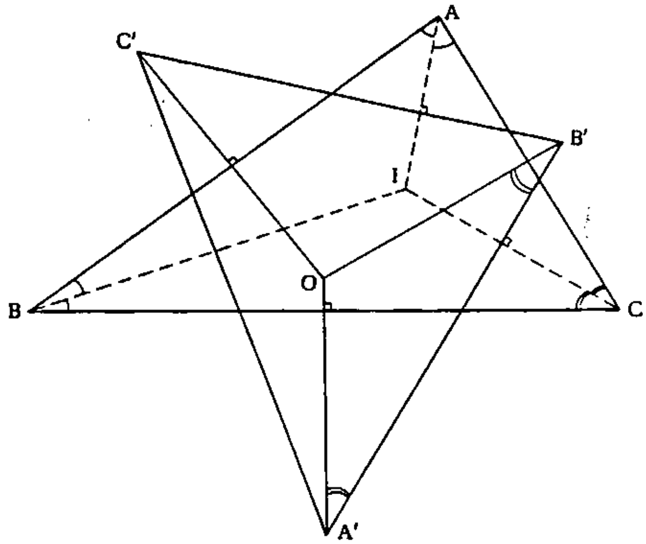
وآخرین این نامساوی‌ها بلافاصله از $(\gamma-\beta)(\beta-\alpha)\geqslant 0$ با فرض $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$ نتیجه می‌شود.

۳. تابع $f(S)$ به هر زیرمجموعه نه‌عضوی S از مجموعه $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ یکی ازاعداد از ۱ تا ۲۰ را نسبت می‌دهد. ثابت کنید صرفنظراز آنکه تابع f چگونه انتخاب شود، یک زیرمجموعه ده‌عضوی $T\subset\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ وجود دارد به‌طوری‌که باراه هر $k\in T$، $f(T-\{k\})\neq k$

حل. با کمی دقت ملاحظه می‌شود که، حداکثر $\binom{20}{9}$ زوج ناهماهنگ$(k\,,\,T)$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(T-\{k\})=k$. زیرا هریک از $\binom{20}{9}$ مجموعه نه عضوی $S\subset\{1,\ldots,20\}$ می‌تواند حداکثر در یکی از این نسبتهای ناهماهنگ $f(T-\{k\})=k$، به‌صورت $T-\{k\}$ ظاهرشود. (برای این اتفاق، عدد k فقط می‌تواند برابر $f(S)$ و مجموعه T فقط می‌تواند برابر $S\cup\{k\}$ باشد وحتی دراین صورت‌زوج $(k\,,\,T)$ تنها وقتی می‌تواند یک جفت ناهماهنگ باشد که T ۱۰ عضو داشته باشد) اما درحالی که حداکثر $\binom{20}{9}$ ازاین زوج مرتب‌های ناهماهنگ $(k\,,T)$ وجود دارد، مجموعه $\{1, 2, \ldots, 20\}$ دارای$\binom{20}{10}$ زیرمجموعه ده‌عضوی T می‌باشد، والبته $\binom{20}{10}>\binom{20}{9}$. بنابراین زیرمجموعه ده‌عضوی T هست که شامل هیچ‌یک ازاین زوجهای ناهماهنگ نمی‌باشد و برای آن T داریم، $f(T-\{k\})\neq k$ بازاء هر $k\in T$.

۴. فرض کنیم I مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ABC و A'

و B' و C' به‌ترتیب مرکزدایره‌های‌محیطی مثلثهای IBC، ICA و IAB باشند. ثابت کنید دایره‌های محیطی مثلثهای ABC و $A'B'C'$ متحدالمرکزاند.



حل. فرض کنیم O مرکز دایره محیطی مثلث ABC باشد. کافیست نشان دهیم $OA' = OB'$ و برای اثبات آن نیز باید ثابت کنیم، $\angle B'A'O = \angle A'B'O$.

ابتدا یادآوری می‌کنیم که هرگاه اضلاع دو زاویه نظیر به‌نظیر برهم عمود باشند آنگاه‌آن دو زاویه مساوی یا مکمل می باشند. بنابراین اندازه اصلی $\angle xyz$ را اندازه آن یا اندازه مکمل آن درنظرمی‌گیریم، که کمتر یا مساوی 90° باشد. اندازه اصلی زاویه را با نماد $\sphericalangle$ نشان می‌دهیم. $IC \perp A'B'$ و $OB' \perp AC$ و $OA' \perp BC$ لذا $\sphericalangle A'B'O = \sphericalangle ICA$ و $\sphericalangle B'A'O = \sphericalangle ICB$ و چون IC نیمساز است، $\angle ICA = \angle ICB$. در نتیجه $\sphericalangle A'B'O = \sphericalangle B'A'O$. امادوزاویه $A'B'O$ و $B'A'O$ زاویه‌های یك مثلث هستند ونمی‌توانند مکمل باشند لذا این دو زاویه مساوی‌اند. پس، $\angle A'B'O = \angle B'A'O$ و $OA' = OB'$. به همین ترتیب ثابت می‌شود $OA' = OC'$.

۵. حاصلضرب چندجمله‌ای به‌صورت

$$(1-Z)^{b_1}(1-Z^2)^{b_2}(1-Z^3)^{b_3}(1-Z^4)^{b_4}$$
$$(1-Z^5)^{b_5}\ldots(1-Z^{32})^{b_{32}}$$

که درآن b_kها اعدادی صحیح ومثبت هستند، دارای این‌خاصیت تعجب‌آوراست که اگر آن را ازحالت ضرب خارج کرده و جمله‌هایی را که درآنها توان Z بزرگتر از ۳۲ است درنظر نگیریم، آنچه باقی می‌ماند $1 - 2Z$ است.

b_{32} را با دلیل تعیین‌کنید. (جواب را به‌صورت تفاضل‌دو توان ۲ بنویسید).

حل. فرض کنیم

$$g(Z) = (1-Z)^{b_1}(1-Z^2)^{b_2}(1-Z^3)^{b_3}(1-Z^4)^{b_4}$$

$$\ldots.(1-Z^{31})^{b_{31}}(1-Z^{32})^{b_{32}} \equiv 1 - 2Z \pmod{Z^{33}}$$

که نماد $\equiv$ به‌این معنا است که جمله‌هایی که درآنها Z دارای توان بزرگتر از ۳۲ است حذف کرده‌ایم. مشاهده می‌کنیم،

$$g(-Z) = (1+Z)^{b_1}(1-Z^2)^{b_2}(1+Z^3)^{b_3}$$
$$(1-Z^4)^{b_4}\ldots.(1+Z^{31})^{b_{31}}(1-Z^{32})^{b_{32}} \equiv$$
$$1 + 2Z \pmod{Z^{33}}$$

بنابراین

$$g(Z)\,g(-Z) \equiv (1-Z^2)^{b_1+2b_2}(1-Z^4)^{2b_4}$$
$$(1-Z^6)^{b_3+2b_6}(1-Z^8)^{2b_8}\ldots(1-Z^{30})^{b_{15}+2b_{30}}$$
$$(1-Z^{32})^{2b_{32}} \equiv 1 - 2^2Z^2 \pmod{Z^{33}}$$

فرض کنیم $q = Z^2$ و
$$c_i = \begin{cases} b_i + 2b_{2i} & \text{فرد } i \\ 2b_{2i} & \text{زوج } i \end{cases}$$

سپس

$$g_1(q) = g(Z)\,g(-Z) \equiv (1-q)^{c_1}(1-q^2)^{c_2}$$
$$(1-q^3)^{c_3}\ldots(1-q^{15})^{c_{15}}(1-q^{16})^{2b_{32}} \equiv$$
$$1 - 2^2q \pmod{q^{17}}\text{،}$$

که درآن نماد $\equiv$ مانند قبل به این معنا است که جمله‌هایی که درآنها q دارای توان بزرگتر از ۱۶ است حذف کرده‌ایم. مانند فوق فرض کنیم، $r = q^2$ و $g_2(r) = g_1(q)\,g_1(-q)$ داریم؛

$$g_2(r) = (1-r)^{d_1}(1-r^2)^{d_2}(1-r^3)^{d_3}\ldots(1-r^7)^{d_7}$$
$$(1-r^8)^{4b_{32}} \equiv 1 - 2^4r \pmod{r^9}\text{،}$$

فرض کنیم $S = r^2$ و $g_3(S) = g_2(r)\,g_2(-r)$ بدست می‌آید؛

$$g_3(S) = (1-S)^{e_1}(1-S^2)^{e_2}(1-S^3)^{e_3}(1-S^4)^{8b_{32}}$$
$$\equiv 1 - 2^8S \pmod{S^5}\text{،}$$

واگر $t = S^2$ و $g_4(t) = g_3(S)\,g_3(-S)$ بدست می‌آید؛

$$g_4(t) \equiv (1-t)^{f_1}(1-t^2)^{16b_{32}} \equiv 1 - 2^{16}t \pmod{t^3}.$$

ازمساوی قراردادن ضرایب t^2 در دوطرف داریم $\binom{f_1}{2} - 16b_{32} = 0$ و از مساوی قرار دادن ضرایب t داریم $-f = -2^{16}$، بنابراین

$$b_{32} = \frac{1}{16}\binom{2^{16}}{2} = \frac{2^{16}(2^{16}-1)}{16 \times 2} = 2^{27} - 2^{11}.$$

مسائل سی‌ویکمین المپیاد ریاضی پکن

روز اول

پکن - ۶۹/۴/۲۱

۱- دریك دایره دو وتر AB و CD یکدیگر را درنقطه E درون دایره قطع می‌کنند. فرض کنیم M یك نقطه درونی پاره‌خط EB (غیراز E و B) باشد و مماس در نقطه E بر دایره‌ای که ازسه نقطه D و E و M می‌گذرد خطوط BC و AC را بترتیب در نقاط F و G قطع کند. اگر $\frac{AM}{AB}=t$ مقدار $\frac{EG}{EF}$ را برحسب t پیداکنید.

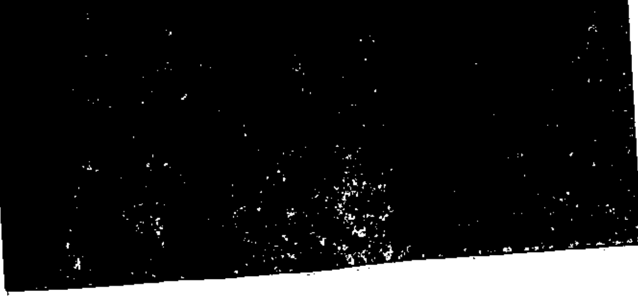
۲- فرض کنیم $n\geqslant 3$ و مجموعه S از $2n-1$ نقطه متمایز روی یك دایره تشکیل شده باشد. فرض کنیم k نقطه از این مجموعه را سیاه و بقیه را سفیدکرده باشیم. یك رنگ‌آمیزی (Colouring) را «خوب» گوئیم اگر حداقل یك زوج ازنقاط سیاه وجود داشته‌باشد بطوری‌که درون یکی از دوکمانی منتهی به این دو نقطه شامل درست n نقطه از S باشد. کمترین مقدار k را برای اینکه هر رنگ‌آمیزی S خوب باشد پیداکنید.

۳- کلیه اعداد صحیح $n>1$ را پیداکنید که $\frac{2^n+1}{n^2}$ عدد صحیح باشد.

