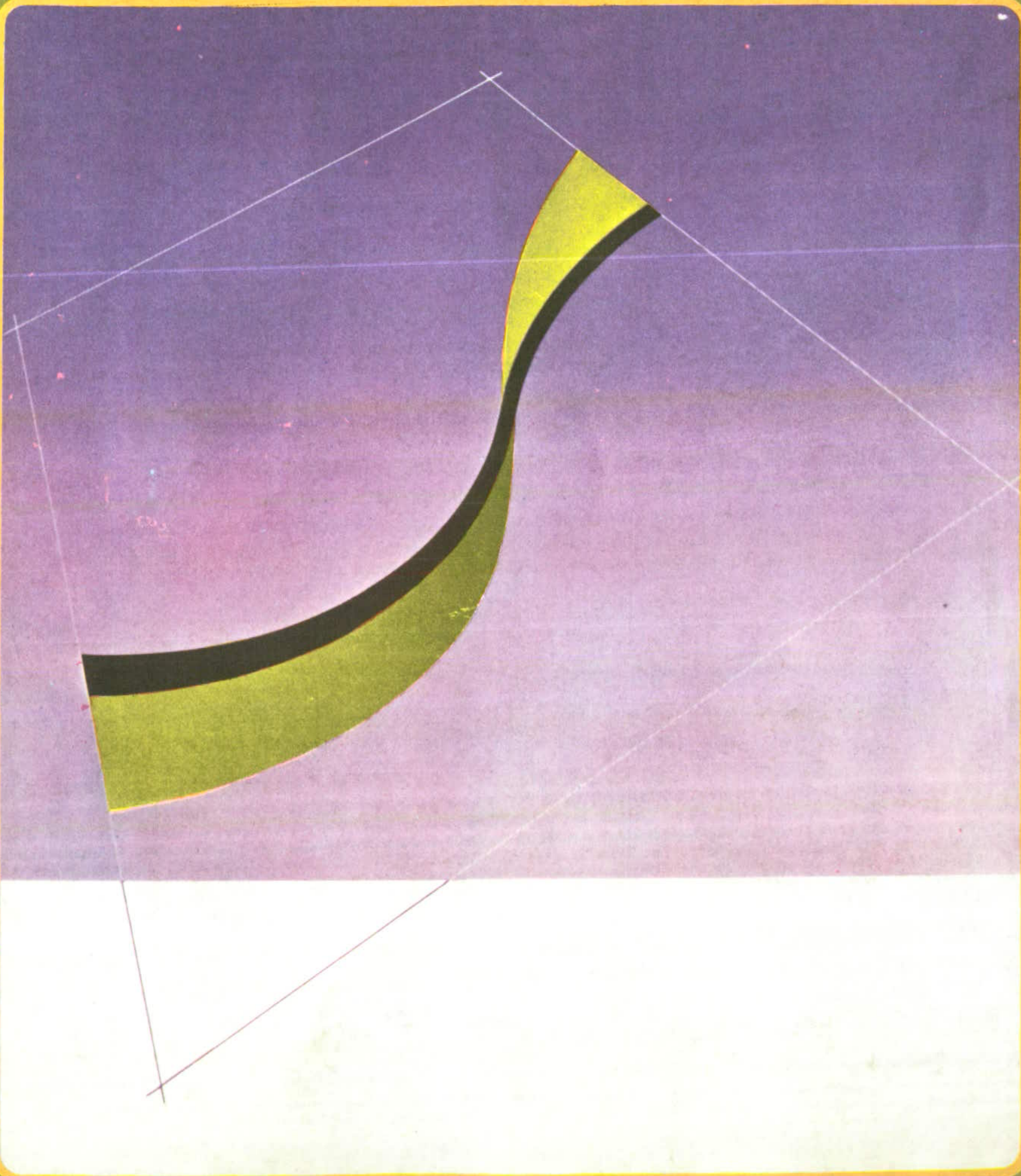
رشد آموزش ریاضی

سال ششم ـ زمستان ۱۳۶۸ ـ شمارهٔ مسلسل ۲۴

بها: ۱۰۰ ریال



بسم‌الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یکبار از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی منتشر می‌شود هدف از انتشار این مجله اعتلای دانش ریاضی دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلّم است. علاوه بر این ایجاد ارتباط متقابل بین معلّمین ریاضی و دفتر تحقیقات، به منظور تبادل تجارب، ارائه روشهای جدید آموزش ریاضی، معرفی جنبه‌های تاریخی، فلسفی، کاربردی ریاضیات در سطح بیش دانشگاهی است هیأت تحریریه از مشارکت و همکاری همهٔ علاقه‌مندان بویژه دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان در ارائه مقالاتی در زمینه‌های زیر استقبال می‌کند:

الف) آموزش ریاضی (طرح و بررسی آموزش ریاضی، بویژه آموزش ریاضی در دوره‌های پیش دانشگاهی).

ب) تاریخ ریاضی (مشتمل بر سیر تحول مفاهیم ریاضی، شرح و احوال ریاضیدانان و کارهای علمی آنها، بویژه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی).

ج) فلسفه ریاضی (تبیین مفاهیم ریاضی، ریاضیات چیست، بررسی مکاتب ریاضی، بررسی ارتباط تاریخ و فلسفه ریاضی).

ریاضی کاربردی (مشتمل بر مباحثی در زمینه‌های آنالیز عددی، کامپیوتر و برنامه‌ریزی، تحقیق در عملیات، آمار و احتمال).

د) سایر مباحث ریاضی (مشتمل بر مقالات مختلفی در زمینه‌های مختلف، ارائه راه‌حلهای مختلف برای مباحث ریاضی، ارائه مسائل نمونه).

رعایت نکات زیر در مورد مقالات ارسالی ضروری است:

۱) مقالات ارسالی باید در چهارچوب اهداف فوق و با سبکی مشابه با سبک مقالات چاپ شده در رشد ریاضی باشد و در سطحی عرضه شوند که ضمن داشتن محتوی مطلوب دارای کیفیت عرضه مطلوب هم باشند؛

۲) مقالات باید با خط خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) و به صورت یک سطر در میان و با در نظر گرفتن جای کافی در حاشیه تهیه شود و صفحات به طور دقیق شماره‌گذاری شود؛

۳) فهرست مراجع مقاله به طور کامل و در دو قسمت فارسی و خارجی و به ترتیب الفبایی و طبق استاندارد مقالات علمی درج شود؛

۴) مقالات ترجمه شده از زبانهای خارجی همراه با متن اصلی ارسال شود؛

۵) مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور به چاپ رسیده باشد؛

۶) رد یا قبول و حک و اصلاح و ویراستاری مقالات به عهدهٔ هیأت تحریریه است.

سردبیر دکتر محمد حسن بیژن‌زاده

اعضاء هیأت تحریریه: حسین غیور

دکتر علیرضا جمالی

ابراهیم دارابی

دکتر اسمعیل بابلیان

جواد لآلی

محمود نصیری

دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل

رشد آموزش ریاضی

سال ششم ـ زمستان ۱۳۶۸ ـ شمارهٔ مسلسل ۲۴

نشریه گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی کتب درسی تلفن ۴ ـ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۵۰)

سردبیر : دکتر محمدحسن بیژن‌زاده

مدیر داخلی: میرزا جلیلی

مدیر فنی هنری و تولید: حسین فرامرزی نیکنام

صفحه‌آرا : محمد پریسای

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر دانش‌پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. جهت ارتقاء کیفی آن نظرات ارزنده خود را به صندوق پستی تهران ۳۶۳ ـ ۱۵۸۵۵ ارسال فرمائید.

فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

در شهریور ماه گذشته که برادر گرامیمان آقای دکتر علیرضا مدقالچی جهت ماموریت مطالعاتی عازم خارج شدند، ریاست محترم سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی برادر دکتر حداد عادل این حقیر را مأموریت دادند تا وظایف سردبیری را بعهده بگیرم. اینجانب نیز از آنجا که اعتقاد دارم وجود نشریاتی از این قبیل بسیار سودمند و لازمند مسؤلیت را تقبل کردم. باشد که از این طریق دِینی کوچک را ادا کرده و خدمتی ناچیز را به جامعه معلمان و دبیران ریاضی کشور اسلامیمان نموده باشم.

در چند سال اخیر با توجه به عنایتی که مقامات محترم وزارت آموزش و پرورش، برخی از دبیران و دانشگاهیان کشور، و سایر نهادها و ارگانهای رسمی به پیشرفت و اعتلای دانش ریاضی داشته‌اند فعالیتهای چندی از جمله نشر مجلات علمی، انجام مسابقات المپیاد ریاضی کشور و شرکت در مسابقات بین‌المللی المپیاد ریاضی شروع شده است. این فعالیتها همه در جهت تشویق و ترغیب دانش‌آموزان و گرایش آنها به این رشته تا حدی مؤثر بوده است و این می‌تواند نشانه مثبتی از آینده این رشته از علوم در کشور باشد.

معهذا در چارچوب برنامه‌ریزی‌های علمی و اصول آموزش و پرورش نباید به این فعالیتها بسنده کرد. چرا که تنها گسترش کمی دانش‌آموزان رشته ریاضی به تنهایی نمی‌تواند مؤثر باشد بلکه افزایش کیفی سطح دانش ریاضی دانش‌آموزان نیز باید مَدنظر قرار گیرد.

از این رو، خوشبختانه فعالیتهای برنامه‌ریزی درسی در زمینه

بقیه در صفحه ۳۱

آموزش ریاضی برای دنیای فردا

مقاله زیر «آموزش ریاضی برای دنیای فردا» که وسیلهٔ Lynn Asthur st در مجلهٔ معروف آمریکائی Educational-Leader Ship در سپتامبر ۱۹۸۹ به چاپ رسیده است، از مشکلات و نارسائیهای فعلی آموزش ریاضی در آن کشور بحث کرده است برای رفع این نارسائیها، چاره‌جوئیهائی را که «شورای ملی معلمین ریاضی» و یا دیگران اندیشیده‌اند عرضه می‌نماید. این مقاله صرفاً به خاطر آگاهی از آنچه در آموزش ریاضی در سایر کشورها می‌گذرد ترجمه و تقدیم شده است.

Educational - Leadership
by: Lynn Arthur St
Sep, 1989

ترجمه: میرزا جلیلی

بمنظور آماده ساختن دانش‌آموزان برای دنیای فردا معلمین ریاضی باید برنامه‌های ریاضی، راههای آموزش و روشهای امتحانی خود را تغییر دهند.

دانش‌آموزان امروز در قرن بیست و یکم زندگی و کار خواهند کرد، عصری که تحت سیطره کامپیوتر، رسانه‌های گروهی عالمگیر و اقتصاد جهانی خواهد بود. کسانی که برای مشاغلی آماده می‌شوند که به این اقتصاد کمک می‌کنند لازم است ایده‌های تازه را جذب، طرحهای نو را درک و مسائل غیر سنتی را حل کنند. ریاضیات کلید مناسبی برای آمادگی جهت انجام این شغلهاست. در نتیجه پیشرفت تکنولوژی، ریاضی در محل کار نیز نفوذ کرده و آمار در بحث‌های کلی سیاست رسوخ پیدا نموده است، لذا، علوم ریاضی تنها لازمهٔ کار متخصصان آینده نیست بلکه جزء لاینفک تعلیم و تربیت عموم مردم بشمار می‌رود.

به موجب گزارش‌های متعددی که توسط دانشمندان در سالهای اخیر ارائه شده، نارسائیهای جدی در نتیجه کار ریاضی دانش‌آموزان مشاهده گردیده است. ما در مقایسه با ملل دیگر در ردیف پائینی هستیم و در مقایسه با خواسته‌های خودمان از وضع خیلی رضایت بخشی برخوردار نیستیم. اگرچه نسبتاً مهارت‌هائی در محاسبات بنیادی ریاضی بدست آمده است اما از میان هر بیست نفر فارغ‌التحصیل دبیرستان تنها یکنفر قادر است مسائلی را که نیاز به اعمال متوالی دارد به طور کامل عمل نماید.

بعد از آنکه ریاضی در مدارس یک درس اختیاری اعلام می‌شود، دانش‌آموزان به نسبت نگران کننده‌ای (٪۵۰ در سال) آنرا رها می‌کنند و حتی این نسبت در میان سیاهان و اسپانیولیها بمراتب بالاتر است.

از آنجا که در جامعهٔ صنعتی ما، ریاضی کلیدی برای رهبری است، آمادگی‌های متفاوت و ناهمگون در ریاضی به ایجاد فرصتهای نابرابر در جهت کسب قدرت اقتصادی خواهد انجامید. نیاز اقتصادی و علاقه به برابری هر دو، تجدید حیات آموزش ریاضی را ایجاب می‌کند. آینده نگریهای شغلی کمبودی بیش از نیم ملیون نفر متخصص و مهندس را تا سال ۲۰۰۰ پیش‌بینی می‌کند.

همچنین روزافزون شدن بازنشستگی معلمین و بالا رفتن آمار ثبت نام در مدارس، کمبود شدید معلمین علوم و ریاضی را نیز احتمالاً بدنبال خواهد داشت. از اینجهت برای

یک ملت و هریک از آحاد آن ضرورت حیاتی دارد که کلیهٔ دانش‌آموزان از یک آموزش ریاضی با کیفیت بالائی بهره‌مند شوند.

هدفهای غایی برای دانش‌آموزان

در قسمت اعظم تاریخ آموزش و پرورش، از آکادمی افلاطون تا علوم چهارگانه رومیها[1] لازم بوده است که دانش‌آموزان برای درست اندیشیدن ریاضی بیاموزند. ریاضیات به ویژه هندسه اقلیدسی بعنوان تجسم استدلال محض، یک وسیلهٔ مطلوب و ایده‌آل برای ورزشهای قوی فکری بوده است درحدود ۵۰۰ سال قبل، بعلت توسعه بازرگانی استفاده عالمگیر از دستگاههای پیچیده شمارش و حساب مورد نیاز واقع شد.

در ۲۰۰ سال قبل، دانستن حساب ساده و عامیانه برای ورود به اغلب دانشگاه‌های وقت مورد نیاز بود. درعین حال که، حساب در آموزش ابتدائی سومین درس دبستان[2] و جزء انتظارات عمومی قرار گرفت. هندسه و حساب، تفکر و محاسبه، نه تنها قواعد اولیه و الفباء آموزش ریاضی است بلکه در عین حال شما و تصور ذهنی والدین از ریاضی می‌باشد. امروز به دلائل کاملاً متفاوتی، هیچکدام از این هدفها به طور خاص مورد توجه نیستند. اگرچه بیشتر دانش‌آموزان محاسبه را به اندازه کافی خوب فرا می‌گیرند، ماشینهای حساب عملاً باعث شده‌اند تا انجام محاسباتی را که یادگیری آنها مشکل است به بوتهٔ فراموشی سپرده شوند. اگرچه دانش‌آموزان دبیرستان برهان را در هندسه می‌خوانند اما از این رهگذر کم می‌آموزند و کمی از آنچه را که آموخته‌اند عملاً در قسمتهای مختلف زندگی راهنمای فکری خود قرار می‌دهند. در جهت کمک به دانش‌آموزان امروز برای زندگی کردن در دنیای فردا، هدفهای غایی آموزش ریاضی در مدارس باید مناسب با نیازهای اقتصاد جهانی در عصر کامپیوتر باشد. شورای ملی معلمین ریاضی در «استانداردهای جدید ریاضی برای مدارس» پنج هدف اصلی را برای تأمین نیازهای ریاضی دانش‌آموزان در قرن ۲۱ مشخص و لازم دانسته است.

* بهاء دادن به ریاضی

دانش‌آموزان باید نقش‌های مختلفی را که ریاضی در جامعه بازی می‌کند تشخیص دهند. از حسابداری و امورمالی تا تحقیقات علمی، از مباحثات کلی سیاست تا بازاریابی و انتخابات سیاسی.

تجارب یادگیری دانش‌آموزان در مدرسه باید این اعتقاد را در آنها بوجود آورد که ریاضی برای آنها ارزشمند است، درنتیجه برای خواندن ریاضی در طول سالهای تحصیل دارای انگیزه باشند.

* استدلال ریاضی گونه

ریاضی بالاتر از هرچیز، یک ورزش فکری است که به روشن ساختن موقعیت‌های پیچیده و مبهم کمک می‌کند، دانش‌آموزان باید بیاموزند که شواهد و مدارک را جمع‌آوری نمایند حدس بزنند، مدلها را فرموله کنند، مثالهای نقض کشف نمایند و دلائل منطقی را ارائه دهند درنتیجه انجام چنین کارهائی، در آنهاقوهٔ انتقادصحیح وبینش‌عمیق‌رشدپیدا خواهد نمود و از این طریق است که چشم‌اندازهای ریاضی توسط جامعه ارزیابی می‌شود.

* انتقال دادن (مبادله کردن) ریاضی

فراگیری خواندن، نوشتن و صحبت کردن دربارهٔ مباحث ریاضی، نه تنها بعنوان یک هدف ذاتی بمنظور بکارگیری مؤثر و مفید آموخته‌ها ضروری می‌باشد که بعنوان یک استراتژی برای درک وتوجه نیز لازم است. برای یادگیری ریاضی، راهی بهتر از کار کردن به صورت گروهی وجود ندارد، با درس دادن ریاضی به یکدیگر، به طریق بحث دربارهٔ سیاست کلی کار و بوسیله ارائه دقیق دلیل به صورت کتبی.

* حل کردن مسائل

صنعت از فارغ‌التحصیلان مدارس انتظار دارد که قادر باشند راههای گسترده و مختلفی را برای حل مسائل ریاضی ارائه دهند یا بکار ببرند، لذا، دانش‌آموزان باید در مدرسه مسائل متنوعی را تجربه و یاد بگیرند ــ تنوع در متن، در طول، در مشکلی و در روش ــ آنها باید یاد بگیرند که مسائلی را که مبهم بیان شده است، دوباره به شکلی قابل تجزیه و تحلیل بیان و ارائه نمایند. با انتخاب خط مشی مناسب در حل مسائل با تشخیص و فرموله کردن راه حل‌های گوناگون، هرجا که ضروری باشد، با همکاری با دیگران برای رسیدن به نقطه نظر مشترک در جهت نیل به راه حلی که درست و درعین حال منطقی باشد تلاش نمایند.

* ــ رشد دادن اعتماد بنفس

توانائی افراد در برخورد با نیازهای ریاضی روزمره زندگی ــ بعنوان کارمند، والدین و شهروند ــ بستگی به نگرشها و دیدها در قبال ریاضیاتی که در مدارس تجربه و یاد گرفته می‌شود، دارد. یکی از پارادکس‌های عصر ما عینک والدین است که آنها اهمیت ریاضی را با آن می‌بینند ولی خود هنوز از ضعف ریاضی می‌بالند ریاضی قابل آموختن و بکارگیری نمی‌تواند باشد مگر آنکه بر اعتماد بنفس حاصل از موفقیتها بنا شده باشد.

* ــ تغییر دادن برنامه‌ها

حتی زمانی که علیه معیارهای قدیمی و کهنه اقدام شده باز غالب الگوهای ریاضی فعلی در مدارس، زیر استاندارد برنامه تنظیم شده است. ما وارث یک برنامه ریاضی هستیم که ریشه در گذشته داشته و روزنه در آینده ندارد و به‌طور سنتی محدود به حداقل توقعات و انتظارات جامعه می‌باشد. وقتی این برنامه با پنج هدف «شورای ملی معلمین ریاضی» مقایسه می‌شود، نارسائی آن کاملاً روشن می‌گردد. استاندارد برنامه جدید ۱۹۸۹ روشن

می‌سازد که کل جریان آموزش ریاضی باید تغییر کند. نه تنها اینکه چه باید آموزش داده شود که چگونه باید آموزش داده شود و چگونه امتحان و ارزشیابی بعمل آید.

تحقیقات اخیر در آموزش ریاضی، اصول مورد نیاز برای آموزشی مفید و مؤثر را ارائه می‌دهد.

در عین حالی که گزارشهای مختلف تأکید روی جنبه‌های خاصی (چون مقایسه بین‌المللی و تأثیر کامپیوتر) بیشتر از وجه‌های دیگر دارد، توافق همه‌جانبه‌ای ـ و شاید اعجاب‌انگیزی ـ روی ضرورت انجام اعمال معینی صورت گرفته است.

*** ـ بالابردن سطح توقعات(انتظارات)**

شواهد و مدارک از سایر کشورها و همچنین بعضی از مناطق نشان می‌دهد که اگر سطح انتظار و توقع در آموزش ریاضی بالا باشد آنگاه کار بیشتری انجام خواهد شد. علی‌رغم عقیدهٔ عمومی والدین که فکر می‌کنند توفیق و پیشرفت در ریاضی نیاز به استعداد خاصی دارد، اینطور نیست، حقیقت این است که سخت‌کوشی و اعتماد بنفس از عوامل ضروری پیشرفت می‌باشد همهٔ بچه‌ها می‌توانند در ریاضی موفق باشند. بخصوص، اگر ما از آنها بخواهیم موفق خواهند شد.

*** بسط دادن ابعاد آموزش**

برنامهٔ سنتی ریاضی تأکید روی آموزش چند موضوع خاصّ با خواسته و کاربرد محدود دارد. تأکید روی حساب که به جبر منتهی می‌شود و آن نیز به نوبه خود به محاسبات مشتق وانتگرال‌گیری ختم می‌گردد. در حالی که بیشتر دانش‌آموزان انتظار یک برنامه با ابعاد گسترده‌تر را دارند، برنامه‌ای که باید منعکس‌کننده توان عظیم و غنای ریاضی باشد. تخمین، احتمال اندازه‌گیری، تقارن، جمع‌آوری و تنظیم‌داده‌ها، الگوریتم و ارائهٔ بصری نیز به اندازهٔ حساب و هندسه ریاضی هستند و دانش‌آموزان بیشتر از خواندن آنها لذت می‌برند.

*** بکارگیری حسابگرها**

هیچ چیز بهتر از بی‌میلی معلمین و طراحان سؤالات در استفاده کامل و مطلوب از حسابگرها، نمی‌تواند نشان‌دهندهٔ ماهیت عقب‌گرای برنامه‌های ریاضی ما باشد. تحقیق مبین این نکته است که استفاده مناسب از ماشینهای حساب، درک محاسبه، مهارتهای اساسی و تسلط دانش‌آموزان را افزایش می‌دهد. برای بچه‌ها درک مفهوم عدد، بمراتب مهمتر از حفظ کردن محض راههای محاسبه است. حسابگرها، علاوه بر دادن یک روش عالی محاسبه (غیر از حساب ذهنی، تخمین، کاغذ و مداد و کامپیوتر) یک وسیلهٔ قوی جهت پرورش درک مفهوم عدد در بچه‌ها می‌باشد.

معلمین ریاضی باید در تدریس خود دانش‌آموزان کلاس را همراه خود بکار گیرند. یعنی سیاست آنها این باشد که دانش‌آموزان را به‌طور فعال در یادگیری شرکت دهند. نه اینکه اجازه دهند آنها در کلاس تنها گوش‌دهنده و گیرنده منفعل باشند.

*** ـ شرکت دادن دانش‌آموزان در کلاس**

تحقیق در یادگیری بارها، به انحاء مختلف، نشان داده است که بچه‌ها به آسانی آنچه به آنها آموخته می‌شود یاد نمی‌گیرند بلکه در اثر کار و تجربه خود که با تصحیح دانسته‌ها و باورهای قبلی همراه است نوعی معلومات ریاضی در آنها بوجود می‌آید که در نوع خود یگانه و منحصر بفرد است. تنها ارائه روشن مطالب برای اصلاح درکهای نادرست قبلی دانش‌آموزان کافی بنظر نمی‌رسد. برای مطمئن شدن از آموزش مفید و مؤثر ریاضی، معلمین ریاضی باید در تدریس خود کلاس را بکار گیرند. یعنی سیاست آنها این باشد که دانش‌آموزان را به‌طور فعال در یادگیری‌شان شرکت دهند نه اینکه آنها را رها کنند تا تنها گوش‌دهنده و گیرنده ساکت و سامت باشند.

*** ـ تشویق کردن به کار گروهی**

دست‌اندرکاران، به‌طور مکرر، بر اهمیت این نکته که بتوان با یک گروه با علائق و آرمانهای مشترک کار کرد تأکید دارند. بیشتر مسائل غامض نیاز به استعداد طیف‌های مختلف مردم دارد. دانش‌آموزان ریاضی باید فرا گیرند که برای نیل به یک هدف مشترک، در طرح‌ریزی کردن، بحث کردن، سؤال مطرح کردن و سازمان دادن، چگونه با دیگران کار کنند. کار گروهی در کلاس نه تنها این مهارتها را می‌آموزد که روشی بسیار مؤثر برای آموزش ریاضی به وسیله تبادل نظر با هم‌کلاسان می‌باشد.

*** ـ ارزشیابی هدفهای غائی**

در آموزش و پرورش، ارزشیابی به‌طور فزاینده‌ای به صورت مسأله حائز اهمیتی نمود پیدا کرده است. برای مفید و مؤثر بودن آموزش، ارزشیابی باید همراه با هدفهای غائی یادگیری باشد. زمانی که تستهای چند جوابی خاصی حاکم بر ارزشیابی مدارس می‌باشد، آنطور که امروز هست، معلمین بدون توجه به هدفهای غائی آموزش، مهارتهائی را که برای جواب دادن به این تستها لازم است به دانش‌آموزان می‌آموزند. ارزشیابی و آموزش باید مکمل هم باشند و هدف تنها برگزاری امتحان ثلث نباشد. ارزشیابی باید طوری طرح‌ریزی و انجام پذیرد که منعکس‌کننده سطح اطلاعات دانش‌آموزان و نحوهٔ تفکر آنها باشد طوری که روشن سازد که آنها چه می‌دانند و چگونه می‌اندیشند. بالاتر از همه اینها ارزشیابی باید جزء هدفهای برنامه‌ریزی، یعنی، به ریاضی ارزش دادن، ریاضی‌گونه استدلال کردن، پیداکردن ارتباط‌های ریاضی، پیدا کردن راه‌حل مسائل و پرورش اعتماد بنفس باشد.

*** ـ نیاز داشتن ریاضی**

دانش‌آموزان در مدرسه باید هر سال

ریاضی بخوانند. آینده‌نگری در مورد شغل‌های آینده، همچنین زمینه پیش نیازهای دوره‌های عالی نشانگر احساس و تقاضای مستمر به ضرورت ریاضی در کار در دوره‌های مختلف زندگی است. این یک تصور واهی است که دانش‌آموز دبیرستانی بتواند به طور قطعی به این نتیجه برسد که او دیگر واقعاً به ریاضی نیاز ندارد. تمام دانش‌آموزانی که به شکلی قصد تحصیلات عالی دارند، به یک دوره چهار ساله تحصیل ریاضی به عنوان پیش‌نیاز کورس‌های کالج احتیاج دارند. دانش‌آموزانی که قصد رفتن به کالج ندارند باید مهارت‌های ریاضی لازم را برای آموزش حرفه و یا کار آینده خود کسب نمایند.

بدون توجه به هدفهای زندگی آینده، تمام دانش‌آموزان مادامی که به مدرسه می‌روند باید یک ریاضیات کلیدی و اصلی و کاملاً مفیدی را تحصیل نمایند.

*** ــ نشان دادن پیوندهای ریاضی**

قدرت ریاضی از وحدت درونی و کاربرد بیرونی آن نتیجه می‌شود. مطالب در ریاضی بهم ارتباط دارند. نتایج حاصل از تئوری اعداد، سرنخهائی در مسائل هندسه به دست می‌دهد که کاربرد در علوم کامپیوتر و مهندسی فضائی دارد. دانش‌آموزان باید در هر فرصتی در تجربه و یادگیری مدرسه‌شان این بستگی و پیوندها را مشاهده نمایند. بستگی و ارتباط‌های موجود در ریاضی موجب برانگیختن قوهٔ یادگیری، تقویت و روشن شدن ایده‌های حاصل از مطالب مختلف این درس می‌گردد. ما دیگر نمی‌توانیم ریاضی را بعنوان یک درس مجزا و صاحب نظم رها کنیم و نه قادر هستیم تقسیمات گذشته برنامه‌ریاضی را به کورس‌ها و دروس مجرد و موضوعات جدا از هم و اجزاء ناپیوسته را مجاز بدانیم.

*** ــ برانگیختن خلاقیت**

بیشتر اوقات ریاضی وسیله دانش‌آموزان و حتی دانش‌آموزان خوب یک درس خشک و بیروح قلمداد می‌شود. زیرا، معلمین، کتب درسی و امتحانات تأکید بر این دارند که هر مساله تنها باید با یک راه حل خاص حل شود و یک جواب درست نتیجه دهد و هیچ چیزی بیش از این نمی‌تواند از حقیقت ریاضی در عمل به دور و مُستبعد باشد. راههای مختلف و متنوع، ابداع روشهای نو، کمتر از راه حل‌های ماشینی، مطلوب و مورد توجه هستند. امروز کامپیوتر و ماشینهای حساب بیشتر وظایف جاری و معمولی ریاضی را انجام می‌دهند. در عصر کامپیوتر یک فرد نیاز دارد که تخیّل و تصورش را به اندازه فراصت، هوش و قضاوتش‌را درست مثل‌حافظه‌اش بکار برد.

*** ــ کاهش دادن تقسیم بندی**

طرح برنامه با تاکید بر هدفهای خاص آموزش، برنامه‌ای ماشینی با تکنیک‌های خاص بوجود آورده است که تأکید برتمرین و کار روی مسایل ویژه‌ای، مسایلی که نشان دهنده روش کار کتاب است، دارد. مسایل حقیقی در این تقسیم‌بندی جائی ندارد. در مدرسه بهترین سر نخ در رابطه با شیوهٔ برخورد با مساله ــ که این شیوهٔ برخورد در بیشتر موارد مهمترین قسمت کار است ــ این است که آن مساله در چه بخشی از کتاب آمده است. و چنین برنامه‌ای، منطق وحدت ریاضی را که منشاء قدرت اصلی آن در شکل دادن به عالم است از بین می‌برد.

*** ــ تشویق به نوشتن**

در یادگیری یک موضوع هیچ چیز بهتر از نوشتن منظم، منسجم و مرتب به دانش‌آموز کمک نمی‌کند. تکلیف‌های نوشتاری در کلاس ریاضی، چند منظور را برآورده می‌کند: هدف یادگیری،مبادله و انتقال ریاضی را تأمین می‌کند، به دانش‌آموزان یاد می‌دهد تا قوهٔ درک خود را ضمن اینکه سعی دارند ایده‌های خود را به صورت نوشته منسجم ارائه دهند روشن سازند، برای دانش‌آموزانی که نوشتن را بهتر از ریاضی مجرد دوست دارند فرصتی پیش می‌آورد تا نظم کار خود را از طریقی که بیشتر مناسب حال آنهاست بهبود بخشند. معلمین زیادی، نتایج مثبتی را از جمله نویسی و «سایر تکالیف درسی» گزارش داده‌اند که در آنها دانش‌آموزان تجارب یادگیری خود را در ریاضی بکار بسته‌اند

برخلاف روش یکنواخت معمولی مدارس در آموزش محاسبات تقلیدی و بی‌محتوا، نوشتن، و وادار کردن دانش‌آموز به بیان معنی و مفهوم به‌قلم خودش، توان یادگیری را در او افزایش می‌دهد.

*** ــ تشویق کردن به مباحثه**

در کلاس درس ریاضی، معمولاً این معلم است که بیشتر حرف می‌زند نه دانش‌آموز، در این نوع کلاس‌ها دانش‌آموز یادداشت برمی‌دارد. آنچه معلم ارائه داده است تمرین می‌کند و سپس در گوشه خلوت کار می‌کند تاتکنیک محاسبه را به طور کامل فراگیرد. هیچ یک از اینها مغز دانش‌آموز را به خوبی بحث‌های قوی استدلالی به‌کار نمی‌اندازد. بحث و تبادل نظر و توجه به دلایل قانع کننده،

اساس کار و روش ریاضی است. تنها از طریق عمل کردن می‌توان آموخت نه از طریق گوش دادن.

✻ تجدید نظر در نکات مورد تأکید

برنامه درسی ــ هرگونه تغییر در برنامه‌های درسی نیاز به تغییرات اساسی و خاصی در محتوا دارد. نقش کامپیوتر و کاربرد روز افزون ریاضی، هر دو موجب شده است که بخش‌های خاصی از ریاضی بیشتر با اهمیت جلوه کند و بخش‌های دیگری کمتر. در مدارس، بخش‌های زیادی از ریاضی را که معمولاً در زندگی شهری و زمینه‌های عملی بکار می‌روند کمتر و بندرت مورد توجه و آموزش قرار می‌دهند و این در شرایطی است که بخش‌های دیگری از ریاضیات که مدتهاست از حیز انتفاع خارج شده‌اند، فقط به دلیل آنکه در کتابهای درسی آمده است و در امتحان از آنها سؤال می‌آید، هنوز در برنامه درسی باقی مانده‌اند.

در تغییر و تحول بنیادی برنامه‌های درسی مدارس، بسیاری از بخش‌های پر کار برد ریاضی باید هر چه بیشتر مورد توجه قرار گیرند:

✻ هندسه و سنجش

✻ آمار و احتمال.

✻ الگوها و روابط.

✻ استدلال فضائی.

✻ جمع‌آوری داده‌ها.

✻ مشاهده و پیش‌گویی.

✻ مسایل حقیقی.

✻ هندسه فضایی.

✻ استدلال نموداری.

✻ ریاضیات گسسته.

قسمتهای دیگری که در حال حاضر، قسمت اعظم کار و برنامه‌های ریاضی مدارس را تشکیل می‌دهد، باید به طور محسوسی کاهش پیدا نماید:

✻ کسرها.

✻ تقسیم‌های طولانی.

✻ کشیدن نمودار با دست.

✻ الگو ریتم‌های که با کاغذ و مداد نوشته می‌شوند.

✻ استدلال‌های دو ستونی[۲]

بندهای ۱ تا ۴، کم اهمیت‌تر شده‌اند. به دلیل اینکه ماشینهای حساب و کامپیوتر، هر دو، دقیق‌تر و قابل اطمینان‌تر کار محاسبات دستی را انجام می‌دهند.

اما استدلالهای دو ستونی هیچگاه جزء ریاضی حقیقی نبوده‌اند و تنها در هندسه مدارس بعنوان تمرین وجود دارند اینها کاملاً مجزی از غنای استدلال و تعقل که درخور و شایسته اشراق هندسه است می‌باشد. هندسه را می‌توان بصورتی بهتر و بدون استفاده از این روش چند شکلی برهان یاد داد و براهین را می‌توان به طور مؤثرتر با قراردادن آنها در کنار مطالب هندسه آموخت.

این تجدید نظرها در نکات مورد تأکید باید بقسمی جامهٔ عمل بپوشد که تجربه و یادگیری یک پارچه و هم آهنگ ریاضی را از ابتدائی تا دوره متوسطه بنا سازد و موضوعات کهادی چون احتمال،شکل و بعد، کمیّت و متغیر باید در تمام طول برنامه‌های ریاضی وجود داشته و به صورت روش ریاضی یک پارچه‌ای تشکل پیدا کند.

تدریس ــ بموازات تغییر محتوی روش آموزش نیز باید تغییر کند. چیزی که آموخته می‌شود اگر فرصتهای مناسب را برای یادگیری دانش‌آموزان فراهم نکند، کمتر مورد توجه واقع خواهد شد. کار مؤثر و مفید در یک کلاس خوب نکات زیر را مورد تأکید قرار خواهد داد:

✻ آموزش فعال

✻ حل مسأله

✻ مواد ملموس (کمک آموزشی)

✻ تنوع آموزش

✻ تبادل نظرهای شفاهی

✻ تمرینهای کتبی

✻ جوابهای تشریحی

✻ ارزشیابی مداوم

برای پیشبرد آموزش ریاضی برنامه، روش تدریس و نحوهٔ امتحان باید بموازات یکدیگر تغییر کند. لازم است همه با هم و هم آهنگ به جلو بروند و گرنه هیچگونه تغییری انجام نخواهد شد.

در ضمن، بسیاری از کارهای معمولی و روزمره باید تغییر کرده، به حداقل تقلیل پیدا نماید. چه، دلائل و شواهد قطعی نشان می‌دهد که آنها عملاً مفید و مؤثر نیستند:

✻ آموزش بوسیلهٔ سخنرانی.

✻ حفظ کردن بدون تفکر و تعقل

✻ یک روش و یک جواب

✻ دستور و قواعد حفظ کردنی

✻ تمرینهای کلیشه‌ای

✻ تکالیف یکنواخت روزمره

و سرانجام امتحان، نحوهٔ امتحان کردن و امتحان گرفتن باید تغییر کند. هیچ کوششی در تغییر محتوی و روش موفق نخواهد بود مگر آنکه ابزارهای ارزشیابی و امتحان نیز پا بپای هدفهای برنامه تغییر نماید. ارزشیابی و امتحان مفید و مؤثر شامل سؤالاتی است که:

✻ تنها چند انتخابی نبوده و باز باشد.

✻ در هر زمینه استفاده از ماشینهای حساب مجاز باشد.

✻ فرصتهائی برای دانش‌آموزان فراهم شود که مشخص سازد آنها چه چیزهائی می‌دانند و چگونه فکر می‌کنند. نه اینکه تنها در پی یافتن این مطلب باشیم که آنها چه چیزهائی را نمی‌دانند (از مجهولات بچه‌ها امتحان بگیریم).