مدت: ۴/۵ ساعت

بارم: هر سؤال ۷ نمره

ومن‌الله‌التوفیق و علیه‌التکلان



روز دوم

پکن - ۶۹/۴/۲۲

۴- فرض کنیم Q^+ مجموعه اعداد گویای مثبت باشد. تابع $f: Q^+ \to Q^+$ را طوری بسازید که

$$f(xf(y))=\frac{f(x)}{y} \qquad x\,,\, y\in Q^+$$

۵- یك عدد صحیح $n_0>1$ داده شده است. دوبازیکن A و B اعداد صحیح $n_1, n_2, \dots$ را به تناوب (یکی پس‌از دیگری) با توجه به قوانین زیر انتخاب می‌کنند؛

با دانستن n_{2k} بازیکن A عدد صحیح n_{2k+1} را داوری انتخاب می‌کندکه $n_{2k}\leqslant n_{2k+1}\leqslant n_{2k}^2$ و با دانستن n_{2k+1} بازیکن B عدد صحیح n_{2k+2} را طوری انتخاب می‌کندکه $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ بصورت توان مثبتی از یك عدد اول باشد.

بازیکن A با انتخاب عدد ۱۹۹۰ وبازیکن B با انتخاب ۱ برنده محسوب می‌شوند. بازاه چه مقادیری از n_0

الف) برنامه‌ای‌برای برنده شدن A وجود دارد (یعنی اگر A بقدر کافی با هوش و وارد باشد بتواند برنده شود).

ب) برنامه‌ای برای برنده شدن B وجود دارد.

ج) برنامه‌ای برای برنده شدن هیچیك وجود ندارد.

۶- ثابت‌کنید یك ۱۹۹۰ ضلعی محدب با خواص زیر وجود دارد.

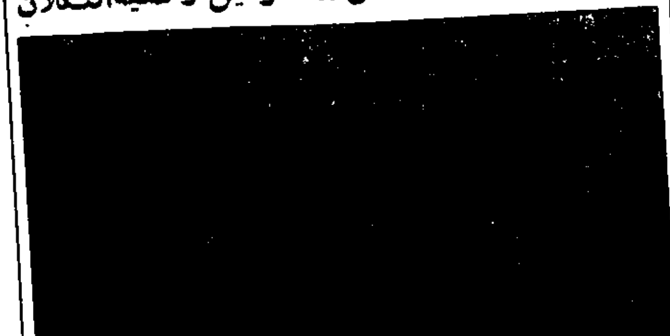
الف) تمام زوایای‌آن با هم مساوی باشند.

ب)طول اضلاع‌آن بدون درنظر گرفتن ترتیب اعداد 1^2 و 2^2 و ... و 1990^2 باشد.

مدت: ۴/۵ ساعت

بارم: هر سؤال ۷ نمره

ومن‌الله‌التوفیق و علیه‌التکلان

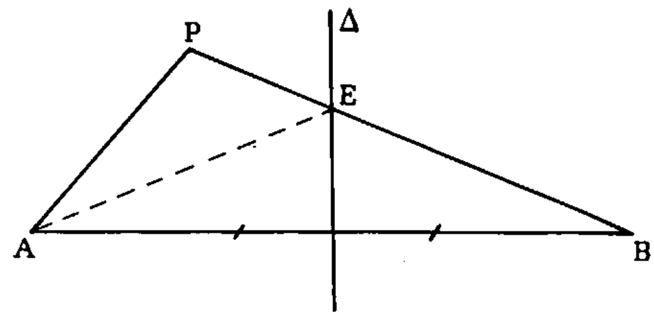


عمود منصف پاره‌خط و نامساوی بودن پاره‌خطها

تنظیم از: دکتر حسن صادقی ـ عضو هیأت علمی دانشگاه مشهد

قضیه ۱: فرض کنید Δ عمود منصف پاره‌خط AB است. اگر نقطه P در همان طرفی از Δ باشد که A است آنگاه

$PA < PB$



برهان:

۱) چون P در همان طرفی از Δ است که A هست لذا p و B در دو طرف Δ هستند و خط Δ و پاره‌خط PB در نقطه‌ای مانند E بین P و B مشترکند.

۲) چون Δ عمود منصف AB است لذا

$EA = EB$

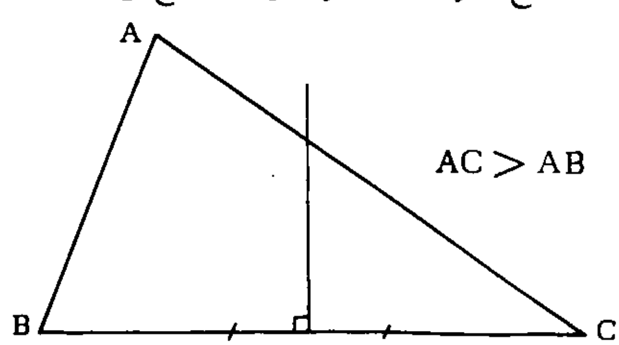
۳) در مثلث PAE داریم

$PA < PE + AE$ «نامساوی مثلثی»

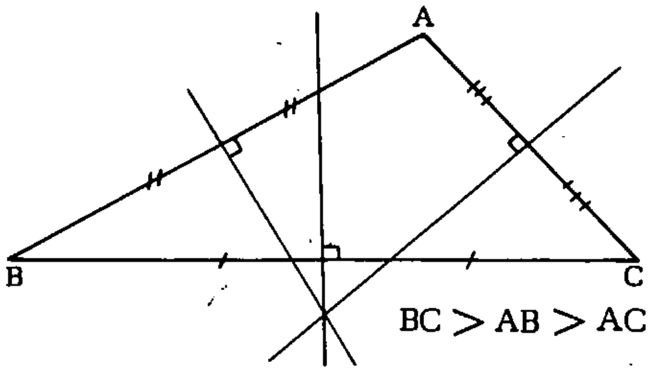
با استفاده از مرحله ۲ داریم

$PA < PE + EB = PB$

فرع ۱: عمود منصف هر ضلع مثلث که از یك رأس نگذرد از دو ضلع دیگر آن را که بزرگتر است قطع می‌کند.

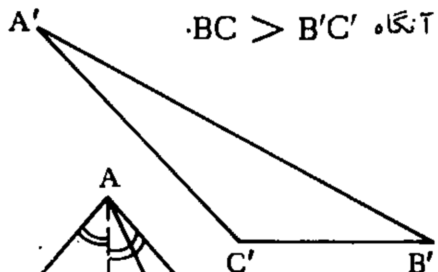


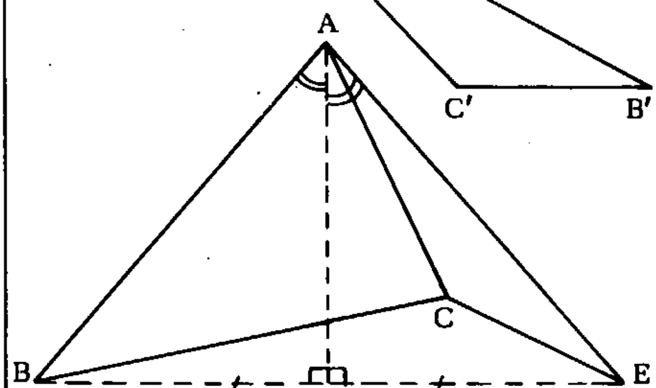
فرع ۲: در هر مثلث مختلف‌الاضلاع اگر سه عمود منصف اضلاع را رسم کنیم. بزرگترین ضلع مثلث، ضلعی است که هر سه عمود منصف را قطع کند و کوچکترین ضلع آن است که فقط یکی از سه عمود منصف را قطع کند و ضلع متوسط ضامی است که دو تا از عمود منصف‌ها را قطع می‌کند.



$BC > AB > AC$

قضیه ۲: در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ اگر $AB \cong A'B'$ و $AC \cong A'C'$ و $\angle A > \angle A'$ آنگاه $BC > B'C'$.





برهان:

۱): مثلث $A'B'C'$ را به صورت مثلث ACE در می‌آوریم که $AC \cong A'C'$ و $CE \cong B'C'$ و $AE \cong A'B'$ و $\angle A' \cong \angle CAE$.

۲): با استفاده از فرض، چون

$AB \cong A'B' \cong AE$

لذا ABE متساوی‌الساقین است. اگر نیمساز $\angle BAE$ را رسم کنیم این نیمساز درون $\angle BAC$ واقع می‌شود چون

$\angle BAC > \angle CAE \cong \angle A'$

(بنابفرض) پس این نیمساز ضلع BC را قطع می‌کند. ولی این نیمساز عمود منصف BE است.

بقیه در صفحه ۵۵

یك رشته جالب از اعداد

تنظیم از: اسماعیل بابکی
دبیر ریاضی

چندی پیش مقاله‌ای تحت عنوان «یك رشته جالب از اعداد» توسط آقای اسماعیل بابکی، دبیر ریاضی مینودشت، برای مجله ارسال گردید. نظر به اینکه این مقاله مشابهتی با مقاله دیگر، تحت عنوان شگفتیهای اعداد، ازآقای دیبایی داشت و این مقاله در رشد آموزش ریاضی، سال چهارم، زمستان ۱۳۶۶، شماره ۱۶ چاپ گردیده بود ما را برآن داشت تا تمایز این دو مقاله را بررسی‌کنیم. دو مقاله فصل مشترك زیادی دارند، ومطالب ارسالی آقای اسماعیل بابکی چیزی بیش‌از مقاله‌آقای دیبایی ندارد و تنها وجود چند عبارت این تصور را قوت می‌بخشیدکه‌آقای اسماعیل بابکی براهینی برای ادعای خود دارد ولی از ارسال‌آن صرفنظر کرده است. عین مقاله ایشان در یکی از شماره‌های اخیر مجله اسپکترم شفیلد انگلستان، در قسمت نامه‌ها تحت عنوان اعداد دوری به‌چاپ رسیده است چیزیکه موجب تعجب ما شد وسعت انتشار خبرآن در رادیو تلویزیون و روزنامه‌های‌کشور بود. بهتر بود مسئولان خبری این موضوع را با مراکز تخصصی و علمی و انجمنهای ریاضی‌کشور مشورت می‌کردند و پس‌از تأئید صحت‌آن، وآگاهی از سطح علمی‌آن، به انتشار خبر در رسانه‌های گروهی مبادرت می‌کردند. اما، موضوعی‌که در این واقعه قابل ملاحظه است تجلیل رسانه‌های گروهی از یك معلم زحمت‌کش است و شاید بتوان خطای مخبرین را بخاطر تقدیر از معلمین‌کشور قابل اغماض دانست. و اینك صورت کامل مقاله اسماعیل بابکی‌که در اسپکترم چاپ شده و خلاصه مقاله‌آقای دیبائی را جهت‌آگاهی درج نموده امید است‌که انتشار اینگونه مقالات انگیزهٔ تحقیق و مطالعه را دربین معلمین و محققین‌کشور گسترش دهد.

(هیات تحریریه)

عدد ۱۴۲۸۵۷ را درنظر بگیرید. اگر این عدد را در اعداد ۶, ۵, ۴, ۳, ۲, ۱ ضرب‌کنیم مجدداً همان ارقام فوق در حاصلضربها به‌طور دایروی تکرار می‌شوند

$$۱۴۲۸۵۷ \times ۱ = ۱۴۲۸۵۷$$

$$۱۴۲۸۵۷ \times ۲ = ۲۸۵۷۱۴$$

$$۱۴۲۸۵۷ \times ۳ = ۴۲۸۵۷۱$$

$$۱۴۲۸۵۷ \times ۴ = ۵۷۱۴۲۸$$

$$۱۴۲۸۵۷ \times ۵ = ۷۱۴۲۸۵$$

$$۱۴۲۸۵۷ \times ۶ = ۸۵۷۱۴۲$$

به عدد ۱۶ رقمی ۰ ۵۸۸ ۲۳۵ ۲۹۴ ۱۱۷ ۶۴۷ توجه کنید اگر این عدد را در اعداد ۱۶ , ... , ۳ , ۲ , ۱ ضرب کنیم همان خواص فوق ظاهر می‌شوند.