✻ تأکید بر یکپارچگی علم و سیاست کلی کار، برای برخورد با مسائل (برای مثال تخمین گراف ــ مدل ــ محاسبات ــ کامپیوتر) همراه و مرتبط با تدریس باشد نه جدا از آن.

✻ بکارگیری روشهای متنوع از قبیل مشاهده، گفتگوهای شفاهی، دفترچه‌های یادداشت دانش‌آموز، تستهای کتبی و

پروژه‌های گروهی.

تعهد به ایجاد تحول

برای پیشبرد آموزش ریاضی، برنامه درسی، روش تدریس، و نحوهٔ امتحان باید با هم تغییر کند. چنانچه این تغییرات همراه و هم آهنگ پیش نرود هیچ چیز عوض نخواهد شد. «استانداردهای جدید ریاضی مدارس» دستور العملی برای بازسازی و آموزش ریاضی را بدست می‌دهد. ما هم اکنون می‌دانیم که چه کارهائی لازم است انجام شود و چگونه باید صورت گیرد. اکنون، آنچه باقی مانده است آستین بالا زدن و وارد گود شدن است.

زیرنویسها:

۱ ـ حساب ـ هندسه ـ هیئت ـ موسیقی

۲ ـ خواندن ـ نوشتن ـ حساب

(R) Reding (W) Riting (A) Rithematic معروف به سه R)

۳) در بعضی از کتابهای هندسه آمریکائی فرمولهای هندسه با نمادهای جدید ریاضی را در یک ستون و توضیحات مربوط به آنها در ستون دیگر می‌نویسند و یا از دانش‌آموز می‌خواهند.

اصل حجره‌ها و موارد استعمال آن

دکتر علیرضا جمالی

ذیلاً اصلی را ذکر می‌کنیم که گرچه بنا به اصل جمع [۲] بدیهی است ولی درصورتی که به موقع به کار برده شود وسیلهٔ توانائی در حل بعضی از مسائل ریاضی خواهد بود. این اصل، که ضمناً به اصل لانهٔ کبوترهم معروف است، به‌طور ساده این حکم را بیان می‌کند که هرگاه بخواهیم ۲۰ کبوتر را در ۱۵ لانه آشیان دهیم، باید حداقل یکی از این لانه‌ها حاوی بیش‌از یك کبوتر باشد. صورت کلی این حکم که به سبب بداهت شهودی آن به اصل موسوم است چنین است:

اصل حجره‌ها [۲]. فرض‌کنیم m و n دو عدد طبیعی باشند و $m < n$. در این صورت اگر n شیٔ را در m حجره قرار دهیم ـ به هر طریقی این کار صورت گیرد، و اعم از اینکه حجره‌ای خالی بماند یا نه ـ حداقل یکی از این حجره‌ها حاوی دو شیٔ یا بیشتر از این اشیاء خواهد بود.

به مناسبت اینکه نخستین‌بار دیریکله قدرت این اصل را در استدلال آشکار ساخت، آن را اصل دیریکله نیز می‌گویند.

برای اینکه این اصل را رسمیتر بیان‌کنیم، یعنی اینکه بیشتر جنبهٔ ریاضی داشته باشد تا اینکه بیشتردرآن از حجره و پرنده گفتگو شود، قضیهٔ زیر را می‌آوریم:

قضیه. اگر مجموعهٔ S با s عضوبه n زیر مجموعهٔ از هم

جدا افراز شود، که در آن $s > n$، آنگاه حداقل یکی از این زیر مجموعه‌ها بیش از یك عضو دارد.

برهان. فرض کنیم که حکم برقرار نباشد. در این صورت

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$$

افرازی از S است که در آن

$$S_i \cap S_j = \varnothing \ ، \ |S| = s > n$$

(با فرض $i \neq j$)، و به ازای هر i که $1 \leqslant i \leqslant n$، $|S_i| \leqslant 1$. از اینجا بنا به اصل جمع

$$s = |S| = \sum_{i=1}^{n} |S_i| \leqslant n ,$$

که یك تناقض است.

اینك پیش از آنکه چند مورد استعمال جدی این اصل را مطرح کنیم، چند جنبه از آن را محض تفنن عنوان می‌کنیم:

(آ) مطابق اصل حجره‌ها معلوم است که در مجموعه‌ای متشکل از ۸ نفر، حداقل دو نفر موجودند که روز تولد آنها در یکی از روزهای هفته، مثلاً شنبه، است.

(ب) به موجب این اصل، حداقل دو درخت در کرهٔ زمین موجودند که عدهٔ برگهای آنها مساویند. برای اثبات این موضوع ابتدا باید خود را مجاب کنیم که عدهٔ برگهای پر برگترین درخت روی کرهٔ زمین از عدهٔ درختان روی کرهٔ زمین کمتر است. (در واقع چنین هم هست). فرض کنیم که عدهٔ برگهای درختی که بیشترین تعداد برگها را در میان مجموعهٔ همه درختان دارد m باشد. ضمناً، عدهٔ همهٔ درختان روی زمین را n می‌گیریم. بنا بر مقدمات مذکور $m < n$. اینك m حجره تصور کنید که از ۱ تا m شماره‌گذاری شده‌اند، و هر یك از n درخت مذکور در حجره‌ای که شماره‌اش مساوی تعداد برگهای آن است قرار دهید. بدین‌ترتیب مسأله برمی‌گردد به توزیع n شیٔ در m حجره، که $n > m$.

مسائل نمونهٔ زیر که از کتابها و مجلات ریاضی انتخاب شده است توانائی اصل دریکله را در استدلال روشن خواهد ساخت.

مسأله ۱. فرض کنیم که $\{a_1 , a_2 , \dots , a_{n+1}\}$ مجموعه‌ای متشکل از $n+1$ عدد طبیعی باشد. ثابت کنید که در این مجموعه حداقل دو عدد مانند a_i و a_j، که در آن $i \neq j$، وجود دارد به طوری که $n | a_i - a_j$.

برهان. فرض کنیم که اعداد

(۱) $\qquad r_1$ و r_2 و ... و r_{n+1}

به ترتیب باقیماندهٔ اعداد a_1، a_2، ...، a_{n+1} بر n باشند. بنابراین $n+1$ عدد رشتهٔ (۱) از بین n عدد

(۲) $\qquad 0$ و 1 و ... و $n-1$

هستند. بنابراین برطبق اصل حجره‌ها، حداقل دو جمله مانند r_i و r_j، که $i \neq j$، در رشتهٔ (۱) هست که با یکی از جمل رشتهٔ (۲) مساوی است. پس $r_i = r_j$ و از آنجا $n | a_i - a_j$.

مسأله ۲ [۴]. عدد طبیعی n مفروض است. ثابت کنید که عددی طبیعی با ارقام ۰ و ۱ (در مبنای اعشار) وجود دارد که بر n قابل قسمت است.

برهان. $n+1$ عدد طبیعی

$\underbrace{1 \dots 111}_{n \text{ تا}}$ و ... و ۱۱۱ و ۱ و ۰

را در نظر می‌گیریم. برطبق مسألهٔ ۱، حداقل دو عدد از بین این اعداد مانند a و b، که در آن $a > b$، موجودند به‌طوری که تفاضلشان بر n قابل قسمت است. واضح است که $a-b$ واجد خاصیت حکم مسأله است.

مسأله ۳. (تعمیم مسألهٔ ۲۳ مرجع [۹]). فرض کنیم که p یك عدد اول باشد و $p \neq 2$، $p \neq 5$. ثابت کنید که به ازای هر n طبیعی توانی از p وجود دارد که وقتی آن را در مبنای اعشار می‌نویسیم به $00 \dots 01$ ختم می‌شود که در آن تعداد صفرها $n-1$ است.

برهان. فرض کنیم که $l = 10^n$. رشتهٔ اعداد

p^l و ... و p و 1

را در نظر می‌گیریم. طبق مسألهٔ ۱، اعدادی مانند i و j هستند که $0 \leqslant i \leqslant l$، $1 \leqslant j \leqslant l$ و $i > j$ به‌طوری که

$$p^i = p^j + 10^n k.$$

که در آن k عددی است طبیعی. از اینجا،

$$p^j(p^{i-j} - 1) = 10^n k.$$

اینك گوئیم چون $p \neq 2$ و $p \neq 5$،

$$p^j | k.$$

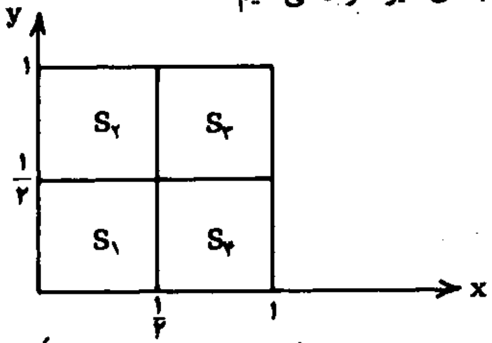
بنابراین

$$p^{i-j} = 10^n \cdot \frac{k}{p^j} + 1 .$$

معلوم است که جواب مسأله p^{l-1} است که چون در مبنای اعشار نوشته شود به ۰۱ ... ۰۰ ختم می‌شود که درآن تعداد ۰ها $n-1$ است.

مسأله ۴ [۷]. مربع S به طول واحد مفروض است. در داخل این مربع پنج نقطهٔ P_1، P_2، ...، P_5 را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که d_{ij} فاصلهٔ بین P_i و P_j باشد. ثابت کنید که حداقل زوجی از این نقاط مانند P_i و P_j موجودند $(i \neq j)$ به طوری که $d_{ij} < \frac{1}{\sqrt{2}}$. آیا حکم با تبدیل $\frac{1}{\sqrt{2}}$ به یك عدد کوچکتر برقرار می‌ماند؟

برهان. مجموعهٔ نقاط داخل مربع S را به چهار مجموعهٔ از هم جدای زیر افراز می‌کنیم:



$$S_1 = \left\{(x, y) \mid 0 < x < \tfrac{1}{2}\ ,\ 0 < y \leq \tfrac{1}{2}\right\}$$

$$S_2 = \left\{(x, y) \mid 0 < x \leq \tfrac{1}{2}\ ,\ \tfrac{1}{2} < y < 1\right\}$$

$$S_3 = \left\{(x, y) \mid \tfrac{1}{2} < x < 1\ ,\ \tfrac{1}{2} \leq y < 1\right\}$$

$$S_4 = \left\{(x, y) \mid \tfrac{1}{2} \leq x < 1\ ,\ \tfrac{1}{2} < y < 1\right\} \cup \left\{\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\right\}.$$

چون $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ و Sها دوبدو از هم جدا هستند، بنا به اصل حجره دونقطه از پنج نقطهٔ p_1، p_2، ...، p_5 باید در یکی از مجموعه‌های فوق، مثلاً S_k، باشند. چون قطر S_k مساوی $\frac{1}{\sqrt{2}}$ است، ملاحظه می‌کنیم که $d_{ij} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

در مورد قسمت دوم مسأله گوئیم نمی‌توان $\frac{1}{\sqrt{2}}$ را با عدد کوچکتری تعویض کرد. برای این منظور P_5 را مرکز مربع S می‌گیریم و نقاط P_1، P_2 P_3 و P_4 بـه چهار گوشهٔ مربع S بدلخواه نزدیك می‌گیریم.

مسأله ۵ [۶]. فرض کنیم $A=\{a_1, a_2, \dots, a_7\}$ مجموعه‌ای متشکل از هفت عدد متمایز باشد که هیچ یك از ۲۴ تجاوز نمی‌کند. ثابت کنید که اعداد حاصل از حاصلجمع اعضای هریك از زیرهای مجموعه‌های غیر خالی A نمی‌توانند جملگی دوبدو متمایز باشند.

برهان. چون A شامل ۷ عضو است، دارای

$$\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}=98$$

زیر مجموعهٔ غیر خالی با حداکثر ۴ عضو است. رشتهٔ حاصل از حاصلجمع اعضای هریك از این زیر مجموعه‌ها را درنظر می‌گیریم. بدیهی است که هرجملهٔ این رشته از اعداد از ۱ نا کمتر و از

$$21+22+23+24=90$$

نا بیشتر است. اینك گوئیم چون تعداد جمل این رشته ۹۸ است، بنابر اصل حجره‌ها، حداقل ۲ عدد از بین این اعداد مساویند.

مسأله ۶ [۱]. فرض کنیم N عددی طبیعی و α عدد حقیقی مفروضی باشد. ثابت کنید که اعدادی طبیعی مانند p و q موجودند به طوری که $q \leq N$ و

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{Nq}$$

برهان. اعداد

۰ و $\alpha-[\alpha]$ و $2\alpha-[2\alpha]$ و ... و $N\alpha-[N\alpha]$ (*)

را درنظر می‌گیریم. این $N+1$ عدد که جملگی بین ۰ و ۱ قرار دارند اشباه ما خواهند بود. اینك بازهٔ $(0, 1)$ را به N بازهٔ جزء مساوی تقسیم می‌کنیم. این N زیربازه حجره‌ها هستند که تعداد آنها N است. بنابراین دو عدد از اعداد رشتهٔ (*) در یکی از بازه‌های جزء قرار می‌گیرند. فرض کنیم این دو عدد $m\alpha-[m\alpha]$ و $n\alpha-[n\alpha]$ باشند

$$(0 \leq n < m \leq N)$$

قرار می‌دهیم

$$q=m-n$$

$$p=[m\alpha]-[n\alpha].$$

در این صورت

$$|q\alpha-p|=|(n\alpha-[n\alpha])$$

$$-(m\alpha-[m\alpha])| \leqslant \frac{1}{N}.$$

بعلاوه $q=m-n \leqslant m \leqslant N$؛ و چون $m-n>0$، $q \geqslant 1$.

توضیح. مسألهٔ ۷ در تقریب اعداد به‌کار می‌آید. به عنوان نمونه برای تقریبی از π مراجعه‌کنید به [۱].

مسأله ۷ [۸]. فرض‌کنیم‌که a_1، ...، a_l، که درآن $l>mn$، یك رشته از اعداد حقیقی متمایز باشد. ثابت کنیدکه هرگاه تعداد جمل هر رشتهٔ جزء نزولی حداکثر m باشد، آنگاه یك رشتهٔ جزء صعودی با بیش‌از n جمله موجود است.

برهان. به هر جمله رشتهٔ فوق مانند a_i، یك زوج مرتب مانند (m_i, n_i) به طریق زیر نظر می‌کنیم:

با درنظر گرفتن a_i به عنوان اولین جمله، طولانی‌ترین رشتهٔ جزء نزولی ممکن را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که m_i تعداد جمل‌آن باشد؛ به‌طریق مشابه n_i را تعداد جمل طولانی‌ترین رشتهٔ جزء صعودی ممکن می‌گیریم که با a_i شروع شده باشد. ادعا می‌کنیم‌که به ازای جمل متمایز a_i و a_j، که‌درآن $i<j$، ازواج مرتب متناظر (m_i, n_i) و (m_j, n_j) متمایزند. فرض‌کنیم‌که $a_i<a_j$. می‌دانیم‌که یك رشته جزء صعودی داریم با n_j جمله‌که با a_j شروع می‌شود. چون $a_i<a_j$، می‌توان a_i درآغاز این رشتهٔ جزء قرار داد؛ بنابراین یك رشتهٔ جزء صعودی با n_j+1 جمله داریم‌که با a_i شروع شده است. از اینجا معلوم می‌شودکه $n_i \geqslant n_j+1$. به طریق مشابه، هرگاه $a_i>a_j$ آنگاه $m_i \geqslant m_j+1$. بنابراین روبهمرفته $l(>mn)$ زوج مرتب مانند (m_i, n_i) موجود است. چون فرض این است که عدهٔ جمل در هر رشتهٔ جزء حداکثر m است، به ازای‌هر i، $1 \leqslant m_i \leqslant m$ اینك هرگاه به ازای هر i، داشته باشیم $1 \leqslant n_i \leqslant n$ آنگاه حداکثر mn زوج متمایز خواهیم داشت. چون بیش‌از mn زوج متمایزداریم، پس iای هست که $n_i>n$ و این بدین معنی است‌که حداقل یك رشتهٔ جزء صعودی با بیش‌از n جمله داریم.

مسأله ۸ [۵]. فرض‌کنیم‌که a_1، a_2، ...، a_n اعضائی (نه لزوماً متمایز) از یك‌گروه n عضوی باشند. ثابت‌کنیدکه اعدادی طبیعی مانند s و t هست به طوری‌که

$$1 \leqslant s \leqslant t \leqslant n$$

و

$$a_s a_{s+1} \cdots a_t = 1.$$

که درآن ۱ عضو خنثای گروه است.

برهان. هرگاه یکی‌از a_iها ۱ باشد حکم به‌وضوح برقرار است. فرض می‌کنیم‌که a_iها جملگی مخالف ۱ باشند. $n+1$ عضو زیر از گروه را درنظر می‌گیریم:

۱ و a_1 و a_1a_2 و ... و $a_1a_2\cdots a_i$ و ... و $a_1a_2\cdots a_n$.

چون مرتبهٔ گروه n است. حداقل دو عضو از $n+1$ عضو فوق باید مساوی باشند. دو حالت اتفاق میافتد: اول اینکه عضوی مانند $a_1a_2\cdots a_j$ با ۱ مساوی است که در این‌صورت حکم با $s=1$ و $t=j$ برقرار است. حالت دوم اینکه هیچ‌یك از حاصلضربهای $a_1a_2\cdots a_i$ با یك مساوی نیستند. در این صورت اعداد طبیعی مانند j و k هستند به طوری‌که $1 \leqslant j<k \leqslant n$ و

$$a_1a_2\cdots a_j=a_1a_2\cdots a_k.$$

از اینجا

$$a_{j+1}\cdots a_{j+k}=1.$$

بنابراین حکم با $s=j+1$ و $t=j+k$ برقرار می‌شود.

مسأله ۹ [۳]. هر حوزهٔ صحیح متناهی یك میدان است.

برهان. یادآوری می‌کنیم‌که هر حوزهٔ صحیح حلقه‌ای است تعویضپذیر که درآن ab فقط‌وفقط وقتی ۰ است‌که $a=0$ یا $b=0$. از طرف دیگر هر میدان حلقه‌ای است تعویضپذیر با عضو واحدکه درآن هر عضو ناصفر نسبت به عمل ضرب دارای معکوس است.

فرض‌کنیم‌که D یك حوزهٔ صحیح متناهی باشد. برای اثبات میدان بودن D باید ثابت‌کنیم‌که

(آ) D عضوی مانند ۱ دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر a از D، $a1=a$.

(ب) به ازای هرعضو نا صفر D مانند a، عضوی از D مانند b هست به طوری‌که $ab=1$.

فرض‌کنیم‌که $D=\{x_1, \ldots, x_n\}$ که درآن xها دوبدو متمایزند، و $a \in D$، $a \neq 0$. اینك گوئیم x_1a، x_2a، ...، x_na نیز اعضائی از Dاندکه دوبدو متمایزند. (چرا؟) چون عدهٔ اینها n است، بنابه اصل حجره‌ها jای هست‌که $1 \leqslant j \leqslant n$، $a=x_ja$. ازآنجا که D تعویضپذیر است $a=ax_j=x_ja$. هدف این است‌که ثابت‌کنیم x_j همان عضو واحد D است. بدین منظور گوئیم هرگاه $y \in D$، آنگاه kای هست‌که

$1\leqslant k\leqslant n$ و $y=x_ka$. از اینجا

$$yx_j=(x_ka)x_j=x_k(ax_j)=x_ka=y.$$

پس x_j عضو واحد D است. آن را با ۱ نشان می‌دهیم. حال چون $1\in D$، پس b ی در D هست به طوری $ba=1$.

مسأله ۱۰. فرض کنیم که V یك فضای برداری روی میدان نامتناهی K باشد. بعلاوه فرض کنیم که V_1، ...، V_n و V' زیر فضاهائی از V باشند به طوری که

$$V'\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}V_i.$$

در این صورت عددی طبیعی مانند j موجود است که $1\leqslant j\leqslant n$ و $V'\subseteq V_j$.

برهان. اثبات به استقراء نسبت به n است. به‌ازای $n=1$ حکم واضح است. فرض کنیم که حکم به ازای هر n که $n\geqslant 1$ برقرار باشد. اینك فرض می‌کنیم که

$$V'\subseteq\bigcup_{i=1}^{n+1}V_i$$

کافی است نشان دهیم که

$$V'\subseteq V_{n+1}\quad \text{یا} \quad V'\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}V_i$$

(چرا؟) فرض کنیم که چنین نباشد (فرض خلف). بنابراین اعضائی از زیر فضای V' مانند a و b موجودند به‌طوری که

$$a\notin\bigcup_{i=1}^{n}V_i \quad \text{و} \quad b\notin V_{n+1}$$

حال گوئیم چون K نامتناهی است، می‌توان $n+2$ عضو از آن را مانند k_1، ...، k_{n+2} چنان انتخاب کرد که دوبدو متمایز باشند. واضح است که به ازاء هر l طبیعی که $1\leqslant l\leqslant n+2$،

$$k_lb+a\in\bigcup_{i=1}^{n+1}V_i.$$

بنابراین بر طبق اصل حجره‌ها، اعدادی طبیعی مانند j، r و s موجودند به طوری که $1\leqslant j\leqslant n+1$، $s\leqslant n+2$ و $1\leqslant r$، $r=s$ و

$$k_rb+a\in V_j \quad \text{و} \quad k_sb+a\in V_j.$$

ازآنجا $(k_r-k_s)b\in V_j$. از تمایز k_r و k_s معلوم می‌شود که $b\in V_j$. بنابراین، $j\neq n+1$. پس $1\leqslant j\leqslant n$. از طرف دیگر از $b\in V_j$ نتیجه می‌شود که

$$a\in V_j.$$

و این متناقض است با انتخاب a.

تفنن [۲]. شطرنجبازی ۱۱ هفته فرصت دارد که خود را برای شرکت در مسابقه‌ای آماده سازد. برای این منظور تصمیم می‌گیرد که هر روز حداقل یك دست بازی کند، ولی برای اینکه خسته نشود در هیچ هفته بیش‌از ۱۲ دست بازی ننماید. و برطبق تصمیم عمل می‌کند. ثابت کنید که چند روز متوالی هست که در طی آنها جمعاً درست ۲۰ دست بازی کرده است.

تشکر. نگارنده از **دکتر حسین ذاکری** به سبب جلب توجه وی به مسألهٔ ۱۰ تشکر می‌کند.

مراجع

[۱]. آدامز، ویلیام و وگولدشتین لری‌جوئل، آشنائی با نظریهٔ اعداد، ترجمهٔ آدینه محمد نارنجانی (مرکز نشردانشگاهی، ۱۳۶۲)، ۲۳۴–۲۳۳.

[۲]. مصاحب، غلامحسین، تئوری مقدماتی اعداد، جلد اول، قسمت I، (دهخدا، ۱۳۵۴) ۱۱۶.

[۳]. هرشتاین، ی. ن. ، مباحثی درجبر، ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده (۱۳۵۹) ۱۶۰.

[4] M. S. Knebelman, *Amer. Math. Monthly* 55 (1948) 100; 56 (1949) 426.

[5] L. Moser, *Amer. Math. Monthly* 55 (1948) 369; 57 (1950) 47.

[6] L. Maer, *Amer. Math. Monthly* 60 (1953) 262, 713–714.

[7] William Lowell Putnam Math. Competition, *Amer Math Monthly* (1954) 544, 547.

[8] A. Seidenberg. A Simple Proof of a theorem of Erdos & Szekeres J. Lond. Math. Soc. 34 (1959) 352.

[9] Anne Penfold Street, W. D Wallis, *Comibnatorial Theory: An introduction*, Winnipeg, Canada (1977) 140–148.

The Pigeonhole principle & its applications
A. R. Jamali

معمّای تعیین مهره‌ای خاص از بین K مهرهٔ مشابه

دکتر بابلیان
عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت معلم

فرض کنید k مهرهٔ کاملاً مشابه داریم که $k-1$تای آنها هموزن هستند و یک مهره از بقیه، مثلاً، سنگین‌تر است. معمولاً، این مسئله، بطور معمّا، مطرح می‌شود که از بین k مهره با km

توزین مهرهٔ سنگین‌تر را پیدا کنید. مثلاً، از بین ۱۵ مهره با ۲ بار توزین می‌توان مهرهٔ سنگین‌تر را یافت؟ با سه بار توزین چطور؟ آیا می‌توان از بین ۷۵ مهره با فقط چهار بار توزین مهرهٔ سنگین‌تر را یافت؟

در این نوشتار سعی می‌کنیم تعداد دفعاتی که لازم است توزین مهره‌ها، برای تعیین مهرهٔ سنگین‌تر، انجام گیرد تعیین کنیم و در نتیجه به سؤالات فوق پاسخ دهیم.

قبل از تشریح حل مسئله در حالت کلی، چند حالت خاص را توضیح می‌دهیم.

الف ــ $k=2$: یکی از مهره‌ها را در یک کفه و دیگری را در کفهٔ دیگر ترازو قرار می‌دهیم. مهرهٔ سنگین‌تر بلافاصله مشخص می‌شود.

ب ــ $k=3$: دو مهره را بدلخواه اختیار می‌کنیم، یکی را در یک کفه و دیگری را در کفهٔ دیگر قرار می‌دهیم. اگر این دو مهره هموزن باشند مهرهٔ سوم مهرهٔ سنگین‌تر است والاّ ترازو مهرهٔ سنگین‌تر را مشخص کرده است.

ج ــ اگر $k=5$: در هر کفه، بدلخواه، دو مهره قرار می‌دهیم. اگر ترازو میزان ایستاد مهرهٔ باقیمانده همان مهرهٔ سنگین است در غیر این صورت، دستهٔ دو مهره‌ای سنگین‌تر را انتخاب می‌کنیم و بنابر (الف) با یکبار توزین دیگر مهرهٔ سنگین‌تر را می‌یابیم. پس دوبار توزین جهت یافتن مهرهٔ سنگین‌تر کافی است.

د ــ $k=8$: ۸ مهره را به سه دسته تقسیم می‌کنیم، دو دستهٔ ۳ مهره‌ای و یک دستهٔ ۲ مهره‌ای. دسته‌های سه مهره‌ای را در دو کفهٔ ترازو قرار می‌دهیم، اگر این دو دسته هموزن بودند مهرهٔ سنگین‌تر در دستهٔ دو مهره‌ای است، که بنابر حالت (الف) با یک توزین دیگر مهرهٔ سنگین‌تر پیدا می‌شود. اگر دو دستهٔ سه مهره‌ای هموزن نباشند دستهٔ سنگین‌تر را اختیار می‌کنیم و بنابر حالت (ب) با یک توزین دیگر مهرهٔ سنگین‌تر را پیدا می‌کنیم. بنابراین، دوبار توزین کافی است.

اینک خودتان بررسی کنید که اگر k مساوی ۴، ۶، ۷ یا ۹ باشد چگونه با دوبار توزین می‌توان مهرهٔ سنگین‌تر را یافت. (راهنمائی: از k مهره سه دسته بسازید که حداقل دو دسته تعداد مهره‌هایشان برابر باشد و بعلاوه در هر دسته بیش از ۳ مهره نباشد.)

حال به بررسی حالت کلی می‌پردازیم و قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه: اگر $3^n \geqslant k > 1$ برای تعیین مهرهٔ سنگین‌تر از بین k مهره n توزین کافی است.

به عبارت دیگر، در بدترین شرایط، مهرهٔ سنگین‌تر را با n توزین می‌توان یافت.

اثبات به استقراء روی n است. اگر $n=1$ بنابر حالتهای (الف) و (ب) k مهره با شرط $3 \geqslant k > 1$ داریم که با یکبار توزین می‌توان مهرهٔ سنگین‌تر را یافت. حال فرض می‌کنیم به ازای هر k که $3^n \geqslant k > 1$ بتوان مهرهٔ سنگین‌تر را با حداکثر n بار توزین یافت (فرض استقراء)، ثابت می‌کنیم که اگر $3^{n+1} \geqslant k > 1$ می‌توان مهرهٔ سنگین‌تر را با حداکثر $n+1$ توزین یافت.

واضح است که اگر $3^n \geqslant k > 1$ بنابر فرض استقراء حکم ثابت است. لذا، فرض می‌کنیم که $3^n < k < 3^{n+1}$. در این صورت، می‌توان k مهره را به سه دسته تقسیم کرد که تعداد مهره‌های دو دسته برابر باشند و در هر دسته بیش از 3^n مهره نباشد (این تقسیم‌بندی امکان دارد زیرا، $\frac{k}{3} < 3^n$. حال دو دسته از سه دسته را که تعداد مهره‌هایشان یکسان است در دو کفه ترازو قرار می‌دهیم. اگر ترازو میزان ایستاد که مهرهٔ سنگین‌تر در دسته سوم است و الاّ در دسته‌ای که در کفه پایین‌تر قرار دارد. بهر جهت یک دسته مهره داریم که حداکثر 3^n مهره دارد و شامل مهرهٔ سنگین‌تر است لذا، بنابر فرض استقراء با حداکثر n توزین مهرهٔ سنگین‌تر یافت می‌شود که با توزین قبلی حداکثر $n+1$ توزین برای پیدا کردن مهرهٔ سنگین‌تر کفایت می‌کند.

اینک بسادگی می‌توان جواب داد که با دو بار توزین نمی‌توان مهرهٔ سنگین‌تر را از بین ۱۵ مهره پیدا کرد و تنها با چهار بار توزین می‌توان از بین ۷۵ مهره، مهرهٔ سنگین‌تر را یافت. (با توجه به اثبات قضیه چگونگی عمل را شرح دهید.)

مرجع: نظریه اعداد مرحوم دکتر غلامحسین مصاحب

مطالبی در مورد حد

اثر ری ردهفر
ترجمهٔ: دکتر امیر خسروی
استادیار دانشگاه تربیت معلم

موقعی‌که در MIT[1] دانشجو بودم یکی از استادانم ـ یك عالم برجستهٔ خارجی ـ حیرتش را ازاینکه دریك امتحان کتبی جواب زیر را دریافت داشته ابراز داشت.

سؤال: معنی $\lim_{x\to a} f(x)=L$ چیست؟

جواب: به ازای هر ε عددی مانند δ هست.

این امر باعث شدکه این یادداشت را تهیه‌کنیم‌که دو جنبه دارد.

اول‌آنکه دسته‌بندی و اثبات قضایای حدود را ساده‌کنیم.

دوم اینکه تعاریفی دقیق ارائه دهیم و برخی عبارات را که جبردانها ازآن اجتناب می‌ورزند وآنالیزدانها ازآن بگرمی استقبال می‌کنند توجیه‌کنیم.

این احساس وجود داردکه قضایای حدود از بیشتر مسائل استانده درحساب‌دیفرانسیل مقدماتی‌به مراتب ساده‌ترند، مثلاً، برای دفاع از این‌گفته می‌گویم کـه قضیهٔ حد مجموع ساده‌تر از انتگرالگیری $(\sec x)^5$ است. بـا این وجود، بسیاری از مردم احساسی خلاف آن دارند، همانطورکـه از داستان فوق برمی‌آید.

چرا چنین است؟ گـرچه مـی‌توان جوابهای مختلفی داد، بتحقیق بیشتر دردسرهـا از روی هـم انباشتن عبارات منطقی سرچشمه می‌گیرد: به ازای هر ε عددی مانند δ هست‌کـه به ازای هـر x از نوعی خاص چیزی اتفاق مـی‌افتد. سورهـا بستری شنی هستندکـه موضوع درآن‌گـم می‌شود. در اینجا دستوری بیان می‌کنیم‌که از سور خبری نیست و لذا خیلی از آنهـا روی‌هم انباشته نمی‌شونـد. این روش درکـلاسهای دانشگاه UCLA[2] آزمایش شده وپیشرفت مهارت‌دانشجویان بـا محتوای ریاضی نسبتاً کـم برنامهٔ جدید قابل مقایسه نبود. روش دوم منحصراً بـه فرمولبندی و استفاده از قضیهٔ مـربوط است (که ذیلاً می‌آید).

به هدف دوم برگردیم بنظر می‌رسدکه باید برخی عبارات مصطلح‌آنـالیز را در پستوخانه مخفی‌کـرد. به عنوان حالت افراطی، بیاد دارم‌کـه در جایی خواندم‌کـه نبایدگفت تابع (صعودی) است زیـرا، رویهمرفته، این همیشه یك تابع است و نمی‌تواند صعودکند (یا نزول‌کند یا به هرروش دیگر تغییر کند) پس با دردسر زیادتری مـی‌توان عبارآتی نظیر «برای x نزدیك به a» یا «برای x بزرگ» بکار برد.

دیدگاهی‌که در اینجا انتخاب‌کرده‌ایم این است‌کـه چنین عباراتی مقام والائی درآنالیز دارند ومفاهیم فوق‌العاده مهمی را بیان می‌کنند وباید به‌کار روند. اگر می‌خواهید بگوئیدکه $\frac{1}{x}$ در نزدیك $x=1$ محدود است یا برای xهای بزرگ از ۰/۰۰۱ کوچکتر است ادامه دهید و بگوئید. همهٔ آنچه‌را که از دست می‌دهید یك تعریف دقیق است. و اگر بقدرکافی بخوانیدآن را هم از دست نخواهید داد.

تعاریف اصلی. گرچه روشهایی‌که دراینجا پیشنهادکرده‌ایم برای حالات خیلی‌کلی به کار مـی‌رود، برای سهولت فرض کرده‌ایم‌که توابع ومتغیرها حقیقی باشند. با مطلب زیرشروع می‌کنیم:

تعریف ۱. شرط C برای xهای نزدیك به a برقراراست هرگـاه عدد ثابت و مثبتی مانند δ باشد به طوری‌کـه اگـر $x\neq a$ و $|x-a|<\delta$ آنگاه C برقرار باشد.

مثلاً تابع $f(x)$ برای xهـای نزدیك به a محدود است اگـر عدد ثابتی مانند M باشدکه برای xهای نزدیك به a داشته بـاشیم $|f(x)|\leqslant M$. در اینجا شرط C با نامعادلهٔ $|f(x)|\leqslant M$ بیان می‌شود. حالا مثال دیگری می‌زنیم:

مطالبی در مورد حد

تعریف ۲. گزارهٔ $\lim_{x\to a} f(x)=L$ بـه معنی زیـر است:
اگر $\varepsilon>0$ آنگاه $|f(x)-L|<\varepsilon$ برای xهای نزدیک به a برقرار است.

با استفاده از lim به‌عنوان علامت اختصاری $\lim_{x\to a}$ نظریهٔ حدود را با یک رشته مثال شرح و بسط می‌دهیم. دومثال اول فقط وابسته به تعاریف‌اند.

مثال ۱. (کرانداری). اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ آنگاه $f(x)$ برای xهـای نزدیک به a کـراندار است. برای اثبات‌آن، فـرض‌کنید $\varepsilon>0$ مفروض بـاشد. چـون شرط $|f(x)-L|<\varepsilon$ برای xهـای نزدیک به a برقرار است داریم

$$|f(x)|=|f(x)-L+L|\leqslant|(f(x)-L|+|L|<\varepsilon+|L|$$

بنابراین کـران M را مـی‌توان هر عددی بزرگتر از $|L|$ گرفت.

مثال ۲ (کـرانداری عکس تابع). اگـر در بحث فوق $L\neq 0$ نه تنها $f(x)$ بلکه $\frac{1}{f(x)}$ هم برای xهای نزدیک به a کرانداراست. این مطلب از نامساوی ذیل با انتخاب $|L|>\varepsilon>0$ نتیجه می‌شود.

$$|f(x)|=|L-(L-f(x))|>|L|-|f(x)|-L|>|L|-\varepsilon$$

با عکس‌کردن ، ملاحظهٔ می‌کنیم که هر عدد بزرگتر از $\frac{1}{|L|}$ را می‌توان کران $\left(\frac{1}{f(x)}\right)$ گرفت.

چون در هـر دو مثال ۱ و ۲ مدعی هستیم کـه شرطی برای xهای نزدیک به a برقرار است، تعریف۱ را دربردارند. در چند مثال ذیل هم همین طور است. گـرچه مجاور بودن چنین دسته‌بندی برمبنای تعریف ۱ ارزش‌آن را روشن می‌سازد ولی ارزش‌کلـی این تعریف در ارتباط بـا قضیهٔ ذیل نمود پیدا می‌کند.

قضیهٔ اصلی. اگـر C_1 و C_2 دو شرط بـاشندآنگـاه $C_1\wedge C_2$ درصورتی برقرار است‌کـه C_1 و C_2 هـر دو همزمان برقرار باشند. مثلاً اگـر C_1 شرط $f(x)>2$ و C_2 شرط $f(x)\leqslant 5$ بـاشد آنگـاه $C_1\wedge C_2$ شرط $5\geqslant f(x)>2$ می‌باشد.

وقتی هریک از دو شرط C_1 و C_2 برای xهای نزدیک به a برقرار باشد مـی‌توان انتظار داشت‌کـه C_1 و C_2 هردو بـرای xهـای نـزدیک به a برقرار باشند. قضیهٔ ذیل نشان می‌دهدکه تعریف۱ با این مورد استعمال زبان روزمره سازگار است.

قضیهٔ ۱. اگر C_1 و C_2 هریک برای xهای نزدیک به a برقرار باشندآنگـاه $C_1\wedge C_2$ برای xهـای نزدیک به a برقرار است.