تعداد بسیار زیادی ازاعداد وجود دارندکه دارای‌خاصیت فوق‌اند. میدانیم

$$\frac{۱۰^{۶}-۱}{۷} = ۱۴۲۸۵۷$$

و

$$\frac{۱۰^{۱۶}-۱}{۱۷} = ۰\ ۵۸۸\ ۲۳۵\ ۲۹۴\ ۱۱۷\ ۶۴۷$$

فرض‌کنیم p یك عدد اول باشد. بنابر قضیه‌کوچك فرما

$$۱۰^{p-۱} \equiv ۱ \pmod p$$

البته عدد طبیعی n کوچکتر از $p-۱$ وجود داردکه

$$۱۰^{n} \equiv ۱ \pmod p \quad \text{و} \quad n \mid p-۱$$

به عنوان مثال

$$۱۰^{۶} \equiv ۱ \pmod{۱۳} \quad \text{و} \quad ۶ \mid ۱۳-۱$$

این بدین معنی است‌که اگر $\frac{۱}{۱۳}$ را به صورت عدد اعشاری بنویسیم دوره‌گردش‌آن یك عدد ۶ رقمی خواهد بود

$$\frac{۱}{۱۳} = ۰/\overline{۰۷۶۹۲۳}$$

و یا به عنوان مثالی دیگر

$$۱۰^{۵} \equiv ۱ \pmod{۴۱}$$

و

$$\frac{۱}{۴۱} = ۰/\dot{۰}۲۴۳\dot{۹} \quad \text{و} \quad ۵ \mid ۴۱-۱$$

که دوره‌گردش یك عدد ۵ رقمی است. اما برای $p=۷$ و $p=۱۷$ عدد $p-۱$ کوچکترین عدد طبیعی است‌که

$$۱۰^{p-۱} \equiv ۱ \pmod p$$

و در نوشتن $\frac{۱}{p}$ به‌صورت عدد اعشاری دوره‌گردش یك عدد

$p-۱$ رقمی است

$$\frac{۱}{۷}=۰/\dot{۱}۴۲۸۵\dot{۷}$$

و

$$\frac{۱}{۱۷}=۰/\dot{۰}\ ۵۸۸\ ۲۳۵\ ۲۹۴\ ۱۱۷\ ۶۴\dot{۷}$$

اعداد اولی که این خاصیت را دارند بسیار زیاد است به عنوان مثال ده عدد اولین که دارای این خاصیت‌اند عبارتند از

۷, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹, ۴۷, ۵۹, ۶۱, ۹۷, ۱۰۹

حال فرض کنیم p یك عدد اول با این خاصیت باشد. عدد طبیعی $\frac{۱۰^{p-۱}-۱}{p}$ را که یك عدد $p-۱$ رقمی است (با درنظر گرفتن صفرهای بی‌اثر در سمت چپ برای بعضی‌از آنها) درنظر می‌گیریم اگر این عدد را در اعداد $۱, ۲, ۳, \cdots, p-۱$ ضرب کنیم همان ارقام اولیه به‌صورت تناوبی ظاهر می‌شوند. پس بطورکلی

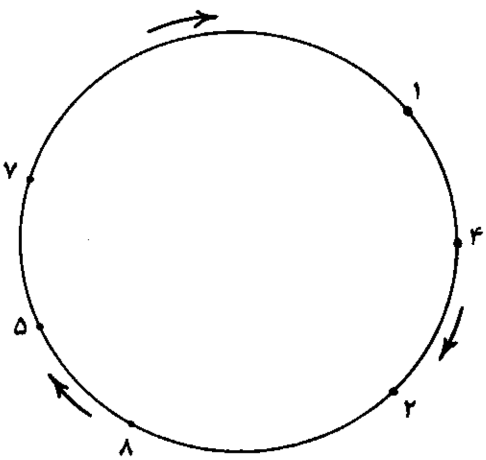
$$f(p_i)\doteq\frac{۱۰^{p_i-۱}-۱}{p_i}$$

که درآن $p_i \in P$ و برای هر n که $n < p-۱$ داشته باشیم $p \mid ۱۰^n-۱$. یك رشته از اعداد را تشکیل می‌دهند که همگی متناوبند و ضمناً تعداد و ارقام دوره گردش بسط اعشاری $\frac{۱}{p}$ را نشان می‌دهند.

اولین‌جمله این‌رشته درازای $p_۱=۷$ همان عدد بحث شده ۱۴۲۸۵۷ است دومین جمله $f(p_۲=۱۷)$ و ... و بالاخره مثلاً دهمین جمله $f(p_{۱۰}=۱۰۹)$ یك عدد ۱۰۸ رقمی است که اگر آن عدد را در اعداد $۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۰۸$ ضرب کنیم همان ارقام اولیه با رعایت ترتیب بطور دایروی تکرار خواهند شد.

خلاصه مقاله آقای دیبایی

اگر عدد ۱۴۲۸۵۷ (دورهٔ تناوب نمایش اعشاری کسر $\frac{۱}{۷}$) را در اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ (که به ترتیب، باقیمانده‌های تقسیم ۱ بر ۷ است) ضرب کنیم، حاصلضربها یك دورگردش از حاصلضربهای قبلی، با حفظ ترتیب آن، خواهد شد.



بهمین ترتیب، اگر دورگردش اعشاری کسر $\frac{۱}{۱۳}$ را بر باقیمانده‌های تقسیم ۱ بر ۱۳ ضرب کنیم، حاصلضربها یك‌دور گردش ازحاصلضربهای قبلی خود، با حفظ ترتیب آن، به‌دست می‌آید.

آقای دیبایی نتایج مشابهی را برای کسرهای $\frac{۱}{۳۷}$ ، $\frac{۱}{۱۹}$ نیز بررسی کرده است ودر پایان مقاله خود، طبق روش‌محققین، حدسی به‌صورت ذیل برای علاقمندان ارائه داده است. امید برآن بودکه محققین این حدس را ثابت و یا با مثالی باطل می‌نمودند.

حدس: اگر عدد طبیعی n با ۱۰ متباین باشد و خارج قسمت‌آن بر n، در یك دورهٔ تناوب به شکل $a_۱ \cdots a_n$ و باقیمانده‌های این تقسیم، در یك دورهٔ تناوب، به ترتیب، $b_۱=۱$ ، $b_۲$ ، ... ، b_n باشد آنگاه

$$b_k \times a_۱a_۲\cdots a_n = a_ka_{k+۱}\cdots a_{k-۱}$$
$$(k=۱, ۲, \cdots, n)$$

قضیه یانگ

عبدالعزیز عبداللهی

مقاله‌ای تحت عنوان فوق از آقای عبدالعزیز عبداللهی دریافت شده بود از آنجا که این مقاله شامل نکات جالبی بود ولی اشکالاتی نیز دربرداشت از آقای دارابی عضو هیأت تحریریه تقاضا شد که مقاله را بازنویسی نمایند. بهرحال از زحمات آقای دارابی که در تدوین مجدد این مقاله متحمل شده‌اند تشکر و قدردانی می‌گردد.

هیأت تحریریه

هرگاه n نقطه در صفحه‌ای به قسمی قرار گرفته باشند که فاصله هر جفت از آنها از ۱ تجاوز نکند، آنگاه همه این نقاط در داخل دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{\sqrt{3}}$ واقع می‌شوند.

برای اثبات قضیه به دو لم اشاره می‌کنیم.

لم.

اول ــ n پاره خط بر روی یك خط راست به قسمی قرار دارند که هر دوتا از آنها، دارای اشتراك هستند. ثابت کنید همه پاره خطها دارای اشتراکند. یعنی نقطه‌ای وجود دارد که به همه آنها تعلق داشته باشد.

اثبات. (به استقراء ثابت می‌کنیم)

الف: به ازاء $n=2$ حکم بدیهی است.

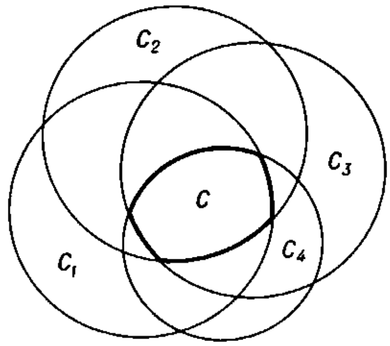
ب: فرض کنید حکم برای n پاره خط درست باشد. همچنین فرض کنید $n+1$ پاره خط دو به دو متقاطع l_1 و l_2 و ... و l_n و l_{n+1} روی خط راست داده شده باشند. بنابه‌فرض استقراء n پاره خط l_1 و l_2 و ... و l_n دارای اشتراك هستند. اشتراك آنها را l می‌نامیم (بدیهی است که این اشتراك می‌تواند یك نقطه و یا یك پاره خط باشد) ثابت می‌کنیم $(n+1)$ امین پاره خط با l اشتراك دارد. فرض کنیم چنین نباشد. آنگاه نقطه‌ای مانند A وجود خواهد داشت که l_{n+1} و l را از یکدیگر جدا کند.

(شکل الف)

اما هریك از پاره خطهای l_1 و l_2 و ... و l_n شامل l می‌باشند و بنابه فرض پاره خط l_{n+1} را قطع می‌کنند، یعنی هریك از این پاره خطها نقطه A را شامل می‌شوند پس نقطه A به l تعلق دارد و این یك تناقض است. بنابراین l_{n+1} و l اشتراك دارند و اشتراکشان به همه پاره خطهای l_1 و l_2 و ... و l_n و l_{n+1} تعلق دارد.

لم.

دوم ــ هرگاه n دایره در صفحه‌ای به قسمی قرار گرفته باشند که هر سه‌تایی از آنها دارای نقطه مشترکی باشند، آنگاه حداقل نقطه‌ای وجود خواهد داشت که به همه دایره‌ها تعلق داشته باشد.

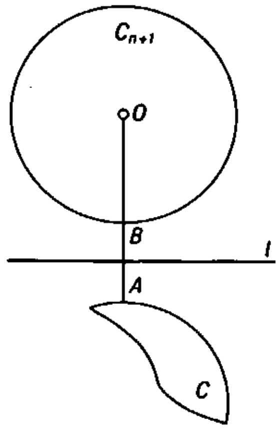


(شکل ب)

اثبات ــ برای $n=3$ حکم بدیهی است. فرض کنید حکم برای n دایره ثابت شده باشد و فرض کنید $n+1$ دایره c_1 و c_2 و ... و c_n و c_{n+1} بر روی صفحه داده شده باشند. بنابر فرض استقراء، n دایره c_1 و c_2 و ... و c_n همدیگر را قطع می‌کنند. اشتراك این دوایر را با c نشان می‌دهیم. (شکل ب).

(در بعضی حالات n ضلعی‌دایره‌ای، می‌تواند دایره کامل و یا یك نقطه شود.) باید ثابت کنیم شکل c و دایره $n+1$ اشتراك دارند. فرض کنیم این طور نباشد، در این صورت می‌توان خط راستی مانند l را طوری رسم کرد که شکلهای c و c_{n+1} را از هم جدا کند. این خط یعنی l برخطی که O مرکز دایره c_{n+1} را به نقطه A نزدیکترین نقطه از شکل c وصل می‌کند، عمود خواهد بود و از وسط AB خواهد گذشت. (B محل برخورد OA با دایره c_{n+1} است).