اثبات. فـرض‌کنیم C_i بـرای xهـای متمایـز از a و $|x-a|<\delta_i$ برقرار باشدکـه درآن ۲ و ۱ = i و هـر $\delta_i>0$. قرار می‌دهیم $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. دراین‌صورت $\delta>0$ و $|x-a|<\delta$ مستلزم این است‌کـه به ازای ۲ و ۱ = i داریم $|x-a|<\delta_i$. بنابراین اگر $x\neq a$ و $|x-a|<\delta$ آنگاه C_1 و C_2 هردو برقرارند. بدین‌ترتیب اثبات کامل می‌شود.

برای هر تعداد متناهی شرط C_1 و C_2 و ... و C_n نتیجهٔ مشابهی برقرار است. تمام کاری‌کـه باید انجـام دهیم این است‌کـه فرض‌کنیم i بجـای تغییر بر اندیسهای ۱ و ۲ بر اندیسهای ۱ و ۲ و ... و n تغییر می‌کند. بروش دیگر، چون $C_1\wedge C_2\wedge C_3=(C_1\wedge C_2)\wedge C_3$ حکـم‌کلی را می‌توان با استفادهٔ مکرر ازقضیهٔ ۱ با وضع موجودآن به‌دست آورد. در بیشتر کاربردها دو یا سه شرط C_i کافی است.

چند مثال دیگر. در اینجـا مثالهایی ارائه می‌دهیم‌کـه به قضیهٔ‌اصلی نیازدارند. اولین مثال مبین این است‌که $\lim_{x\to a} f(x)$ فقط به رفتار موضعی f، یعنی؛ به رفتار در نزدیکی a بستگی دارد. شاید در بین همهٔ خواص حدود این مهمترین‌آنها باشد.

مثال ۳. (موضعی‌کردن). اگـر برای xهای نزدیک به a داشته باشیم

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \quad \text{و} \quad f(x)=g(x)$$

آنگاه $\lim_{x\to a} g(x)=L$. برای اثبات، فرض‌کنیم $\varepsilon>0$

عدد مفروض باشد. پس بنابر تعریف ۲ شرط

$$|f(x)-L|<\varepsilon$$

و بنابفرض شرط $f(x)=g(x)$ برای xهای نزدیک به a برقرار است. پس بنابر قضیهٔ ۱ هر دو شرط برای xهای نزدیک به a برقرارند. درصورتی‌که هر دو شرط برقرار باشند داریم

$$|g(x)-L|=|f(x)-L|<\varepsilon$$

بنابراین $|g(x)-L|<\varepsilon$ برای xهای نزدیک به a برقرار است و بنابر تعریف ۲، $\lim_{x\to a} g(x)=L$. قضیهٔ موضعی‌کردن زیر بنای محاسبات معمولی نظیر

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

است. در اینجا $f(x)=x+1$ و $g(x)$ کسر سمت چپ. رابطهٔ $f=g$ به معنی تساوی دو تابع نادرست است ولی به معنی تعریف ۱ برای xهای نزدیک به ۱ داریم $f(x)=g(x)$. به عنوان مثالی دیگر، اگر $f(x)$ تابع ثابت $f(x)=C$ باشد آنگاه بالبداهه از تعریف نتیجه می‌شود که $\lim_{x\to a} f(x)=C$. اما با فرض خیلی ضعیف‌تری که برای xهای نزدیک به a داشته باشیم $f(x)=C$ از قضیهٔ موضعی کردن همان نتیجه به دست می‌آید.

نتیجه بعدی کمکی برای اثبات قضیهٔ حد حاصلضرب است و در مواردی هم که قضیهٔ حد حاصلضرب به کار نمی‌رود کارا است.

مثال ۴. (حفظ حد صفر). اگر $f(x)$ در نزدیکی a کراندار و $\lim_{x\to a} g(x)=0$ آنگاه $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=0$.

برای اثبات عدد مثبت M را طوری می‌گیریم که برای xهای نزدیک به a داشته باشیم $|f(x)|\leqslant M$ و فرض می‌کنیم $\varepsilon>0$ مفروض باشد. پس $\frac{\varepsilon}{M}>0$ و بنابراین برای xهای نزدیک به a داریم $|g(x)|<\frac{\varepsilon}{M}$. لذا هریک از شرایط $|g(x)|<\frac{\varepsilon}{M}$ و $|f(x)|\leqslant M$ برای xهای نزدیک به a برقرار است. بنابر قضیهٔ ۱ هر دو شرط برای xهای نزیک به a برقرار است درصورتی‌که هر دو برقرار باشند داریم

$$|f(x)g(x)|<M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

درنتیجه برای xهای نزدیک به a داریم $|g(x)f(x)|<\varepsilon$ و حکم ثابت می‌شود.

در مثال بعدی به تعمیم قضیهٔ ۱ به سه شرط C_i، که در بالا بررسی شد، نیاز داریم.

مثال ۵. (قضیهٔ فشار). اگر برای xهای نزدیک به a شرط $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ برقرار باشد و

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=L$$

آنگاه $\lim_{x\to a} g(x)=L$. برای اثبات، فرض‌کنیم $\varepsilon>0$ مفروض باشد پس بنابر تعریف ۲ هریک از شرایط

$$|f(x)-L|<\varepsilon \quad \text{و} \quad |h(x)-L|<\varepsilon$$

برای xهای نزدیک به a برقرار است و بنابفرض

$$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$$

هم برای xهای نزدیک به a برقرار است. بنابراین هرسه شرط برای xهای نزدیک به a برقرار است. چنانچه هرسه شرط برقرار باشد داریم

$$-\varepsilon<f(x)-L\leqslant g(x)-L\leqslant h(x)-L<\varepsilon$$

در نتیجه برای xهای نزدیک به a داریم $|g(x)-L|<\varepsilon$ و اثبات تمام است.

مثال ۶. (حد مجموع). اگر به ازای ۱ و ۲ = i داشته باشیم $\lim_{x\to a} f_i(x)=L_i$ آنگاه

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)]=L_1+L_2$$

اثبات. فرض‌کنیم $\varepsilon>0$ مفروض باشد و توجه داریم که $\frac{\varepsilon}{2}>0$. هریک از شرایط $|f_i(x)-L_i|<\frac{\varepsilon}{2}$ برای xهای نزدیک به a و ۲ و $i=1$ برقرار است. پس بنابر قضیهٔ ۱ هردو شرط برای xهای نزدیک به a برقرار است. چنانچه هردو شرط برقرار باشد داریم

$$|f_1(x)+f_2(x)-(L_1+L_2)|$$

مطالبی در مورد حد

$$=|f_1(x)-L_1+f_2(x)-L_2|$$
$$\leqslant |f_1(x)-L_1|+|f_2(x)-L_2|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$$

پس برای xهای نزدیک به a سمت چپ از ε کمتر است و نتیجه حاصل می‌شود.

مثال۷. (حد حاصلضرب). اگر به ازای ۲ و ۱ $=i$ داشته باشیم $\lim f_i(x)=L_i$ آنگاه

$$\lim f_1(x)f_2(x)=L_1L_2$$

برای اثبات از تعریف ۲ نتیجه می‌شود که هر یك از توابع $f_1(x)$ و $f_2(x)$ برای xهای نزدیك به a تعریف شده‌اند و لذا بنابر قضیهٔ ۱ هر دو برای xهای نزدیك به a تعریف شده‌اند. چنانچه هر دو تعریف شده باشند، اتحاد ذیل را داریم

$$f_1(x)f_2(x)-L_1L_2=f_1(x)[f_2(x)-L_2]$$
$$+L_2[f_1(x)-L_1].$$

بنابر مثالهای ۱ و ۴ هریك از دو عبارت سمت راست دارای حد صفر است. بنابراین مجموع آنها دارای حد صفر است و نتیجه حاصل می‌شود. در اینجا و در مثال ۸ از معادل بودن $\lim_{x\to a} f(x)=L$ با $\lim_{x\to a}[f(x)-L]=0$ استفاده می‌کنیم. این یك نتیجهٔ بدیهی تعریف است.

مثال۸. (حد تابع عکس). اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ آنگاه $\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{1}{L}$. بنابر مثال ۲ تابع $\frac{1}{f(x)}$ برای xهای نزدیك به a تعریف شده است و می‌توان نوشت

$$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{L}=\frac{1}{Lf(x)}(L-f(x)).$$

اکنون حکم از مثالهای ۲ و ۴ به دست می‌آید. با نوشتن $\frac{g}{f}=\left(\frac{1}{f}\right)g$ ملاحظه می‌شود که قضیهٔ حد خارج قسمت از مثالهای ۷ و ۸ به دست می‌آید.

مثال۹. (یکتائی). اگر به ازای ۲ و ۱ $=j$ داشته باشیم $\lim_{x\to a} f(x)=L_i$ آنگاه $L_1=L_2$. برای اثبات فرض کنیم $\varepsilon>0$ و توجه داریم که به ازای ۲ و ۱ $=i$ هریك از دو شرط $|f(x)-L_i|<\varepsilon$ برای xهای نزدیك به a برقرارند. اگر x مقداری باشد که برای آن هردو شرط برقرار است داریم

$$|L_1-L_2|=|L_1-f(x)+f(x)-L_2|$$
$$\leqslant |L_1-f(x)|+|f(x)-L_2|<2\varepsilon.$$

چون ε دلخواه بود و عبارت سمت چپ مستقل از ε است بایستی عبارت سمت چپ صفر باشد. در نتیجه $L_1=L_2$.

از نظر منطقی احتمالاً باید آن را اول می‌گفتیم، اما چون این قضیه ازهمهٔ قضایای حدکم جاذبه‌تر است، به‌خاطر روانشناسی آن را به تأخیر انداختیم. دو سؤال: آیا نتایج مثالهای قبل پیش‌ازآنکه از خاصیت یکتائی که در مثال ۹ بیان شد مطلع باشیم بامعنا است؟ وآیا می‌توان با استفاده از مثال ۳ (قضیهٔ موضعی‌کردن) برای دو تابع f و g و انتخاب $f=g$ قضیهٔ یکتایی را به دست‌آورد؟ این جوابها درآخر یادداشت داده شده‌اند.

مثال۱۰. (تابع مرکب). فرض‌کنیم $\lim_{t\to b} f(t)=L$ و $\lim_{x\to a} g(x)=b$ و بعلاوه برای xهای نزدیك به a داشته باشیم $g(x)\neq b$. در این صورت $\lim_{x\to a} f[g(x)]=L$.

برای اثبات فرض‌کنیم $\varepsilon>0$ مفروض باشد و $\eta>0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که دوشرط $|t-b|<\eta$ و $t\neq b$ باهم مستلزم $|f(t)-L|<\varepsilon$ باشد (دراینجا تعاریف ۱ و ۲ را به‌کار می‌بریم که درآن t، b و η به ترتیب نقش x، a و δ را دارند)، هر یك از دو شرط

$$|g(x)-b|<\eta \quad \text{و} \quad g(x)\neq b$$

برای xهای نزدیك به a برقرار است و بنابراین هر دو چنین‌اند. چنانچه هردو شرط برقرار باشند متغیر $t=g(x)$ در شرایط لازم برای t صدق می‌کند و داریم

$$|f[g(x)]-L|=|f(t)-L|<\varepsilon.$$

در نتیجه عبارت سمت چپ برای xهای نزدیك به a از ε کوچکتر است و اثبات تمام.

توضیحی در مورد پیوستگی. بنابر تعریف، تابع f در $x=a$ پیوسته است اگر $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$. بنابراین،

با یك استثنا، قضایای پیوستگی بیدرنگ از قضایای حد، که در بالا ثابت شد، نتیجه می‌شود. حالت استثنا مربوط به پیوستگی تابع مرکب است، مطلب نظیر مثال ۱۰. یعنی اگر $f(t)$ در $t=g(a)$ پیوسته و g در $x=a$ پیوسته آنگاه $f[g(x)]$ در $x=a$ پیوسته است. مسأله این است که در مثال ۱۰ باید برای xهای نزدیك به a، $g(x) \neq g(a)$ در حالی که اینجا لازم نیست.

حال برای درك مطلب رابطهٔ $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$ را با تعریف ۲ تعبیر می‌کنیم. یعنی اگر $\varepsilon > 0$ نامساوی $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ برای xهای نزدیك به a برقرار است. در تعریف حد نقطهٔ $x=a$ را باید کنار گذاشت اما چون $|f(a)-f(a)|=0$ نامساوی که برای پیوستگی تعریف شد خودبخود برای $x=a$ برقرار است و دیگر نیازی به کنار گذاشتن نیست. در مسألهٔ فوق، فرض کنید $f(t)$ در $t=b$ پیوسته باشد. پس بدون هیچ دردسری $g(x)=b$ را منظور کرد و با تکرار اثبات مثال ۱۰ قضیهٔ درستی برای پیوستگی توابع مرکب حاصل می‌شود.

شرایط یکطرفه. اگر نابرابری $x \neq a$ در تعریف ۱ را با $x < a$ یا $x > a$ جایگزین کنیم، گویند C، به‌ترتیب، برای xهای نزدیك به a^- یا a^+ برقرار است. برای مفاهیمی که به تعریف ۱ وابسته‌اند نماد مشابهی به کار می‌رود. مثلاً $f(x)$ در نزدیکی a^+ محدود است اگر ثابتی مانند M باشد که به ازای هر x نزدیك به a^+ داشته باشیم $|f(x)| \leqslant M$. اگر در تعریف ۲ عدد a را با a^- یا a^+ جایگزین کنیم، حاصل کار تعریفی برای حدود یکطرفه خواهد بود، به ترتیب

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \quad \text{یا} \quad \lim_{x \to a+} f(x).$$

تعاریف و قضایای شامل a^- یا a^+ یکطرفه نامیده می‌شوند تا از شرایط دوطرفه‌ای که در بالا مورد بحث قرار گرفت متمایز باشند. احتیاجی به‌تکرار اثباتها نیست زیرا با اقدامی کاملاً ماشینی که هرجا a ظاهر شد بجای آن a^- یا a^+ قرار دهند نتایج به دست می‌آید.

واضح است که اگر شرط C برای xهای نزدیك به a برقرار باشد آنگاه C باید هم برای xهای نزدیك به a^- و هم برای xهای نزدیك به a^+ برقرار باشد. در قضیهٔ ذیل حکم عکس آن بیان می‌شود.

قضیهٔ ۲. اگر شرط C برای xهای نزدیك به a^- و برای xهای نزدیك به a^+ برقرار باشد آنگاه C برای xهای نزدیك به a برقرار است.

اثبات. عدد $\delta_1 > 0$ را طوری می‌گیریم که C برای xهای کوچکتر از a و $|x-a| < \delta_1$ برقرار باشد. همینطور عدد $\delta_2 > 0$ را طوری می‌گیریم که C برای xهای بزرگتر از a و $|x-a| < \delta_2$ برقرار باشد. قرار دهید $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$. پس $\delta > 0$ و شرط $|x-a| < \delta$ مستلزم $|x-a| < \delta_i$ برای $i=1$ و ۲ می‌باشد. بنابراین اگر $|x-a| < \delta$ و $x < a$ و همچنین اگر $|x-a| < \delta$ و $x > a$ شرط C برقرار است. پس اگر $|x-a| < \delta$ و $x \neq a$ شرط C برقرار است و حکم ثابت می‌شود.

این قضیه را با دو مثال تشریح می‌کنیم.

مثال ۱۱. (کرانداری). اگر $f(x)$ برای xهای نزدیك به a^- و همچنین برای xهای نزدیك به a^+ محدود باشد آنگاه $f(x)$ برای xهای نزدیك به a محدود است. برای نشان دادن آن M^- را طوری انتخاب می‌کنیم که برای xهای نزدیك به a^- داشته باشیم $|f(x)| < M^-$ و M^+ را طوری انتخاب می‌کنیم که برای xهای نزدیك به a^+ شرط $|f(x)| < M^+$ برقرار باشد گیرید

$$M=\mathrm{Max}\{M^-, M^+\}$$

پس برای xهای نزدیك به a^- و برای xهای نزدیك به a^+ شرط $|f(x)| < M$ برقرار است. بنابر قضیهٔ ۲ همین نامساوی برای xهای نزدیك به a برقرار است و اثبات تمام می‌شود.

مثال ۱۲. (حدود). اگر وقتی $x \to a^-$ و همینطور وقتی $x \to a^+$ حد $f(x)$ مساوی L باشد، آنگاه حد $f(x)$ وقتی $x \to a$ مساوی L است. برای اثبات، فرض کنید $\varepsilon > 0$ مفروض باشد. پس شرط $|f(x)-L| < \varepsilon$ برای xهای نزدیك به a^- و همینطور برای xهای نزدیك به a^+ برقرار است. بنابر قضیهٔ ۲ برای xهای نزدیك به a داریم

مطالبی در مورد حد

$\varepsilon > |f(x)-L|$ و اثبات تمام می‌شود.

چون عکس مثال ۱۲ بدیهی است، می‌توان گفت که $\lim f(x)$ موجود است اگر و تنها اگر حدود چپ‌وراست موجود و دارای یك مقدار باشند. این بهترین روش اثبات عدم وجود حد برای نمونهٔ مسائل کتابهای درسی است. برای مثال $\frac{x}{|x|}$ وقتی $x \to 0$ دارای حد نیست زیرا حدود چپ‌وراست برابر نیستند. اثبات مستقیم عدم وجود حد با برگشتن به تعریف (ε, δ) مشکل‌تر است.

حدود چپ و راست را وقتی $x \to a$، به ترتیب، به $f(a^-)$ و $f(a^+)$ نمایش می‌دهند. بنابر تعریف $f(x)$ ازچپ یا راست در $x=a$ پیوسته است اگر، به ترتیب،

$$f(a)=f(a^+) \quad \text{یا} \quad f(a)=f(a^-)$$

از مثال ۱۲ نتیجه می‌شودکه $f(x)$ در $x=a$ پیوسته است اگر وتنها اگر هم از چپ و هم از راست پیوسته باشد. بدین‌ترتیب‌آزمون ساده‌ای برای پیوستگی نظیرآزمون وجود حدکه در بالا بدان اشاره شد به دست می‌آید.

مطلب وابسته به حدود چپ و راست مشتقات چپ و راست نظیرآنها است،

$$D^-f(a)=\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

و

$$D^+f(a)=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

بنابر مثال ۱۲ مشتق $Df(a)=f'(a)$ موجود است اگرو تنها اگر مشتقات چپ و راست موجود و دارای یك مقدار باشند. مثلاً با یك بررسی نشان داده می‌شودکه $|x|$ در $x=0$ مشتق ندارد. مثل حالات بالا اثبات مبتنی بر (ε, δ) و تعریف مشتق مشکل‌تر است.

x بزرگ. به پیروی از تعریف ۱ گوئیم شرط C برای xهای بزرگ برقرار است اگر عدد ثابتی مانند N باشدکه برای xهای بزرگتر از N شرط C برقرار باشد. تعریف نظیر ۲ این است‌که $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ یعنی اینکه: اگر $\varepsilon > 0$ آنگاه $|f(x)-L| < \varepsilon$ برای xهای بزرگ برقرار باشد. نظیر قضیهٔ ۱ این است‌که اگر دو شرط C_1 و C_2 برای xهای بزرگ باشدآنگاه $C_1 \wedge C_2$ نیز برای xهای بزرگ برقرار است. بسط این نظریه بموازات مثالهای ۱-۱۲ و از نظرهایی ساده‌تر است، زیرا دیگر احتیاجی به نگرانی در مورد شرط جنبی $x \neq a$ نیست. در وضعیت فعلی a با ∞ متناظر است و چون x عددی حقیقی است خودبخود $x \neq a$.

اگر x مقید به مقادیر صحیح n باشد معمولاً می‌نویسند $f(n)=f_n$ و n نقش x را می‌گیرد. بدین‌ترتیب $\lim_{n\to\infty} f_n=L$ یعنی اینکه: اگر $\varepsilon > 0$ نامساوی $|f_n-L| < \varepsilon$ برای nهای بزرگ برقرار است. صحیح بودن n معلوم و بی‌نیاز از تأکید است، درست مثل حالات قبلی‌که حقیقی بودن x معلوم بود. بسط حاصل با حدود وقتی $x \to a$ مطابق است و نظریهٔ حدود دنباله‌ها به دست می‌آید.

یکنواختی. گرچه به‌طور نمادی تأکید نکرده‌ایم ولی باید از شرط $\mathfrak{C}$ تعریف ۱ فهمیدکه شرطی وابسته به x است، بنابراین $C=C(x)$. ازآن‌گذشته این عبارت‌که C برای $x \neq a$ و $|x-a| < \delta$ برقرار است یعنی اینکه C برای هر xای‌که در این شرایط صدق‌کند برقرار است. بنابراین C برهرمجموعهٔ کوچکتر به‌شکل $x \neq a$ و $|x-a| < \delta$ برقرار است و بدین خاطر مجبور نبودیم‌که روی کوچکتر بودن δ پافشاری‌کنیم. مثلاً اگر تابعی بریك مجموعه محدود باشد بر هر زیر مجموعهٔ آن محدود است و نامساوی $|f(x)| \leqslant M$ که مبین محدود بودن است شرطی به شکل C(x) می‌باشد. در مقابل، نامحدود بودن f به شکل C(x) نیست، و به زیر مجموعه‌ها منتقل نمی‌شود، و شرط C مناسبی برای تعریف ۱ نخواهد بود.

بعضی مواقع C(x) شامل پارامتر دیگری مانند t است به طوری‌که $C=C(x, t)$. فرض می‌شودکه پارامتر t بر مجموعهٔ مشخصی مانند E تغییر می‌کند.

این عبارت‌که C(x, t) برای xهای نزدیك به a برقرار است، درست مثل قبل تعریف می‌شود. یعنی عدد مثبتی مانند $\delta > 0$ هست‌که برای xهای متمایز از aکه $|x-a| < \delta$ شرط C(x, t) برقرار است. در حالت‌کلی δ وابسته به t است، لذا $\delta=\delta(t)$. اگر بتوان δای مستقل از همهٔ tهای عضو E یافت‌گویند C(x, t) به طور یکنواخت برای

xهای نزدیك به a برقراراست. تعریف مشابهی برای xهای بزرگ بـه کار می‌رود. یعنی $C(x,\ t)$ بـه طور یکنواخت برای xهای بزرگ برقرار است هرگـاه بتوان Nای مستقل از t یافت بـه طوری‌کـه برای $x > N$ شرط $C(x,\ t)$ برقرار باشد. اگر x مقید به مقادیر صحیح باشد داریم

$$C(x,\ t) = C(n,\ t)$$

وشرط یکنواختی این است‌که $C(n,\ t)$ برای هر n بزرگتر از N برقرار باشدکـه درآن N مستقل از t است. چنانچه قضیهٔ ۱ و نظایرآن به این حالت تعمیم یابند توصیه مـی‌شود کـه شرایط $C_i(x,\ t)$ بـه یك و تنها یك مجموعهٔ E وابسته باشند. به غیراز این تغییر مهم دیگری نیست.

به عنوان مثالـی تشریحی، اگـر $C(x,\ t) = C(n,\ t)$ شرطی به شکل

$$|f_n(t) - L(t)| < \varepsilon \quad \text{و} \quad t \in E$$

باشد، در خواهید یافت‌کـه از این طریق قسمت اعظم نظریهٔ همگرایی یکنواخت دنباله‌ها نتیجه می‌شود. چون جزئیات با آنچه قبلاً گفته‌ایم خیلی مطابقت داردآنها را ارائه نمی‌دهیم.

تعریف وابسته به حوزهٔ حد. در تعریف پیوستگـی تـابع $f(x)$ بر بازهٔ بستهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ یك ناهنجاری است زیرا لزومی نداردکـــه در a و b حدود دو طرفه موجود باشند. بنابراین بایستی برای $a < x < b$ داشته باشیم

$$\lim_{t \to x} f(t) = f(x)$$

و

$$f(a^+) = f(a)$$

و

$$f(b^-) = f(b)$$

این مسأله درحالات پیچیده‌تر حادتر می‌شود مثلاً اگربخواهیم پیوستگـی تابع $f(x,\ y)$ را در یـك ناحیهٔ بسته در صفحهٔ $(x,\ y)$ تعریف‌کنیم.

یکی از روشهای‌کارکردن با این نوع مسائل معرفی چیزی است موسوم به **تعریف وابسته به حوزهٔ حد.** در این تعریف باید نامساوی $|f(x) - L| < \varepsilon$ برای xهـایی برقـرار باشدکه در سه شرط $x \neq a$، $|x - a| < \delta$ و $x \in D(f)$ صدق می‌کنندکه درآن $D(f)$ حوزهٔ f است. مثلاً اگر $D(f)$ بـازهٔ بستهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ باشدآنگـاه حدود در $x = a$ و $x = b$ در همان وضع حدود درنقاط دیگر بازه است و شرط پیوستگـی این است‌کـــه برای $a \leqslant x \leqslant b$ داشته باشیم $\lim_{t \to x} f(t) = f(x)$. با تعریف وابسته به حوزه تمایز حدود یکطرفه و دو طرفه در نقاط انتهایی حوزه ازبین می‌رود.

برای مطالعهٔ تعریف وابسته بـــه حوزه با روشهای این یادداشت مـی‌توان نظیر مجموعهٔ E بـرای tها، مجموعه‌ای مانند F برای xهای تعریف۱ معرفی‌کرد وشرط جنبی $x \in F$ را هم خواست. دراین صورت‌گویند «C برای xهای واقع در F و نـزدیك بـه a برقرار است». چنانچه این شکـل تعریف ۱ را از طریق تعریف ۲ درنظریهٔ حدود بـه کار بریم باید $F = D(f)$ بگیریم.

اگر ترجیح می‌دهیم‌کـه تعریف ۱ را بروش فوق پیچیده نکنیم، یك روش دیگـر این است: تابع f^* را چنین تعریف مـی‌کنیم $f^*(x) = f(x)$ هرگاه $x \in D(f)$ و در غیر این صورت $f^*(x) = L$. در این صورت $\lim f(x) = L$ بـا تعریف وابسته به حوزه برقرار است اگـر و تنها اگــــر $\lim f^*(x) = L$ بـه معنی تعریف ۲ برقرار بـاشد. نتایج قبلی برای این مسأله و لذا برای مسألهٔ قبلی به کار می‌رود.

بحث بیشتری روی وابستگـی بـه حـوزه. مقابلهٔ تعریف وابسته بـه حوزه بـا تعریف ۲ فـوایدی دارد و این کار را می‌کنیم. برای سهولت علائم اختصاری زیر را معرفی می‌کنیم

$DD =$ تعریف وابسته به حوزهٔ حد

$SD =$ تعریف سادهٔ حد

به عبارت صریحتر، SD برای تعریف ۲ و تعمیمهای یکطرفهٔ آن شامل a^- یا a^+ به کار می‌رود. به کار بردن‌کلمهٔ «ساده» در این رابطه دلالت بـر قضاوت ضمنی داردکـه امیدوارم درستی‌آن را در بحث ذیل به اثبات رسانم.

بـا سؤال یکتایـــی شروع‌کنیم، اگـر بخواهیم حکـم $\lim f(x) = L$ را ردکنیم و DD را بـه کار بریم بایستی $\varepsilon > 0$ مناسبی انتخاب‌کـرده و سپس به ازای هر $\delta > 0$ عضو xای در $D(f)$ ارائه دهیم‌کـه در شرایط $x \neq a$ و $|x - a| < \delta$ صدق‌کند و برای‌آن نامساوی $|f(x) - L| < \varepsilon$ برقرار نباشد. اما اگر هیچ عضو $D(f)$ متمایز از a دربازهٔ $|x - a| < \delta$ نباشد نمی‌توان هیچ عضو xای از این نوع

مطالبی در مورد حد

یافت و حکم $\lim f(x)=L$ را ردکرد و باید قبول کنیم که L مقداری از $\lim f(x)$ است. این وضع موقعی پیش می‌آید که مجموعه‌ای به شکل $|x-a|<\delta$ شامل هیچ عضو $D(f)$ به‌جز محتملاً خود a نباشد. به‌زبان حرفه‌ای‌تر، اگر a نقطهٔ حدی $D(f)$ نباشد چنین وضعی پیش می‌آید. در این حالت $\lim f(x)$ یك عدد نیست بلکه یك مجموعه است؛ در واقع، تمام محور حقیقی است.

گرچه اصولاً هیچ ایرادی به عبارت با مقادیر مجموعه‌ای وارد نیست، معرفی آنها در زمینهٔ حاضر ممکن است به نتایج عجیبی منجر شود. مثلاً فرض کنید $f(x)=0$ هرگاه x گویا باشد و درجای دیگری تعریف نشده باشد. گیرید $g(x)=0$ هرگاه x گنگ باشد و درجای دیگری تعریف نشده باشد. پس با استفاده از DD در هر نقطهٔ a بدون استثناء

$$\lim g(x)=\lim f(x)=0$$

اما تابع مجموع $f+g$ برای هیچ xای تعریف نشده و در هر نقطهٔ a عبارت $\lim[f(x)+g(x)]$ تمام محور حقیقی است! این یك شکست تماشایی برای قضیه‌ای است که دربارهٔ حد مجموع انتظار داریم.

چون بیشتر افرادی که با آنالیز سروکار دارند به مواردی نظیر وضع تحمل ناپذیر فوق برمی‌خورند، معمولاً توافق می‌کنند که $\lim f(x)$ در نقاطی مانند a که نقطهٔ حدی $D(f)$ نیستند تعریف نشده چنین توافقی مسأله را حل می‌کند اما یك پیچیدگی است.

یك پیچیدگی دیگر زمانی بروز می‌کند که بخواهیم حکم ساده‌ای برای قضیهٔ موضعی کردن، مثال ۳ فوق، ارائه دهیم. در اولین نگاه ممکن است فکر کنیم که اگر $D(f)=D(g)$، به جز نقطهٔ a که عضو هریك از مجموعه‌ها ممکن است باشد یا نباشد، همه چیز بروفق مراد خواهد بود. اما این فکرخوبی نیست زیرا $D(f)$ یك مفهوم سراسری (global) است و تمام هدف تمرین این است که نشان دهیم $\lim f(x)$ یك مفهوم موضعی است. مثلاً فرض کنید f و g بر حوزه‌های معمولی‌شان با ضوابط ذیل تعریف شده باشند

$$f(x)=x \quad \text{و} \quad g(x)=x\,\frac{x-1000}{x-1000}$$

اگر تحقیق کنیم که $\lim f(x)$ وقتی $x\to 0$ مساوی صفر است نمی‌توانیم با استفاده از قضیهٔ موضعی کردن که ادعا کرده‌ایم چیزی دربارهٔ $\lim g(x)$ وقتی $x\to 0$ نتیجه بگیریم.

زیرا بدون توجه به اینکه نقطهٔ 0 را ضمیمه کرده باشیم یا نه، توابع f و g دارای یك حوزه نیستند. چون برای $|x|<1000$ داریم $f(x)=g(x)$ این مثال شکست تماشایی راکه با مسألهٔ موضعی کردن پیش می‌آید تشریح می‌کند.

برای اینکه با واژه‌های این مقاله چنین مثالهایی را مورد بحث قرار دهیم بایستی دو شرط ذیل را معرفی کنیم

$C_1:\ g(x)=f(x)$ هرگاه x در $D(f)$ باشد

$C_2:$ هرگاه x در $D(f)$ نباشد $g(x)$ تعریف نشده است

و بیان می‌کنیم که «$g(x)=f(x)$ برای xهای نزدیك به a» یعنی اینکه «$C_1 \wedge C_2$ برای xهای نزدیك به a برقرار است». عبارت دوم در تعریف ۱ بدون ابهام تعریف شده است. برای آنهایی که با مفاهیم همسایگی سفته و تحدید f_A یك تابع به مجموعهٔ A آشنا هستند یك صورت معادل عبارت است از «در یك همسایگی سفتهٔ a مانند A، $f_A=g_A$». روشهای فوق به قضیهٔ موضعی کردن مناسبی برای DD منجر می‌شود اما نباید انکار کرد که بسیار پیچیده‌اند.

اگر بخواهیم قضایایی در مورد حد مجموع، حاصلضرب یا خارج قسمت بسط دهیم چنین مسائلی بروز می‌کند. یك روش (که عملاً درکتابهای درسی به کار می‌رود) این است که $D(f)=D(g)$. برای آنکه به مناسب نبودن آن پی ببریم فرض کنیم f و g توابعی باشند که بر حوزه‌های معمولی‌شان با ضوابط زیر تعریف شده‌اند

$$f(x)=x \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{x}{x-1000}$$

اگر تحقیق کرده‌ایم که وقتی $x\to 0$ حد $f(x)$ و $g(x)$ مساوی صفر است، نمی‌توان با استفاده از قضیهٔ حد مجموع که ادعا کرده‌ایم برای حد $f(x)+g(x)$ نتیجه‌ای گرفت زیرا f و g حوزه‌های مختلفی دارند. البته تعریف نشدن $g(x)$ در $x=1000$ هیچ اثری در حد g وقتی $x\to 0$ ندارد و فرض درست برای این نوع قضایا این است که a نقطهٔ حدی $D(f)\wedge D(g)$ باشد. اما این هم پیچیده است.

حال ببینیم اگر برای تعریف مشتق، که رویهم‌رفته انگیزهٔ اصلی بحث حدود است، از DD استفاده می‌کردیم چه پیش می‌آمد. یکی از چیزهایی که از دست می‌دهیم این مطلب آشنا است که اگر تابع $f(x)$ در نقطهٔ C که $f'(c)$ موجود است دارای ماکزیمم یا مینیمم باشد آنگاه $f'(c)=0$. مثلاً فرض کنید به ازای $0 \leqslant x \leqslant 1$ داشته باشیم $f(x)=x$ و این بازه $D(f)$ باشد. اگر از DD استفاده کنیم حد تعریف شده برای $f'(x)$ درهرنقطهٔ x از $0 \leqslant x \leqslant 1$ به انضمام نقاط انتهایی موجود است و دارای مقدار ۱. اما $f(x)$ در $x=0$ مینیمم مطلق و در $x=1$ ماکزیمم مطلق دارد.

یک مثال جالبتر مثال ذیل است. فرض کنید $f(x)$ برای xهای گویا تعریف نشده باشد و برای xهای گنگ $f(x)=1$. پس (اگر در تعریف مشتق DD را به کار بریم) $f'(x)$ در هرنقطهٔ $D(f)$ موجود است و در واقع $f'(x)=0$. اما اگر بجای اینکه بگوئیم برای xهای گویا تعریف نشده است می‌گفتیم برای این xها $f(x)=0$ تابع حاصل در هرنقطه از حوزهٔ تعریفش ناپیوسته بود و هیچ‌جا مشتق نداشت. باوجود این تنها امتیازی که تابع اول بر دومی دارد، از نظر هموار بودن این است که اولی در بعضی نقاط که دومی تعریف شده تعریف نشده است.

شاید ارزش این را داشته باشد که ببینیم چرا با SD هیچ یک از این مسائل پیش نمی‌آید. دلیلش این است که وجود $\lim f(x)$ با SD خودبخود ایجاب می‌کند که a نقطهٔ حدی $D(f)$ است و نیز $f(x)$ برای xهای نزدیک به a، یا a^- یا a^+، بسته به موقعیت، تعریف شده است. چنانچه دو تابع یا بیشتر مطرح باشد قضیهٔ ۱ و نظایرآن به ما اطمینان می‌دهد که همهٔ آنها در مقادیر مناسب x تعریف شده‌اند و دربارهٔ حوزه سؤالاتی مطرح نمی‌شود.

بحث فوق به این دیدگاه رنگ و رویی می‌دهد که نباید در دوره‌های حساب دیفرانسیل مقدماتی از DD استفاده کرد. اگر با آموختن SD شروع کنید وقتی محتاج DD شدید مشکلی در درک‌آن ندارید. اما اگر با DD شروع کنید شانس شما این خواهد بود که نه DD را بفهمید ونه SD را.

جواب سؤالات. اگر قضیهٔ یکتایی را نمی‌دانیم. باید امکان اینکه $\lim f(x)$ با مقادیر مجموعه‌ای باشد را مجاب دانسته و احکام را برطبق‌آن تعبیر کنیم.

جدا از این می‌توان گفت که نتایج مثالهای ۱–۸ برقرار می‌ماند. برای یک تشریح، مثال ۲ قضیهٔ مربوط به محدود بودن $\frac{1}{f(x)}$ را درنظر می‌گیریم. درصورت عدم‌آگاهی از قضیهٔ یکتایی می‌گوییم که اگر L مقداری از $\lim f(x)$ باشد و $L \neq 0$ آنگاه $\frac{1}{f(x)}$ برای xهای نزدیک به a محدود است وهر عدد بزرگتر از $\frac{1}{|L|}$ را می‌توان یک بند بالا گرفت. این مطلب هنوز درست است و اثبات با اثباتی که در بالا گفته شد یکی است.

پاسخ سؤال دوم. نتیجه‌گیری یکتائی از موضعی‌کردن‌بسی، دشوار است. در اولین نگاه چنین به نظر می‌رسد که باید چنین استدلال کرد: فرض کنید $\lim f(x)$ دارای دو مقدار L_1 و L_2 باشد. پس می‌توان گفت که

$$\lim f(x)=L_1$$

و یا

$$g(x)=f(x)$$

نیز می‌توان گفت که $\lim g(x)=L_2$. بنابر قضیهٔ موضعی کردن $\lim f(x)=\lim g(x)$ و بنابراین $L_1=L_2$.