چون هر یك از دایره‌های c_1 و c_2 و ... و c_n شکل c را شامل می‌شوند و بنابه فرض c_{n+1} را قطع می‌کنند، پس l را هم قطع خواهند کرد. اگر a_1 پاره خطی باشد که دایره



(شکل ج)

c_1، درطول آن l را قطع می‌کند و a_2 پاره خطی باشد که در طول آن دایره C_2 خط l را قطع می‌کنند و ... الی آخر در آن صورت n پاره خط a_1 و a_2 و ... و a_n خواهیم داشت که برروی l قرارگرفته‌اند و هردوتای آنها، اشتراک دارند.

دوتا ازاین پاره خطها مثلاً a_1 و a_2 را درنظر می‌گیریم. اگر M نقطه دلخواهی از شکل c باشد (که در این حالت این نقطه به هر دو دایره c_1 و c_2 تعلق دارد) چون هر سه دایره مفروض اشتراک دارند، نقطه‌ای مانند N وجود خواهد داشت که توأماً به c_1 و c_2 و c_{n+1} تعلق داشته باشد. از آنجا پاره خط MN به تمامی به دایره‌های c_1 و c_2 تعلق خواهد داشت و در این صورت نقطه اشتراکشان با خط l نقطه خواهد بود که اشتراک a_1 و a_2 است. همان طور که از لم اول نتیجه شد، روی خط l نقطه‌ای وجود خواهد داشت که به همه پاره خطهای a_1 و a_2 و ... و a_n تعلق داشته باشد. این نقطه باید به‌همه دایره‌های c_1 و c_2 و ... و c_n تعلق‌داشته باشد بنابراین به شکل c هم تعلق خواهد داشت و این با ساختار l تناقض دارد. پس شکل‌های c_{n+1} و c لااقل در یك نقطه اشتراك دارند و این نقطه به همه دایره‌های c_1 و c_2 و ... و c_n و c_{n+1} تعلق دارد.

اکنون به خود قضیه یانك می‌پردازیم. ابتدا نشان دهیدکه هر سه نقطه از این نقاط، در داخل دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{\sqrt{3}}$ قرار دارند. دایره‌ای به‌شعاع $\frac{1}{\sqrt{3}}$ و به مرکز هر یك از نقاط داده شده رسم‌کنید و نشان دهیدکه هر سه تا از این دوایر، اشتراك دارند. نقطه مشترك همه این دوایر، مرکز دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{\sqrt{3}}$ خواهد بود که نقاط مفروض را دربر می‌گیرد.

منبع:

L. I. Golovina
I. M. Yaglom
Induction in Geometry
Mir Publishers. Moscow

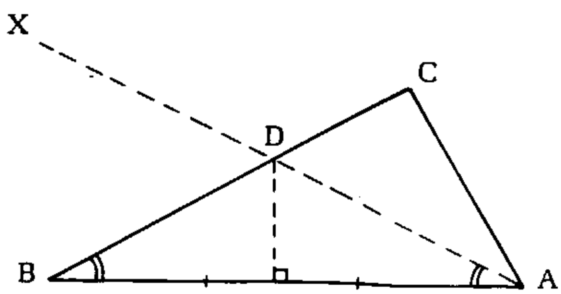
بقیه از صفحهٔ ۵۱

لذا در مثلث ΔCBE عمود منصف BE ضلع BC را قطع کرده است و بنابر فرع ۱ باید

$$BC > CE \cong B'C'$$

باشد.

قضیه ۳: در هر مثلث بزرگترین ضلع روبرو به بزرگترین زاویه مثلث است.



برهان:

۱): فرض‌کنید $\angle A > \angle B$ است لذا نیم‌خط $\overrightarrow{AX}$ وجود داردکه در درون $\angle A$ بوده و

$$\angle BAX \cong \angle B$$

این نیم‌خط ضلع BC را در نقطه D میان B و C قطع می‌کند.

۲): با استفاده از مرحله ۱ مثلث ΔABD متساوی‌الساقین و عمود منصف AB از D می‌گذرد یعنی در مثلث ACB عمود منصف AB ضلع BC را قطع می‌کند پس بنابر فرع ۱ باید $BC > AC$ باشد.

البته عکس قضیه نیز به سادگی برقرار است.

مرجع:

Mathematics Teacher N. 2: 1989.

مسائل شماره ۲۶

تهیه و تنظیم: محمود نصیری

۱. دنباله $\ldots, a_3, a_2, a_1, a_0$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود؛ $a_0=3$ و، به ازای $n\geqslant 1$، a_n ریشه حقیقی معادله $f(x)=x^3-6x^2+9x-4a_{n-1}=0$ است.
ثابت‌کنید این دنباله به ۵ همگرا می‌باشد.

۲. فرض‌کنیم $P_n(x)=x^{n+1}+(n-x)(x+1)^n$ که n عددی طبیعی است.
ثابت کنید
(الف) وقتی n فرد است، به‌ازای هر x حقیقی $P_n(x)>0$؛
(ب) وقتی n زوج است، $P_n(x)=0$ دقیقاً یك ریشه حقیقی‌دارد.

۳. مطلوبست $\int\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$

راهنمائی: $\int\frac{dt}{t^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|+C$

۴. هرگاه $a, b, c\geqslant 0$ و $a+b+c=1$، ماکزیمم $S=a^2b+b^2c+c^2a$ را پیدا کنید.

۵. فرض‌کنیم P نقطه‌ای درون مستطیل $ABCD$ باشد. از رئوس A و B و C و D خطهائی به‌ترتیب عمود بر PA و PB و PC و PD رسم می‌کنیم. نشان دهید مساحت چهارضلعی محدبی که ازتقاطع این چهارخط پدید می‌آید، بزرگتر یا مساوی از دو برابر مساحت مستطیل است.

۶. می‌دانیم مساحت یك مثلث را می‌توان با فرمولی برحسب سه ضلع آن بیان کرد (رابطهٔ هرون) آیا می‌توان فرمولی پیدا کرد که حجم یك چهار وجهی را برحسب مساحت وجه‌های آن بیان کند؟ درصورت مثبت یا منفی بودن جواب‌آن را ثابت‌کنید.

۷. ازمثلثی یك ضلع وارتفاع ونیمساز وارد برآن ضلع معلوم است مثلث را رسم کنید.

۸. اگر $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$ و $n>m$ ثابت کنید تابع

$$f(x)=\frac{\int_0^x \sin^m t\,dt}{\int_0^x \sin^n t\,dt}$$

اکیداً نزولی است.

۹. فرض کنید G یك گروه باشد، $a\in G$ و $n\in Z$.
a^n چنین تعریف می‌شود:

$$a^n=\begin{cases} e & (n=0)\\ a\cdot a^{n-1} & (n\in N)\\ (a^{-1})^{-n} & (-n\in N)\end{cases}$$

(e عضو بی‌اثر G، N مجموعه اعداد طبیعی و Z مجموعه اعداد صحیح است.)
اگر $m, n\in Z$ ثابت کنید:

(۱) $a\cdot a^n=a^n\cdot a$
(۲) $(a^{-1})^n=(a^n)^{-1}$
(۳) $a^n\cdot a^m=a^m\cdot a^n=a^{m+n}$
(۴) $(a^m)^n=a^{mn}$

۱۰. فرض کنید $f(n)$ حاصلجمع n جمله اول دنباله زیر باشد
$0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots$
ثابت کنید اگر x و y دو صحیح مثبت باشند به‌طوری‌که $x>y$، آنگاه به‌ازای‌هرعدد اول P، اگر $f(x+y)-f(x-y)=P$ چه شرطی برای x و y بدست می‌آید.

حل مسایل شماره ۲۳

۱ـ عدد اول p را چنان تعیین کنید که $7p+1$ مکعب یك عدد طبیعی باشد.

حل ـ فرض کنید a عدد طبیعی باشد. $7p+1=a^3$.

پس،

$$7p=a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)=$$

پس

$$(1)\begin{cases}a-1=7\\a^2+a+1=p\end{cases} \quad \text{یا} \quad (2)\begin{cases}a-1=p\\a^2+a+1=7\end{cases}$$

از (۱) نتیجه می‌شود $a=8$ و $p=73$.

از (۲) نتیجه می‌شود $a=2$ و $p=1$ قابل‌قبول نیست.

۲ـ کلیه جوابهای صحیح معادله سیاله

$$2xy-6x-5y=7$$

را تعیین کنید.

حل ـ

$$2xy-6x-5y=7$$
$$(2x-5y)(y-3)=22$$

که به‌ترتیب ازآنها نتیجه می‌شود

$$(1)\begin{cases}2x-5y=11\\y-3=2\end{cases} \qquad (2)\begin{cases}2x-5y=22\\y-3=1\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}2x-5y=2\\y-3=11\end{cases} \qquad (4)\begin{cases}2x-5y=1\\y-3=22\end{cases}$$

$$(1)\Rightarrow\begin{cases}x=18\\y=5\end{cases} \qquad (2)\Rightarrow\begin{cases}x=21\\y=4\end{cases}$$

$$(3)\Rightarrow\begin{cases}x=36\\y=14\end{cases} \qquad (4)\begin{cases}x=63\\y=25\end{cases}$$

۳ـ فرض کنید

$$X=\{1, 2, 3, \dots 100\}$$

عمل $*$ و $\circ$ را در X چنین تعریف می‌کنیم:

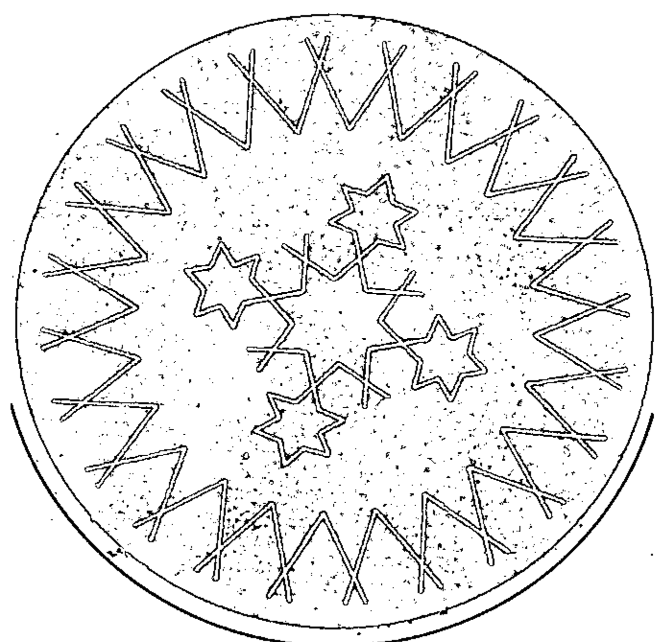
$$a * b=\frac{1}{2}\,[a+b+|a-b|]$$

و

$$a \circ b=\frac{1}{2}\,[a+b-|a-b|]$$

الف) کدام‌یك ازاصول موضوعه گروه، تحت هریك از دوعمل $*$ و $\circ$ برقراراست؟

ب) ثابت کنید



تنظیم از ابراهیم دارابی

$$a * b = \mathrm{Max}\,\{a, b\}$$
$$a \circ b = \min\,\{a, b\}$$

ج) جوابهای معادلات ذیل را در X به‌دست آورید.

$$(X * ۱۲) \circ ۷ = ۱۲$$
$$(X * ۱۲) \circ ۱۴ = ۱۳$$
$$(X * ۱۲) \circ ۱۴ = ۱۲$$

حل- فرض کنید

$$X = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۰۰\}$$

عمل $*$ و $\circ$ را در X چنین تعریف می‌کنیم

$$a * b = \frac{۱}{۲}\,[a+b+|a-b|],$$
$$a \circ b = \frac{۱}{۲}\,[a+b-|a-b|]$$

الف) کدام‌یك ازاصول‌موضوع گروه، تحت‌عمل $\circ$ و $*$، برقرار است.