باوجودی‌که موجه به نظر می‌رسد اما این طرز فکر درست نیست. تا زمانی‌که یکتایی مورد تردید است از قضیهٔ موضعی کردن رابطهٔ $\lim f(x)=\lim g(x)$ تنها به معنی تساوی مجموعه‌ها به دست می‌آید: اگر مقداری مانند L در یکی‌از آنها باشد در دیگری هم هست. (یک‌آزمون استدلال نشان می‌دهد که این همان‌چیزی است که عملاً ثابت می‌شود). برای ارائهٔ یک دلیل قاطع در این باره فرض کنید که

$$\text{'}\lim f(x)=L\text{'}$$

را بجای $|f(x)-L|<\varepsilon$ با نامساوی $|f(x)-L|<1$ تعریف کرده باشیم. در این صورت موضعی کردن به معنی تساوی مجموعه‌ها برقرار خواهد بود اما با ساده‌ترین مثالها یکتایی رد می‌شود.

---

(۱) MIT مخفف Masachuset Institute Technology است که یکی از معتبرترین دانشگاه‌های آمریکا است.

(۲) UCLA مخفف University of California at Los Anglos است.

حل مسألهٔ مسابقه

دکتر علیرضا جمالی

لم زیر در حل مسأله نقش اساسی دارد.

لم. به ازاء هر دو عدد طبیعی دلخواه r و b،

$$1+\binom{b}{1}+\binom{b+1}{2}+\binom{b+2}{3}+\cdots+\binom{b+r-1}{r}=\binom{b+r}{r}$$

برهان. اثبات به استقراء نسبت به r است (b ثابت ولی دلخواه است).

نتیجه. به ازاء هر دو عدد طبیعی m و r که $m>r$،

$$\binom{m}{r}=1+\binom{m-r}{1}+\binom{m-r+1}{2}+\cdots+\binom{m-1}{r}.$$

برهان. فرض می‌کنیم که $b=m-r$. اینک کافی است که لم فوق را به کار ببریم.

۱. اثبات وجود نمایش

اثبات به استقراء نسبت به n است (j ثابت ولی دلخواه است). به ازاء $n=1$ حکم به وضوح برقرار است. فرض کنیم که حکم به ازاء عدد طبیعی دلخواه n برقرار باشد. آن را برای $n+1$ ثابت می‌کنیم. برطبق فرض استقراء اعدادی طبیعی مانند j ، ... ، n_i ، ... ، n_j موجودند به طوری که

$$n=\binom{n_i}{i}+\binom{n_{i-1}}{i-1}+\cdots+\binom{n_j}{j}\qquad (*)$$

که درآن

$$n_i>n_{i-1}>\cdots>n_j\geqslant j\geqslant 1.$$

در نمایش (*) دو حالت $j>1$ و $j=1$ اتفاق می‌افتد. هرگاه $j>1$ آنگاه تساوی

$$n+1=\binom{n_i}{i}+\binom{n_{i-1}}{i-1}+\cdots+\binom{n_j}{j}+\binom{j-1}{j-1}$$

وجود نمایش $n+1$ را به صورت مطلوب اثبات می‌کند (ملاحظه کنید که $n_j\geqslant j>j-1\geqslant 1$).

اینک فرض می‌کنیم که $j=1$. در این صورت معلوم است که

$$n=\binom{n_i}{i}+\binom{n_{i-1}}{i-1}+\cdots+\binom{n_{j+1}}{2}+n_j.$$

ازآنجا

$$n+1=\binom{n_i}{i}+\binom{n_{i-1}}{i-1}+\cdots+\binom{n_{j+1}}{2}+\binom{n_j+1}{1}.$$

اینک هرگاه $n_{j+1}>n_j+1$ آنگاه حکم به وضوح برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم که $n_{j+1}=n_j+1$ (ملاحظه کنید که $n_{j+1}>n_j$). حال برای سهولت در نوشتن قرار می‌دهیم: $n_j=b$. رابطهٔ بالا را می‌توان به صورت زیر

نوشت:

$$n+۱=\binom{n_i}{i}+\binom{n_{i-۱}}{i-۱}+\cdots$$
$$+\binom{b+۱}{۲}+\binom{b}{۱}+۱.$$

فرض کنیم که r بزرگترین عدد طبیعی باشد که نمایش بالا به

$$\binom{b+r-۱}{r}+\cdots+\binom{b+۱}{۲}+\binom{b}{۱}+۱$$

ختم شود. به عبارت دیگر،

$$n+۱=\binom{n_i}{i}+\cdots+\binom{n_{r+۱}}{r+۱}$$
$$+\binom{b+r-۱}{r}+\cdots+\binom{b+۱}{۲}$$
$$+\binom{b}{۱}+۱.$$

که در آن $n_{r+۱}$ عددی است طبیعی بزرگتر از $b+r-۱$ که تالی بلافصل $b+r+۱$ نیست؛ یا به عبارت دیگر $n_{r+۱}>(b+r-۱)+۱$.
(توضیح اینکه ممکن است در حالت خاصی $r=i$. در این صورت عبارت $\binom{n_i}{i}+\cdots+\binom{n_{r+۱}}{r+۱}$ درنمایش اخیر ظاهر نخواهد شد.) اینک لم را به کار می‌بریم. خواهیم داشت:

$$n+۱=\binom{n_i}{i}+\cdots+\binom{n_{r+۱}}{r+۱}+\binom{b+r}{r}.$$

گوییم چون $n_{r+۱}>b+r$، حکم بلافاصله ثابت می‌شود. (در حالتی‌که $r=i$ خواهیم داشت $n+۱=\binom{b+r}{r}$.)

۲. اثبات یکتایی نمایش

اثبات به استقراء نسبت به n است (i عددی ثابت ولی دلخواه است)، به ازاء $n=۱$ حکم به وضوح برقرار است. فرض کنیم که هرگاه

$$n=\binom{m_i}{i}+\cdots+\binom{m_r}{r}$$

و

$$n=\binom{m'_i}{i}+\cdots+\binom{m'_s}{s},$$

که در آن

$$m_i>\cdots>m_r\geqslant r\geqslant ۱$$

و

$$m'_i>\cdots>m'_s\geqslant s\geqslant ۱,$$

آنگاه $r=s$ و به ازاء هر l که $r\leqslant l\leqslant i$، $m_l=m'_l$ (فرض استقراء). اینک حکم را برای $n+۱$ ثابت می‌کنیم. مطابق قسمت اول، $n+۱$ دارای نمایشی با شرایط مذکور در حکم است. فرض کنیم که

$$n+۱=\binom{n_i}{i}+\cdots+\binom{n_j}{j} \qquad (۱)$$

$$n+۱=\binom{n'_i}{i}+\cdots+\binom{n'_k}{k} \qquad (۲)$$

که در آن j و n_lها و نیز k و n'_lها تابع شرایط حکم مسأله‌اند. باید نشان دهیم که $j=k$ و به ازاء هر l که $j\leqslant l\leqslant i$، $n_l=n'_l$.
ابتدا ثابت می‌کنیم که هیچیک از دو حالت زیر پیش نمی‌آید:

حالت اول: $n_j=j$ و $n_k>k$

حالت دوم: $n_k=k$ و $n_j>j$

به عنوان نمونه حالت اول را بررسی می‌کنیم:
مطابق (۱) داریم

$$n+۱=\binom{n_i}{i}+\cdots+\binom{n_{j+۱}}{j+۱}+۱,$$

و از آنجا

$$n=\binom{n_i}{i}+\cdots+\binom{n_{j+۱}}{j+۱} \qquad (۱)'$$

از طرفی چون $n'_k>k$، بر طبق نتیجهٔ لم اعدادی طبیعی مانند $a_۱,\ldots,a_k$ موجودند که

$$a_k>a_{k-۱}>\cdots>a_۱\geqslant ۱$$

و

$$\binom{n'_k}{k}=\binom{a_k}{k}+\binom{a_{k-1}}{k-1}+\cdots+\binom{a_1}{1}+1\cdot$$

بنابراین برطبق (۲)،

$$n=\binom{n'_i}{i}+\cdots+\binom{n'_{k+1}}{k+1} \qquad (2)'$$

$$+\binom{a_k}{k}+\cdots+\binom{a_1}{1}\cdot$$

اینك از $'$(۱) و $'$(۲) برطبق فرض استقراء نتیجه می‌شودکه $j+1=1$ که یك تناقض است.

بنابراین تنها حالتهای زیر ممکن‌اند:

(آ) $n_j=j$ و $n_k=k$،

(ب) $n_j>j$ و $n'_k=k$،

در حالت (آ) هر یك از جمل $\binom{n_j}{j}$ و $\binom{n'_k}{k}$ در (۱) و (۲) مساوی ۱ می‌شوند و لذا

$$n=\binom{n_i}{i}+\cdots+\binom{n_{j+1}}{j+1}\cdot$$

$$n=\binom{n'_i}{i}+\cdots+\binom{n'_{k+1}}{k+1}\cdot$$

اینك‌از فرض استقراء معلوم می‌شود که $j+1=k+1$ و به ازاء هر l که $j+1\leqslant l\leqslant i$، $n_l=n'_l$. با مقایسهٔ (۱)و و (۲) به سادگی معلوم می‌شودکه $n_j=n'_j$ و بدین‌ترتیب حکم ثابت می‌شود.

درحالت (ب) نتیجهٔ لم‌را برای‌آخرین جمله‌های تساویهای (۱) و (۲) به کار می‌بریم. داریم:

$$\binom{n_j}{j}=\binom{a_j}{j}+\binom{a_{j-1}}{j-1}+\cdots \qquad (3)$$

$$+\binom{a_1}{1}+1$$

$$\binom{n'_k}{k}=\binom{a'_k}{k}+\binom{a'_{k-1}}{k-1}+\cdots \qquad (4)$$

$$+\binom{a'_1}{1}+1$$

که درآن a_tها و a'_tها اعدادی طبیعی‌اندکه

$$a_j>a_{j-1}>\cdots>a_1\geqslant 1$$
$$a'_k>a'_{k-1}>\cdots>a'_1\geqslant 1$$

بنابراین،

$$n=\binom{n_i}{i}+\cdots+\binom{n_{j+1}}{j+1} \qquad (1)''$$

$$+\binom{a_j}{j}+\cdots+\binom{a_1}{1},$$

$$n=\binom{n'_i}{i}+\cdots+\binom{n'_{k+1}}{k+1} \qquad (2)''$$

$$+\binom{a'_k}{k}+\cdots+\binom{a'_1}{1}$$

(ملاحظه‌کنیدکه $n_{j+1}>n_j>a_j$ و همچنین $n'_{k+1}>n'_k>a'_k$.) حال ادعا می‌کنیم که $j=k$. فرض کنیم که چنین نباشد. بی‌آنکه خللی به‌کلیت استدلال وارد شود می‌توان فرض‌کردکه $j>k$. از $''$(۱) و $''$(۲) با توجه به فرض استقراء معلوم می‌شودکه به ازاء هر l که $k+1\leqslant l\leqslant i$، $n_l=n'_l$ و به ازاء هر t که $1\leqslant t\leqslant k$، $a'_t=a_t$. لذا از (۳) و (۴) نتیجه می‌شودکه

$$\binom{n_j}{j}=\binom{a_j}{j}+\cdots+\binom{a_{k+1}}{k+1} \qquad (5)$$

$$+\binom{n'_k}{k}$$

همچنین از مقایسهٔ (۱) و (۲)،

$$\binom{n'_k}{k}=\binom{n_k}{k}+\cdots+\binom{n_j}{j} \qquad (6)$$

از (۵) خواهیم داشت $\binom{n_j}{j}>\binom{n'_k}{k}$ و از (۶)، $\binom{n'_k}{k}>\binom{n_j}{j}$ تناقض است. لذا $j=k$ و بسادگی معلوم می‌شودکه به ازاء هر l که $j\leqslant l\leqslant i$، $n_l=n'_l$.

●

خلق ریاضیات نو

دکتر محمدحسن بیژن‌زاده
دانشیار دانشگاه تربیت معلم

مقاله ذیل خلاصه‌ای از متن سخنرانی است که بنابر دعوت اداره‌آموزش ضمن خدمت استان خوزستان در مجمع دبیران ریاضی این استان در دیماه ۱۳۶۷ در اهواز ایراد شده است.

مقدمه - با یك حساب‌آماری ساده تخمین‌زده می‌شود که سالی قریب به یکصدهزار قضیه ریاضی خلق وابداع می‌گردد. دراینکه بسیاری از این قضایا تعمیم قضیه‌های‌قبلی هستند جای بحثی نیست. شاید ادعا می‌گرددکه تفکر ریاضی چیزی جز تعمیم حقایق ساده نبوده و اصولاً جائی برای خلق وکشف در این رشته از علوم وجود ندارد. ما هیچ بحثی براینکه ریاضیات نوخلق وکشف می‌گردد یا نتیجه تعمیم است نداریم و اصولاً آن را جایز نمی‌دانیم. آنچه از نظر تحقیق و فرایند یادگیری باید مورد توجه و امعان نظر قرار گیرد روند کشف و خلق (یا به تعبیری تعمیم) ریاضیات است. هدفمان در این مقاله عبارت‌از تحلیل این روند است. این تحلیل درنهایت با ماهیت ریاضیات و فلسفه‌های ریاضی در ارتباط است.

در بین فلسفه‌های مختلف ریاضی، فلسفه نیمه تجربی بودن ریاضیات ازنظرآموزشی‌اهمیت به‌سزایی دارد. دراین فلسفه، به عوض‌آنکه ریاضیات مجموعه‌ای از فرمولهای صوری از پیش ساخته شده تلقی شود، به عنوان علمی نیمه تجربی فرض می‌شودکه درآن با کاوشهای مستمر بر مسائلی ساده، قضیه تئوریهای جدید و نو خلق وکشف می‌گردند. اهمیت‌آموزشی این دیدگاه دراین است‌که متعلم خود را درکشف وفراگیری مطالب سهیم می‌داند و لذا از جریان فراگیری لذت بیشتری برده و به ریاضیات علاقمندی ریشه داری پیدا می‌کند.
با بررسی مثالی از تئوری مقدماتی اعداد فرآیند خلق قطعه‌ای از ریاضیات را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

با یك حکم‌اولیه‌که‌آن را «نهال» می‌نامیم شروع می‌کنیم. متذکر می‌شویم‌که منظور ما از حکم صرفاً گزاره‌ای است‌که راست یا نادرست می‌باشد. گزارهٔ نهال بایدگزاره‌ای جالب و درعین حال ساده باشد. هدف معلم آن است‌که دانشجونهال راآبیاری‌کرده به طوریکه رشدکرده و به درختی تنومند تبدیل گردد. بهتر است انواع مختلفی از نهالها به‌کلاس ارائه داد تا دانشجویان به تناسب تجربه‌شان یکی را انتخاب وآبیاری نمایند.

نمایش اول

نهال: «اگر عددی به ۲ ختم شود بر ۲ قابل قسمت است».

امثله: ۴۲ به ۲ ختم می‌شود و بر ۲ قابل قسمت است. ۱۷۲ به ۲ ختم می‌شود و بر ۲ قابل قسمت است.

برهان: یک عدد وقتی زوج است که به ۰، ۲، ۴، ۶ و یا ۸ ختم شود. همهٔ اعداد زوج بر ۲ قابل قسمت‌اند. بخصوص اعداد زوجی که به ۲ ختم می‌شوند بر ۲ قابل قسمت‌اند.

برهان: (برهان پیچیده‌تر): اگر عدد N به فرم ارقامی به صورت ab ... c۲ نوشته شده باشد، آنگاه به روشنی به فرم ۲+(ab ... c۰) بوده و لذا به صورت

$$10Q+2=2(5Q+1)$$

می‌باشد.

قضیهٔ حدسی: اگر عددی به N ختم شود بر N قابل قسمت است.

البته این تعمیمی روشن ازقضیه پیش است. باید همواره به تعمیم سازی روآورد. چه‌آنکه بسیاری از پیشرفتهای ریاضی مرهون تعمیم است.

مثال: اگر عددی به ۵ ختم شود بر ۵ قابل قسمت است. یقیناً این حکم درست است: ۱۵، ۲۵، ۱۲۸۹۹۹۵ و قس‌علیهذا.

مثال نقض: اگر عددی به ۴ ختم شود بر ۴ قابل قسمت است؟ آیا ۱۴ بر ۴ قابل قسمت است؟ خیر. چه بد.

نظریه: اما بعضی از اعدادی که به ۴ ختم می‌شوند بر ۴ قابل قسمت‌اند: از جمله ۲۴. بعضی از اعدادی که به ۹ ختم می‌شوند بر ۹ قابل قسمت‌اند: ۹۹.

جمعبندی تجربیات: به نظر می‌رسد که اعداد ۱، ۲، ...، ۹ به دو دسته تقسیم می‌شوند. **دستهٔ I**: ارقام Nای که وقتی عددی به N ختم شود آن عدد بر N قابل قسمت است. **دستهٔ II**: ارقام Nای که وقتی عددی به N ختم شود، گاهی و نه همیشه بر N قابل قسمت است.

دستهٔ I: ۱، ۲، ۵.

دستهٔ II: ۳، ۴، ۶، ۷، ۸، ۹.

ایراد آیین نامه‌ای: در مورد اعدادی که به ۰ ختم می‌شوند چه می‌توان گفت؟ آیا بر ۰ قابل قسمت‌اند؟ خیر. لیکن بر ۱۰ قابل قسمت‌اند.

تعریف: برای سادگی اعداد دستهٔ اول را «اعداد جادویی» می‌نامیم. این اعداد ویژگی مطلوبی دارند.

قضیهٔ آزمایشی و حدسی: اعداد ۱، ۲ و ۵ تنها اعداد جادویی هستند.

مثال نقض: در مورد ۲۵ چه می‌شود گفت؟ آیا جادویی نیست؟ اگر عددی به ۲۵ ختم شود بر ۲۵ قابل قسمت است. برای مثال، ۲۲۵ یا ۶۲۵.

انتقاد و نظریه: فرض کردیم شما در مورد اعداد یک رقمی صحبت می‌کنی. (متعلم).

پاسخ: درآغاز چنین بود. اما عدد ۲۵ پدیدهٔ جالبی است اینک سئوال اولیه راکمی بازتر می‌کنیم.

فرمولبندی جدید: اکنون فرض کنیم N نه تنها یک عدد یک رقمی بلکه یک عدد دلخواه طبیعی را نشان دهد. تعریف عدد جادویی را چنین تعمیم می‌دهیم که عدد N را جادویی گوییم هرگاه وقتی عددی به N ختم شود بر N قابل قسمت باشد. آیا این تعریف تعمیم یافته تعریفی با معنی است؟ یعنی آیا این تعریف مصداق دارد؟ یادآوری می‌کنیم که تعریف وقتی با معنی است که جامع و مانع باشد.

امثله: آری چنین است. ۲۵ جادویی است. ۱۰ جادویی است. ۲۰ جادویی است. ۵۰ نیزچنین است (مصداق تعریف).

مانعیت تعریف: ۳۰ جادویی نیست. زیرا ۱۳۰ بر ۳۰ قابل قسمت نیست.

فرمولبندی جدید هدف: همهٔ اعداد جادویی را پیدا کنید.

گردآوری تجربیات: ۱، ۲، ۵، ۱۵، ۲۵ ۵۰، ۱۰۰، ۲۵۰، ۵۰۰، ۱۰۰۰، همگی اعداد جادویی هستند.

مشاهده: همهٔ اعداد جادویی که تاکنون یافته‌ایم حاصلضربهایی از ۲ها و ۵هایند. یقیناً آنهایی که در فهرست فوق‌الذکر چنین‌اند.

حدس: هر عدد به فرم $N=2^p 5^q$ که در آن $p \geqslant 0$ و

$0 \leqslant q$ يك عدد جادويی است.

اين حدس به نظر معقول می‌آيد. اما بی‌نقص نيست.

مثال نقض: $p=3$ و $q=1$ اختيار می‌کنيم. در اين صورت $N=2^3\times 5=40$ آيا هر عددکه به ۴۰ ختم شود بر ۴۰ قابل قسمت است؟ خير. فی‌المثل ۱۴۰.

تجديد فرمولبندی: رويهٔ ديگر. اين مساله را موردبررسی قرار می‌دهيم. همهٔ اعداد جادويی که تاکنون يافته‌ايم به فرم $2^p\times 5^q$ هستند. شايند همهٔ اعداد جادويی به اين فرم هستند.

نظر: (محصل) آيا اين چيزی نيست که شما هم اکنون حدس می‌زديد؟

پاسخ: خير، چيزی که حدس زده شد عکس اين مطلب بود: هرعدد به فرم $2^p\times 5^q$ جادويی است. بايد مواظب اختلاف اين دو باشيد.

قضيه: اگر N عددی جادويی باشدآنگاه $N=2^p\times 5^q$.

برهان: فرض کنيم عددی به N ختم شود (به خاطر داريم که دراينجا N يك عدد و لذاگروهی از ارقام می‌باشد). در اين صورت آن عدد به شکل $abc\cdots eN$ می‌باشد.

فرض کنيم N دارای $d(N)$ رقم باشد. در اين صورت

$$abc\cdots eN=abc\cdots eoo\cdots O+N$$

که درآن تعداد Oهـا برابر $d(N)$ است. بنابراين اين عدد به فرم $Q\times 10^{d(N)}+N$ می‌باشد (وقتی $d(N)$ برابر ۲ يا ۳ باشد اين عدد راآزمايش کنيد). همهٔ اعدادی که به N ختم شوند بـه فرم اخير هستند. به‌عکس، اگر Q عدد دلخواهی باشد، عدد $Q\times 10^{d(N)}+N$ به N ختم می‌شود. حال گوييم اگر N جادويی باشد، بايد برای هر Q، $Q\times 10^{d(N)}+N$ را عادکند. چون N عاد می‌کند N را بـايد برای هر Q، $Q\times 10^{d(N)}$ را عادکند. اما Q می‌تواند مثلاً برابر ۱ باشد. بنابراين N بايد $10^{d(N)}$ را عادکند. چون

$$10^{d(N)}=2^{d(N)}\times 5^{d(N)}$$

نتيجه می‌شودکه N بايد به صورت حاصلضربی از ۲ها و ۵ها تجزيه شود.

وضعيت حاضر: اکنون می‌دانيم هر عدد جادويی بـــه فرم $N=2^p\times 5^q$ برای اعداد صحيح مثبتی مانند p و q است. مايليم که اين را به‌گونه‌ای معکوس سازيم. درآن صورت يك شرط لازم و کافی برای جادويی بودن خواهيم داشت.

بازنگری تجربيات: چون می‌دانيم هر عدد جادويی به فرم $N=2^p\times 5^q$ است، مساله را بـه اين شکل می‌توانيم تقابل بدهيم: در مورد q و q چه شرايطی بايد اعمال شود تا عدد N حاصله جادويی شود؟

حدس: $p\leqslant q$؟

مثال نقض: $p=0$، $q=4$، $N=2^0\times 5^4=625$. آيا ۶۲۵ جادويی است؟ خير: ۱۶۲۵ بر۶۲۵ قابل قسمت نيست.

حدس: $p=b$؟

نظر: در اين صورت $N=2^p5^p=10^p$ پس N برابر ۱، ۱۰، ۱۰۰، ... است. N جادويی است اما اعداد جادويی ديگری نيز وجود دارند.

حدس: $p\leqslant q$؟

مثال نقض: $p=3$، $q=1$، $N=2^3\times 5=40$. و N جادويی نيست.

مشاهد: در اين مرحله پرده پايين می‌آيد. ولـی اين روند برای‌آنها که با علاقه و توانايی کافی هستند ادامه می‌يابد.

نمايش دوم

دز اجرای اين مرحله، مطالب فشرده‌تر ارائه می‌گردد.

استراتژی: بـه برهـان شرط لازم اينکه $N=2^p\times 5^q$ جادويی باشد بر می‌گرديم. دريافتيم کـــه اگر N جادويی باشد، N بايد$10^{d(N)}$ را عادکند. به خاطر داريم که $d(N)$ تعداد ارقام N است. شايد اين يك شرط کامی نيزبوده باشد. يك کار شگرف!؟

قضيه: N جادويی است اگروفقط اگر $10^{d(N)}$ را عادکند.

برهان: قبلاً لـزوم اثبات شده است. می‌دانيم اگر عددی بـه N ختم شود بـه فرم $Q\times 10^{d(N)}+N$ است. اما N عاد می‌کند N را وطبق فرض N، $10^{d(N)}$ را نيزعاد می‌کند. بنابراين N يقيناً $Q\times 10^{d(N)}+N$ را عاد می‌کند.

هدف ايده‌آلی[1]: در حالی که اکنون يك شرط لازم و کافی

برای جادویی بودن در دست داریم، لیکن این شرط بر خود N می‌باشد نه بر صورت تجزیه شده‌آن یعنی $2^p \times 5^q$.

سئوال: چه موقع $N = 2^p \times 5^q$ عاد می‌کند $10^{d(N)}$ را؟

امـــا $10^{d(N)} = 2^{d(N)} \times 5^{d(N)}$ فلذا شرط لازم و کافی برای برقراری این‌حکم آن است که $P \leqslant d(N)$ و $q \leqslant d(N)$.

اما این شرط معادل شرط $\max\{p, q\} \leqslant d(N)$ می‌باشد[2].

هنوز هم شرط بـــــه دست‌آمده درگیر $d(N)$ می‌باشد. ما می‌خواهیم شرطی به دست‌آوریم که در رابطه با $d(N)$ نباشد؛ شرطی که فقط به N یا، اگر امکان داشته باشد، به q, p بستگی داشته باشد. چگونه می‌توانیم شرط

$$\max\{p, q\} \leqslant d(N) = d(2^p \times 5^q)$$

را به فرم مناسبتری تبدیل کنیم؟ می‌دانیم وقتی $p = q$ این کار عملی است. در این حالت

$$p = \max\{p, q\} \leqslant d(2^p \times 5^p) = d(10^p) = p + 1$$

این بدان معنی است که‌باید $p \leqslant p+1$ که به خوبی برقرار است. در حالت کـلی، چه می‌توان گفت؟ بهتر است تفاضـلی توانهـایی ۲ و ۵ را در نظر بگیریم. دو حالت باید در نظر گرفت.

سئوال: فرض‌کنیم $q = p + h$ که $h > 0$. دراین حالت چه می‌توان گفت؟

پاسخ:

$$\max[p, p+h] \leqslant d(2^p \times 5^{p+h})$$

$$= d(2^p \times 5^p \times 5^h) = d(10^p \times 5^h)$$

حال، چون $h > 0$،

$$\max[p, p+h] = p + h$$

همچنین برای هر عدد Q،

$$d(10^p \times Q) = P + d(Q)$$

بنابراین

$$p + h = p + d(5^h)$$

و یا

$$h \leqslant d(5^h)$$

سئوال: چه موقع نامساویهای $h > 0$ و $h \leqslant d(5^h)$ با هم درست‌اند؟

تجربه: $h = 1$ ، $1 \leqslant d(5^1)$. $h = 2$، $2 \leqslant d(5^2)$. $h = 3$، $3 \leqslant d(5^3)$. $h = 4$، $4 \leqslant d(15^4) = 3$ کـــه برقرار نیست. $h = 5$، $h \leqslant d(5^5) = d(3125) = 4$ که باز بر قرار نیست.

حدس: $h \leqslant d(5^h)$ اگر h برابر ۱، ۲، یا ۳ باشد.

برهان: این حکم برقرار ولی ازبرهان‌آن صرفنظرمی‌کنیم.

حالت دوم: در مورد $p > q$ چه می‌توان گفت؟

پاسخ: قرار می‌دهیم $p = b + h$ که $h > 0$. لذا

$$q + h = \max\{q + h = q\} \leqslant d(2^{q+h} \times 5^q)$$

$$= d(10^q \times 2^h) = q + d(2^h)$$

و یا $h \leqslant d(2^h)$، چه موقع $h \leqslant d(2^h)$؟

تجربه: $h = 1$: $1 \leqslant d(2^1)$ که برقرار است.

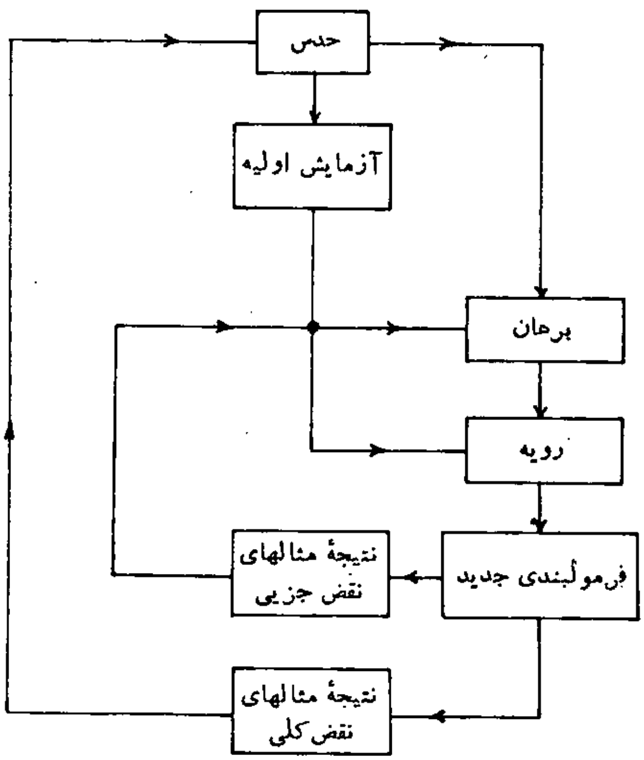
$h = 2$: $2 \leqslant b(2^2)$

که برقرار نیست.

حدس: $h \leqslant d(2^h)$ اگر و فقط اگر $h = 1$.

برهان: این حدس درست و از برهان‌آن صرفنظر می‌کنیم.

قضیه: N جادویی است اگر و فقط اگر برابر حاصلضرب



مدل امیرلاکاتوز برای خلق وکشف ریاضیات

توانی از ده در ۱، ۲، ۵، ۲۵ و یا ۱۲۵ باشد.

برهان: از برهان صرفنظر می‌کنیم.

می‌توان این قضیه را به‌شکل دیگری که بیشتر مناسب تحقیق است نیز بیان‌کرد.

قضیه: N جادویی است اگر و فقط اگر $N = ۲^p \times ۵^q$ که در آن $۴ \leqslant q - p + ۱$.

می‌توان پرده سوم را بدین نحو شروع کرد که اگر اعداد را در پایه‌ای جز پایه ده می‌نوشتیم چه می‌توانستیم به دست آوریم. مثلاً اگر اعداد در پایه عدد اول نوشته شوند شرط لازم و کافی برای آنکه N جادویی باشد چیست؟

این روند تحقیق درسرتا سر ریاضیات ادامه دارد وماهیت تفکر ریاضی هیچ حدی برای پیشرفت آن نمی‌شناسد.

زیر نویسها

(۱) ایده‌آلی در مقابل aesthetic گفته شده است، این واژه برای بیان زیبایی ریاضیات گفته می‌شود. از نظر زیبایی‌شناسی ریاضی این قضیه که «N جادویی است اگر $۱۰^{d(N)}$ را عاد کند» بیان زیبایی به شمار نمی‌رود. از این جهت که اگر N عددی بزرگ اختیارشود برای تعیین جادویی بودن آن باید ابتدا $۱۰^{d(N)}$ را حساب کرد و تعیین کرد که آیا قابل قسمت بر N هست یا خیر؛ درعوض آخرین قضیه به شکل ساده‌ای، با توجه به تجزیه استاندارد N، جادویی بودن N را معین می‌کند.

(۲) max حروف اول maximum به معنی عضو ماکزیموم یا عضو اکثر مجموعه‌ای از اعداد است.

برای مثال

$$\max\{-۱, ۲, ۳\} = ۳$$

$$\max\{-۷, ۰, ۱۰۱\} = ۱۰۱$$

ولی فاصله باز $(۱, ۱-)$ فاقد عضو ماکزیموم است. مشابهاً عضو مینیموم یا عضواقل مجموعه‌ای از اعداد، در صورت وجود، تعریف می‌گردد.

مراجع

1) Grenander, Mathematical Experince on the Gomputer, Diviseon of Applied Mathematies. Brown University Providence R. I. 1979.

2) Lakatos, Proofs and Refutation, C. U. P. 1976.

۳) فلسفه وآموزش ریاضیات، محمدحسن بیژن‌زاده. رشدآموزش ریاضی، جلد اول، شماره اول، ۱۳۶۳.

بقیه از صفحهٔ ۳

تغییر کیفی آموزش ریاضی در سطح دبستان و راهنمایی از سالها پیش شروع و به مرحله اجرا در آمده است. به دنبال آن، پس از یک وقفه کوتاه، شورای برنامه‌ریزی ریاضی دوره‌های دبیرستانی شروع شده است.

ما براین باوریم که چنانچه این امر مطابق با اصول برنامه‌ریزی تحصیلی باشد در ترقی کیفی و کمی آن سهم به سزائی خواهد داشت. در اینجا به بررسی نواقص کتب ریاضی دبیرستانی فعلی نمی‌پردازیم چرا که حتی مؤلفان اینگونه کتابها نیز صلاح نمی‌دانند که امر تألیف بیش از این به تعویق افتد.

در محدوده اصول برنامه‌ریزی تحصیلی بین ۱۵ تا ۲۰ درصد مطالب جدید در کتب جدید ارائه خواهد شد. در این رابطه مطالبی که کاربرد بیشتری در زندگی روزمره خواهند داشت اهمیت ویژه‌ای دارند. مهمتر از آن ارائه مطالب درسی به سَبک فعلی که با روح و دانش ریاضی ناسازگار است تغییر خواهند یافت به گونه‌ای که دانش‌آموزان از مطالعه ریاضیات لذت بیشتری برده و به آن علاقمند گردند. بعلاوه همانگونه که ریاضی نقش اساسی در تحولات تکنولوژیک جامعه دارد خود نیز از پیشرفتها و بدعتهای صنعتی و اجتماعی تأثیر می‌پذیرد.

امروزه استفاده از ماشینهای دستی حسابگر و رایانه‌های کوچک در منازل و شرکتها و ادارات روندی روبه گسترش دارد. فلذا مدارس و از جمله کتب درسی ریاضی دبیرستانی نمی‌توانند از این پدیده غافل بمانند.

امیدواریم که این مهم، همانگونه که از آغاز با پشتیبانی و ترغیب مقامات محترم وزارت آموزش و پرورش شروع شده است با دلگرمی و مساعی دبیران، دانشگاهیان و کارشناسان دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی درسی ادامه یابد و از این حیث کتب ریاضی دبیرستانی در سطحی ارائه گردد تا قابل قیاس با کتب ریاضی درسی ممالک پیشرفته بوده و ابزار مناسبی برای فراگیری ریاضیات در خدمت دبیران محترم ریاضی و دانش‌آموزان عزیز باشد. انشاا...

بررسی نمودار منحنی $y^x=x^y$

تنظیم از: دکتر علیرضا امیرمعز
دانشگاه تگزاس
ترجمه : محمود نصیری

این مقاله که در متن اصلی به زبان انگلیسی از آقای دکتر علیرضا امیر معز استاد دانشگاه تگزاس بوده است توسط آقای نصیری از اعضای هیأت تحریریه ترجمه شده است. در این رابطه مقدمات و توضیحاتی نیز به مقاله توسط آقای نصیری اضافه شده تا بیشتر قابل استفاده خوانندگان مجله باشد.

مقدمه. عدد e که به طور تقریب برابر ۲/۷۰۰ است به دو صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

یا

$$e=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

اگر این عدد را مبنای لگاریتم انتخاب کنیم آنرا لگاریتم طبیعی یا نپری می‌نامیم و با نماد ln نشان می‌دهیم،

$$\log_e x=\ln x$$

اگر $y=\ln x$ آنگاه $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ و اگر $y=\ln u$ آنگاه $y'=\frac{u'}{u}$ همچنین اگر $y=e^x$ آنگاه

$$y=e^u \quad \text{و} \quad y'=\frac{dy}{dx}=e^x$$

آنگاه

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot e^u$$

اکنون با انتخاب $y=tx$ معادله $y^x=x^y$ را به پارامتری تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^y=y^x \\ y=tx \text{ و } x\neq 0 \text{ و } y\neq 0 \end{cases}$$

یا

$$(1)\quad \begin{cases} y\ln x=x\ln y \\ y=tx \text{ و } x\neq 0 \text{ و } y\neq 0 \end{cases}$$

در نتیجه

$$x\ln(tx)=(tx)\ln x$$

$x\neq 0$ بنابراین

$$\ln x=\frac{\ln t}{t-1}$$

یا

$$y=te^{\frac{\ln t}{t-1}} \quad \text{و} \quad x=e^{\frac{\ln t}{t-1}}$$

با توجه به فرمول $a^{\log_a^x}=x$ داریم،

$$(2)\quad \begin{cases} x=t^{\frac{1}{t-1}} \\ y=t-t^{\frac{1}{t-1}} \end{cases}$$

اکنون مجانبهای این منحنی پارامتری را پیدا می‌کنیم،

$$\lim_{t\to\infty}x=\lim_{t\to\infty}e^{\frac{\ln t}{t-1}}$$

چون

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}=0 \quad \text{(قضیه هوپیتال)}$$

در نتیجه $\lim_{t\to\infty}x=e^0=1$ و چون رابطه نسبت به x و y متقارن است بنابراین $\lim_{t\to\infty}y=1$ لذا خطهای $x=1$ و $y=1$ مجانبهای منحنی می‌باشند.

چون $x>0$ و $y>0$ (چرا؟)، نمودار از دو قسمت تشکیل شده است: یکی $y=x$ ، $x\neq 0$، و دیگری از معادلات (۱) با شرط $x>1$ و $y>1$ به دست می‌آید

(چرا؟) اکنون منحنی را درهمسایگی، $t=1$ بررسی می‌کنیم. که در این همسایگی $y=x$ است.

$$\lim_{t\to 1} x=\lim_{t\to 1} e^{\frac{\ln t}{t-1}}$$

چون

$$\lim_{t\to 1}\frac{\ln t}{t-1}=\lim_{t\to 1}\frac{1}{t}=1$$

بنابراین

$$\lim_{t\to 1} x=e$$

دوباره با توجه به تقارن منحنی به دست می‌آید

$$\lim_{t\to 1} y=e$$

بنابراین نمودار $x^y=y^x$ ، $x\neq y$ نمودار $y=x$ را در نقطه (e, e) قطع می‌کند.

$\frac{dy}{dx}$ را محاسبه می‌کنیم. از $y\ln x=x\ln y$ ، $x\neq y$ ، $x>1$ ، $y>1$ به دست می‌آید

$$(3)\quad \frac{dy}{dx}\ln x+\frac{y}{x}=\ln y+\frac{x}{y}\,\frac{dy}{dx}.$$

بنابراین

$$(4)\quad \left(\ln x-\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx}=\ln y-\frac{y}{x}.$$

از رابطه (۱) داریم $\frac{y}{x}=\frac{\ln y}{\ln x}$. با قرار دادن در رابطه (۴) می‌توانیم بنویسیم

$$\left(\ln x-\frac{\ln x}{\ln y}\right)\frac{dy}{dx}=\ln y-\frac{\ln y}{\ln x}$$

که از آن به دست می‌آید

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{\ln y}{\ln x}\right)^2\left(\frac{\ln x-1}{\ln y-1}\right).$$

واضح است که $\left(\frac{\ln y}{\ln x}\right)^2$ مثبت است. بنابراین علامت $\frac{\ln x-1}{\ln y-1}$ را مطالعه می‌کنیم.

فرض کنیم $t>1$. در این صورت باید داشته باشیم $1<x<e$.

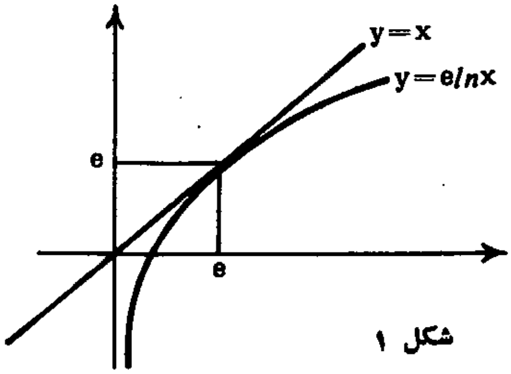
از این نتیجه می‌گیریم $\ln x<1$ یا $\ln x-1<0$.

حالا برای تعیین علامت $\ln y-1$ برای $t>1$ مشاهده می‌کنیم که خط $y=e$ و منحنی یکدیگر را در نقطه (e, e) قطع می‌کنند. از $\begin{cases} y=e \\ x^y=y^x\end{cases}$ به‌دست می‌آید $e\ln x=x$

ریشه این معادله نقطه تلاقی منحنی $y=e\ln x$ و خط $y=x$ است. مشاهده می‌کنیم که خط مماس بر نمودار $y=e\ln x$ در نقطه به طول $x=e$ دارای ضریب زاویه

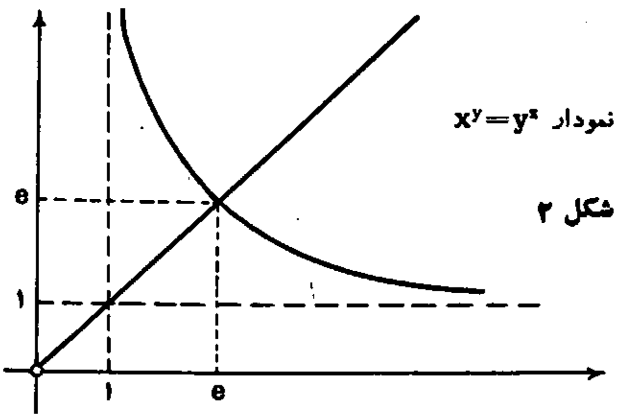
$$y'=\frac{e}{x}=\frac{e}{e}=1$$

است. بنابراین خط $y=x$ در نقطه (e, e) بر نمودار $y=e\ln x$ مماس است شکل (۱). در نتیجه برای $t>1$



شکل ۱

باید داشته باشیم $y>e$، که از آن به دست می‌آید $\ln y>1$ یا $\ln y-1>0$ و لذا برای $t>1$ ، $\frac{dy}{dx}<0$ به طور مشابه، به واسطه تقارن، برای $t<1$ نیز به دست می‌آید $\frac{dy}{dx}<0$. نمودار منحنی در شکل (۲) رسم شده است می‌توانیم مشتق دوم را نیز محاسبه کرده و نشان دهیم که منحنی دارای نقطه عطف نیست.



نمودار $x^y=y^x$

شکل ۲

مسائل دانش‌آموزان

تهیه و تنظیم از: ابراهیم دارابی

۱- در مثلث ABC، M و N به ترتیب وسطهای AB و AC و نقاط P و Q روی BC قرار دارند، به قسمی که $BQ=QP=PC$ ثابت کنید مساحت چهارضلعی MNPQ $\frac{۵}{۱۲}$ مساحت مثلث ABC است.

فرستنده: فهیمه فروحی

۲- از نقطه M واقع برروی نیمساز زاویه قائمه‌ای، خطی رسم کنید که روی اضلاع زاویه، پاره خطهایی را جدا کند که،

الف) مجموع طول‌آنها l باشد.

ب) این پاره خطها، اضلاع زاویه‌ای از مثلثی باشند که مساحت‌آن برابر است با $l^۲$.

۳- زاویه B از مثلث متساوی‌الساقین ABC برابر است با °۱۱۰. در داخل مثلث، نقطه M طوری اختیار شده است که $\widehat{MAC}=۳۰^\circ$ و $\widehat{MCA}=۲۵^\circ$. زاویه BMC را پیدا کنید.

۴- ثابت کنید اگر $۰<\alpha<\beta<\frac{\pi}{۲}$ آنگاه

$$tg\alpha-\alpha<tg\beta-\beta$$

۵- ثابت کنید

$$\sin\alpha\sin ۲\alpha\sin ۳\alpha<\frac{۳}{۴}$$

۶- سه عدد تشکیل یک تصاعد هندسی می‌دهند. اگر ۴ واحد از سومین عدد کم بشود، یك تصاعد عددی به دست می‌آید. و اگر در تصاعد حاصل، یك واحد از عدد دوم و یك واحد از عدد سوم کم کنیم، باز یك تصاعد هندسی حاصل می‌شود. سه عدد پیدا کنید.

۷- ثابت کنید اگر

$$\sqrt{x^۲+\sqrt[۳]{x^۴y^۲}}+\sqrt{y^۲+\sqrt[۳]{x^۲y^۴}}=a$$

آنگاه

$$x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}$$

۸- اگر $\log c$ ، $\log b$ ، $\log a$ و $\log ۳c-\log a$ ، $\log ۲b-\log ۳c$ ، $\log a-\log ۲b$ به طور جداگانه تشکیل تصاعد عددی بدهند، آیا a، b و c می‌توانند اضلاع مثلثی باشند؟ اگر جواب مثبت باشد، نوع مثلث و زوایای‌آن را تعیین کنید.

۹- اگر $a, b, c>۰$، ثابت کنید

$$\frac{۱}{a^۳+b^۳+abc}+\frac{۱}{b^۳+c^۳+abc}+\frac{۱}{c^۳+a^۳+abc}\leqslant\frac{۱}{abc}$$

۱۰- نا معادله را حل کنید

$$\log_{\frac{۱}{۵}}\frac{۴x+۶}{x}\geqslant ۰$$

۱۱- مینیمم K چقدر باشد تا سه جمله‌ای

$$(k-2)x^2+8x+k+4$$

به ازاء جمیع مقادیر x مثبت باشد.

۱۲- مجموعه‌ای از xها را طوری تعیین کنید که هیچ یك از توابع زیر، به ازاء آنها تعریف نشده باشند.

$$f(x)=\log(x-2)/(x+3)^2 \text{ ، } g(x)=\sqrt{x^2-9}$$

۱۳- معادله زیر را در اعداد طبیعی حل کنید،

$$(x^2+y^2)(z^2+t^2)=4(xz+yt)^2$$

(راهنمایی: معادله را به صورت

$$(xt-yz)^2=3(xz+yt)^2$$

بنویسید.)

۱۴- با ارقام ۱، ۲ و ۳ چند عدد متمایز هفت رقمی می‌توان نوشت که در هریك از آنها رقم ۲ دوبار ظاهر بشود.

۱۵- به ازاء چه مقادیر P عدد $2p^2+1$، اول است.

فرستنده: مهرداد جلالیان مشهد.

۱۶- معادله زیر را حل کنید

$$\sin^{2n}x+\cos^{2n}x=\frac{1}{2^{n-1}} \qquad (n\in N)$$

فرستنده: ژیان حبیب‌الله‌زاده

۱۷- اگر x، y، z، m، n و p اعداد صحیح و مثبت و x و y فرد و $p>1$، ثابت کنید معادله $x^{2n}+y^{2m}=z^p$ جواب ندارد.

فرستنده: ژیان حبیب‌الله‌زاده

۱۸- سه خط راست از نقطه A می‌گذرند. اگر B_1 و B_2 دو نقطه برروی یکی از خطها، C_1 و C_2 دو نقطه برروی خط دیگر، و D_1 و D_2 دو نقطه برروی خط سوم باشند، ثابت کنید

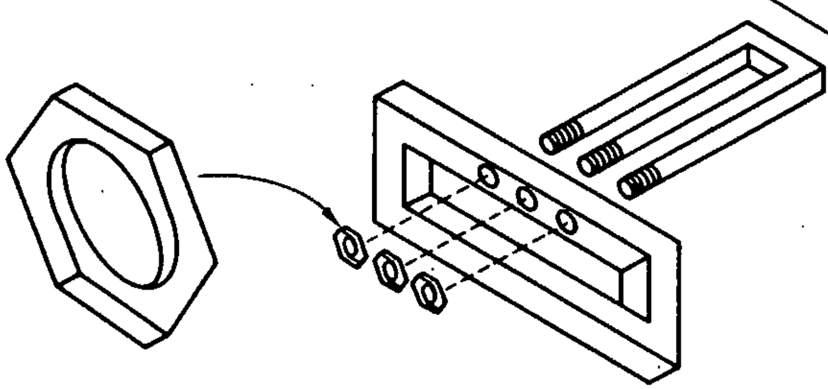
$$\frac{V_{AB_1C_1D_1}}{V_{AB_2C_2D_2}}=\frac{|AB_1|\cdot|AC_1|\cdot|AD_1|}{|AB_2|\cdot|AC_2|\cdot|AD_2|}$$

۱۹- ثابت کنید شرط لازم و کافی برای اینکه بتوان بر یك هرم، کره‌ای را محاط کرد آن است که، بر قاعده آن دایره‌ای محیط بشود.

۲۰- ثابت کنید به ازاء جمیع مقادیر n، $11^{n+2}+12^{2n+1}$ بر ۱۳۳ بخش پذیر است.

آیا میتوان وسیله‌ای مطابق طرح ذیل ساخت؟

جواد لالی



حل مسألهٔ مسابقه

محمدحسین آبادی از گرگان

فرض می‌کنیم n و i دو عدد طبیعی باشند. ثابت کنید اعداد طبیعی

$$n_i > n_{i-1} > \cdots > n_j \geqslant j \geqslant 1$$

وجود دارند بطوری‌که

$$(*)\quad n = \binom{n_i}{i} + \binom{n_{i-1}}{i-1} + \cdots + \binom{n_j}{j}$$

بعلاوه، نشان دهید که این نمایش منحصربه‌فرد است.

برای سهولت ابتدا سه لم زیر را می‌آوریم.

لم ۱. به ازاء هر دو عدد طبیعی m و i، اگر $m \geqslant i$، آنگاه

$$\binom{m}{i} < \binom{m+1}{i}$$

اثبات بدیهی است.

لم ۲. به ازاء هر دو عدد طبیعی m و i، اگر $m > i$، آنگاه

$$\binom{m}{i} = \binom{m-1}{i} + \binom{m-2}{i-1} + \cdots + \binom{m-i}{1} + 1$$

برهان. اثبات به استقراء روی $m \geqslant 2$ است. به ازاء $m = 2$ حکم برقرار می‌باشد. فرض کنیم $m \geqslant 3$ و حکم به ازاء عدد طبیعی $m-1$ برقرار باشد فرض کنیم i عددی طبیعی باشد بقسمی که $m > i$. بدیهی است که اگر $i = 1$، آنگاه حکم به ازاء m برقرار است. بنابراین می‌توان فرض کرد که $i > 1$. بنا به فرض استقراء

$$\binom{m-1}{i-1} = \binom{m-2}{i-1} + \binom{m-3}{i-2} + \cdots + \binom{m-i}{1} + 1$$

از طرف دیگر

$$\binom{m}{i} = \binom{m-1}{i} + \binom{m-1}{i-1}$$

لذا

$$\binom{m}{i} = \binom{m-1}{i} + \binom{m-2}{i-1} + \cdots + \binom{m-i}{1} + 1$$

لم ۳. اگر اعداد طبیعی i و n چنان باشند که $n \leqslant i$، آنگاه حکم مسأله برقرار است.

برهان. داریم

$$n = \binom{i}{i} + \binom{i-1}{i-1} + \cdots + \binom{i-n+1}{i-n+1}$$

بنابراین، به ازاء $n \leqslant i$، عدد طبیعی n نمایشی به صورت مذکور در مسأله دارد. اینک نشان می‌دهیم که این نمایش منحصربه‌فرد است. فرض می‌کنیم اعداد طبیعی

$$n_i > n_{i-1} > \cdots > n_j \geqslant j \geqslant 1$$

چنان باشند که

$$n = \binom{n_i}{i} + \binom{n_{i-1}}{i-1} + \cdots + \binom{n_j}{j}$$

اگر $n_i > i$، آنگاه، با توجه به لم ۱، داریم

$$n \geqslant \binom{n_i}{i} \geqslant \binom{i+1}{i} = i+1$$

که با فرض $n \leqslant i$ تناقض دارد. بنابراین $n_i = i$. فرض کنیم $0 \leqslant k < i-j$ و داشته باشیم

$n_i=i$ و $n_{i-1}=i-1$ و ... و $n_{i-k}=i-k$

در این صورت

$$n \geqslant \binom{i}{i}+\binom{i-1}{i-1}+\cdots+\binom{i-k}{i-k}+\binom{n_{i-k-1}}{i-k-1}=k+1+\binom{n_{i-k-1}}{i-k-1}$$

اینك، اگر $n_{i-k-1}>i-k-1$، آنگاه، با توجه به لم ۱، داریم

$$n \geqslant k+1+\binom{i-k}{i-k-1}=i+1$$

که با فرض $i \geqslant n$ تناقض دارد. بنابراین

$$n_{i-k-1}=i-k-1$$

در نتیجه حکم به استقرار برقرار است.

اثبات مسأله. با توجه به لم ۳ کافی است مسأله را برای حالت $i<n$ ثابت کنیم. اثبات به استقرا روی n و به‌ازاء هر عدد طبیعی i کمتر از n است درصورتی‌که $n=2$، حکم به وضوح برقرار است. فرض کنیم $k \geqslant 2$ و حکم به ازاء $n=k$ برقرار باشد. اینك حکم را به‌ازاء $n=k+1$ ثابت می‌کنیم. فرض کنیم i عدد طبیعی‌دلخواهی باشد‌بطوری که $i<n$. درصورتی‌که $i=1$ حکم به وضوح برقرار است بنابراین می‌توان فرض کرد که $i>1$. فرض کنیم

$$(**)\quad n_i=\mathrm{Max}\left\{p:\binom{p}{i}\leqslant n \text{ و } p \text{ عددی طبیعی‌است}\right\}$$

دو حالت تشخیص می‌دهیم.

حالت اول) $\binom{n_i}{i}=n$. در این حالت باید نشان‌دهیم که این نمایش منحصر به‌فرد است. فرض‌کنیم اعداد طبیعی

$$m_i>m_{i-1}>\cdots>m_j\geqslant j\geqslant 1$$

چنان باشندکه

$$n=\binom{m_i}{i}+\binom{m_{i-1}}{i-1}+\cdots+\binom{m_j}{j}$$

باید نشان دهیم‌که $m_i=n_i$. فرض می‌کنیم $m_i\neq n_i$. در این صورت، با توجه به لم ۱، $m_i<n_i$. لذا، به ازاء هر k که $j\leqslant i-k\leqslant i$، داریم

$$m_{i-k}\leqslant n_i-1-k$$

و در نتیجه، با توجه به لم ۱،

$$\binom{m_{i-k}}{i-k}\leqslant\binom{n_i-k-1}{i-k}$$

بنابراین

$$n=\sum_{k=0}^{i-j}\binom{m_{i-k}}{i-k}\leqslant\sum_{k=0}^{i-j}\binom{n_i-k-1}{i-k}$$

$$<\sum_{k=0}^{i-1}\binom{n_i-k-1}{i-k}+1$$

$$=\binom{n_i}{i}$$

$$=n \qquad \text{بنا به لم ۲}$$

بنابراین، فرض $m_i\neq n_i$ درست نیست و لذا $m_i=n_i$.

حالت دوم) $\binom{n_i}{i}<n$. در این صورت

$$1\leqslant n-\binom{n_i}{i}<n$$

در نتیجه، بنابه‌فرض استقرا یا لم ۳ (درصورتی‌که $i-1\geqslant n-\binom{n_i}{i}$) اعداد طبیعی منحصر به‌فردی مانند

$$n_{i-1}>n_{i-2}>\cdots>n_j\geqslant j\geqslant 1$$

موجودندکه

$$(***)\quad n=\binom{n_i}{i}+\binom{n_{i-1}}{i-1}+\cdots+\binom{n_j}{j}$$

اینك نشان می‌دهیم‌که $n_i>n_{i-1}$. فرض کنیم $n_i\leqslant n_{i-1}$. در این صورت، بنابر لم ۱،

$$\binom{n_i}{i-1}\leqslant\binom{n_{i-1}}{i-1}$$

لذا

$$n=\binom{n_i}{i}+\binom{n_{i-1}}{i-1}+\cdots+\binom{n_j}{j}$$

$$\geqslant \binom{n_i}{i} + \binom{n_i}{i-۱} + \binom{n_{i-۲}}{i-۲} + \cdots$$

$$+ \binom{n_j}{j} \geqslant \binom{n_i+۱}{i} > n$$

(بنا به **)

که این ممکن نیست. بنابراین $n_i > n_{i-۱}$. در نتیجه (***) نمایشی برای n به صورت مذکور در مسأله می‌باشد. اکنون نشان می‌دهیم که این نمایش منحصربه‌فرد است. فرض می‌کنیم اعداد طبیعی

$$m_i > m_{i-۱} > \cdots > m_t \geqslant t \geqslant ۱$$

چنان باشند که

$$n = \binom{m_i}{i} + \binom{m_{i-۱}}{i-۱} + \cdots + \binom{m_t}{t}$$

برای اثبات حکم کافی است نشان داده شود که $m_i = n_i$؛ زیرا، بنابه‌فرض استقرا یا لم ۳ (درصورتی که $i-۱ \geqslant n-\binom{n_i}{i}$) و $n-\binom{n_i}{i}$ به ازاء $i-۱$ نمایشی منحصربه‌فرد دارد. فرض کنیم $m_i \neq n_i$ دراین صورت، بنابر (**)، $m_i < n_i$. در نتیجه، همانند حالت اول، داریم

$$n = \sum_{i=۰}^{i-t} \binom{m_{i-k}}{i-k} \leqslant \sum_{k=۰}^{i-t} \binom{n_i-k-۱}{i-k}$$

$$< \sum_{k=۰}^{i-۱} \binom{n_i-k-۱}{i-k} + ۱$$

$$= \binom{n_i}{i} = n$$

که یک تناقض است. بنابراین $m_i = n_i$.

(این راه حل توسط آقای امیراعلم غضنفریان دانشجوی الکترونیک دانشگاه صنعتی شریف و محمد حسین‌آبادی از گرگان به طور جداگانه ارسال شد. و توسط آقای دکتر ذاکری تنظیم شده است).

ضرب عضو به عضو دو ماتریس

دکتر اسماعیل بابلیان

می‌دانیم که اگر

$$A = [a_{ij}]_{n\times m} \quad \text{و} \quad B = [b_{ij}]_{m\times n}$$

آنگاه

$$A \pm B = [c_{ij}]_{m\times n}$$

که درآن $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$. حال این سؤال مطرح می‌شود که اگر تعریف کنیم

$$A * B = [d_{ij}]_{m\times n}$$

که درآن $d_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij}$ چه رابطه‌ای بین حاصلضرب معمولی دو ماتریس و این ضرب، که‌آن را ضرب عضو به عضو می‌نامیم، موجود است. قبل‌از اثبات یک قضیه‌کلی به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۹ & -۸ \end{bmatrix}$$

مثال ۲:

فرض کنید

$$B = \begin{bmatrix} ۴ & ۷ \\ ۲ & -۶ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$$

واضح است که

$$AB = \begin{bmatrix} ۸ & -۵ \\ ۱۰ & ۲۷ \end{bmatrix}$$

اینک حاصل عبارت زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & ۳ \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} ۴ & ۷ \\ ۴ & ۷ \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} ۲ & -۶ \\ ۲ & -۶ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ۴ & ۷ \\ ۱۲ & ۲۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۴ & -۱۲ \\ -۲ & ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & -۵ \\ ۱۰ & ۲۷ \end{bmatrix}$$

مثال ۳:

فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۴ & ۶ \end{bmatrix} \quad و \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۴ \\ ۲ & ۰ & ۶ \\ ۳ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

واضح است که

$$AB = \begin{bmatrix} ۲۲ & ۱۹ & ۲۷ \\ ۲۸ & ۲۲ & ۳۸ \end{bmatrix}$$

اینك حاصل عبارت زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۲ \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۴ \\ ۱ & -۱ & ۴ \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۳ \\ ۴ & ۴ & ۴ \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۶ \\ ۲ & ۰ & ۶ \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۵ & ۵ \\ ۶ & ۶ & ۶ \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۱ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۴ \\ ۲ & -۲ & ۸ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۶ & ۰ & ۱۸ \\ ۸ & ۰ & ۲۴ \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} ۱۵ & ۲۰ & ۵ \\ ۱۸ & ۲۴ & ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۲ & ۱۹ & ۲۷ \\ ۲۸ & ۲۲ & ۳۸ \end{bmatrix}$$

همان‌گونه‌که از مثالهای ۲ و ۳ ملاحظه می‌شود، اگر A از مرتبهٔ $m \times p$ و B از مرتبهٔ $p \times n$ باشد می‌توان AB را به‌صورت حاصل جمع p ماتریس تبدیل کرد که هریك مساوی حاصلضرب عضو به عضو دو ماتریس $m \times n$ هستند، که عامل اول از تکرار ستونهای A و عامل دوم از تکرار سطرهای B به دست می‌آید. اینك این مطلب را در حالت کلی بیان می‌کنیم.

قضیه: اگر

$$A = [a_{ij}]_{m \times p} \quad و \quad B = [b_{ij}]_{p \times n}$$

آنگاه

$$AB = \sum_{k=1}^{p} C_k * R_k$$

که درآن C_k و R_k ماتریسهای $m \times n$ هستند‌که اولی از تکرار ستون kام A به تعداد n بار و دومی از تکرار سطرهای B به تعداد m بار تشکیل شده‌اند.

برهان. اثبات بسیار ساده است. می‌دانیم‌که

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

اما جملهٔ واقع در سطر iام و ستون jام ماتریس $C_k * R_k$، طبق تعریف ضرب عضو به عضو، برابر است با حاصلضرب عضو واقع در سطر iام و ستون jام C_k، یعنی a_{ik}، در عضو واقع در سطر iام و ستون jام R_k، یعنی b_{kj}. بنابراین، عضو واقع‌در سطر iام و ستون jام ماتریس $\sum_{k=1}^{p} C_k * R_k$ برابر است با

$$\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

که همان $(AB)_{ij}$ است.

تمرین

۱ـ اگر A، B و C ماتریسهای $m \times n$ باشند ثابت‌کنید

(i). $A * B = B * A$

(ii). $A * (B \pm C) = A * B \pm A * C$

(iii). $A * (B * C) = (A * B) * C$

۲ـ اگر A ماتریسی $m \times n$ باشد ماتریس I را چنان تعیین کنید که داشته باشیم

$A * I = I * A = A$.

آیا می‌توان ماتریس B را چنان تعیین کرد که

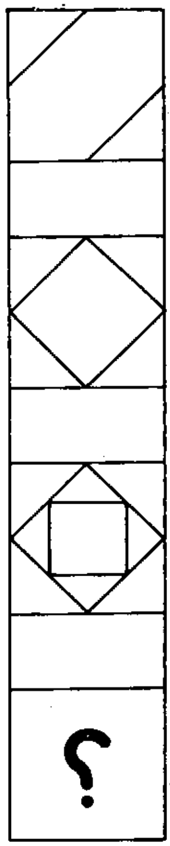
$A * B = B * A = I$?

۳ـ اگر G مجموعه‌ای از ماتریسهای $m \times n$ باشد اعضای G دارای چه خصوصیتی باشند‌که G با عمل ضرب عضو به عضو ماتریسها تشکیل یك‌گروه بدهد؟ ادعای خود را ثابت کنید.

مرجع

Parallel Computers: Architecture, Programming & Algorithms (1934). R. W. Hockney & C. R. Jesshope. Publisher: Hilger, Bristol.

بازی و ریاضی

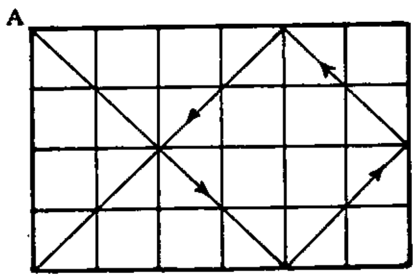


دکتر مسعود فرزان

مطالب تحت عنوان بازی و ریاضی در کتابهای ریاضی ابتدایی و راهنمایی، هم با استقبال دانش‌آموزان مواجه بوده‌اند و هم در پرورش فکر ریاضی ایشان سهمی داشته‌اند. آخر این مطالب هم بازی‌اند و هم ریاضی.

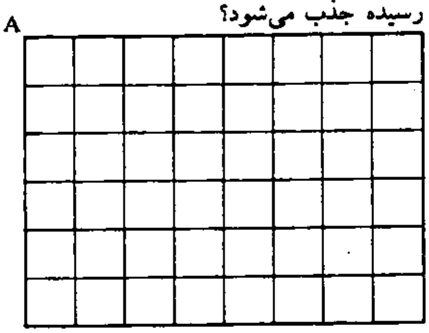
حالا این هم یک «بازی و ریاضی» برای خوانندگان عزیز رشد ریاضی!

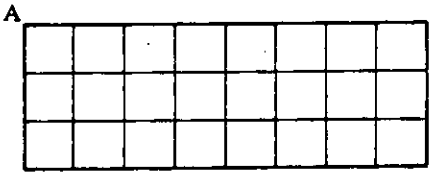
در نقطهٔ A یک شعاع نور با زاویهٔ ۴۵° نسبت به اضلاع مستطیل حرکت می‌کند این نور پس از برخورد با اضلاع مستطیل منعکس و اگر به یکی از گوشه‌های مستطیل برسد جذب می‌شود. در شکل زیر مسیر نور که پس



از طی ۴ مرحله جذب شده است. نشان داده شده است.

در هر یک از مستطیلهای زیر، با شروع از A، نور پس از چند مرحله به یکی از گوشه‌ها رسیده جذب می‌شود؟





به طورکلی، فرض کنید یک مستطیل $m\times n$ دارید، n,m اعداد نامنفی هستند. یک شعاع نورانی از یک گوشهٔ آن خارج می‌شود و پس از برخورد با هر یک از اضلاع مستطیل منعکس می‌شود. تعیین کنید که نور پس از طی چند مرحله سرانجام به یکی از گوشه‌ها می‌رسد و جذب می‌شود. تعداد مراحل آن را حساب کنید.

پاسخ بازی و ریاضی

پاسخ مثالهای (آ) و (ب) به ترتیب ۶ و ۱۰ است.

حالت کلی، فرض کنید بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک n,m مساوی d باشد و کوچکترین مضرب مشترک آنها k. اگر $\frac{m}{d}$ مستطیل را از طرف ضلع به طول n در کنار هم قرار دهیم مستطیلی به ابعاد $m\times k$ بدست می‌آید.

اکنون فرض کنید می‌خواهید مسأله را در مورد این مستطیل حل کنید. چون k به m قابل قسمت است، $k\div m = \frac{n}{d}$، نور پس از طی $\frac{n}{d}$ مرحله به یکی از گوشه‌های سمت راست مستطیل رسیده و جذب می‌شود. اما در طی مسیر خود، $\frac{m}{d} - 1$ بار اضلاع مشترک مستطیلهای کوچک را قطع می‌کند.

حالا مستطیل $m\times n$ را در نظر بگیرید. تعداد مراحلی که نور طی می‌کند برابر است با مجموع تعداد مراحل مستطیلهای کوچک بالا که در کنار هم قرار داده‌ایم، یعنی

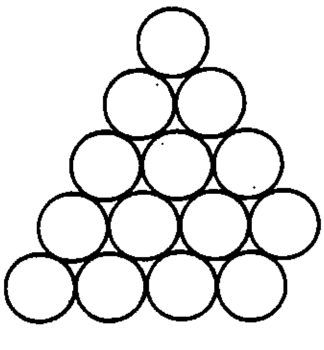
$$\boxed{N = \frac{n}{d} + \frac{m}{d} - 1 = \frac{n+m}{d} - 1}$$

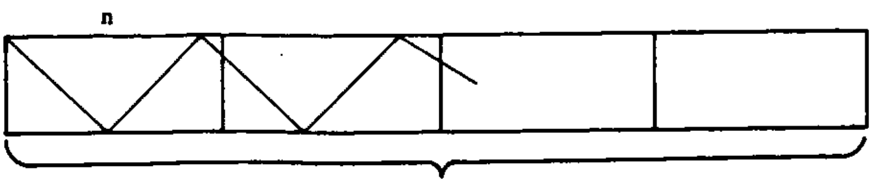
در پایین صفحه شکل تعدادی قرص گرد را می‌بینید. این قرصها هرکدام حول محور خود می‌تواند بچرخد. اما با کمی دقت متوجه می‌شوید که در چرخیدن مزاحم یکدیگر هستند. مثلاً اگر قرص ۱ بخواهد در جهت عقربه‌های ساعت (ساعت وار) بچرخد قرص ۲ باید غیرساعت وار بچرخد پس قرص ۳ باید ساعت وار بچرخد و در نتیجه قرص ۱ نمی‌تواند ساعت‌وار بچرخد.

خوب: حالا سؤال این است:

حداقل چند تا از قرصها را باید برداشت تا بقیهٔ قرصها بدون اینکه مزاحم یکدیگر باشند و با آسودگی خاطر بچرخند؟

اگر نتوانستید جواب دهید بچرخانید.





$\frac{m}{d} \times n = k$ = طول مستطیل

شگفتانه

داریوش افتخارپور، دانش‌آموز سال چهارم دبیرستان، حل دو مسأله را از ما خواسته‌اند:

ازآنجائیکه مسائل ارسالی دارای نکات ظریفی است اقدام به درج آن می‌نمائیم؛ اگر چه در شماره ۲ این مسائل درج شده است.

مسأله اول. در تقسیم بدون باقیمانده ذیل، که علامت □ نمایش ارقام از صفر تا نه هستند، مقسوم و مقسوم‌علیه وخارج قسمت را تعیین کنید.

```
□ □ ۷ □ □ □ □ □ □ □  |  □ □ □ □ ۷ □
□ □ □ □ □ □          |  □ □ ۷ □ □
  □ □ □ □ ۷ □
  □ □ □ □ □ □
  □ ۷ □ □ □ □
  □ ۷ □ □ □ □
  □ □ □ □ □ □ □
  □ □ □ □ ۷ □ □
    □ □ □ □ □ □
    □ □ □ □ □ □
```

جواب: برهان این مسأله تحت عنوان **مسأله «هفت هفت» بریك** درکتاب تئوری مقدماتی اعداد جلد اول، قسمت I، تألیف دکتر غلامحسین مصاحب آمده است. در مقدمه آن آمده است که ... مسأله از یك معلم ریاضی انگلیسی، به نام بریك، است و نخستین بار در ۱۹۰۶ در «نشریه جهانی مدرسه» انتشار یافته است. جواب این است

مقسوم $= ۷۳۷۵۴۲۸۴۱۳$

مقسوم‌علیه $= ۱۲۵۴۷۳$

خارج قسمت $= ۵۸۷۸۱$

مسأله دوم.

$$(۹۹۹۹۹۹۹۹۹)^{۲}=(۱۲۳\cdots۸۹۸\cdots۳۲۱)\times(۱+۲+۳+\cdots۸+۹+۸+\cdots+۳+۲+۱)$$

جواب: در صفحه ۳۲۸، از کتاب فوق، نیز مطالبی در این زمینه نوشته شده است که با ذکر قسمتی از آن، به سادگی تساوی فوق نتیجه می‌شود

$$۱\times۱=۱$$

$$۱۱\times۱۱=۱۲۱$$

$$۱۱۱\times۱۱۱=۱۲۳۲۱$$

$$\cdots\cdots\quad\cdots\quad\cdots\cdots\cdots$$

در ضمن، **مریم دانایی**، دانش‌آموز سال چهارم ریاضی مطالبی در همین زمینه ارسال داشته‌اند که ذیلاً به درج قسمتی از آن می‌پردازیم.

۱) به توان رساندن اعدادی که ارقام آن یك است

$$(۱۱)^{۲}=۱۲۱$$

$$(۱۱۱)^{۲}=۱۲۳۲۱$$

$$\cdots\cdots$$

$$(۱۱\cdots۱۱)^{۲}=۱۲\cdots۲۱$$

۲) به توان رساندن اعدادی که ارقام آن ۳ است

$$(۳)^{۲}=۹$$

$$(۳۳)^{۲}=۱۰۸۹$$

$$(۳۳۳)^{۲}=۱۱۰۸۸۹$$

$$\cdots\cdots$$

$$(۳۳\cdots۳۳)^{۲}=\quad ?$$

قاعده کلی را حدس بزنید.

۳) به توان رساندن اعدادی که ارقام آن ۶ است

$$(۶)^{۲}=۳۶$$

$$(۶۶)^{۲}=۴۳۵۶$$

$$(۶۶۶)^{۲}=۴۴۳۵۵۶$$

$$\cdots\cdots$$

$$(۶۶\cdots۶۶)^{۲}=۴۴\cdots۴۳۵\cdots۵۶$$

مسائل
شماره ۲۴

تهیه و تنظیم از: محمود نصیری

۰۱ اگر x و y، z، $n > 0$ ثابت کنید.

$$\frac{x^{n+1}}{y^n}+\frac{y^{n+1}}{z^n}+\frac{z^{n+1}}{x^n} \geqslant x+y+z$$

۰۲ ماکسیمم عبارت زیر را پیدا کنید

$$A=\frac{(x^{2n}-a^{2n})(b^{2n}-x^{2n})}{(x^{2n}+a^{2n})(x^{2n}+b^{2n})}$$

۰۳ اگر $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ ثابت کنید

$$12\pi \sin x \geqslant (\pi^2+24)x-4x^3$$

۰۴ فرض کنیم m، n و p اعداد صحیح و مثبتی باشند ثابت کنید

$$\left(1+\frac{m+n}{p}\right)^p\left(1+\frac{n+p}{m}\right)^m\left(1+\frac{m+p}{n}\right)^n \leqslant 3^{n+m+p}$$

راهنمائی: از نامساوی واسطه حسابی و هندسی استفاده کرده و ثابت کنید

$$\left(\frac{3}{n+m+p}\right)^{n+m+p} \geqslant \frac{1}{n^n m^m p^p}$$

۰۵ در چهارضلعی محیطی $ABCD$ نقاط تماس اضلاع AB، BC، CD و DA را با دایره محیطی به ترتیب P، Q، R و S می‌نامیم اگر

$AB=a$ و $BC=b$

و

$CD=c$ و $DA=d$

و

$QS=p$ و $PR=q$

ثابت کنید

$$\frac{ac}{bd}=\frac{p^2}{q^2}$$

۰۶ در مثلث متساوی‌الساقین ABC به رأس A از نقطه M وسط قاعده BC عمود MH را بر ساق AB رسم می‌کنیم و سپس از C به H وصل کرده عمود MN را بر CH رسم می‌کنیم (N پای عمود است) ثابت کنید

$$AH=AN$$

۰۷ فرض کنیم $ABCD$ یک چهارضلعی محدب باشد نیمسازهای زوایای A و B یکدیگر را در E قطع می‌کنند از E خطی موازی CD رسم می‌کنیم تا AD و BC را به ترتیب در M و N قطع کنند ثابت کنید

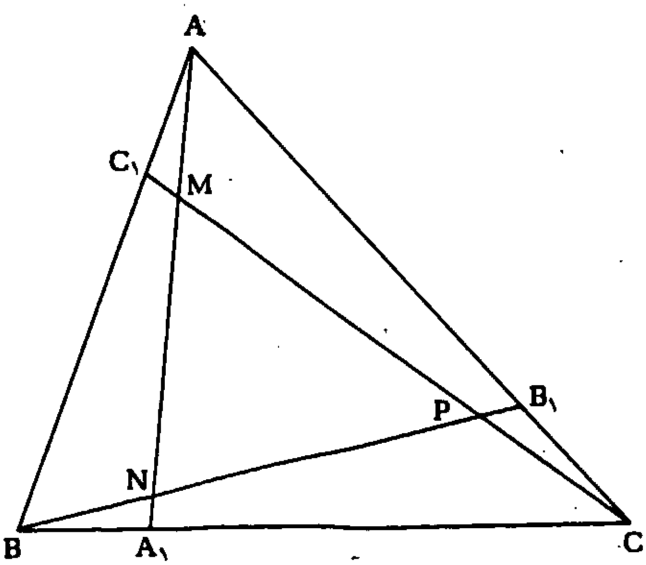
$$AN+BM=MN$$

۰۸ در مثلث ABC سه نقطه A_1، B_1 و C_1 را به‌ترتیب روی اضلاع BC، AC و AB چنان اختیار می‌کنیم که

$$\frac{AC_1}{AB}=\frac{BA_1}{BC}=\frac{CB_1}{CA}=\frac{1}{n}$$

مطابق شکل، اگر سه‌خط AA_1، BB_1 و CC_1 دوبه‌دو یکدیگر را در نقاط M، N و P قطع کنند ثابت کنید

$$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}}=\frac{(n-2)^2}{n^2-n+1}$$



۹. دنباله $\{a_n\}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم، $a_1=3$ و برای هر $n \geqslant 1$، $a_{n+1}=3^{a_n}$.
دو رقم سمت راست a_n را به ازای هر $n \geqslant 3$ پیدا کنید

۱۰. تعریف: x_1 و x_2 را دو جواب متمایز یك معادله همنهشتی به پیمانه m نامیم در صورتی که

$$x_1 \not\equiv x_2 \pmod{m}$$

ثابت کنید که معادله همنهشتی زیر دارای ۱۳ جواب دو به‌دو متمایز است.

$$4x^{26}+2x^{14}+20x^{2} \equiv 0 \pmod{13}$$

۱۱. جسمی از نقاطی تشکیل شده است که فواصل این نقاط از نقاط داخل یا روی چند ضلعی محدبی که پیرامون آن $2P$ و مساحت آن S است از d تجاوز نمی‌کند حجم جسم را پیدا کنید.