ب) ثابت کنید که

$$a * b = \mathrm{Max}\,\{a, b\}$$
$$a \circ b = \min\,\{a, b\}$$

ج) جوابهای معادلات ذیل را در X به‌دست آورید

$$(x * ۱۲) \circ ۷ = ۱۲$$
$$(x * ۱۲) \circ ۱۴ = ۱۳$$
$$(x * ۱۲) \circ ۱۴ = ۱۲$$

حل- نظر به اینکه خواص عمل $\circ$ و $*$ متشابه است، احکام قسمت (الف) را برای عمل $(*)$ ثابت می‌کنیم:

خاصیت جابجایی؛

$$a * b = \frac{۱}{۲}[a+b+|a-b|]$$
$$= \frac{۱}{۲}[b+a+|b-a|]$$
$$= b * a$$

خاصیت شرکتپذیری؛ ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر a، b، c،

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

مسائل مربوط به قدرمطلق، اکثراً براساس‌حالت بزرگی‌اعداد قابل حل است.

بنابراین برحسب اینکه از a، b، c، کدام یك از دیگری بزرگتر است ۶ حالت درنظرمی‌گیریم. چون استدلال تمام حالات ممکنه مشابه است، تنها حالت $a \leqslant b \leqslant c$ را بررسی می‌کنیم.

$$a * b = \frac{۱}{۲}[a+b+|a-b|]$$
$$= \frac{۱}{۲}[a+b+b-a] = b$$
$$b * c = \frac{۱}{۲}[b+c+|b-c|]$$
$$= \frac{۱}{۲}[b+c+c-b] = c$$

بنابراین

$$(a * b) * c = b * c = c$$

بهمین‌ترتیب ثابت می‌شود که

$$a * (b * c) = a * c = c$$

بنابراین حکم برقراراست.

عضو بی‌اثر؛ فرض کنید که $a \in X$ بنابراین

$$a * ۱ = \frac{۱}{۲}[a+۱+|a-۱|]$$
$$= \frac{۱}{۲}[a+۱+a-۱] = a$$

بنابراین، به‌ازای هر a از X،

$$a * ۱ = ۱ * a = a$$

بالنتیجه، ۱ عضو بی‌اثر است.

عضو وارون؛ فرض کنیدکه وارون a عضو a' باشد. بنابراین

$$a * a' = ۱$$
$$\frac{۱}{۲}[a+a'+|a-a'|] = ۱$$
$$a+a'+|a-a'| = ۲$$

ازطرفی، چون $۰ \leqslant |a-a'|$، پس

$$۲ = a+a'+|a-a'| \geqslant a+a' \geqslant ۲$$

بالنتیجه $a = a' = ۱$ یعنی تنها عضوی از X که وارون دارد عدد یك است، پس X با عمل $(*)$ تشکیل گروه نمی‌دهد

(ب)

فرض کنید که $a \leqslant b$. بنابراین،

$$a * b = b = \mathrm{Max}\,\{a, b\}$$

واگر $b \leqslant a$ آنگاه

$$a * b = a = \mathrm{Max}\,\{a, b\}$$

بهمین‌ترتیب برای عمل $\circ$ می‌توان برهانی ارائه داد

(ج)

فرض‌کنید که $a = ۱۲ * x$. چون می‌نیمم دوعدد ازهریك از آنها نابیشتراست. پس

$$۱۲ = (x * ۱۲) \circ ۷ = a \circ ۷ = \min\,\{a, ۷\} \leqslant ۷$$

پس دراینحالت مسئله جواب ندارد

اینك معادله $(x * ۱۲) \circ ۱۴ = ۱۳$ را حل می‌کنیم،

$(x * ۱۲) \circ ۱۴ = a \circ ۱۴ = \min\{a, ۱۴\} = ۱۳$

پس $a = ۱۳$ $= ۱۲ * x$ یعنی،

$\mathrm{Max}\{۱۲, x\} = ۱۳$

$x = ۱۳$

اینک معادله سوم را حل می‌کنیم

$(x * ۱۲) \circ ۱۴ = a \circ ۱۴ = \min\{a, ۱۴\} = ۱۲$

بنابراین، $a = ۱۲$، بالنتیجه،

$۱۲ = a = \mathrm{Max}\{x, ۱۲\}$

برای برقراری تساوی باید $x \leqslant ۱۲$ چون $x \in X$ است پس

$x = ۱, ۲, \cdots, ۱۲$

یعنی، دراین حالت معادله ۱۲ جواب دارد.

۴ـ بهرام وجواد وسعید، که متهم به تقلب درمواد غذایی هستند، به‌شرح ذیل در دادگاه شهادت داده‌اند:

بهرام؛ جواد مقصراست وسعید بی‌تقصیراست.

جواد، اگر بهرام مقصراست، سعید هم مقصراست.

سعید؛ من بی‌تقصیرم ولی حداقل یکی از بهرام و جواد مقصر است.

فرض کنید: A، یعنی بهرام بی‌تقصیراست و B، یعنی جواد بی‌تقصیراست و C، یعنی سعید بی‌تقصیراست.

الف) جدول مشترک ارزش سه شهادتها را تنظیم کنید.

ب) اگر هرسه شاهد بی‌تقصیر باشند کدام‌یك از آنها شهادت‌دروغ داده‌اند.

ج) اگر آنکه مقصراست شهادت دروغ وآنکه بی‌تقصیر است شهادت راست داده باشد مقصرکیست وبی‌تقصیرکدام است.

حل‌ـ با مفروضات مسئله شهادت بهرام را با $\sim B \wedge C$، شهادت جواد را با $\sim A \Rightarrow \sim C$ وشهادت سعید را با $C \wedge (\sim A \vee \sim B)$ نشان می‌دهیم. جدول زیر را خواهیم داشت:

A	B	C	$\sim B \wedge C$	$\sim A \Rightarrow \sim C$	$C \wedge (\sim A \vee \sim B)$
۱	۱	۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۰	۱	۰
۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۰
۰	۱	۱	۰	۰	۱
۰	۱	۰	۰	۱	۰
۰	۰	۱	۱	۰	۱
۰	۰	۰	۰	۱	۰

ب) با توجه به‌جدول، بهرام وسعید شهادت دروغ داده‌اند.

ج) جواد بی‌تقصیر وبهرام وسعید مقصرند.

۵ـ فرض کنید که $f(x)$ یك چندجمله‌ای با کوچکترین درجه باشد، به‌طوری که در دونقطه متمایز $x_۱$ و $x_۲$ داشته باشیم.

$f(x_۱) = a_۱ \qquad ، f'(x_۱) = b_۱$

$f(x_۲) = a_۲ \qquad ، f'(x_۲) = b_۲$

الف) ضابطه چندجمله‌ای را برحسب a_i و b_i و x_i $(i = ۱, ۲)$ به‌دست آورید.

ب) درحالتی‌که $x_۱ = ۱$ و $x_۲ = ۲$ و $a_i = b_i = x_i$ $(i = ۱, ۲)$ ضابطه چندجمله‌ای را بنویسید.

حل‌ـ الف: فرض کنید $g(x)$ یك چندجمله‌ای باشد. چون $f(x_۱) = a_۱$ و $f'(x_۱) = b_۱$ پس $f(x)$ به‌صورت زیراست.

$$f(x) = a_۱ + (x - x_۱)\, b_۱ + (x - x_۱)^۲\, g(x)$$

ازطرفی $f(x_۲) = a_۲$ پس با قراردادن $x = x_۲$ در رابطه فوق خواهیم داشت،

$$a_۲ = a_۱ + (x_۲ - x_۱)\, b_۱ + (x_۲ - x_۱)^۲\, g(x_۲)$$

$$g(x_۲) = \frac{a_۲ - a_۱ - (x_۲ - x_۱)\, b_۱}{(x_۲ - x_۱)^۲} = A$$

ازطرفی،

$$f'(x) = b_۱ + ۲\,(x - x_۱)\, g(x) + (x - x_۱)^۲\, g'(x)$$

بنابراین با قراردادن $x = x_۲$ خواهیم داشت.

$$b_۲ = f'(x_۲) = b_۱ + ۲\,(x_۲ - x_۱)\, g(x_۲) + (x_۲ - x_۱)^۲\, g'(x_۲)$$

$$= b_۱ + ۲\,(x_۲ - x_۱)\, A + (x_۲ - x_۱)^۲\, g'(x_۲)$$

$$g'(x_۲) = \frac{b_۲ - b_۱ - ۲\,(x_۲ - x_۱)\, A}{(x_۲ - x_۱)^۲} = B$$

چون $f(x)$ باید چندجمله‌ای با کوچکترین درجه باشد، پس درجه $g(x)$ باید کمترین باشد. طوری که $g(x_۲) = A$ و $g'(x_۲) = B$

بنابراین،

$$g(x) = A + (x - x_۲)\, B$$

درنتیجه،

$$f(x) = a_۱ + (x - x_۱)\, b_۱ + (x - x_۱)^۲ (A + (x - x_۲)\, B)$$

ب: با قراردادن اعداد به‌جای $x_۱$ و $x_۲$ نتیجه می‌شود،

$A = ۰ \;,\; B = ۱$

$f(x) = x + (x - ۱)^۲ (x - ۲)$

۶ـ فرض کنید که f بر بازه $[۰, ۱)$ تعریف شده باشد و در نقطه صفر ازسمت راست پیوسته باشد. اگر تابع f درهر نقطه x ازبازه $[۰, ۱)$ در رابطه $f(x) = f(x^۲)$ صدق کند، ثابت‌کنید f براین بازه تابع ثابت است.

حل‌ـ ثابت می‌کنیم به‌ازاء هر x ازاین بازه $f(x) = f(۰)$.

به‌استقراء ثابت می‌شود $f(x)=f(x^{2^n})$. زیرا به ازاء $n=1$ برقرار است. فرض کنید که به‌ازاء $n=K$ برقرار باشد. بنابراین با انتخاب $y=x^{2^K}$.

$$f(y)=f(y^2)$$

با توجه به‌فرض استقراء

$$f(x)=f(x^{2^K})=f(y)=f(y^2)$$
$$=f([x^{2^K}]^2)=f(x^{2^{K+1}})$$

چون $0\leqslant x<1$ پس $\lim_{n\to\infty} x^{2^n}=0$ (چرا؟)، بنابراین

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x^{2^n})=f(0)$$

۷- در بین اعداد به فرم $|36^k-5^l|$ کوچکترین مقدار کدام است؟ k و l اعداد طبیعی هستند.

حل- اگر $36^k>5^l$، آنگاه $A=|36^k-5^l|$ به رقم ۱ ختم می‌شود.

اگر $36^k<5^l$، درآن‌صورت A به‌رقم ۹ ختم خواهد شد.

به‌ازاء $k=1$ و $l=2$ داریم، $A=11$. ثابت می‌کنیم $A\neq 1$ و $A\neq 9$. یعنی $A=11$ جواب است.

اگر $36^k-5^l=1$، آنگاه

$$(6^k+1)(6^k-1)=5^l$$

6^k+1 به رقم ۷ ختم می‌شود و بر ۵ بخش‌پذیر نیست. (سمت راست بر ۵ بخش‌پذیر است)

اگر $5^l-36^k=9$، آنگاه،

$$36^k+9=5^l$$

سمت چپ تساوی اخیر بر ۹ بخش‌پذیراست ولی سمت راست بر ۹ بخشپذیرنیست. پس $A=11$ جواب است.