۱۲. هرگاه در گروه G، به ازای سه عدد صحیح متوالی n، رابطه $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$ برای هر a و $b\in G$ برقرار باشد ثابت کنید G آبلی است.

۱۳. وسیعترین زیر مجموعه از R را به دست آورید که نسبت به عمل تقسیم گروه باشد.

۱۴. به‌چند طریق می‌توان n توپ را در n جعبه شماره‌دار قرار داد به طوری که دقیقاً یك جعبه خالی بماند:

الف ـ توپها نامتمایزند.

ب ـ توپها متمایز هستند.

۱۵. تابع f در R مشتق‌پذیر و در شرایط زیر صدق می‌کند به ازاء هر x،

$$f(x+2)=-f(x)$$

و

$$f(4-x)=f(x)$$

و اگر $0<x<2$ آنگاه

$$f(1)=0 \quad \text{و} \quad f'(x)<0$$

الف ـ پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع

$$g(x)=\frac{1}{2}\left(|f(x)|+f(x)\right)$$

را بررسی کنید.

ب ـ نمودار تابع

$$h(x)=\operatorname{Sgn} g(x)$$

را رسم کنید

$$\left(\operatorname{Sgn}\text{تابع علامت است } \operatorname{Sgn} x=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}\right)$$

۱۶. ثابت کنید مجموع مربعات هر پنج عدد صحیح متوالی نمی‌تواند مربع کامل باشد.

۱۷. فرض کنیم که

$$f_p(x)=\sum_{k=1}^{n} k^p x^k$$

و $x \neq 0$ ، $x \neq 1$.

الف ـ ثابت کنید

$$f_{p+1}(x)=x f'_p(x)$$

ب ـ به کمك رابطه فوق حاصل $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{L^k}$ را محاسبه کنید.

ج ـ $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$ را محاسبه کنید.

(فرستنده: فرشید شعبانی مطلق دانش‌آموز، رشت)

۱۸. فرض کنیم بدانیم

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

الف ـ ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=e^k$$

ب ـ اگر d عددی حقیقی باشد برای هر عدد صحیح $m \geqslant 0$ دنباله $\{a_m(i)\}$ $(i=0, 1, 2, \dots)$ را با شرط

$$a_m(0)=\frac{d}{2^m}$$

و

$$a_m(i+1)=(a_m(i))^2+2a_m(i)$$

$i \geqslant 0$ تعریف می‌کنیم مطلوب است

$$\lim_{n\to\infty} a_n(n)$$

۱۹. مطلوب است محاسبه

$$\int_{-2}^{2} \operatorname{Max}\{1, x^2\}dx$$

۲۰. ثابت کنید تابع با ضابطه

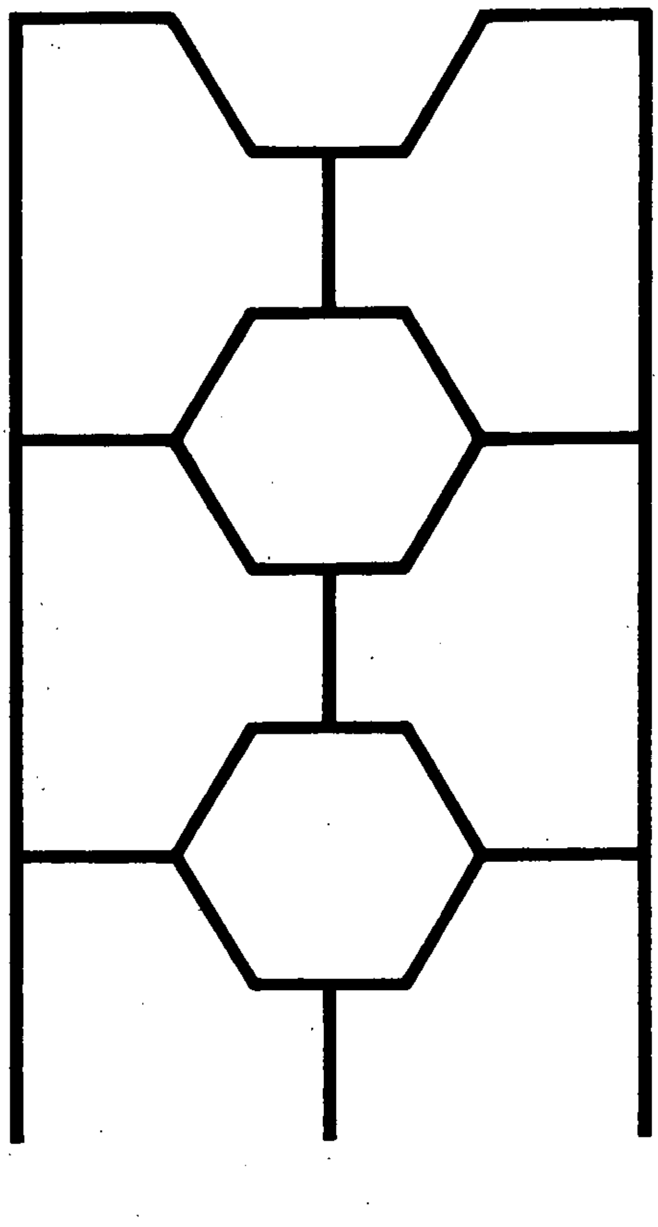
$$f(x)=x+[x]$$

وارون‌پذیر است و سپس وارون آن را پیدا کنید.

بقیهٔ مسائل از شمارهٔ قبل

حل مسائل شماره ۲۱

تنظیم از: ابراهیم دارایی



مسأله ۹- ثابت کنید هر ماتریس متعامد مرتبهٔ فرد دارای مقدار ویژهٔ ۱ یا (۱ −) است.

حل:

الف) مقادیر ویژهٔ وارون هر ماتریس، معکوس مقادیر ویژهٔ خودآن ماتریس می‌باشند زیرا

$$AV=KV \Longrightarrow A^{-1}AV=KA^{-1}V$$
$$\Longrightarrow A^{-1}V=\frac{1}{K}V$$

ب) مقادیر ویژهٔ ترانهادهٔ هر ماتریس با مقادیر ویژهٔ خود آن ماتریس برابرند زیرا:

$$|A-KI|=0 \Longrightarrow |A'-KI'|$$
$$=|A-KI|=0$$

پس معادلهٔ سرشتنمایی دو ماتریس A و A' یکسان می‌باشند پس ریشه‌هایشان مثل هم است.

ج) چون ماتریس A متعامد است پس $A^{-1}=A'$ و از (الف) و (ب) نتیجه می‌شود که اگر K مقدار ویژهٔ ماتریس A باشد $\frac{1}{K}$ مقدار ویژهٔ A' است پس $\frac{1}{K}$ مقدار ویژهٔ A می‌باشد پس معادلهٔ سرشتنمائی ماتریس A یک معادلهٔ معکوسه است اما هر معادلهٔ معکوسهٔ درجهٔ فرد دارای ریشهٔ ۱ یا (۱ −) می‌باشد.

تذکر: معادلهٔ معکوسه معادله‌ای است که اگر K ریشهٔ آن بود $\frac{1}{K}$ نیز یک ریشهٔ آن باشد در معادلهٔ معکوسه درجهٔ فرد تعداد ریشه‌ها فرد است (با احتساب مرتبهٔ تکرار هرریشه) پس یکی از ریشه‌ها باید خودش معکوس خودش باشدکه ناگزیر ۱ یا (۱ −) است.

مسأله ۱۰- فرض می‌کنیم p عددی اول و بیشتراز ۳ باشد و $0<n<p$ ابتدا نشان دهیدکه اعداد صحیح a و b موجودندکه

$$1=an+dp$$

سپس ثابت کنید اگر $1<n<p-1$، آنگاه $a\neq n$.
بالاخره ثابت کنید

$$P|(p-2)!-1$$

حل مسأله ۱۰- چون p اول و $0<n<p$، پس $(p,n)=1$

بنا بر قضیه که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد را به صورت ترکیب خطی می‌توان نوشت a و bای موجود است که

$$an+bp=1$$

اینک ثابت می‌کنیم که $n \neq a$. زیرا، اگر $a=n$ آنگاه

$$n^2+bp=1$$

$$-bp=n^2-1=(n-1)(n+1)$$

بنابراین، $p|n+1$ یا $p|n-1$. چون $p>n+1>2$ و $p>n-1>0$، پس p نمی‌تواند $n+1$ و $n-1$ را عاد کند و این یک تناقض است. حکم پایانی این مسأله را چنین ثابت می‌کنیم بنا بر قضیه ویلسون

$$(p-1)!+1=pK$$

$$pK=(p-1)(p-2)!+1=p(p-2)! -(p-2)!+1$$

بنابراین،

$$p|(p-2)!-1$$

مسأله ۱۱- باقیمانده کثیرالجمله $x^{1368}+x^{25}+x^2$ را بر چند جمله‌ای $(x^{27}+1)(x^{54}+x^{27}+1)$ پیدا کنید.

حل - چون توان کثیرالجمله $x^{25}+x^2$ از توان مقسوم‌علیه $g(x)$ کمتر است، پس کافی است باقیمانده $f(x)=x^{1368}$ را بر $g(x)$ تعیین کنیم. می‌دانیم اگر $r(x)$ باقیمانده $f(x)$ بر $g(x)$ باشد آنگاه $f(x)-r(x)$ بر $g(x)$ بخش‌پذیر است.

حال اگر $y=x^{27}$، داریم

$$g(x)=(y+1)(y^2+y+1)$$

$$=\frac{(y^3+1)(y^3-1)}{(y^2-y+1)(y-1)}$$

پس $(y-1)(y^2-y+1)(f(x)-r(x))$ بر y^6-1 بخش‌پذیر است. با قرار دادن $r(x)=x^n$ مقدار n را تعیین می‌کنیم. برای اینکه کثیرالجمله

$$f(x)-r(x)=x^{1368}-x^n=x^n(x^{1368-n}-1)$$

بر y^6-1 بخش‌پذیر باشد کافی است $1368-n$ بر ۱۶۲ بخش‌پذیر باشد. پس $n=72$.

اکنون $(y^2-y+1)(y-1)(x^{1368}-x^{72})$ بر y^6-1 و $x^{1368}-x^{72}$ بر

$$(y+1)(y^2+y+1)=g(x)$$

بخش‌پذیر است. بنابراین باقیمانده x^{1368} بر $g(x)$ برابر x^{72} و باقیمانده مطلوب

$$R(x)=x^{72}+x^{25}+x^2$$

خواهد بود.

مسأله ۱۲- ثابت کنید به ازای هر مقدار n عدد زیر مرکب است

$$\underbrace{11\cdots1}_{n\ \text{رقم}}2\underbrace{11\cdots1}_{n\ \text{رقم}}$$

حل - برای این منظور کافی است ثابت کنیم بـه ازای هـر مقدار n عدد فوق به حاصلضرب تبدیل می‌شود.

$$\underbrace{11\cdots1}_{n\ \text{رقم}}2\underbrace{11\cdots1}_{n\ \text{رقم}}=\underbrace{11\cdots11}_{n+1\ \text{رقم}}\underbrace{00\cdots0}_{n\ \text{رقم}}+\underbrace{11\cdots1}_{n+1\ \text{رقم}}$$

$$=\underbrace{11\cdots1}_{n+1\ \text{رقم}}\times(10^n+1)$$

مسأله ۱۳- روی تخته سیاه اعداد

$$1, 2, 3, \cdots, 986 \text{ و } 1987$$

نوشته شده‌اند. در یک مرحله چند تا از اعداد نوشته شده را پاک و بجای آن‌ها باقیمانده مجموع آنها را بر ۷ مـی‌نویسیم. پس‌از چند مـرحله در روی تخته، فقط دو عدد باقـی میماند، یکی از آنها ۹۸۷ است عدد دوم کدام است؟

حل - دیده می‌شود کـــه در هـر مرحله باقیمانده همه اعداد نـوشته شده بـر ۷ روی تخته نگهداشته مـی‌شود. فرض کنیم دومین عدد بـاقیمانده در روی تخته x باشد. درآن صورت باقیمانده $x+987$ بر ۷ برابر باقیمانده مجموع

$$1+2+3+\cdots+1986+1987$$

$$=1987\times7\times142$$

بر ۷ خواهد بود که برابر صفر است.

عدد ۹۸۷ بر ۷ بخش‌پذیر است پس x هم باید بر ۷ بخش‌پذیر باشد. چون عدد ۹۸۷ از باقیمانده بر ۷ حاصل نشده است پس x از باقیمانده بر ۷ پیدا شده است. یعنی $0 \leqslant x \leqslant 6$ وچون x بر ۷ بخش‌پذیر است پس $x = 0$.

مسأله ۱۴- اگر α و β به ترتیب ریشه‌های معادلات

$$2\sin x = \log_{\frac{5}{8}} x \quad ، \quad 2\cos x = \log_{\frac{5}{8}} x$$

باشند، ثابت کنید $\alpha > \beta$.

حل ـ با رسم نمودار توابع $y = 2\sin x$ و $y = 2\cos x$ و $y = \log_{\frac{5}{8}} x$ نشان می‌دهیم.

$$\beta < \frac{\pi}{6} < \alpha$$

کافی است این نامساوی را ثابت کنیم. برای این منظور یعنی

برای اثبات $\quad \alpha > \frac{\pi}{6} \quad$ و $\quad \beta < \frac{\pi}{6}$

کافی است به ترتیب ثابت کنیم که

$$\log_{\frac{5}{8}} \frac{\pi}{6} > 2\sin\frac{\pi}{6}$$

و

$$\log_{\frac{5}{8}} \frac{\pi}{6} < 2\cos\frac{\pi}{6}$$

به عبارت دیگر

$$1 < \log_{\frac{5}{8}} \frac{\pi}{6} < \sqrt{3}$$

و یا

$$\frac{5}{8} > \frac{\pi}{6} > \left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$$

نامساوی اول به‌صورت $15 > 4\pi$ نوشته می‌شود که درست است. برای اثبات نامساوی دوم دیده می‌شود

$$\frac{\pi}{6} > \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{3}{2}}$$

(که به صورت $\pi^2 > \frac{125/9}{128}$ نوشته می‌شود) پس

$$\frac{\pi}{6} > \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{3}{2}} > \left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$$

مسأله ۱۵- مجموع چند عبارت متمایز بـــــه صورت $\frac{1}{3n-1}$ $(n \in N)$ برابر واحد می‌شود؟

حل ـ از تساوی

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_k} = 1$$

که در آن x_i بشکل

$$x_i \equiv -1 \pmod{3} \quad \text{یا} \quad 3n_i - 1$$

نوشته می‌شود، تساوی زیر به دست می‌آید

$$x_1x_2 \cdots x_k = x_2x_3 \cdots x_k + x_1x_3 \cdots x_k + x_1x_2 \cdots x_{k-1}$$

در مقایسه برحسب مدول ۳ نتیجه می‌شود،

$$(-1)^k \equiv K(-1)^{k-1} \pmod{3}$$

ازآنجا $K \equiv 1 \pmod{3}$ یعنی $(P \in N)$ و $K = 3P - 1$ بـه‌آسانی دیده مـی‌شود برای نوشتن واحد بـه فرم مفروض $K = 5$ کافی نیست، زیرا مجموع ۵ تا بزرگترین عبارت ممکن به فرم مفروض، کوچکتراز واحد می‌شود. پس بازاء $P = 1$ و $P = 2$ مسأله جواب ندارد. ثابت می‌کنیم بازاء $P > 2$ مسأله جواب دارد.

ابتدا تساوی زیر را درنظر می‌گیریم

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{11} + \frac{1}{110} + \frac{1}{44} + \frac{1}{440}$$

و واحد را هم بشکل زیر می‌نویسیم،

$$1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{2P-1}}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{2P-2}}\right) + \frac{1}{2^{2P-1}}$$

باقیمانده مخرجهای P کسر که در پرانتز اول قرار دارند بر ۳ برابر ۱ـ است و هریك از $(P-1)$ عبارت پرانتز دوم با فرمول زیر به دو عبارت تقسیم می‌شود،

$$\frac{1}{2^{2m}} = \frac{1}{2^{2m}+1} + \frac{1}{(2^{2m}+1) \cdot 2^{2m}}$$

وآخرین عبارت را هم به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{1}{2^{2P-1}} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{P-2} = \frac{1}{11 \times 4^{P-2}}$$

$$+\frac{1}{110\times 4^{P-2}}+\frac{1}{44\times 4^{P-2}}$$

$$+\frac{1}{440\times 4^{P-2}}$$

به این ترتیب طرز قرار دادن واحد به صورت مجموع کسرهایی به فرم مفروض پیدا می‌شود که

$$P+2(P-1)+4=3P+2$$

عبارت دارد.

اکنون باید ثابت کنیم که همه این عبارات متمایز هستند. واضح است وقتی انطباق ممکن می‌شود که یکی از اعداد به فرم $2^{2m}+1$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد. یعنی

$$4^m\equiv -1\,(\mathrm{mod}\ m)$$

اما درآن صورت

$$5^m\equiv 16^m\equiv 1$$

$$3^m\equiv 25^m\equiv 1$$

$$1\equiv 12^m=4^m\times 3^m=-1$$

که درست نیست. بنابراین نوشتن واحد به صورت بالا روش مطلوب مسأله است.

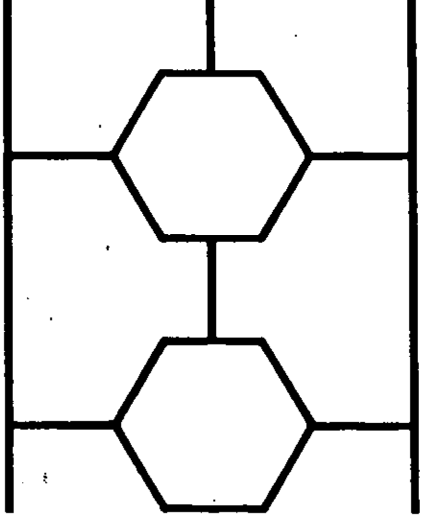
مسأله ۱۶- آیا می‌توان بازهٔ $[0,1]$ را به صورت دو مجموعه A و B طوری قرار داد که تفاضل هردو عضو متمایز مجموعه A گویا و تفاضل هردو عضو متمایز B اصم باشد؟

حل ـ فرض کنیم بازه $[0,1]$ به صورت اجتماع دو مجموعه A و B با شرایط مسأله باشد. درآن صورت در مجموعه B اعداد گویا موجود نخواهد بود پس $0\in A$. اگر عدد اصم a در A باشد درآن صورت $a=a-0$ گویا نخواهد بود و این خلاف فرض است.

پس A و B به ترتیب مجموعه‌ای از اعداد گویا و اصم از بازه $[0,1]$ می‌شوند. اما تفاضل دو عدد اصم می‌تواند گویا باشد و بار دیگر به تناقض می‌رسیم به این ترتیب قرار دادن بازه $[0,1]$ به صورت اجتماع دو مجموعهٔ A و B با شرایط مسأله امکان‌پذیر نیست.

مسأله ۱۷- میانه‌های AA_1، BB_1 و CC_1 از مثلث ABC را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را به ترتیب در نقاط A_2، B_2 و C_2 قطع کند. ثابت کنید

$$\frac{AA_1}{AA_2}+\frac{BB_1}{BB_2}+\frac{CC_1}{CC_2}\leqslant\frac{9}{4}$$



حل ـ اگر $|AB|=c$، $|BC|=a$ و $|AC|=b$، طول میانه AA_1 برابر می‌شود با:

$$|AA_1|^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}\qquad(1)$$

بنابر خاصیت وترهای قاطع در دایره (قوت نقطه) داریم

$$|AA_1]\cdot|A_1A_2|=\frac{a^2}{4}$$

علاوه‌برآن

$$|AA_1|\cdot|AA_2|=|AA_1|(|AA_1|+|A_1A_2|)$$
$$=|AA_1|^2+|AA_1|\cdot|A_1A_2|$$

پس،

$$|AA_1|\cdot|AA_2|=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}\qquad(2)$$
$$+\frac{a^2}{4}=\frac{b^2+c^2}{2}$$

از تقسیم (۱) بر (۲) داریم،

$$\frac{|AA_1|}{|AA_2|}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{b^2+c^2}$$

به طریق مشابه می‌توان نوشت،

$$\frac{|BB_1|}{|BB_2|}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{a^2+c^2}$$

$$\frac{|CC_1|}{|CC_2|}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{a^2+b^2}$$

از جمع روابط بالا نتیجه می‌شود،

$$\frac{|AA_1|}{|A_1A_2|}+\frac{|BB_1|}{|BB_2|}+\frac{|CC_1|}{|CC_2|}=$$

$$3-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\right)$$

با استفاده از نامعادله معروف،

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\geqslant\frac{3}{2}$$

نتیجه می‌گیریم

$$\frac{|AA_1|}{|AA_2|}+\frac{|BB_1|}{|BB_2|}+\frac{|CC_1|}{|CC_2|}\leqslant 3-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

مسأله ۱۸- ثابت کنید در هر چند ضلعی حداقل دو ضلع a و b موجود است به قسمی که $1\leqslant\frac{b}{a}<2$.

حل ـ اگر طول اضلاع چند ضلعی به ترتیب نزولی (نه اجباراً به طور دوری) برابر $a_1, a_2, \dots, a_n$ و $a_1\geqslant a_2\geqslant\dots\geqslant a_n$. فرض می‌کنیم به‌ازاء جمیع مقادیر $i=1, 2, \dots, n-1$، $\frac{a_i}{a_{i+1}}\geqslant 2$. درآن صورت

$$a_2\leqslant\frac{1}{2}a_1$$

و

$$a_3\leqslant\frac{1}{2^2}a_1, \dots, a_n\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}a_1$$

و

$$a_2+a_3+\dots+a_n\leqslant a_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)<a_1$$

که این ممکن نیست.

مسأله ۱۹- درهرم مثلث‌القاعده S_{ABC} از رأس A درقاعده هرم صفحه‌ای طوری مرور می‌دهیم تا میانه S_K ازمثلث SBC را نصف و میانه SL از مثلث SAC را در نقطه D قطع کند به قسمی که $2|SD|=|DL|$. این صفحه به چه نسبت حجم هرم را تقسیم می‌کند؟

حل ـ فرض می‌کنیم

$\overrightarrow{SA}=a$ و $\overrightarrow{SB}=b$ و $\overrightarrow{SC}=c$

اگر V حجم چهار وجهی ABCD و M و N و P روی یالهای DC، DB، DA به ترتیب طوری باشد که $|DM|=K_1|DA|$، $|DN|=K_2|DB|$، $DP=K_3|DC|$، حجم MNPD برابر است با $K_1K_2K_3V$

واضح است $K_1=1$؛ فرض می‌کنیم

$\overrightarrow{SM}=K_2b$ و $\overrightarrow{SN}=K_3c$

که درآن M و N به ترتیب محل برخورد صفحه مفروض با یالهای SB و SC می‌باشد. اکنون K_2 و K_3 را تعیین می‌کنیم.

$$\overrightarrow{SD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SL}=\frac{1}{6}(a+c)$$

و

$$\overrightarrow{SE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SK}=\frac{1}{4}(a+b)$$

با نشان دادن $\overrightarrow{SM}=K_2b$

اگر A و B و C و D برروی صفحه و O درخارج آن باشد داریم $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+(1-\alpha-\beta)\overrightarrow{OC}$ (α و β اعدادند)

$$\overrightarrow{SM}=\alpha a+\frac{\beta}{4}(a+b)+\frac{1}{6}(1-\alpha-\beta)(a+c)$$

با استفاده از تجزیه یك بردار در سه امتداد، دستگاه زیر را خواهیم داشت

$$\begin{cases} 0=\frac{5}{6}\alpha+\frac{1}{12}\beta+\frac{1}{6} \\ K_2=\frac{1}{4}\beta \\ 0=\frac{1}{6}(1-\alpha-\beta) \end{cases}$$

ازآنجا $K_2=\frac{1}{3}$. و به طریق مشابه:

$$\overrightarrow{SN}=K_3c$$

$$\overrightarrow{SN}=\left(\frac{5}{6}\alpha+\frac{\beta}{12}+\frac{1}{6}\right)a+\frac{\beta}{4}b+\frac{1}{6}(1-\alpha-\beta)c$$

$K_۲ = \frac{۱}{۵}$

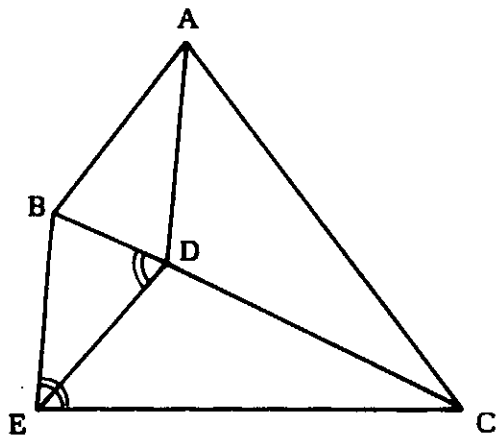
پس با توجه به فرض مسأله خواهیم داشت

$$V_{SAMN} = ۱ \cdot \frac{۱}{۲} \cdot \frac{۱}{۵} V_{SABC}$$

مسأله ۲۰- در مثلث ABC نقطهٔ D را روی ضلع BC طوری تعیین کنید که:

$$AD^۲ = BD \times BC$$

حل- BE را مساوی و موازی AD رسم و E را به D و C وصل می‌کنیم به سادگی معلوم می‌شود



$$\widehat{BED} \sim \widehat{BCE}$$

و در نتیجه

$$\widehat{BEC} = \widehat{BDE}$$

یعنی مکان هندسی E، کمان در خور زاویه $\hat{B}$ در مثلث ABC است که روی BC در خارج سطح مثلث رسم می‌شود و اگر A′ قرینهٔ نقطه A نسبت به نقطه B باشد مکان دیگر E خطی است که از A′ موازی BC رسم می‌شود. (برای رسم کمان در خور عمود منصف BC را با خطی که از B بر AB عمود می‌شود قطع می‌کنیم تا مرکز آن تعیین شود) چون خط موازی BC کمان درخور را حداکثر در دو نقطه قطع می‌کند مسأله ۲ یا ۱ جواب دارد یا جواب ندارد.

مسائل مرحلهٔ اول المپیاد ریاضی کشور

هفتمین دوره مسابقات ریاضی دانش‌آموزان کشور

تاریخ برگزاری: ۶۸/۹/۲

شروع مسابقه : ۹ صبح

مدت : ۳ ساعت

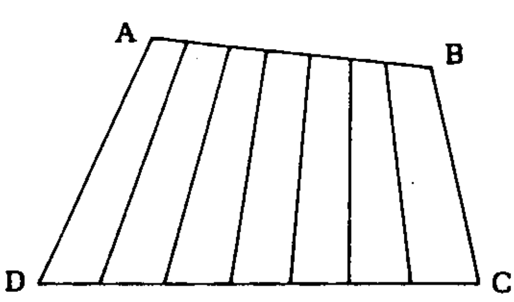
مبارزه علمی برای جوانان زنده‌کردن روح جستجو و کشف واقعیتها و حقیقتها است.

«امام خمینی قدس سره»

۱- نشان دهید اگر a، b و c طولهای اضلاع یك مثلث باشند داریم:

$$۳(ab+bc+ca) \leqslant (a+b+c)^۲ < ۴(ab+bc+ca).$$

۲- در چهارضلعی ABCD (شکل زیر) ضلع AB را به هفت قسمت مساوی و ضلع CD را نیز به هفت قسمت



مساوی تقسیم کرده و نقاط تقسیم را به یکدیگر وصل می‌کنیم و هفت چهارضلعی کوچك به‌دست می‌آوریم. ثابت کنید اقلاً

یکی از چهارضلعی‌های کوچك مساحتی برابر $\frac{1}{7}$ مساحت چهارضلعی ABCD دارد.

۳ـ ثابت کنید معادلهٔ

$$x^2+y^2+z^2=2^t xyz$$

که در آن x، y، z و t اعداد طبیعی هستند، جواب ندارد.

۴ـ اگر d_1، d_2 و d_3 فواصل یك نقطه در درون مثلث قائم‌الزاویه از سه ضلع آن و a طول وتر مثلث باشد، نشان دهید:

$$\sqrt{d_1}+\sqrt{d_2}+\sqrt{d_3}<\sqrt{2a}.$$

۵ـ n نقطه در روی صفحه مفروض است به طوری که فاصلهٔ بین هردو نقطه آنها بزرگتر یا مساوی ۱ است. ثابت کنید که تعداد جفت‌هایی از این نقاط که فاصلهٔ آنها دقیقاً مساوی یك باشد از $3n$ تجاوز نمی‌کند.

۶ـ روی محیط دایره‌ای به شعاع یك متر نقطهٔ دلخواه A_0 را انتخاب و در جهت مثبت دایرهٔ مثلثاتی نقاط A_1، A_2، A_3،... را طوری انتخاب می‌کنیم که $\widehat{A_0A_1}=1$ متر، $\widehat{A_1A_2}=\frac{1}{2}$ متر، ...، $\widehat{A_{n-1}A_n}=\frac{1}{n}$ متر، ... (تعداد نقاط نامتناهی است).

الف) ـ نشان دهید هیچ دو نقطهٔ A_i و A_j $(i\neq j)$ برهم منطبق نیستند.

ب) ـ نشان دهید اقلاً یك کمان یك میلیمتری برروی این دایره وجود دارد که تعداد نقاط A_i واقع برآن بینهایت باشد.

حل مسأله ۱:

داریم:

$$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geqslant 0$$

و این همواره برقرار است. بنابراین

$$3(ab+bc+ca)\leqslant(a+b+c)^2;$$

برای اثبات قسمت دوم نامساوی داریم:

$$4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2$$
$$=a(b+c-a)+b(c+a-b)$$
$$+c(a+b-c).$$

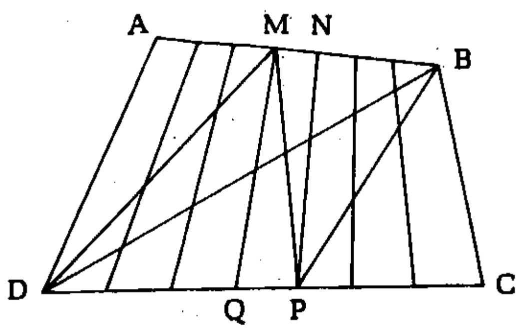
چون در مثلثی به اضلاع a، b و c داریم:

$$b+c>a \qquad b+c-a>0$$
$$c+a>b \Rightarrow c+a-b>0$$
$$a+b>c \qquad a+b-c>0$$

بنابراین:

$$(a+b+c)^2<4(ab+bc+ca).$$

حل مسأله ۲:



داریم:

$$\begin{cases} S_{MPN}=\frac{1}{4}S_{MBP} \\ S_{MQP}=\frac{1}{4}S_{MPD}\end{cases} \Longrightarrow S_{MNPQ}=\frac{1}{4}S_{MBPD}$$

$$\begin{cases} S_{BDP}=\frac{4}{7}S_{BDC} \\ S_{DMB}=\frac{4}{7}S_{DBA}\end{cases} \Longrightarrow S_{MBPD}=\frac{4}{7}S_{ABCD}$$

در نتیجه،

$$S_{MNPQ}=\frac{1}{7}S_{ABCD}$$

درحالت خاص، اگر AB موازی CD باشد مساحت هرهفت چهارضلعی کوچك با یکدیگر مساوی و برابر با $\frac{1}{7}$ مساحت چهارضلعی ABCD است.

حل مسأله ۳:

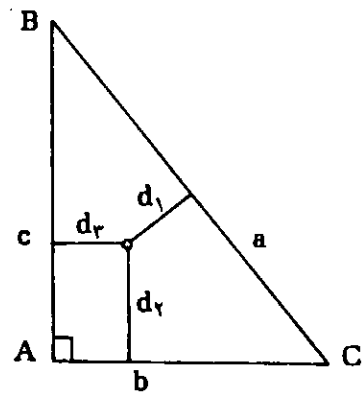
فرض کنیم x و $y, z, t\in N$ جوابی از این معادله باشد. واضح است که z، y و x باید زوج باشند. زیرا اگر فقط یکی از آنها و یا همه فرد باشند آنگاه سمت چپ معادلهٔ $x^2+y^2+z^2=2^t xyx$ عدد فرد و سمت راست زوج است که غیر ممکن است. و اگر فقط دوتای آنها فرد باشند آنگاه سمت چپ معادلهٔ بر ۴ قابل قسمت نیست ولی سمت راست بر ۴ قابل قسمت است.

در نتیجه،

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^2$$
$$=2^{t+1}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{y}{2}\right)\left(\frac{z}{2}\right)$$

با همان استدلال بالا، نتیجه می‌شود که $\frac{x}{2}$ ، $\frac{y}{2}$ و $\frac{z}{2}$ نیز زوج هستند. پس به همین ترتیب برای هر $k \in N$ باید مثلاً $\frac{x}{2^k}$ عدد صحیح باشد که غیر ممکن است.

حل مسأله ۴:



داریم

$$\sqrt{d_1}+\sqrt{d_2}+\sqrt{d_3}=\sqrt{ad_1}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}}$$
$$+\sqrt{bd_2}\cdot\sqrt{\frac{1}{b}}+\sqrt{cd_3}\cdot\sqrt{\frac{1}{c}}$$
$$\leqslant (ad_1+bd_2+cd_3)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(طبق نامساوی کوشی)

اما:

$$ad_1+bd_2+cd_3=2s=bc$$

پس

$$\sum_{i=1}^{3}\sqrt{d_i}\leqslant (bc)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{ab+bc+ac}{abc}\right)^{\frac{1}{2}}$$

چون:

$$ab+bc+ac<a^2+b^2+c^2=2a^2$$

پس

$$\sum_{i=1}^{3}\sqrt{d_i}<(bc)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2a^2}{abc}\right)^{\frac{1}{2}}$$

در نتیجه:

$$\sum_{i=1}^{3}\sqrt{d_i}<\sqrt{2a}$$

حل مسأله ۵:

ابتدا ثابت می‌کنیم که برای هر نقطه مانند A حداکثر شش نقطه وجود دارد که فاصلهٔ آنها با A مساوی یک می‌باشد. زیرا تمام نقاطی که فاصلهٔ آنها با A مساوی یک است روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع یک واقع هستند و هر دو نقطه روی این دایره که فاصله‌شان حداقل یک باشد باید روی کمانی به اندازهٔ حداقل 60° درجه واقع باشند. در نتیجه شش نقطه بیشتر ممکن نیست.

به این ترتیب با n نقطه بیش‌از شش جفت که دارای خاصیت فوق باشد نمی‌توان تشکیل داد و چون تعداد نقطه‌ها n است پس کلاً $6n$ جفت به دست می‌آید اما جفت (A, B) یا جفت (B, A) فرقی ندارد پس $\frac{6n}{2}=3n$ به دست می‌آید. یعنی بیش‌از $3n$ جفت با این خاصیت نخواهیم داشت.

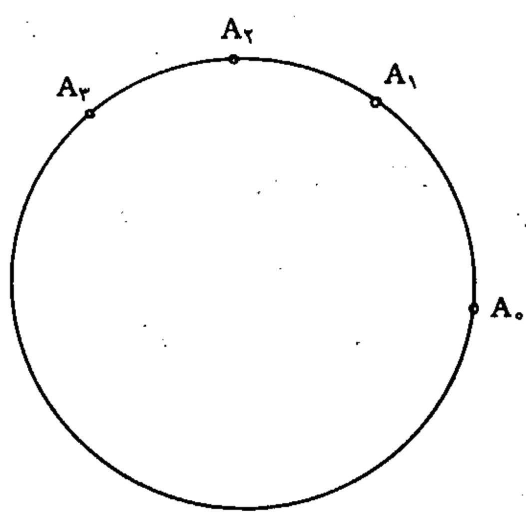
حل مسأله ۶:

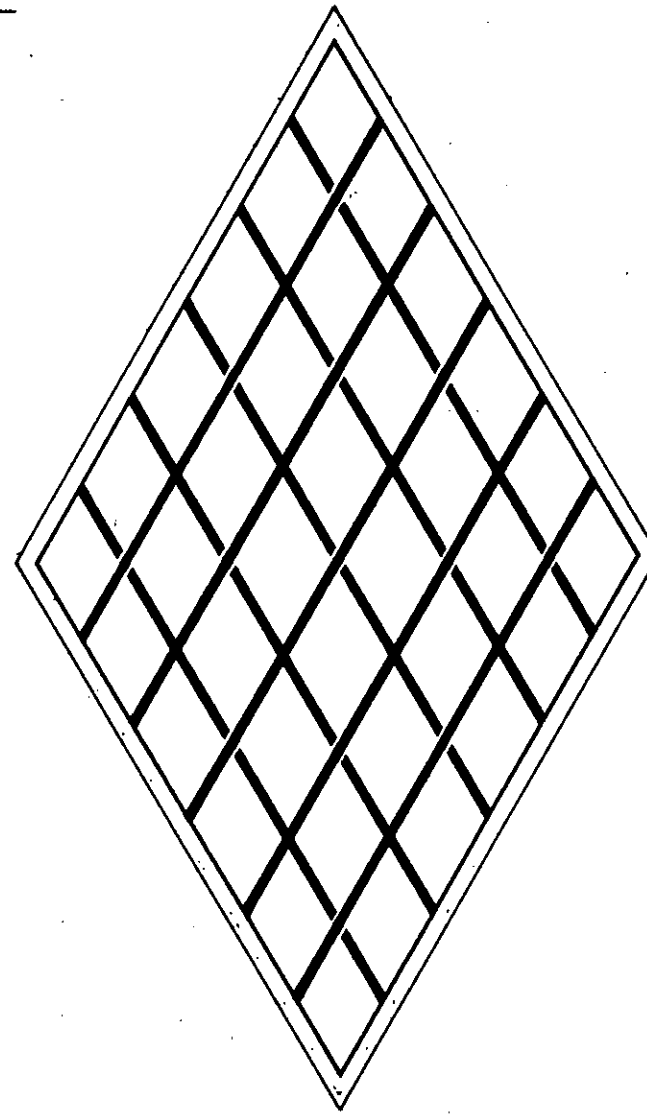
اولاً ــ اگر دونقطهٔ A_i و A_j به فرض $j>i$ برهم منطبق باشند خواهیم داشت

$$\frac{1}{i+1}+\frac{1}{i+2}+\cdots+\frac{1}{j}=2k\pi$$

طرف اول گویا و طرف دوم گنگ است پس تساوی نمی‌تواند برقرار باشد.

ثانیاً ــ چون هیچ دونقطه‌ای برهم منطبق نیستند و تعدادشان نامتناهی است اقلاً در یک کمان یک میلیمتری باید تعدادشان نامتناهی باشد زیرا تعداد فواصل یک میلیمتری که روی این دایره می‌توان جدا کرد متناهی است.





مسائل ماکزیمم و می‌نیمم در هندسه

گئوکو یوحنایی‌رضائیه
عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت معلم

چنانکه x_1، x_2، ...، x_k اعداد مثبت باشند، ثابت می‌کنند که

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k} \geqslant \sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k} \qquad (*)$$

سمت چپ این نامساوی را میانگین حسابی اعداد x_1، x_2، ...، x_k و سمت راست‌آن را میانگین هندسی این اعداد می‌نامند. بنابراین نامساوی بالا می‌گوید که میانگین حسابی چند عدد مثبت از میانگین هندسی آنها کوچکتر نیست. از این نامساوی دیده می‌شود که اگر

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=kn$$

ثابت باشد آنگاه

$$n \geqslant \sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k}$$

و از آنجا

$$x_1x_2\cdots x_k \leqslant n^k$$

بنابراین

$$\max(x_1x_2\cdots x_k)=n^k$$

مشروط بر آنکه

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=kn$$

به‌عبارت دیگر، اگر مجموع k عدد مثبت ثابت‌باشد حاصلضرب آنها وقتی ماکزیمم است که باهم برابر باشند.

همچنین با توجه به نامساوی (*) دیده می‌شود که

$$\min(x_1+x_2+\cdots+x_k)=kn$$

مشروط بر آنکه

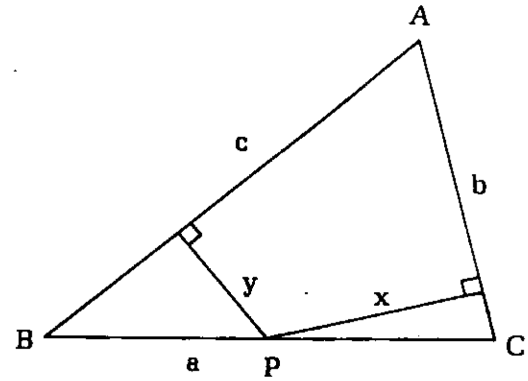
$$x_1x_2\cdots x_k=n^k$$

مقداری ثابت باشد. به عبارت دیگر، چنانکه حاصلضرب k عدد مثبت ثابت باشد. مجموع آنها وقتی می‌نیمم است که باهم برابر باشند.

حال باتوجه به‌آنچه‌که در بالاگفته شد چند مسأله هندسی را مطرح کرده و حل می‌کنیم:

مسأله ۱. مثلث ABC مفروض است، بر روی ضلع BC نقطهٔ P را چنان تعیین کنید که حاصلضرب فواصلش از دو ضلع دیگر مثلث ماکزیمم باشد.

حل. ضلع مقابل زاویهٔ B را با b و ضلع مقابل زاویهٔ C را با c نشان می‌دهیم، P را یك نقطهٔ دلخواه واقع برروی ضلع BC درنظر می‌گیریم (شکل زیر). فاصلهٔ نقطهٔ P از ضلع AC را به x و فاصلهٔ آن ازضلع AB را y می‌نامیم.

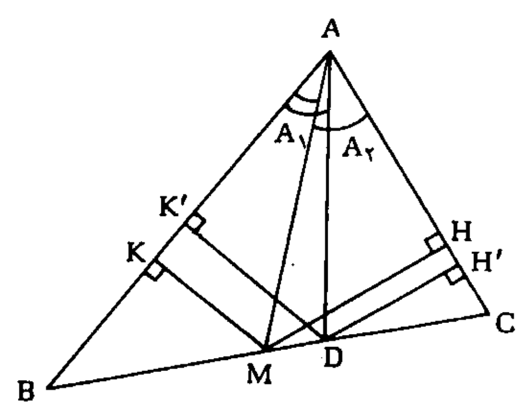


توجه داریم که $bx+cy$ مقداری است ثابت و در واقع دو برابر مساحت مثلث ABC است، بنابراین حاصلضرب $(bx)\,(cy)$ وقتی ماکزیمم است که $bx=cy$، ولی ماکزیمم بودن $(bx)\,(cy)$ ماکزیمم بودن xy را نتیجه می‌دهد (زیرا b و c ثابت هستند). از اینجا دیده می‌شود که نقطهٔ P را باید چنین تعیین کنیم که مساحت دو مثلث APB و APC مساوی باشد، بنابراین نقطهٔ P وسط ضلع BC خواهد بود.

نتیجه‌ای از مسأله قبل. ثابت کنید که در هر مثلث طول میانه یك ضلع از طول نیمساز زاویه داخلی روبروی آن ضلع کوچکتر نیست.

حل. مثلث غیر مشخص ABC را درنظر می‌گیریم (شکل زیر) و نشان می‌دهیم که طول میانه AM از طول نیمساز AD بزرگتر است.

$$B\hat{A}M=A_1 \quad \text{و} \quad M\hat{A}C=A_2$$



مـی گیریم، از نقطهٔ M عمود MK را برضلع AB و عمود MH را برضلع AC فرود می‌آوریم، بـه طوری کـه دیده می‌شود

$$MK=AM\sin A_1 \quad \text{و} \quad MH=AM\sin A_2$$

در نتیجه

$$MK\times MH=AM^2\sin A_1\sin A_2$$

از نقطهٔ D نیز عمود DK' را بـر ضلع AB و عمود DH' را بر ضلع AC فرود مـی‌آوریم و به سادگـــی ملاحظه می کنیم که

$$DH'=DK'=AD\sin\frac{A}{2}$$

در نتیجه

$$DK'\times DH'=AD^2\sin^2\frac{A}{2}$$

توجه داریم که

$$\sin A_1\sin A_2=\frac{1}{2}\left[\cos(A_1-A_2)-\cos(A_1+A_2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos(A_1-A_2)-\cos A\right]$$

در نتیجه ماکزیمم $\sin A_1\sin A_2$ وقتی است که

$$\cos(A_1-A_2)=1$$

بـاشد و ازآنجا $A_1=A_2$ بـا قرار دادن در سمت راست رابطهٔ بالا داریم

$$\max(\sin A_1\sin A_2)=\sin^2\frac{A}{2}$$

طبق مسألـه قبل M وسط ضلع BC نقطه‌ای است کـــه حاصلضرب فواصلش از دو ضلع دیگـر مثلث ماکزیمم است، در نتیجه $MK\times MH>DK'\times DH'$، حال با توجه به روابطی کـه در بالا برای $MK\times MH$ و $DK'\times DH'$ به دست آمده بود داریم

$$AM^2\sin A_1\sin A_2>AD^2\sin^2\frac{A}{2}$$

و در ضمن

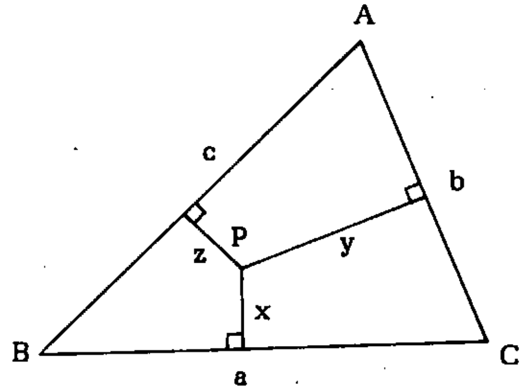
$$\sin A_1\sin A_2\leqslant\sin^2\frac{A}{2}$$

بنابراین نامساوی اخیر نتیجه می‌دهد $AM^2>AD^2$ و از آنجا $AM>AD$.

اگر مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد یعنی داشته باشیم $AB=AC$ آنگاه میانه AM و نیمساز AD برهم منطبق و در نتیجه طولشان برابر خواهد بود.

مسأله ۲. ثابت کنید که در بین نقاط واقع در درون یك مثلث مرکز ثقل مثلث نقطه‌ای است که حاصلضرب فواصلش از سه ضلع مثلث ماکزیمم است.

حل. فرض می‌کنیم ABC مثلث غیر مشخص و P نقطه‌ای واقع در درون آن باشد، اضلاع روبروی زوایای A، B و C را به ترتیب با a، b و c نشان می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ P را از اضلاع BC، AC و AB به ترتیب با x، y و z نشان می‌دهیم، بنابراین $ax+by+cz$ مقداری است ثابت و دو برابر مساحت مثلث ABC است. درنتیجه $(ax)(by)(cz)$



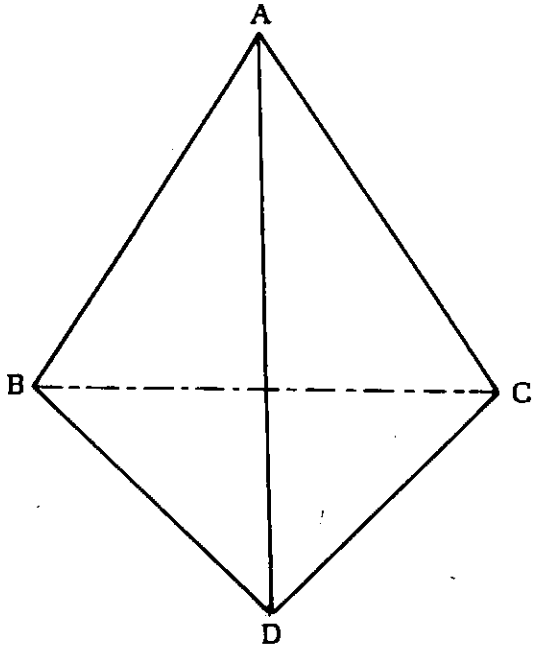
یا در واقع xyz (چون a، b و c ثابت هستند) وقتی ماکزیمم است که $ax=by=cz$. بنابراین P نقطه‌ای است که اگر از آنجا به سه رأس مثلث وصل کنیم سه مثلث با مساحت‌های مساوی بوجود می‌آید، واضح است که این نقطه مرکز ثقل مثلث ABC خواهد بود.

تعمیم مسأله قبل به فضای $\mathcal{R}^3$

هرم مثلث‌القاعده $ABCD$ مفروض است، ثابت کنید که در بین نقاط واقع در درون آن، مرکز ثقل هرم نقطه‌ای است که حاصلضرب فواصلش از چهار وجه هرم ماکزیمم است.

حل. فرض می‌کنیم P یك نقطه دلخواه واقع در درون هرم $ABCD$ باشد، مساحت وجوه ABC، ACD، ABD و BCD هرم را به‌ترتیب با S_1، S_2، S_3 و S_4 نشان می‌دهیم. فاصله نقطهٔ P از این وجوه را نیز به ترتیب x_1، x_2، x_3 و x_4 می‌گیریم. ملاحظه می‌شود که

$$x_1S_1+x_2S_2+x_3S_3+x_4S_4$$



مقداری است ثابت، در واقع سه برابر حجم هرم می‌باشد. بنابراین $(x_1S_1)(x_2S_2)(x_3S_3)(x_4S_4)$ یا در واقع $x_1x_2x_3x_4$ (چون S_1، S_2، S_3 و S_4 ثابت هستند) وقتی ماکزیمم است که

$$x_1S_1=x_2S_2=x_3S_3=x_4S_4$$

یعنی وقتی که P مرکز ثقل هرم باشد.

تعمیم مسأله به فضای $\mathcal{R}^n$

$n+1$ نقطهٔ

$$A_1(x_{11}\ ,\ x_{12}\ ,\ \cdots\ ,\ x_{1n})$$

$$A_2(x_{21}\ ,\ x_{22}\ ,\ \cdots\ ,\ x_{2n})$$

. . . .

$$A_{n+1}=(x_{n+1,1}\ ,\ x_{n+1,2}\ \cdots\ ,\ x_{n+1,n})$$

غیر واقع بر یك ابر صفحه (Hyperplane) مفروضند، این $n+1$ نقطه یك هرم در فضای $\mathcal{R}^n$ را پدید می‌آورند. در بین نقاط واقع در درون این هرم مرکز ثقل آن نقطه‌ای است که حاصلضرب فواصلش از $n+1$ وجه هرم ماکزیمم است.

در اینجا لازم به تذکر است که مرکز ثقل این هرم نقطهٔ $A(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ می‌باشد که در آن

$$X_j=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_{ij} \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

اثبات این حالت شبیه حالت $\mathcal{R}^3$ می‌باشد. یك ابر صفحه در فضای $\mathcal{R}^n$ رویه‌ای است به معادلهٔ

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+a_{n+1}=0$$

که در آن ضرایب a_1، a_2، ...، a_{n+1} اعداد ثابت می‌باشند.

مسأله ۳. ثابت کنید که در بین مثلث‌های با محیط ثابت این مثلث متساوی‌الاضلاع است که دارای بیشترین مساحت است.

حل. فرض می‌کنیم a، b و c اضلاع این مثلث و $2p=a+b+c$ محیط آن باشد که عددی است ثابت. چنانکه می‌دانیم مساحت مثلث از دستور زیر به دست می‌آید

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

توجه داریم که

$$(p-a)+(p-b)+(p-c)=p$$

مقداری است ثابت، بنابراین حاصلضرب آنها و در نتیجه مساحت مثلث وقتی ماکزیمم است که

$$p-a=p-b=p-a$$

از آنجا $a=b=c$. یعنی وقتی که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد.

مسأله ۴. در درون بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ مستطیلی با بیشترین مساحت محاط کنید.

حل. فرض می‌کنیم مستطیلی در درون این بیضی محاط شده باشد، یکی از رئوس این مستطیل را که در ربع اول واقع است نقطهٔ $A(x, y)$ می‌نامیم. مساحت این مستطیل $4xy$ خواهد بود. بنابراین مسأله منجر می‌شود به اینکه ماکزیمم xy را به دست بیاوریم مشروط بر آنکه $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. چون مجموع دو کمیت $\frac{x^2}{a^2}$ و $\frac{y^2}{b^2}$ مقدار ثابت ۱ است، بنابراین حاصلضرب آنها یا در واقع xy وقتی ماکزیمم است که $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$ و از آنجا $x=\frac{a\sqrt{2}}{2}$، $y=\frac{b\sqrt{2}}{2}$. بنابراین یکی از رئوس مستطیل مورد نظر نقطهٔ $A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$ می‌باشد، دو رأس دیگر قرینهٔ آن نقطه نسبت به محورهای مختصات و رأس چهارم قرینه آن نسبت به مبدأ مختصات می‌باشد.

مسأله ۵. در درون بیضیگون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ مکعب مستطیلی با بیشترین حجم محاط کنید.

حل. فرض می‌کنیم مکعب مستطیلی در درون این بیضیگون محاط شده باشد، یکی از رئوس این مکعب مستطیل را که در ثمن اول واقع است $A(x, y, z)$ می‌نامیم. حجم این مکعب مستطیل $8xyz$ خواهد بود. بنابراین مسأله منجر می‌شود به اینکه ماکزیمم xyz را به دست بیاوریم مشروط بر آنکه $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. چون مجموع سه کمیت $\frac{x^2}{a^2}$، $\frac{y^2}{b^2}$، $\frac{z^2}{c^2}$ مقدار ثابت ۱ است، بنابراین حاصلضرب آنها یا در واقع xyz وقتی ماکزیمم است که

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3}$$

و از آنجا $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$، $y=\frac{b\sqrt{3}}{3}$، $z=\frac{c\sqrt{3}}{3}$. بنابراین یکی از رئوس مکعب مستطیل مورد نظر نقطهٔ

$$A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{b\sqrt{3}}{3}, \frac{c\sqrt{3}}{3}\right)$$

می‌باشد. با تغییر علامت یکی از مختصات این نقطه، دو تا از آنها، هر سه آنها، هفت رأس دیگر مستطیل مورد نظر به دست می‌آیند.

مسأله ۶. می‌نیمم فاصلهٔ مبدأ مختصات از رویهٔ $xyz=a^3$ را به دست آورید که در آن a یك عدد ثابت و مثبت است.

حل. از معادلهٔ $xyz=a^3$ نتیجه می‌شود که $x^2y^2z^2=a^6$، به این ترتیب دیده می‌شود که حاصلضرب سه کمیت مثبت x^2، y^2 و z^2 مقداری است ثابت. بنابراین مجموع آنها یعنی $x^2+y^2+z^2$ وقتی می‌نیمم است که هر سه برابر باشند، با توجه به $x^2y^2z^2=a^6$ باید $x^2=y^2=z^2=a^2$ و از آنجا $x^2+y^2+z^2=3a^2$. در نتیجه

$$\min\sqrt{x^2+y^2+z^2}=a\sqrt{3}$$

به عبارت دیگر، می‌نیمم فاصله مبدأ مختصات تا رویهٔ $xyz=a^3$ برابر است با $a\sqrt{3}$.

مسأله ۷. در بین چهارضلعی‌های محدبی که مجموع دوقطر آنها ثابت است، چهارضلعی‌ای را به دست آورید که مساحت آن ماکزیمم باشد.

حل. چنانکه d_1 و d_2 دو قطر یکی از این چهارضلعی‌ها و α زاویهٔ بین این دو قطر باشد، داریم $d_1+d_2=2l$ که درآن l ثابت است. حال اگر مساحت این چهارضلعی را S بنامیم داریم $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$. بنابراین مسأله منجر می‌شود به اینکه ماکزیمم $d_1d_2\sin\alpha$ را به دست بیاوریم مشروط برآنکه $d_1+d_2=2l$. چون مجموع دوکمیت مثبت d_1 و d_2 ثابت است، لذا حاصلضرب آنها وقتی ماکزیمم است که $d_1=d_2=l$. از طرف دیگر $\max(\sin\alpha)=1$، بنابراین دربین این چهارضلعی‌ها آنهایی بیشترین مساحت را دارند که اقطارشان متساوی و متعامد باشند.

مسائلی که تا اینجا مطرح شد همه به نحوی با نامساوی بین میانگین‌های حسابی و هندسی اعداد مثبت مربوط بودند و با استفاده ازآن نامساوی حل شدند. بقیه مسائلی که مطرح خواهند شد نامساوی بین میانگین‌های حسابی و هندسی مربوط نیستند، عمدتاً نامساوی‌های بین اجزاء یك مثلث را مطرح می‌کنند.

مسأله ۸. اگر A، B و C زوایای داخلی یك مثلث باشند ثابت کنید که

$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

حل. توجه داریم

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

در هر مثلث $\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$ در نتیجه

$$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$$

با قرار دادن در سمت راست رابطهٔ بالا داریم

$$\sin A+\sin B=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

حال با توجه به $\cos\frac{A-B}{2}\leqslant 1$ داریم

$$\sin A+\sin B\leqslant 2\cos\frac{C}{2}$$

با افزودن $\sin C$ به طرفین این نامساوی داریم

$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant 2\cos\frac{C}{2}+\sin C$$

حال باید ماکزیمم تابع

$$f(c)=2\cos\frac{C}{2}+\sin C$$

را به دست بیاوریم، توجه داریم که

$$f'(c)=-\sin\frac{C}{2}+\cos C$$

و

$$f''(c)=-\frac{1}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin C$$

یکی از ریشه‌های معادلهٔ $f'(c)=0$ عبارت است از $C=\frac{\pi}{3}$ و در ضمن $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)<0$ بنابراین ماکزیمم تابع $f(c)$ به ازاء $C=\frac{\pi}{3}$ به دست می‌آید. بنابراین

$$f(c)\leqslant f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

و ازآنجا

$$2\cos\frac{C}{2}+\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

در بالا داشتیم

$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant 2\cos\frac{C}{2}+\sin C$$

بنابراین

$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

مسأله ۹. محیط مثلث ABC را با $2p$ و شعاع دایره محیطی آن‌را با R نشان می‌دهیم، ثابت کنید $\frac{p}{R}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

حل. در مثلث ABC ضلع روبروی زاویهٔ A را با a، ضلع روبروی زاویهٔ B را با b، ضلع روبروی زاویهٔ C را با c نشان می‌دهیم، طبق رابطهٔ سینوس‌ها در مثلث، داریم

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

و از آنجا

$$\frac{2p}{\sin A+\sin B+\sin C}=2R$$

در نتیجه

$$\frac{p}{R}=\sin A+\sin B+\sin C$$

در مسأله قبل نشان داده شد

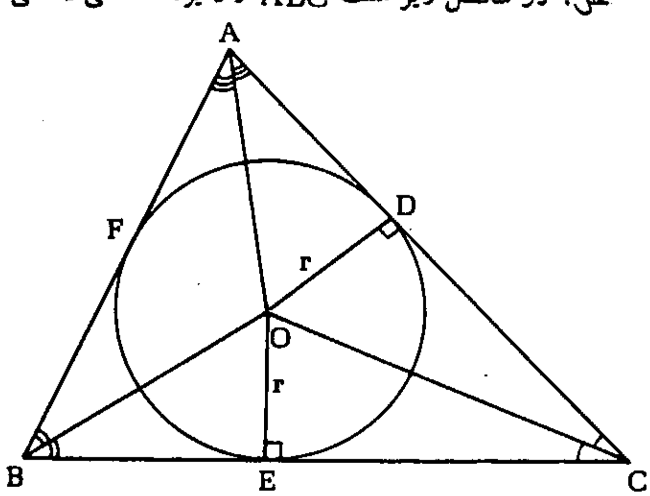
$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین $\frac{p}{R}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

مسأله ۱۰. چنانکه r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC باشد، ثابت کنید

$$p=r\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)$$

حل. در شکل زیر مثلث ABC و دایرهٔ محاطی داخلی



آن رسم شده است. به طوری که دیده می‌شود $AD=AF$، $CD=CE$ و $BE=BF$. بنابراین اگر محیط مثلث را $2p$ بگیریم $CD+AD+BE=p$ خواهد بود. ازطرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ COD ($\hat{D}=90^\circ$) داریم $O\hat{C}D=\frac{C}{2}$، $OD=r$، در نتیجه $CD=r\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$. به طریق مشابه می‌توان نشان داد که

$$AD=r\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$$

و

$$BE=r\operatorname{cotg}\frac{B}{2}$$

با قرار دادن در رابطهٔ $CD+AD+BE=p$ داریم

$$p=r\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)$$

مسأله ۱۱. ثابت کنید که در هر مثلث ABC،

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\geqslant 3\sqrt{3}$$

حل. در مثلث ABC داریم

$$\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$$

بنابراین کافی است که مینیمم تابع دو متغیره

$$f(A,\ B)=\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$$

را به دست بیاوریم. توجه داریم که[1]

$$f_A=-\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{cotg}^2\frac{A}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{A+B}{2}\right)$$

و

$$f_B=-\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{cotg}^2\frac{B}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{A+B}{2}\right)$$

بنابراین دستگاه معادلات $f_A=0$ ، $f_B=0$ نتیجه می‌دهد $A=B=\frac{\pi}{3}$. حال باید نشان دهیم که تابع $f(A,\ B)$ به ازاء این مقادیر مینیمم می‌شود، توجه داریم که

$$f_{AA}=\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{cotg}^2\frac{A}{2}\right)\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$$

۱ــ **توضیح:** f_A مشتق تابع f نسبت به A، f_{AA} مشتق دوم تابع f است که دوبار نسبت به A گرفته شد، درحالی‌که f_{AB} مشتق f_A نسبت به B است و قس‌علیهذا.

$$+\frac{۱}{۲}\left(۱+tg^{۲}\frac{A+B}{۲}\right)tg\frac{A+B}{۲}$$

$$f_{BB}=\frac{۱}{۳}\left(۱+cotg^{۲}\frac{B}{۲}\right)cotg\frac{B}{۲}$$

$$+\frac{۱}{۲}\left(۱+tg^{۲}\frac{A+B}{۲}\right)tg\frac{A+B}{۲}$$

$$f_{AB}=\frac{۱}{۲}\left(۱+tg^{۲}\frac{A+B}{۲}\right)tg\frac{A+B}{۲}$$

بنابراین

$$f_{AA}\left(\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۳}\right)=۴\sqrt{۳}$$

و

$$f_{BB}\left(\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۳}\right)=۴\sqrt{۳}$$

و

$$f_{AB}\left(\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۳}\right)=۲\sqrt{۳}$$

و در نتیجه

$$\Delta=f^{۲}_{AB}\left(\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۳}\right)-f_{AA}\left(\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۳}\right)f_{BB}\left(\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۳}\right)$$
$$=-۳۶<۰$$

و در ضمن

$$f_{AA}\left(\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۳}\right)=۴\sqrt{۳}>۰$$

بنابراین تابع $f(A, B)$ به ازاء $A=B=\frac{\pi}{۳}$ مینیمم می‌شود.

در نتیجه

$$\min f(A, B)=\left(\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۳}\right)=۳\sqrt{۳}$$

به عبارت دیگر

$$cotg\frac{A}{۲}+cotg\frac{B}{۲}+tg\frac{A+B}{۲}\geqslant ۳\sqrt{۳}$$

یا در واقع

$$cotg\frac{A}{۲}+cotg\frac{B}{۲}+cotg\frac{C}{۲}\geqslant ۳\sqrt{۳}$$

مسأله ۱۲. ثابت کنید که درهر مثلث $r\leqslant\frac{R}{۲}$.

حل. در مسأله ۱۰ نشان داده شد

$$p=r\left(cotg\frac{A}{۲}+cotg\frac{B}{۲}+cotg\frac{C}{۲}\right)$$

در مسأله ۱۱ نشان داده شد

$$cotg\frac{A}{۲}+cotg\frac{B}{۲}+cotg\frac{C}{۲}\geqslant ۳\sqrt{۳}$$

بنابراین $p\geqslant ۳\sqrt{۳}r$. درمسأله ۹ ثابت شد $\frac{p}{R}\leqslant\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$.

حال از $\frac{p}{R}\leqslant\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ و $p\geqslant ۳\sqrt{۳}r$ نتیجه می‌شود

$$۳\sqrt{۳}r\leqslant p\leqslant\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}R$$

و ازآنجا $h\leqslant\frac{R}{۲}$.

بولتن انجمن ریاضی ایران

پس از یك وقفه نسبتاً طولانی، انتشار یافت. این بولتن که نشریه رسمی انجمن ریاضی ایران است فقط مقاله‌های تخصصی در زمینه‌های ریاضیات را از سوی اساتید ریاضی برای بررسی و چاپ می‌پذیرد.

توفیق هیأت تحریریه محترم این نشریه علمی را در نشر مستمر آن از خداوند متعال آرزومندیم.

اسامی کسانیکه حل مسائل شمارهٔ ۲۱ را برای ما فرستاده‌اند

بابک خراسانی دانش‌آموز چهارم ریاضی از اردبیل: ۳ ــ ۷ ــ ۱۴ ــ ۱۹ ــ ۲۰

فرشید دلگشا، دانش‌آموز سوم ریاضی از تهران: ۲ ــ ۷ ــ ۱۱

هادی بخشایش دانش‌آموز چهارم ریاضی از مشهد: ۷ ــ ۱۲ ــ ۱۴ ــ ۱۷

آیت‌الله... کریم‌زاده دانش‌آموز: ۲ ــ ۱۹

داوود کریمی دانشجو از تهران: ۲ ــ ۳ ــ ۴ ــ ۶ ــ ۷ ــ ۹ ــ ۱۲ ــ ۱۳ ــ ۱۹ ــ ۲۰

کیامرث نوروزی: ۹ ــ ۱۹ ــ

آرش صباحی فرد ۲ ــ

بابک نیکنام از اردبیل ۱۴ ــ

محمد جواد معمنی از اصفهان ۱۴ ــ ۹ ــ ۴ ــ

ناصر طیّوب دانش‌آموز چهارم ریاضی از شیراز ۹ ــ

فاضل قربانیان، سوم ریاضی از دماوند. ــ ۱۷، ۹، ۷، ۳

مهدی مهدوی پور، چهارم ریاضی از نیشابور. ۱۱ ــ ۹

بیرجند آقای محمد علی مهدی آبادی: ــ۱۹ ــ ۹ ــ۷

تابان مجید شعبانی ــ کوروشی عباجی: ــ ۷ ــ ۳

بابک مجید زاده: ۱۳ ــ ۱۲ ــ ۹ ــ ۷ ــ ۲

تهران آقای محمد متقی: ۱۷ ــ ۱۳ ــ ۹ ــ ۸ ــ ۷ ــ ۳

آقای حسن علی شاه علی. از تهران

راه‌حلی که برای مسئله مسابقه ارسال داشته‌اید درست است، ولی کمی دیر بدست ما رسید و نتوانستیم از راه حل شما استفاده کنیم. در ضمن، مسئله‌ای که یکی از خوانندگان در خواب دیده بود و شما آن را حل کرده‌اید ناتمام مانده بهر حال از توجه شما به مجله کمال تشکر را داریم.

بیله سوار مغان، **آقای یحیی جهانی** دانش‌آموز سوم ریاضی قضیه‌ای که طرح کرده‌اید تازگی ندارد. در تشابه داریم که نسبت مساحت دو شکل متشابه برابر با مجذور نسبت تشابه آنها است.

قم دیپلمه ریاضی **بانو زهرا طباطبایی**، بلی به هوش بستگی دارد امّا تلاش و پیگیری را دست کم نگیرید. موفق باشید.

تهران دانشگاه صنعتی شریف، **آقای مسعود عوضی**، مقاله ارسالی شما از نظر ترجمه و محتوا با معیارهای مجله همخوانی نداشت. برای شما موفقیت آرزو می‌کنیم.

اخبار ریاضی

۱ــ مسابقات مرحلهٔ دوم المپیاد ریاضی با حضور ۱۸ نفر خواهر و ۱۳۶ نفر برادر برگزیده شده از مرحله اول در ایام فرخنده دههٔ فجر، ۱۲ و ۱۳ بهمن‌ماه در آبادان برگزار گردید سؤالات وسیله اساتید و دبیران و کارشناسان در خود آبادان طرح و اوراق در همانجا تصحیح شد. اسامی ۶ نفر دانش‌آموزان انتخاب شده به شرح زیر است:

۱ــ وحید توسلی

۲ــ حمیدرضا داودی

۳ــ علی رجائی

۴ــ آرش رستگار

۵ــ پیمان کسائی

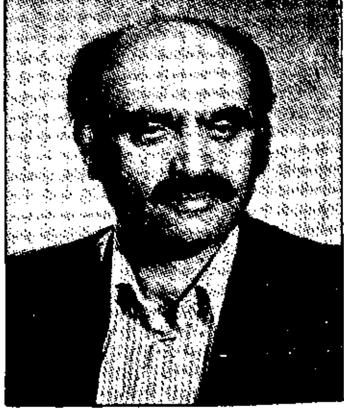
۶ــ بهرنگ نوحی

که بلافاصله برنامه‌کار وارد وی درسی آنها نیز اعلام خواهد شدگزارش مفصل این مسابقه در شماره‌آینده خواهدآمد.

برگزاری جلسات شورای برنامه‌ریزی ریاضی دورهٔ متوسطه در روزهای پنجشنبه ۵ و ۱۹ بهمن‌ماه تشکیل و ریز مواد هندسه وریاضیات کاربردی را تصویب کرد قرار است در جلسات ۳ و ۱۷ اسفندماه ریز مواد جبر نیز تصویب گردد ریز موادآنالیز در شهریورماه تصویب شده بود.

۲ــ ریز مواد برنامه ۴ ساله دانشسرای مقدماتی‌وسیلهٔ دبیران‌دانشسراها کارشناسان گروه ریاضی‌و واحدتربیت معلم دفتر تحقیقات تنظیم و مؤلفین نیز انتخاب گردیدندقرار است این‌کتابها به ترتیب‌از سال‌اول و از سال‌تحصیلی ۷۰ ــ ۶۹ در دانشسراها اجرا گردد.

به یاد استاد دکتر مسعود فرزان



بقلم: محمدجواد فرزان

مقاله‌ای که ذیلاً از نظر خوانندگان عزیز مجله می‌گذرد، یادنامه‌ای است به قلم برادر گرامی روانشاد دکتر مسعود فرزان، که در ۲۵ آبان ماه بدرود حیات گفت. هیأت تحریریه مجله ضمن ابراز تأسف و تأثر شدید از این حادثه نابهنگام، بار دیگر به خانواده محترم آن مرحوم تسلیت گفته و برای بازماندگان ایشان صبر جمیل آرزومند است. در ضمن باید اذعان کنیم که مقاله حاضر بازتاب احساسات، عواطف و نقطه نظرهای خاص برادر آن مرحوم است که بنابر درخواست ایشان و به پاس احترام به آن مرحوم مبادرت به چاپ آن شده است.

در ظلمت نیمه‌شبی غمبار و دهشتزا، در کمرگاه سفری ناتمام، شمع وجودش به خاموشی گرائید و محیطی را که با دریایی از خصال نیک انسانیش روشنی می‌بخشید در اندوهی بس عمیق فرو برد. در عزایش خون گریستند همهٔ آنهایی که حتی پرتوی از فرزانگیش را، بلوغ و پختگیش را، در طول عمر کوتاه و پرثمرش دریافت کرده بودند.