۸- ارقام از ۱ تا ۹ را روی رئوس و اضلاع مثلثی طوری درج می‌کنیم که روی هرضلع که شامل رئوس هم می‌شود، ۴ عدد با مجموع ۲۰ قرار گیرند. ارقامی را که درسه رأس مثلث قرار می‌گیرند، مشخص کنید.

حل- ارقام مندرج درسه رأس مثلث را با a، b، و c نشان دهید. مجموع ارقامی که روی سه ضلع مثلث قرارمی‌گیرند، برابر می‌شود با ۶۰.

ازطرف دیگر مجموع آنها برابراست با،

$$(a+b+c)+(1+2+\dots+9)$$

پس $a+b+c=15$.

چون ترتیب‌نوشتن موردنظرنیست پس برای a و b و c جوابهای زیر را خواهیم داشت. برای اختصار، a و b و c را با یك عدد سه‌رقمی نشان می‌دهیم.

۱۵۹، ۱۶۸، ۲۴۹، ۲۵۸، ۲۶۷، ۳۴۸، ۳۵۷، ۴۵۶

به آسانی دیده می‌شود از جوابهای بالا، تنها جوابهای زیر قابل‌قبولند.

(۱, ۵, ۹)، (۲, ۵, ۸)، (۳, ۵, ۷)، (۴, ۵, ۶)

۹- ثابت کنید بین اعداد n و $n+1$ و $n+2$ و ..... n^3+n^2+n+2 به‌ازاء جمیع مقادیر n اعداد طبیعی از توان چهارم پیدا می‌شود.

حل- اگر $n=m^4$، آنگاه حکم ثابت است. فرض می‌کنیم

$$m^4<n<(m+1)^4$$

پس

$$n\geqslant m^4+1$$
$$n^3+n^2+n+2-(m+1)^4\geqslant(m^4+1)^3+(m^4+1)^2$$
$$+(m^4+1)+2-(m+1)^4\geqslant 0$$

به‌ازاء $m=1$ نامساوی بالا به‌تساوی تبدیل می‌شود، و به‌ازاء $n\geqslant 2$ به‌آسانی ثابت می‌شود، $(m^4+1)^2\geqslant(m+1)^4$.

پس،

$$n<(m+1)^4\leqslant n^3+n^2+n+2$$

که مطلوب مسئله است.

۱۰- اگر در رشته اعداد $x_1, x_2, \dots, x_n$ که در آن $x_i\neq 0$ و $n\geqslant 3$، رابطه،

$$(x_1^2+x_2^2+\dots+x_{n-1}^2)(x_2^2+x_3^2+\dots+x_n^2)$$
$$=(x_1x_2+x_2x_3+\dots+x_{n-1}x_n)^2$$

برقرارباشد، ثابت کنید رشته اعداد مفروض تشکیل یك تصاعد هندسی میدهند.

حل- به‌استقراء ثابت می‌کنیم. اگرتعداد جملات ۳ باشد داریم

$$(x_1^2+x_2^2)(x_2^2+x_3^2)=(x_1x_2+x_2x_3)^2$$

وازآنجا $x_1x_3=x_2^2$

پس با فرض $x_i\neq 0$، اعداد x_1 و x_2 و x_3 تشکیل‌تصاعد هندسی میدهند.

فرض می‌کنیم برای $k\geqslant 3$ حکم برقرار باشد، پس رشته اعداد به‌صورت زیر نوشته می‌شود،

$$x_1, x_2, \dots, x_k \qquad (1)$$

اگر قدرنسبت این تصاعد q باشد، تصاعدی را درنظرمی‌گیریم که $k+1$ جمله داشته باشد

$$x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1} \qquad (2)$$

شرط مسئله را اعمال می‌کنیم،

$$(x_1^2+x_2^2+\dots+x_{k-1}^2+x_k^2)(x_2^2+x_3^2+\dots+x_k^2+x_{k+1}^2)$$
$$=(x_1x_2+x_2x_3+\dots+x_{k-1}x_k+x_kx_{k+1})^2 \qquad (3)$$

فرض می‌کنیم

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_{k-1}^2=a^2$$

که در آن $a\neq 0$ و $x_1\neq 0$
بنا به‌فرض داریم،

$$x_2=qx_1,\ x_3=qx_2,\ \dots\ x_k=qx_{k-1}$$

پس رابطه (۳) بصورت زیر نوشته می‌شود،

$$(a^2+x_k^2)(q^2a^2+x_{k+1}^2)=(qa^2+x_kx_{k+1})^2$$

پس ازساده کردن خواهیم داشت.

$$(x_kq-x_{k+1})^2=0$$

یا

$$qx_k=x_{k+1}$$

پس رشته (۲) تشکیل تصاعد هندسی میدهد وقدرنسبت‌آن برابر است با:

$$q=\frac{x_2}{x_1}$$

۱۱- به‌ازاء چه مقداری از x تابع زیر به‌حداقل خود می‌رسد؟

$$f(x)=|x-1|+|x-2|+\dots+|x-1368|$$

حل- $f(x)$ به‌ازاء یکی ازمقادیر ۱, ۲, ۳, ... ۱۳۶۸ به‌حداقل خود می‌رسد. اگر k را یکی ازاعداد ۱, ۲, ۳,...۱۳۶۸ درنظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$f(k)=(k-1)+(k-2)+\dots+[k-(k-1)]+[(k+1)-k]+[(k+2)-k]+\dots+(1368-k)$$

ازطرف دیگر داریم،

$$(k-1)+(k-2)+\dots+[k-(k-1)]=\frac{k}{2}(k-1)،$$

$$[(k+1)-k]+[(k+2)-k]+\dots+(1368-k)=\frac{(1369-k)(1368-k)}{2}$$

$$f(k)=\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(1369-k)(1368-k)}{2}=k^2-1369k+1369\times 684$$

برای اینکه سه‌جمله‌ای بالا می‌نیمم باشد باید داشته باشیم

$$f'(k)=0\Rightarrow k=\frac{1369}{2}=684+\frac{1}{2}$$

چون k عددی است درست بنابراین $f(k)$ به‌ازاء

$$K=684+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\quad \text{ویا}\quad K=684 \text{ و } K=685$$

به‌حداقل خود می‌رسد.

(حل از ارشك حمیدی دانش‌آموز سوم ریاضی تهران)

۱۲- ۱۹۸۷ نقطه متمایز درفضا مفروضند. ثابت کنید ازیکی از این نقاط می‌توان صفحه‌ای طوری رسم کرد که در هر طرف آن ۹۹۳ نقطه ازاین نقاط قرار داشته باشد.

حل- ازهر دونقطه ازاین نقاط، خط راستی مرور می‌دهیم. پس‌از هریك ازاین نقاط بیش از ۱۹۸۶ خط نمی‌گذرد، بنابراین‌تعداد این خطوط که آنرا با k نشان می‌دهیم متناهی خواهد بود $(k\leqslant\frac{1}{2}\times 1986\times 1987)$ ثابت می‌کنیم صفحه‌ای موجود است که با هیچ یك ازاین k خط موازی نمی‌باشد.

روی هریك ازاین خطوط برداری را درنظر می‌گیریم. از نقطه‌ای مانند O همسنگ آنها را رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\overrightarrow{OA}$ برداری باشد که با هیچ‌یك از k بردار حاصل هم راستا نباشد. اگرصفحه‌ای را حول OA دوران دهیم، این صفحه در چند حالت محدود، شامل یکی از k بردار خواهد بود. بنابراین صفحه‌ای مانند (a) موجود است که با هیچ‌یك از این k بردار موازی نمی‌باشد. واضح است این صفحه، موازی هیچ‌یك ازآن خطوط هم‌نخواهد بود. ازتمام ۱۹۸۷ نقطه، صفحاتی به‌موازات صفحه (a) مرور می‌دهیم. هریك ازاین صفحات تنها یکی از ۱۹۸۷ نقطه را شامل‌می‌شود (درغیراینصورت صفحه (a) موازی یکی از k خط خواهد بود.) صفحه وسطی از ۱۹۸۷ صفحه، جواب مسئله است.

۱۳- روی یك صفحه، ۱۰۰ نقطه موجود است. حداقل تعداد اوساط پاره‌خطهایی را پیدا کنید که انتهایشان این نقاط باشند.

حل- دونقطه‌ای را که بیشترین فاصله را ازیکدیگر دارند با A و B نشان‌می‌دهیم. نقطه A را به‌همه نقاط بجزء B وصل‌می‌کنیم. اوساط $(n-2)$ پاره‌خط حاصل‌که برروبهم منطبق نیستند، (وگرنه انتهایشان رویهم منطبق می‌شد.) در داخل دایره‌ای به‌مرکز A و شعاع $\frac{1}{2}|AB|$ قرار دارند. به‌طریق مشابه، برای نقطه B هم $(n-2)$ پاره‌خط پیدا می‌شود که داخل دایره‌ای به مرکز B و شعاع $\frac{1}{2}|AB|$ قرار دارند.

(بنابراین اوساط $(n-2)$ پاره‌خط اخیر، براوساط پاره‌های قبل که به A منتهی می‌شوند، منطبق نیستند.) دایره‌های به‌مرکز A و B تنها دریك نقطه مشترکند (وسط AB). پس تعداد اوساط چنین پاره‌خطهایی برابراست با،

$$(n-2)+(n-2)+1=2n-3$$

اگرنقاط مفروض برروی یك خط راست وبه‌یك فاصله ازیکدیگر قرار داشته باشند، در آن حالت هم تعداد اوساط این پاره‌خطها $(2n-3)$ خواهد بود. یعنی حداقل تعداد اوساط چنین پاره‌خطهایی برابراست با $(2n-3)$.

۱۴- ثابت کنید در داخل دایره‌ای به‌شعاع واحد، نمی‌توان دو دایره را که مساحت هریك ازآنها، بیشتر از واحد است، بدون لغزاندن برروی هم، جا داد.

حل- ثابت می‌کنیم اگرمثلثی با مساحتی بیش از واحد، در داخل دایره‌ای به‌شعاع واحد قرار گیرد، (محاط شود) مرکز دایره در داخل مثلث واقع می‌شود. همه ارتفاعات مثلث از واحد بیشتر است. زیرا طول هیچ‌یك از اضلاع مثلث بیش از ۲ نیست (قطر دایره) ومساحت مثلث از واحد بیشتر است.

پس مثلث مفروض ازاشتراك سه نوارساخته می‌شودکه عرض هریك ازآنها از واحد بیشتراست (برابربا ارتفاعات‌مثلث) یعنی مرکز دایره را شامل می‌شوند.

اگر در دایره‌ای که شعاع آن واحد است، دومثلث بامساحتهای بیش از واحد جا بگیرند، هردوی‌آنها مرکز دایره را شامل می‌شوند. یعنی رویهم لغزانده می‌شوند.

۱۵- طول هر یك از اضلاع شش ضلعی محدبی بیش از واحد است،

آیا همواره می‌توان قطری ازآنرا پیدا کرد که طول‌آن از۲ بیشتر باشد؟

حل- همواره خیر.

روی هریك ازاضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع بطول ۲، مثلث‌های متساوی‌الساقینی بسازیدکه قاعده‌هایشان ۲ و ارتفاعشان $\frac{1}{10}$ باشد. به‌این ترتیب شش‌ضلعی محدبی‌حاصل خواهد شد که طول هریك ازاضلاع آن بیشتر از واحد است اما طول اقطارآن از ۲ بیشتر نیست!

۱۶- برسه میانه مثلث غیرمشخص ABC، مثلث متساوی‌الاضلاع استوارمی‌کنیم ثابت کنید مثلثی که رئوس آن مراکز این‌سه مثلث متساوی‌الاضلاع است، با مثلث ABC متشابه است.

حل- M، L و K پاهای میانه‌های مثلث ABC هستند. محل تقاطع‌میانه‌هارا t و اوساط At، Bt و Ct را به‌ترتیب o_1، o'_1، o''_1 می‌نامیم. بر to_1 و to'_1، to''_1 سه مثلث متساوی‌الاضلاع استوار می‌کنیم واضح است که رئوس این سه مثلث، یعنی o، o' و o'' مراکزمثلث‌های KPC، LBR و MAQ هستند.

باید ثابت کنیم مثلث $oo'o''$ با مثلث ABC متشابه است.

مثلث $oo'o''$ را به مرکز t، ۶۰° دوران می‌دهیم. چون o_1 دوران‌یافته o، و o'_1 دوران‌یافته o' و o''_1 دوران‌یافته o'' به‌مرکز t تحت زاویه ۶۰° هستند، پس‌مثلث حادث از دوران یعنی، مثلث $o_1 o'_1 o''_1$ با مثلث ABC متشابه است وحکم ثابت شده است.

(صورت وحل این مسئله ازآقای آرش رستگاراست)

۱۷- بین سه‌جمله‌ای‌های درجه دومی‌که ضریب x^2 درآنها برابر واحد می‌باشد، سه‌جمله‌ای f را طوری پیدا کنید که، برای آن، حداکثر مقدار $|f(x)|$ درفاصله $[-1, 1]$ دارای حداقل مقدار ممکن باشد.

حل- حداکثر مقدار سه‌جمله‌ای در حالتی که به‌صورت x^2 باشد، درفاصله مفروض مسئله برابراست با ۱. اما وقتی‌آنرا درطول محور $y'y$ پائین‌بیاوریم قدرمطلق‌مقدارآن به‌تدریج کم می‌شود تا زمانی که مقادیر $|f(0)|$ و $|f(1)|$ برابربشوند. واضح است که وضع اخیر درمورد $P=x^2-\frac{1}{2}$ صدق می‌کند. ثابت می‌کنیم این سه‌جمله‌ای یعنی P تنها سه‌جمله‌ای درجه دومی است که در شرایط مسئله صدق می‌کند.

چون‌سه‌جمله‌ای $f(x)=x^2+ax+b$ دریکی‌ازنقاط ۱ و ۱− و $-\frac{a}{2}$ ماکزیمم می‌شود، باید ثابت کنیم بزرگترین عدد از بین عددهای $|f(1)|$، $|f(-1)|$ و $\left|f\left(-\frac{a}{2}\right)\right|$ از $\frac{1}{2}$ بزرگتر است. اگر چنین نباشد، همه این اعداد باید کوچکتریا مساوی $\frac{1}{2}$ باشند. یعنی

$$|b+a+1|\leqslant\frac{1}{2},\quad |b-a+1|\leqslant\frac{1}{2},\quad \left|b-\frac{a^2}{4}\right|\leqslant\frac{1}{2}$$

که با دستگاه زیرهم‌ارز می‌شوند:

$$-a-\frac{3}{2}\leqslant b\leqslant -a-\frac{1}{2},\quad a-\frac{3}{2}\leqslant b\leqslant a-\frac{1}{2},$$

$$\frac{a^2}{4}-\frac{1}{2}\leqslant b\leqslant \frac{a^2}{4}+\frac{1}{2}$$

ازآنجا نتیجه می‌شود،

$$\frac{a^2}{4}-\frac{1}{2}\leqslant -a-\frac{1}{2},\quad \frac{a^2}{4}-\frac{1}{2}\leqslant a-\frac{1}{2}$$

یا

$$a^2\leqslant 4a,\quad a^2\leqslant -4a$$

که تنها به‌ازای $a=0$ ممکن است. در این صورت $b=-\frac{1}{2}$ $f(x)=P$. تناقض حاصل نشان میدهد که حداکثر مقدار قدرمطلق سه جمله x^2+ax+b کمتر از $\frac{1}{2}$ نیست و $x^2-\frac{1}{2}$ تنها سه‌جمله‌ای مطلوب‌است.

۱۸- ثابت کنید

$$\sum_{K=0}^{n}(-1)^K\binom{n}{K}\frac{1}{K+m+1}=\sum_{K=0}^{m}(-1)^K\times\binom{m}{K}\frac{1}{K+n+1}$$

(راهنمایی: $\frac{1}{K+m+1}=\int_0^1 t^{K+m}\,dt$)

حل- داریم،

$$\sum_{K=0}^{n}(-1)^K\binom{n}{K}\frac{1}{K+m+1}=\sum_{K=0}^{n}(-1)^K\binom{n}{K}\times$$

$$\int_0^1 t^{K+m}\,dt$$

$$=\int_0^1 \sum_{K=0}^{n} (-1)^K\binom{n}{K}\, t^{K+m}\,dt=$$

$$\int_0^1 t^m\left(\sum_{K=0}^{n} (-1)^K\binom{n}{K}\, t^K\right) dt$$

چون $(1-t)^n=\sum_{K=0}^{n}(-1)^K\binom{n}{K}\,t^K$ پس

$$\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt$$

با تغییر متغیر $1-t=u$ داریم

$t=0 \Rightarrow u=1$

$t=1 \Rightarrow u=0$

$1-t=u \Rightarrow dt=-du$

$1-t=u \Rightarrow t=1-u$

ازآنجا داریم

$$\int_1^0 (1-u)^m\cdot u^n(-du)=\int_0^1 u^n(1-u)^m\,du$$

به‌جای تغییر متغیر ظاهری u، t قرارمی‌دهیم

$$\int_0^1 t^n(1-t)^m\,dt$$

چون $(1-t)^m=\sum_{K=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\,t^k$ پس

$$\int_0^1 t^n\cdot\left(\sum_{K=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\,t^k\right)dt=$$

$$=\int_0^1\left(\sum_{K=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\,t^{k+n}\right)dt=$$

$$=\sum_{K=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\int_0^1 t^{k+n}\,dt$$

$$=\sum_{K=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{1}{K+n+1}$$

وحکم ثابت شده است.

۱۹ـ ثابت کنید اگر تابع $f(x)=\sin x+\cos ax$ متناوب باشد، آنگاه a یك عدد گویا است.

حل- فرض کنید تابع $f(x)=\sin x+\cos x$ تابعی متناوب باشد، داریم،

$f(x+T)=f(x)$

$\forall x:\ \sin(x+T)+\cos a\,(x+T)=\sin x+\cos ax \quad (1)$

در رابطه (۱) به‌جای x، $-T$ ویکبارهم به‌جای x صفرقرار میدهیم،

$(1)\quad x=0 \Rightarrow \sin T+\cos aT=\sin 0+\cos 0=1$

$(2)\quad x=-T \Rightarrow \sin 0+\cos 0=\sin(-T)+\cos a(-T)$

درنتیجه داریم،

$\sin T+\cos aT=1=\quad \sin T+\cos aT$

پس

$2\sin T=0 \Rightarrow T=K\pi$

$\sin T+\cos T=1 \Rightarrow \cos aT=1$

$aT=2n\pi$

$(n\in Z)$

$aT=2n\pi \Rightarrow$

$a(K\pi)=2n\pi$

$aK=2n$

چون $K\neq 0$ و $K\in Z$ ، n پس

$$a=\frac{2n}{K}\in Q$$

۲۰ـ ثابت‌های a و b را طوری تعیین کنید که

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \frac{t^2\,dt}{\sqrt{a+t}}=1$$

حل- سمت چپ تساوی به‌ازاء $x=0$ به‌صورت $\frac{0}{0}$ درمی‌آید.

ازقانون هوپیتال استفاده می‌کنیم،

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{b-\cos x}=1$$

یا

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}=b-1$$

سمت چپ به‌ازاء جمیع مقادیرمثبت a همواره صفرمی‌شود. پس $b=1$ ازآنجا داریم.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{(1-\cos x)\sqrt{a+x}}\right]=1$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}\sqrt{a+x}}\right)=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{a+x}}=1$$

$\Rightarrow a=4$

جواب نامه‌ها

از کلیه خوانندگانی که مطالب برای مجله می‌فرستند، تقاضا می‌شود چنانچه مقاله آنان متشکل از مطالب گوناگونی (موضوعات و مسئله) است آنها را به طور جداگانه و با ذکر نام خود در قسمت‌های مختلف آنها را برای مجله بفرستند تا امر ارزیابی توسط اعضای هیأت تحریریه تسهیل گردد.

(هیأت تحریریه)

تنظیم از:

ابراهیم دارابی - جواد لالی

خانم میترا کریمی، دانش‌آموز سال چهارم ریاضی، تهران

قاعده‌ای‌که برای مربع اعداد ۵۱ تا ۵۹ و ... به دست آوردید‌کاربرد اتحادهای جبری است‌واصولاً یك قاعده موقعی ارزشمند است‌که‌کلی‌تر و کاربردآن ساده‌تر از محاسبه‌آن باشد قاعده شما چنین مزیتی را ندارد، موفقیت شما را در امور تحصیل‌آرزومندیم.

آقای افشین سپهری دانش‌آموز سال سوم ریاضی، تهران

برای جمع اعداد ازیك تا یك میلیون بهتر است از تصاعد حسابی استفاده‌کنید‌که در این تصاعد با محاسبه میانگین حسابی می‌توان به سادگی مقدار حاصل‌جمع را محاسبه‌کرد.

آقای فرهاد سلیمی، دانش‌آموز سال چهارم ریاضی

از اظهار لطف شما نسبت به دست‌اندرکاران مجله‌کمال تشکر را داریم و علت اینکه مجله دیرتر از موعد مقرر منتشر می‌شود موجب تأسف است سعی ما در این است در زمان معین شده مجله منتشر شود. در ضمن تنها وسیلهٔ مبلغ مجله ما، مقالات مناسب و خوانندگان خوب ما هستند‌که امید است رضایت این عزیزان را با تلاش بیشتر به دست‌آوریم درضمن، از مقاله ارسالی، در بخش مسائل استفاده خواهیم‌کرد.

آقای نریمان صداقت، دانشجوی ریاضی، دانشگاه گیلان

در مورد اثبات‌آخرین قضیه فرما، دانشمندان ریاضی نامی روی‌آن کارکرده‌اند و پس‌از تلاش بسیار، با برهانی پیچیده توانستند حالتهای خاص‌آن مثلاً $n=3$ ، $n=5$ و غیره را حل‌کنند، اشکال برهان شما در این است‌که تمام حالتها را بررسی نکرده‌اید مثلاً وقتی‌که $z < x+y$ و دوتا از این اعداد فرد باشد، سه حالت رخ می‌دهد‌که بررسی‌آنها مشکل است بهتر است وقت‌گرانبهای خود را برروی مسائل لاینحل نگذارید.

تهران، آقای روزبه، حضرت، مسائلی‌که برای مجله فرستاده بودید به دست ما رسید از توجه شما نسبت به مجله صمیمانه متشکریم.

ارومیه، دانش‌آموز سوم ریاضی، آقای اتابك حیدری، از مسائل ارسالی شما برای صفحه مخصوص دانش‌آموزان متشکریم منبع مسائل را ذکر نکرده‌اید.