استاد دکتر فرزان، ساده و بی‌پیرایه زیست، به آب و رنگها دل نباخت، وجودش یکسره شوق و اشتیاق به آموزش و آموختن دانش بود، دانشی که راهگشای زندگی انسانها و خادم پاکی و صمیمیت و انسانیت است. او در ۱۱ اردیبهشت ۱۳۲۲ در شهر کرد دیده به جهان گشود. گوئی خداوند، ارمغانی از مهر و محبت را به جهان بشری ارائه داد، همین چشمهٔ جوشان محبت توانست مسیر زندگی پرتلاشش را روشن سازد. او را غمخوار و یار و مددکار هر آشنایی سازد و چنان ارادهٔ استواری بدو بخشد تا علیرغم تمام مشکلات و مسایل از میان کوره راههای مختلف راه تکامل و تعالی را بجوید و بپیماید، مشعل فروزان علم و آگاهی را در دست گیرد، بیاموزد و به دیگران بیاموزاند، کمبود کتاب و محرومیتهای آموزشی شهر کوچک زادگاهش را با جستجویی خستگی ناپذیر دریافتن و مطالعهٔ هر نوشته یا کتابی یا گفتاری که بیانگر نکته‌ای علمی بود پر سازد. او از اوائل دوران تحصیل هم محصل بود، هم معلم و تا پایان نیز چنین بود و به آن افتخار می‌کرد. پس از طی تحصیلات ابتدایی و متوسطه در شهر کرد، در سال ۱۳۴۱ در رشتهٔ ریاضی دانشکده علوم دانشگاه تهران به ادامهٔ تحصیل پرداخت و در سال ۱۳۴۴ به اخذ درجهٔ لیسانس نائل گردید. پس از انجام خدمت وظیفه، به کاری که بی‌صبرانه انتظارش را می‌کشید پرداخت. او دبیر، دبیرستانهای شهر کرد شده بود کاری که برای او لذّت و شوری وصف‌ناپذیر به همراه داشت. با محصلین زندگی می‌کرد، دوستشان می‌داشت و دوستش می‌داشتند. فقط یک درس ریاضی در طی یکسال کافی بود تا چهرهٔ مهربانش سالها در خاطر شاگردانش باقی بماند. ولی عطش خالصانه‌اش به آموختن و یادگرفتن را بیش از یکسال نتوانست مهار کند. همّت بلندش در جستجوی آن بود تا استعداد شکوفایش را طرحی نو در اندازد و در ابعاد وسیعتری بکار گیرد. سال ۱۳۴۷ در فرصتی یکی دوماهه با تلاشی سخت توانست به مؤسسهٔ ریاضیات دانشگاه تربیت معلم راه یابد. و در راه سفر طولانی یادگیری بار دیگر کوله‌بار بر دوش گیرد و مشتاقانه مجدداً سر کلاس بنشیند. پس از طی دو سال تحصیل در این مؤسسه به اخذ دانشنامهٔ فوق لیسانس نائل گردید و با سمت استادیاری در دانشگاه تربیت معلّم به تدریس پرداخت. استاد دکتر فرزان در آبان ماه سال ۱۳۵۱ ازدواج کرد و سپس در ادامهٔ تحصیلاتش به انگلستان عزیمت نمود و با اخذ دکترا در نظریهٔ گراف در سال ۱۳۵۶ به ایران بازگشت و پرتوان و مصمّم به ادامهٔ کار پرداخت. بی‌وقفه کار کرد کاری که نه زمان محدودش می‌ساخت نه مکان، استراحت و آسایش خویش را در بهتر کار کردن، عمیقتر درک کردن و پیشرفت دانشجویانش می‌یافت.

شعاری زیبندهٔ شخصیت والایش بود «معلّمی هنری است آموختنی باید این هنر را آموخت و در ارائه و انتقال آن صداقت داشت» فروغ دیدگانش اعماق وجود دانشجو را می‌کاوید، در درونش نفوذ می‌کرد و به کلامش ایجاز بیشتری می‌بخشید، چرا که او خود را لحظه‌ای از دنیای دانشجویی جدا نمی‌یافت، چه افتخار می‌کرد به دانشجویان، چه تقدیس می‌کرد آنهایی را که در جستجوی معرفتند. مشکلات شخصی دانشجویی می‌توانست او را منقلب سازد، روزها به فکر وا دارد، تمام قوایش‌رابکارگیرد تا فراست و اتکا به نفس‌او را یاری‌دهد و در جهت حل مشکلاتش بکوشد.

سال ۱۳۵۹، انقلاب فرهنگی و تعطیلی دانشگاهها، او را به جستجوی راه تازه‌ای برای خدمت به جامعه وا داشت ابتدا به کار ترجمه پرداخت ولی روح پرفتوحش قانع نشد، با فراهم شدن امکاناتی در دفتر تحقیقات سازمان پژوهش آموزش و پرورش، به تصحیح کتابهای درسی دبستان تا دبیرستان پرداخت که به سرعت به صورت کاری بنیادی در جهت تألیف و بازآموزی آموزش ریاضی در سطح ایران تحوّل یافت و در انجام چنین کاری که به گمان خودش کاری خطیر، حساس، ظریف و مهم بود. نقش ارزنده‌ای ایفا نمود. بنا به اظهار کارشناسان دفتر تحقیقات وی در تمام ۲۲ جلسه شورای برنامه‌ریزی ریاضی که تا سال ۶۴ ادامه داشت. شرکت فعال داشت و در تمام جلسات صاحبنظر بود و می‌توان گفت که در تنظیم و تصویب مواد جدید ریاضی مدارس که

موجب پیدایش کتب ریاضی فعلی شد، سهم بسزایی داشت. خاطرات تلاشهای شبانه‌روزیش، در شهرهای مختلف ایران نیز در اذهان دبیران و معلّمین یادش را زنده نگه می‌دارد. مشکلات را به جان می‌خرید، اگر وقفه‌ای پیش می‌آمد رنج می‌برد و با تمام وجود بر تلاشش می‌افزود، چرا که او سالهای مشارکت در تألیف کتابهای درسی ریاضی را بهترین سالهای عمر خویش می‌دانست و امروزه هزاران نهال نوشکفته سیراب از چشمهٔ جوشان محبتش، آموخته در دریای علمش و پرداخته در مکتب ارادهٔ استوارش، کوه اندوهش را بر دوش می‌کشند. براستی که چه سخت‌وطاقت‌فرساست‌تحمل‌اندوه مرگش و چه مشکل‌است‌سرکشیدن شوکران تلخ‌هجرانش.

و چه نیکو آمرزشی است سوگندی از درون، کلامی از عمق وجود که بی‌گمان تحقق بخش آرزوهای اوست که سالها رنج و مرارتش را کشید:

«در پس هق‌هق گریه‌هامان، در افق آرزوهای پاکمان تولدی صورت گرفته، تولد خواستنها پر نور تجلّی ارادهٔ استوارت. و ما میان ارادهٔ استواری که در وجود گرانمایه‌ات برای پیمودن راه علم و دانش و خدمت به جامعه روح موج می‌زد، با قلوبی سرشار از عشق به دانش این راه را خواهیم پیمود و با بهره جستن از یادگارهای فراوانت پای در مسیری می‌نهیم که تو پیشتر با عبور از دهلیزهای پیچ اندر پیچ بسیار، آغاز نمودی و آن همانا خدمت و تعهد به شیفتگان علم و کمال این مرز و بوم است. نام بزرگت برای ما در دانشگاه و در هر جا که تعلّمی هست و تعهّد و تعلیمی، چون گوهری درخشان خواهد درخشید»*.

«کی می‌روی زیادم لطف و وفای فرزان
یاد از صفای فرزان، یاد از صفای فرزان

چون موج غم کف‌آلود بر صخره‌های الفت
سیلی خورم ز طوفان اندر قفای فرزان

گل ناله‌های غم را در چشمها نظر کن
خون جگر بریزیم در پشت پای فرزان

یاد از کلاس درسش، یاد از نگاه ژرفش
افسوس و صد دریغا از هر نوای فرزان

آن بی‌ریای بی‌غش، با خنده‌های دلکش
عطر هوای ما بود افسانه‌های فرزان

مست شراب حرفش، چشم خمار مستش
صد حرف و صد کنایه در هر ندای فرزان

یاد اجل چه محزون بر این سرا وزیدی
فصل خزان کشاندی اندر هوای فرزان

پژمردن شقایق حرف جدید و نوئیست
اما چه زود پژمرد رنگ جلای فرزان
غم در دلم نشسته، نایم به غم شکسته
دیگر چگونه گویم شعری برای فرزان**».

و سرانجام در ساعت ۳ بامداد روز پنجشنبه ۲۵ آبان ماه سال ۱۳۶۸ شمع وجودش به خاموشی گرائید و چشم از این جهان فرو بست. از او یک دختر و سه پسر به یادگار مانده است که امید است بتوانند راهش را ادامه دهند و نامش و یادش را زنده نگه دارند. از دوران عمرکوتاه‌ولی‌پربار این استاد فرزانه یادگارهایی مکتوب‌بجا مانده که به سه دسته تقسیم می‌کنیم.

دستهٔ‌اول‌مقالاتی است که به زبان‌های‌خارجی در مجلات‌خارجی به چاپ رسیده است:

1. Automor phisms of double covers of a graph; proc. coll. int. C.N.R.S. No 260 problems combinatories et theorie des praphes, paris, (1976), pp 137 - 1388
2. Matrix methods in graph theory, M.Sc. Thesis, University of Wales, Swansea 1974
3. The theory of covering graphs, ph.D. Thesis, University of Wales, swansea 1977.
4. Vector spaces associated to a graph; proc. th Iranian Maths. cont (1978), pp. 108 - 112.
5. (W: th D.A. Waller) Local joins and lexicogva phic produets of graphs; Bull. Iranin Math. Soc. 1(2) (1974), pp 1 - 17.
6. (with D.A. Waller) Kronecker Products and local joins of graphs, Canada. J. Mathe. 2q (1977). 255 - 26q
7. (With D. A. Waller) Antipedal embeddings of graphs. J. London Mathe. Soc. 15 (1977) pp J 77 - 383.
8. Trees of skeletal structures, (Department of Mathematics, University for Teaoher Education Tehran 15614, Iran(.
9. How trees grow? proc. 16th Iranian maths, conf. 1985. (to appear).

دستهٔ دوم کار و فعالیتهای او در وزارت آموزش و پرورش در راستای برنامه‌ریزی تألیف و آموزش مستمر ریاضی در سالهای ۱۳۶۰ تا ۱۳۶۶ است که مشترکاً با دیگر اساتید محترم منجر به تألیفات زیر شد:

ریاضی دوّم دبستان
ریاضی چهارم دبستان
راهنمای معلم ریاضی دوم دبستان
راهنمای معلم ریاضی چهارم دبستان
کتاب ریاضی اول، دوم و سوم راهنمایی
راهنمای معلم ریاضی دورهٔ راهنمایی

دستهٔ سوم کتابهایی است که براساس نیاز در دوره‌های کارشناسی ریاضی از انگلیسی به فارسی ترجمه شده است این آثار عبارتند از:

جبرخطی‌تألیف ای‌مری ترویرانتشارات‌سروش
نخستین درس در جبر مجرد (جلد اول) تألیف جان. ب. فرالی مرکز نشر دانشگاهی
نخستین درس در جبر مجرد (جلد دوم) تألیف جان. ب. فرالی زیر چاپ
جبر خطی و نظریه ماتریسها تألیف ای. وارد. نرینگ در دست چاپ
جبر خطی مقدماتی تألیف برنارد کلمن با همکاری دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده

اخیراً ترجمهٔ «نخستین درس در جبر مجرد جلد اول» از طرف شورای کتاب به عنوان بهترین ترجمهٔ سال برگزیده شده است.

علاوه بر آثار فوق مرحوم دکتر مسعود فرزان چند مقاله در مجلهٔ رشد ریاضی و نیز تعدادی جزوات آموزشی در سطح کلاسهای دانشگاهی ترجمه و تألیف نموده که فعلاً لیست دقیقی از آنها در دست نیست.

یادش گرامی باد

---

* و ** نقل از مقالاتی که توسط دانشجویان در رثای دکتر فرزان ایراد شد.

معرفی مجلات، نشریات ریاضی

اولین شماره «مجله علوم پایه» جمهوری اسلامی ایران انتشار یافت. این مجله که به همت و مدیریت وزارت فرهنگ و آموزش عالی منتشر می‌شود اختصاص به نشر مقالات تخصصی در زمینه‌های مختلف علوم پایه دارد. در مقدمهٔ این مجله ذکر گردیده که هدف اصلی انتشار این نشریه که به‌صورت فصلنامه و در سطح بین‌المللی منتشر می‌گردد. عبارت است از انتشار آخرین نتایج مطالعات تحقیقات ارزندهٔ علمی و عملی ــ کاربردی به منظور کمک به‌مساله‌یابی و حل مسائل علمی و توسعه اجتماعی اقتصادی و خدماتی در زمینه‌های مختلف علوم نظیر زیست‌شناسی، شیمی، فیزیک، زمین‌شناسی، ریاضی و علوم کامپیوتر، کمک به ایجاد ارتباط بین مراکز علمی و تحقیقاتی و همینطور بین دانشمندان، محققین و کارشناسان داخل و خارج به منظور انتقال، تبادل و استفاده آموخته‌ها و تجربیات و اشاعه دستاوردهای علمی و در نتیجه گسترش مرزهای دانش در کشور و شناساندن فعالیتهای علمی به محافل علمی بین‌المللی است.

امیدواریم که با مساعی هیأت تحریریه و دست‌اندرکاران محترم این نشریه گامی در جهت شناساندن فعالیت‌های علمی و تحقیقاتی و قدمی در جهت حل مسائل اجتماعی و اقتصادی کشور برداشته شده باشد.

کتب جدیدی که به دفتر مجله رسیده‌اند:

۱ ــ آموزش ریاضیات دبیرستانی، تألیف ترجمه دکتر جواد همدانی‌زاده، ناشر: مرکز نشر دانشگاهی.

۲ ــ آشنایی با تحقیق در عملیات، جلد اول، محمدی طه، ترجمه محمد باقر بازرگان، ناشر: مرکز نشر دانشگاهی.

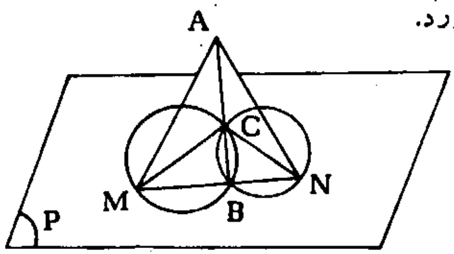
۳ ــ هندسه دیفرانسیل مقدماتی، تالیف بارت اونیل، ترجمه، بیژن شمس، محمد رضا سلطانپور، ناشر: مرکز نشر دانشگاهی.

اشتباه در کجاست

یکی از خوانندگان مجله، که متأسفانه اسمشان خوانا نیست، سه قضیه یا بهتر بگوئیم شبه قضیه! با برهان برای ما ارسال داشته‌اند. از خوانندگان می‌خواهیم که این برهانهای ظاهری را با دقت مطالعه کرده و برای خودشان اشتباه را پیدا کنند. درضمن قضیه چهارمی که در دنبال مطلب می‌آید از استاد و همکار گرامیمان آقای غیور به این سه قضیه اضافه شده است که آنهم محتوایی شبیه سه مسئله اول را دارد و ازجمله مسایل قدیمی است.

مسأله ۱ ــ از نقطه A خارج یك صفحه می‌توان بی‌نهایت عمود بر آن واردکرد.

حل ــ اگر A در خارج صفحه باشد و دونقطه M و N در داخل صفحه P در نظر گرفته شود، دو کره به اقطار AM و AN رسم می‌کنیم. فصل مشترك این دوکره با صفحه P دو دایره (مطابق شکل) می‌شودکه در نقاط B و C یکدیگر را قطع کرده‌اند. از A به M و N و B و C وصل می‌کنیم. اگر صفحه‌ای از A و M و C بگذرد، کره به قطر MC را در روی محیطش، یعنی C قطع می‌کند و زاویه ACM که مقابل قطر است قائمه و زاویه ACN هم که متقابل به قطر AN است قائمه می‌باشد. پس AC که بر دو خط متقاطع از صفحه P عمود است، برصفحه P عمود خواهد بود. همین‌طور AB هم‌که بر BN و BM عمود می‌باشد، برصفحه P عمود است. چنانچه بجای M و N، دونقطه دیگر اختیارکنیم، دو عمود دیگر خواهیم داشت‌که از A بر صفحه P فرودآمده‌اند در نتیجه عمودهای بیشماری را می‌توان از نقطه A بر صفحه P فرودآورد.



قضیه: تمام مثلث‌ها، متساوی‌الساقین هستند.

مثلث غیر مشخص ABC را در نظر می‌گیریم و نیمساز CG ازآن را رسم می‌کنیم تاعمود نصف AB را در G قطع کند. عمودهای GD و GF را بر AC و CB فرود می‌آوریم و از G به A و B وصل می‌کنیم. بنابر خاصیت نیمساز داریم $GF=GD$. دو مثلث قائم‌الزاویه CDG و CFG در حالت وتر و یك ضلع مساویند. پس

$$CD=CF \quad (1)$$

چون G روی عمود نصف AB قرار دارد پس

$$CA=GB$$

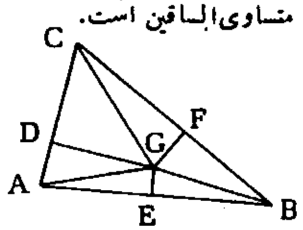
مثلث‌های ADG و BFG با هم مساوی‌اند پس

(۲) $AD=FB$

طرفین روابط (۱) و(۲) را جمع می‌کنیم

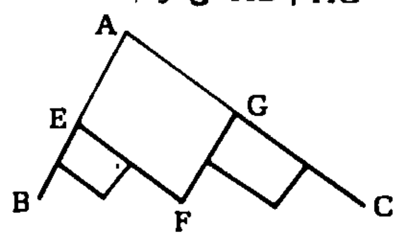
$$CD+AD=CF+FB \Longrightarrow AC=CB$$

یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین است.



قضیه: در هرمثلث مجموع دوضلع مساوی ضلع سوم است.

برهان ـ وسطهای سه ضلع مثلث را مطابق شکل بهم وصل کنید. خط شکسته BEFGC، خط شکسته چهارضلعی است به مبدا B وانتهای C و طول‌آن مساوی AB+AC است. این عمل را در هر یک از دو مثلث مساوی BEF و FGC عیناً تکرارکنید. چهارمثلث روی BC پدید می‌آیدکه ازآنها خط شکسته ۸ ضلعی به مبدأ B و انتهای C پدید می‌آید و طول‌آن برابر AB+AC است. دربازه هر یک از چهار مثلث روی BC، این عمل را تکرارکنید. هشت مثلث روی BC پدید می‌آید وخط شکسته ۱۶ ضلعی‌با همان خاصیت پیدا می‌شود. اگر عمل را n بار انجام دهیم خط شکسته 2^{n+1} ضلعی با همان خاصیت پدید می‌آید. هر چه n بیشتر شود، طول خط شکسته n ضلعی به سمت BC میل خواهدکرد و در حد AB+AC=BC می‌شود.



تمام نقاط داخل دایره روی محیط‌آن قرار دارند.

اثبات. فرض‌کنیم B نقطه‌ای در داخل دایره باشد. قطر AC راکه از B می‌گذرد رسم‌کنید و در امتداد AC نقطه D را چنان تعیین‌کنیدکه

$$\frac{DA}{DC}=\frac{BA}{BC} \qquad (۱)$$

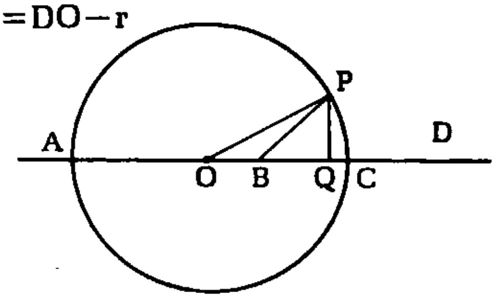
PQ عمود منصف BD را رسم‌کنید تا دایره را در P قطع کند. از P به O و B وصل‌کنید. اگر شعاع دایره r باشد، داریم:

$$AB=r+OB$$

$$BC=r-OB \xrightarrow{\text{رابطه (۱)}} \frac{OD+r}{OD-r}=\frac{r+OB}{r-OB}$$

$$AD=r+OD$$

$$DC=DO-r$$



$$(r+OB)(OD-r)=(OD+r)(r-OB)$$

$$\Longrightarrow r^2=OB\times OD \qquad (۲)$$

$$OD=OQ+QD$$

و

$$OB=OQ-BQ$$

$$(۲) \Longrightarrow r^2=OQ^2-BQ^2$$

$$OP^2-BP^2=OQ^2-BQ^2$$

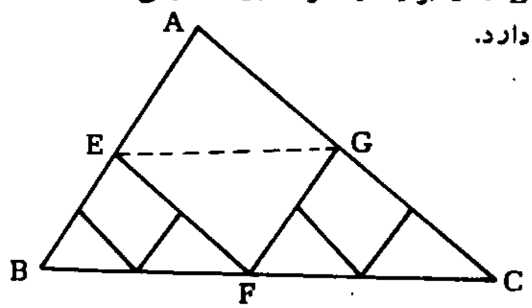
(ازمثلث‌های BPQ و OPQ داریم $BP^2=BQ^2+QP^2$ و $OP^2=OQ^2+PQ^2$)

پس،

$$r^2-BP^2=OQ^2-BQ^2$$

$$r^2-BP^2=r^2 \Longrightarrow BP=0$$

یعنی B و P بر یکدیگر منطبق‌اند، یعنی B برروی دایره قرار دارد.



در شکل بالا، اگر رئوس مثلث‌های کوچك را به ترتیب به هم وصل‌کنیم، خطوط موازی پدید می‌آیدکه فاصله اولی از BC، نصف ارتفاع رأس A از مثلث است و به تدریج نصف می‌گردد و به سمت صفر میل می‌کند و طول خطهای شکسته که برابر AB+AC است، تغییر نمی‌کند. ولی فاصله خطهای موازی با BC به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین BC نمی‌تواند مساوی AB+AC بشود. زیرا بنابه تعریف خط ضخامت ندارد.

جواب نامه‌ها

آقای علی صمدی نادری، کافیست طولهای سه ارتفاع متوالی مثلث‌ها را حساب کنید. معلوم خواهد شد آیا تشکیل تصاعد می‌دهند یا خیر.

کرمان، آقای رضا خرّمی مقدم دانش‌آموز،
نوشته‌های شما درباره محاسبه شعاع دایره محیطی چند ضلعی درست نیست.

گرگان، آقای کریم‌نژاد، برای محاسبه محیط بیضی فرمولی وجود ندارد. همانطور که نوشته‌اید از راه انتگرال و بطور تقریبی می‌توان آنرا محاسبه کرد. (یا از طریق فیزیکی می‌توان متحرکی را با سرعت ثابت روی محیط بیضی راه برد و زمان طی مسافت محیط را در سرعت آن ضرب کرد.)

نجف آباد، دانش‌آموز، آقای کیامرث نوروزی، سعی کنید مسئله‌ای را که حل می‌کنید به حل مسئله دیگر ارجاع ندهید. اگر مسئله شماره ۱۶، قضیه‌ای از هندسه و یا مسئله اصلی در متن کتاب هندسه بود، راه حل شما از این نظر اشکالی نداشت.

همدان، آقای سید انور محمودی نصرآبادی، مطالب ارسالی شما بعضاً ساده و بدیهی، برخی غلط و برخی تنها در حالت خاص درست است.

سبزوار، دانش‌آموز، برادر امیرخسرو دلیر ثانی، بلی دو مثلث در حالت تساوی دو ضلع و زاویه روبرو به ضلع بزرگتر با هم مساوی‌اند.

این قضیه در کتابهای قدیم موجود است می‌توانید به کتاب هندسه مرحوم رهنما مراجعه کنید.

سیرجان، دبیر دبیرستان‌ها، آقای یدالله محمدی، قبلاً در مجله رشد، مقاله‌ای شبیه مقاله شما، از طرف آقای دکتر بابلیان چاپ شده است موفقیت شما را آرزومندیم.

کرمان، دانش‌آموز، آقای فرّهی مقدم، اگر فرمولها از خود شما است اثباتش را بفرستید. اگر از جای دیگر برداشته‌اید، منبع نوشته‌هایتان را ذکر کنید.

بروجرد، آقای کوروش مقدسی، اثبات قضیه فیثاغورث درست است. برای مطالب ارسالی خودتان درباره بازی با اعداد، برهان ارائه دهید.

اصفهان، دانش‌آموز، آقای امیررضا پنجه‌پور، مطالب ارسالی شما تازگی ندارد. از خاصیت اتّحادها می‌توان آنها را نتیجه گرفت.

تبریز، دانش‌آموز نادر علیپور فایند. مسئله اوّل شما در مجله رشد چاپ شده است. درباره مسئله دوّم کافیست پای ارتفاعات مثلث را بهم وصل کنید.

بیرجند، دانش‌آموز، آقای محمدعلی حسین آبادی، روش تثلیث زاویه ارسالی شما درست نیست. اگر در دایره‌ای یک وتر را به سه جز مساوی تقسیم کرده از مرکز دایره به نقاط تقسیم وصل کنیم روی دایره سه کمان مساوی پدید نمی‌آورد.

وحیده عباسی دانش‌آموز سوم: تابع $p(x)$ را بصورت $p(x)=(x-a)Q(x)+A$ و $p(x)=(x-b)Q'(x)+B$ $p(x)=(x-a)(x-b)Q''(x)+kx+h$ بنویسید با استفاده از فرض مسئله دستگاه $\begin{cases} ka+h=A \\ kb+h=B \end{cases}$ را حل کنید.

قم آقای حسن اسکندرنیا؛ مطالب ارسالی شما بررسی شد. کتاب تئوری اعداد، تألیف دکتر غلامحسین مصاحب یکی از مراجعی است که شما می‌توانید بدان رجوع کنید. صورت و برهان دقیق یکی از قضایای شما در کتاب نظریه اعداد، جلد دوم، قسمت سوم، صفحه ۱۴۹۴ تألیف دکتر غلامحسین مصاحب آمده است.

تبریز، آقای علی خانی مسائل ارسالی شما به کمک قضیه فرما و روابط بین ضرایب یک چند جمله‌ای قابل حل است. مجله از همه خوانندگان تقاضا دارد در موقع ارسال مقاله یا مسئله (در صورت وجود) منابع آن را ذکر نمایند

مشهد، دانشجو رضا ضیاء توحیدی، مسئله شما همان نمایش یک عدد در مبنای ۳ است. همان‌طوری که میدانید نمایش اعداد در مبنای ۳ دارای ارقام ۱، ۰ و ۲ است و شما به جای ۱ عدد ۱ ـــ را که همان نمایش ۱ به هنگ ۳ است، قرار داده‌اید

زنجان پوپک اعرابی مسئله ارسالی شما به کمک یک دستگاه دو معادله و دو مجهول قابل حل است. و سؤال شما در رابطه به اینکه چگونه مطالب ریاضی را یاد بگیرید، پیشنهاد ما این است که در طول سال تحصیلی به مطالعه بپردازید و از مطالعه در شب امتحان خودداری کنید. در ضمن برای شرکت در المپیاد ریاضی بهتر است بخش مسائل مجله رشد ریاضی و

کتابهائی که مسائل المپیادها را بررسی کرده‌اند مطالعه کرده و مسائل مشابهی را حل نمائید

اصفهان، دانش‌آموز، آقای امینی، حل معادله $x^2+y^2=z^2$ را می‌توانید در کتاب نظریه اعداد ترجمه دکتر نارنجانی و تئوری اعداد تألیف دکتر غلامحسین مصاحب مشاهده نمایید.

تهران، بندرعباس، آقای غلامرضا طوقی، و محمدمهدی توکل، طرح بسیار زیبای بسط دوجمله‌ای مثلث خیام علامت ریاضی اشکال هندسی به دستمان رسید. درج این طرح در مجله برایمان امکانپذیر نیست. توفیق شما را از خدای یکتا مسئلت داریم.

نیشابور، آقای مهدی مهدوی پور، از لطف شما نسبت به مجله صمیمانه سپاسگزاریم. امیدوارم روزی برسد که مجله بطور ماهیانه منتشر می‌شود.

آقای علی دلاور خلقی، دانشجوی رشته ریاضی کاربردی، از دانشگاه سیستان و بلوچستان؛ مطلبی برای ما ارسال داشته‌اند که خلاصه آن چنین است:

اگر $|x|<1$ آنگاه بنابر حدمجموع یک تصاعد هندسی نزولی $1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}$ با شرط اینکه $|x|<1$ از دوطرف تساوی، فوق مشتق می‌گیریم بنابراین،

$$1+2x+3x^2+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2}$$

بار دیگر با همان شرط از دوطرف مشتق می‌گیریم؛

$$2+3\times 2x+4\times 3x^2+\ldots=\frac{2}{(1-x)^3}$$

بنابراین به استقراء ثابت می‌شود که، با شرط $|x|<1$ ،

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{k!\,r^{k-m-1}}{(k-m-1)!}=\frac{(m+1)!}{(1-r)^{m+2}}$$

آقای سعید ... چهارده ساله دانش‌آموز اوّل از اصفهان، در پاسخ سئوال شما که آیا تا قبل از به دنیا آمدن گاوس مسئله تقسیم دایره و یا رسم هفده ضلعی منتظم بصورت فرمول درآمده بودویا گاوس آنرا از روی حل معادله $\frac{x^{n}-1}{x-1}$ پیدا کرد؟ به اطلاع می‌رساند که گاوس بدون اطلاع از چنین مسئله‌ای، از روی حل معادله فوق این مسئله را کشف و تعمیم داد. دلیل آن مقدمه‌ایست که در کشف حل این مسئله نوشته است. مقدمه گاوس مقتبس از کتاب تئوری مقدماتی اعداد جلد اوّل تألیف دکتر غلامحسین مصاحب صفحه ۵۶۶ بند ۹۰۱۴:

«تاریخ ۲۹ مارس ۱۷۹۶ بود، و تصادف و اقبال درآن هیچگونه دخالتی نداشت. پیش از این، محققاً در طی زمستان ۱۷۹۶ . من هرچه‌را که مربوط به تفکیک ریشه‌های معادله $\frac{x^{p}-1}{x-1}$ به دو دسته بود کشف کرده بودم. پس از تفکّر شدید در رابطه همهٔ ریشه‌ها با یکدیگر بر مبانی علم حساب، هنگامی که ایّام تعطیل را در بر او نـ تسوایگ (مولد گاوس)، می‌گذرانیدم، در صبح روزی که بدان اشاره کردم (پیش از برخاستن از رختخواب) توفیق یافتم که آن رابطه را به روشنترین وجهی از پیش چشم بگذرانم. چنانکه بلافاصله آن را در حالت خاص ۱۷ ضلعی به کار بردم.»

آن روز ۳ مارس ۱۷۹۶ بود و یک ماه مانده بود که گاوس به ۲۰ سالگی برسد.

آقای بهزاد پاکروح، از جهرم. ادعای شما مبنی بر اینکه آخرین قضیه فرما را حل کرده‌اید نادرست است. زیرا این قضیه سالهای سال است که در قلمروی ریاضیات مطرح است و ریاضیدانان بزرگی بر روی آن کار کرده‌اند و تنها توانسته‌اند حالتهای خاصی از آن را حل نمایند. بهتر است به کتابهایی که در این زمینه نوشته شده است مراجعه نمائید. در شماره ۲۳، و در رابطه با قضیه فرما، مقاله‌ای درج شده است.

آقای پیمان نظریان، برهان مسائل ارسالی با اشکالات جزئی همراه است، موفقیت شما را آرزومندیم.

دانش‌آموز سال اول راهنمایی، راژان پیران از مدرسه تیزهوشان زنجان، احکام ذیل را برایمان ارسال داشته‌اند

اگر مضارب عدد ۹ را از یک دهه بالاتر از آن عدد کم کنیم حاصل مساوی مجموع ارقام عدد بزرگتر است. مثلاً

۱۲-۹=۱+۲

۲۴-۱۸=۲+۴

۴۷-۳۶=۴+۷

....

دانش‌آموز عزیز، انشاءالله وقتی که به کلاس چهارم متوسطه رسیدید، و مبحث نظریه اعداد را مطالعه کردید، می‌توانید احکام مشابهی را به دست آورید.

اگر معادله سیاله ذیل را حل کنید اعداد مورد نظر به دست آمده و حکم شما در حالت کلی برای اعداد دورقمی ثابت می‌شود، با همین روش، می‌توانید احکام مشابهی را برای اعداد سه رقمی و... به دست آورید

اگر $\overline{ab}$ نمایش عدد دورقمی باشد آنگاه جوابهای معادله ذیل مورد نظر است

$\overline{ab}-9K=a+b$

$10a+b-9k=a+b$

$9a-9k=0$ و $a=k$

که با تغییر k از ۱ تا ۹ رقم دوم عدد؛ یعنی a به دست می‌آید و رقم اول؛ یعنی b ، می‌تواند یک عدد یک رقمی دلخواهی باشد.

آقای محمدرضا جمشیدی ــ اندیمشک دبیرستان مولوی

از توجه شما به مقالهٔ «حل مقدماتی یک مسئلهٔ جبر در چند حالت خاص» مندرج در شماره ۲۱ مجله رشد ریاضی بسیار سپاسگذارم. از اینکه توانسته‌اید در بعضی از حالات خاص جابجایی حلقه را ثابت کنید، باید به شما تبریک گفت. هدف نویسندگان مقالهٔ مذکور این بود که خوانندگان علاقمند با استفاده از روشهای ارائه شده بتوانند جابجایی این نوع حلقه‌ها را بازاء تعدادی نامتناهی از n های طبیعی (مثلاً n هایی که مضارب یا توانی طبیعی یک عدد اول خاص‌اند) ثابت کنند. در هرحال کوششهای شما مورد تمجید مسئولین مجله است و امیدواریم موفق باشید.

اطلاعیه

دربارهٔ نشریات رشد آموزش تخصصی

مجلات رشد آموزش مواد درسی مدارس کشور که بمنظور ارتقاء سطح دانش معلمان و ایجاد ارتباط متقابل میان صاحبنظران، معلمان و دانشجویان با برنامه‌ریزان امور درسی از سوی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش هر سه ماه یکبار ــ چهار شماره در سال ــ منتشر می‌شود در حال حاضر عبارتند از:

۱ ــ آموزش ریاضی ۲۴
۲ ــ آموزش شیمی ۲۲
۳ ــ آموزش جغرافیای ۱۸
۴ ــ آموزش ادب فارسی ۱۷
۵ ــ آموزش زیست‌شناسی ۱۸
۶ ــ آموزش زبان ۱۹
۷ ــ آموزش زمین‌شناسی ۱۷
۸ ــ آموزش فیزیک ۱۶
۹ ــ آموزش معارف اسلامی ۷
۱۰ ــ آموزش علوم اجتماعی ۲

دبیران، دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر علاقمندان به اشتراک این مجلات می‌توانند جهت دریافت چهار مجلّه در سال مبلغ ۴۰۰ ریال به حساب ۹۲۹ خزانه بانک مرکزی ــ قابل پرداخت در کلیه شعب بانک ملّی ــ واریز و فیش آن را همراه با فرم تکمیل شده زیر به نشانی تهران، جادّه آبعلی، خیابان سازمان آب بیست‌متری خورشید مرکز توزیع انتشارات کمک آموزشی کدپستی ۱۶۵۹۸ ــ تلفن ۷۸۵۱۱۰ ــ ارسال دارند. ضمناً؛ معلمان، کارشناسان، مدیران، پژوهشگران و سایر علاقمندان به امور تعلیم و تربیت جهت آگاهی بیشتر از یافته‌های صاحبنظران می‌توانند با پرداخت مبلغ ۸۰۰ ریال در هر سال ۴ جلد **فصلنامه تعلیم و تربیت** دریافت نمایند.

مجلات رشد تخصصی در مراکز استان در کتابفروشیهای زیر و سایر شهرستانها در فروشگاههای معتبر مطبوعات بصورت فروش آزاد عرضه می‌شود

تهران:	انتشارات مدرسه ــ اوّل خیابان ایرانشهر شمالی
اهواز:	کتابفروشی ایرانپور زیتون کارمندی خیابان کمیل بین زاویه و زهره پلاک ۲۰
اصفهان:	کتابفروشی مهرگان چهار باغ ابتدای سید علی خان
ارومیه:	کتابفروشی زینالپور نمایندگی و خبرنگاری روزنامه
اراک:	کتابفروشی گنج دانش بازارچه امیرکبیر
بندرعباس:	کتابفروشی مالوک خیابان سید جمال الدین اسدآبادی
باختران:	کتابفروشی دانشمند خیابان مدرس مقابل پارکینگ شهرداری
خرم‌آباد:	کتابفروشی آسیا خیابان شهدا شرقی
رشت:	کتابفروشی فرهنگستان خیابان نامجو جنب دانشگاه
زنجان:	کتابفروشی شهید بهشتی خیابان آیتا... طالقانی
سنندج:	کتابفروشی شهریار خیابان فردوسی
ساری:	شرکت ملزومات و معارف خیابان انقلاب روبروی اداره برق داخل کوچه
شیراز:	پیام قرآن میدان شهدا جنب اداره آموزش و پرورش مرکز فرهنگی
کرمان:	فرهنگ‌سرای زمین پارک مطهری
مشهد:	انتشارات آستان قدس رضوی خیابان امام خمینی روبروی باغ ملی
یاسوج:	کتابفروشی فرهنگ جنب سینما دنا خیابان شهید هرمزپور.

* *دانشجویان مرکز تربیت معلم می‌توانند با ارسال فتوکپی کارت تحصیلی خود از ۵۰٪ تخفیف برخوردار شوند.*

فرم اشتراک مجلات رشد تخصصی

اینجانب .... با ارسال فیش واریز مبلغ ۴۰۰ ریال، متقاضی اشتراک یکسالهٔ مجلهٔ رشد آموزش .... هستم.

نشانی دقیق متقاضی: استان .... شهرستان .... خیابان ....

کوچهٔ .... پلاک .... کُدپستی .... تلفن ....

Contents

Roshd, Magazine of Mathematical Education, Vol VI No. 24, Winter 1990 Mathematics Section, 274 BLDG - No. 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave., Tehran - Iran.
A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.

قابل توجه
دبیران و
دانشجویان
فصلنامه
تعلیم و تربیت
آیا شما
مجلات
رشد تخصصی
مخصوص دبیران و دانشجویان که هر
سه ماه یکبار در زمینه آموزش دروس
دبیرستانی منتشر می شود را می خوانید؟