استان فارس، خرامه، دانش‌آموز سوم ریاضی، آقای جلیل رضایی، شگفتی‌های اعداد شما را دریافت‌کردیم قسمت‌های اول‌آن (درباره جذر اعداد،) از قبل هم وجود داشته‌اند و تازگی ندارد. بقیه مطالب شما هم کاربرد عملی ندارد. سعی‌کنید نوشته‌های شما متکی بر برهان باشد در غیر این صورت ارزش ریاضی نخواهد داشت. توفیق شما را آرزومندیم.

ساوه، دبیرستان ۱۷ شهریور، آقای علی‌اکبر جاوید مهر، حل مسائل ویژه دانش‌آموزان شما را هم دریافت‌کردیم از همکاری شما با مجله صمیمانه سپاس‌گزاریم. به موقع ازمسائل شما استفاده خواهیم‌کرد.

آقای کوروش طحانی، هر دو سؤال شما پاسخ مثبت دارد. در این مورد می‌توانید مطالب مربوط به بینهایت کوچکها را مطالعه‌کنید.

شیراز، آقای محمدرضا یزدانی، بسطهایی‌که برای عدد طلایی و π ارسال‌کرده‌اید، تازگی ندارد وازعنوان‌کردن‌آن

معذوریم. در مورد مقاله مربوط به متعالی بودن عدد e و π لطفاً اصل مقاله (بزبان خارجی) را ارسال نمائید تا نسبت به بررسی آن اقدام شود.

بندرانزلی، دانش‌آموز سوم ریاضی، آقای آرمان امامپور، مسئله جالب شما را دریافت کردیم، به موقع آن را در صفحه ویژه دانش‌آموزان بنام خود شما درج خواهیم کرد. موفقیت هرچه بیشتر شما را آرزومندیم.

تبریز، آقای محمد هابیل امیرخیز، احتمال دوم شما درست است. مسئله اول شما با پیش‌شرطهایی در مجله شماره ۲۵ آورده می‌شود. و همین مسئله با تغییر جزیی در المپیاد ریاضیات داخلی شوروی آورده شده است در هرحال اگر n خط طوری در صفحه قرار داشته باشند که هیچ دوخطی موازی نباشند و هیچ سه خطی از یك نقطه نگذرند، صفحه را به $\frac{n}{2}(n+1)+1$ ناحیه تقسیم می‌کنند. در مورد تقسیم فضا با n صفحه، هم به مقاله استقراء و ریاضیات در شماره‌های ۱ و ۴ مجله مراجعه کنید درآنجا اشاره شده که فضا به $n(n-1)+2$ ناحیه تقسیم می‌شود. موفقیت شما را آرزومندیم.

تهران، دانش‌آموز دوم ریاضی، آقای امیر حمیدی، از مسائل ارسالی برای مجله تشکر می‌کنیم. از مسائل شما نیز استفاده خواهد شد و سایر پیشنهادهای شما را در حد توان مراعات می‌شود.

بندرگز، دبیر دبیرستانها، آقای حمیدرضا وزیری، از مسأله ارسالی شما برای مجله بسیار متشکریم. سعی می‌کنیم مسأله شما را در حالت کلی‌تر حل کنیم وگرنه، عین مسأله شما درج خواهد شد.

تهران، دانشجوی فنی، آقای عبدالحسین کاهری، ازمسائلی که برای درج در مجله فرستاده‌اید، صمیمانه تشکر می‌کنیم. به تدریج از این مسائل استفاده خواهیم کرد. تنها یك اشکال باقی می‌ماند و آن اینکه منبع مسائل را برای ما ننوشته‌اید.

ساوه، دبیر ریاضی، آقای علی‌اکبر جاویدمهر، از مسائل ارسالی شما صمیمانه تشکر می‌کنیم. در مجله مسائلی را درج می‌کنیم که در مجلات و یاکتابهای داخلی درج نشده باشد. منبع مسائل وحل آن هم باید فرستاده شود. درصفحه مخصوص دانش‌آموزان که ازشماره قبل در مجله گنجانده شده از دبیران محترم خواسته شده سئوالات امتحانات درس خودشان را برای درج در مجله بفرستند. برای اینگونه مسائل شرطی درنظر گرفته نشده است.

تهران، دانش‌آموز چهارم ریاضی، آقای علی آذربر، مقاله‌ای درباره اعداد مختلط در شماره آینده درج خواهد شد. تکرار حل مسأله المپیاد برای مجله مقدور نیست. موفقیت شما راآرزوداریم.

تهران، آقای پیمان برازنده، از مسائلی که برای مجله فرستاده‌اید متشکریم. یادآور می‌شویم مسائلی که درکتب و یا مجلات داخلی چاپ شده، در مجله رشد چاپ نمی‌شود. حل مسائل شماره ۲۱ شما هم، دیر به دست ما رسید.

تبریز، دانشجوی رشته ریاضی، آقای علیرضا فیض‌بخشی، از اظهار محبت شما نسبت به کارکنان مجله صمیمانه تشکر می‌کنیم. امیدواریم مجله از این بعد مرتب و در سطح وسیعتری پخش بشود و به‌دست شما هم به موقع برسد. پیشنهاد شمارا درمورد بررسی بعضی مطالب کتب درسی، مورد مطالعه قرار خواهیم داد. موفقیت شما را آرزومندیم.

تهران، آقای ارشك حمیدی، دانش‌آموز سوم ریاضی، در مورد اشتباه چاپی حق با شماست از اینکه نام شما را هم اشتباه چاپ کرده‌اند، متأسفیم. سعی خواهیم کرد اشتباهات چاپی را به حداقل ممکن برسانیم. از توجه شما صمیمانه تشکر می‌کنیم.

قم، دانش‌آموز سوم ریاضی، آقای اکبر اصفهانی‌پور، از فرمول پیشنهادی شما برای محاسبه $1^3+2^3+\cdots+n^3$ متشکریم.

قم، چهارم ریاضی، آقای رضا طباطبائی، مطلبی که ارسال داشته‌اید در رابطه با بستایی یك عدد اول در اعداد طبیعی است که چنین مطلبی درمجله رشد، سال اول، شماره ۴، زمستان ۶۳ چاپ شده است. چنین مطلبی در هر کتاب نظریه اعداد موجود است. موفقیت شما را آرزومندیم.

تهران، آقای سید مرتضی ناصریان، از اظهار لطف شما نسبت به مجله کمال تشکر را داریم. در مورد مسائل ارسالی متذکر می‌شویم، اگر مسئله مقدماتی (در سطح دبیرستان) و جالب باشد، در بخش مسائل از آن استفاده خواهیم کرد.

سبزوار، دانش‌آموز چهارم، آقای مهدی ایزدبخش، هر ایدال یك میدان یا ایدال صفر و یا خود میدان است و این مسأله‌ای است که در صفحه ۲۸ ریاضیات جدید سال چهارم آمده است.

اطلاعیه

دربارهٔ نشریات رشد آموزش تخصصی

مجلات رشد آموزش مواد درسی مدارس کشور که بمنظور ارتقاء سطح دانش معلمان و ایجاد ارتباط متقابل میان صاحبنظران، معلمان و دانشجویان با برنامه‌ریزان امور درسی از سوی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش هر سه ماه یکبار ــ چهار شماره در سال ــ منتشر می‌شود در حال حاضر عبارتند از:

۱ ــ آموزش ریاضی ۲۵
۲ ــ آموزش شیمی ۲۳
۳ ــ آموزش جغرافیای ۲۱
۴ ــ آموزش ادب فارسی ۲۰
۵ ــ آموزش زیست‌شناسی ۲۰
۶ ــ آموزش زبان ۲۳
۷ ــ آموزش زمین‌شناسی ۱۸
۸ ــ آموزش فیزیک ۲۰
۹ ــ آموزش معارف اسلامی ۱۰
۱۰ ــ آموزش علوم اجتماعی ۴

دبیران، دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر علاقمندان به اشتراک این مجلات می‌توانند جهت دریافت چهار مجله در سال مبلغ ۴۰۰ ریال به حساب ۹۲۹ خزانه بانک مرکزی ــ قابل پرداخت در کلیه شعب بانک ملّی ــ واریز و فیش آن را همراه با فرم تکمیل شده زیر به نشانی تهران، جادّه آبعلی، خیابان سازمان آب بیست‌متری خورشید مرکز توزیع انتشارات کمک آموزشی کدپستی ۱۶۵۹۸ ــ تلفن ۷۷۵۱۱۰ ــ ارسال دارند. ضمناً: معلمان، کارشناسان، مدیران، پژوهشگران و سایر علاقمندان به امور تعلیم و تربیت جهت آگاهی بیشتر از یافته‌های صاحبنظران می‌توانند با پرداخت مبلغ ۸۰۰ ریال در هر سال ۴ جلد **فصلنامه تعلیم و تربیت** دریافت نمایند.

مجلات رشدتخصصی در مراکز استان در کتابفروشیهای زیر و سایر شهرستانها در فروشگاههای معتبرمطبوعات بصورت فروش آزادعرضه می‌شود

تهران:	انتشارات مدرسه ــ اوّل خیابان ایرانشهر شمالی
اهواز:	کتابفروشی ایرانپور زیتون کارمندی خیابان کمیل بین زاویه و زهره پلاک ۲۰
اصفهان:	کتابفروشی مهرگان چهار باغ ابتدای سید علی خان
ارومیه:	کتابفروشی زینالپور نمایندگی و خبرنگاری روزنامه
اراک:	کتابفروشی گنج دانش بازارچه امیرکبیر
بندرعباس:	کتابفروشی مالوک خیابان سید جمال الدین اسدآبادی
باختران:	کتابفروشی دانشمند خیابان مدرس مقابل پارکینگ شهرداری
خرم‌آباد:	کتابفروشی آسیا خیابان شهدا شرقی
رشت:	کتابفروشی فرهنگستان خیابان نامجو جنب دانشگاه
زنجان:	کتابفروشی شهید بهشتی خیابان آیت‌ا... طالقانی
سنندج:	کتابفروشی شهریار خیابان فردوسی
ساری:	شرکت ملزومات و معارف خیابان انقلاب روبروی اداره برق داخل کوچه
شیراز:	پیام قرآن میدان شهدا جنب اداره آموزش و پرورش مرکز فرهنگی
کرمان:	فرهنگسرای زمین پارک مطهری
مشهد:	انتشارات آستان قدس رضوی خیابان امام خمینی روبروی باغ ملی
یاسوج:	کتابفروشی فرهنگ جنب سینما دنا خیابان شهید هرمزپور

*** دانشجویان مرکز تربیت معلم می‌توانند با ارسال فتوکپی کارت تحصیلی خود از ۵۰٪ تخفیف برخوردار شوند.**

فرم اشتراک مجلات رشد تخصصی

اینجانب با ارسال فیش واریز مبلغ ۴۰۰ ریال، متقاضی اشتراک یکسالهٔ مجلهٔ رشد آموزش هستم.
نشانی دقیق متقاضی: استان شهرستان خیابان
کوچهٔ پلاک کُدپستی تلفن

Contents

Roshd, Magazine of Mathematical Education, Vol VII No. 26, Summer 1990 Mathematics Section, 274 BLDG - No. 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave., Tehran - Iran.

A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.

هشتمین
دورهٔ
مسابقات
ریاضی
دانش‌آموزی
کشور

سی و دومین
المپیاد
بین‌المللی
ریاضی

المپیاد ریاضی

مرحلهٔ اوّل، مسابقات استانی، جمعه دوم آذرماه ۶۹

مرحله دوّم، مسابقات کشوری، پنجشنبه هجدهم و جمعه نوزدهم بهمن ماه ۶۹

مسابقات بین‌المللی، تیرماه ۱۳۷۰، سوئد ۱۹۹۱

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی