رشد آموزش ریاضی

سال ششم ـ تابستان ۱۳۶۸ ـ شماره مسلسل ۲۲

بها: ۱۰۰ ریال

بسم‌الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یکبار از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی منتشر می‌شود هدف از انتشار این مجله اعتلای دانش ریاضی دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلّم است. علاوه بر این ایجاد ارتباط متقابل بین معلّمین ریاضی و دفتر تحقیقات، به منظور تبادل تجارب، ارائه روشهای جدید آموزش ریاضی، معرفی جنبه‌های تاریخی، فلسفی، کاربردی ریاضیات در سطح پیش دانشگاهی است هیأت تحریریه از مشارکت و همکاری همهٔ علاقه‌مندان بویژه دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان در ارائه مقالاتی در زمینه‌های زیر استقبال می‌کند:

الف) آموزش ریاضی (طرح و بررسی آموزش ریاضی، بویژه آموزش ریاضی در دوره‌های پیش دانشگاهی).

ب) تاریخ ریاضی (مشتمل بر سیر تحول مفاهیم ریاضی، شرح و احوال ریاضیدانان و کارهای علمی آنها، بویژه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی).

ج) فلسفه ریاضی (تبیین مفاهیم ریاضی، ریاضیات چیست، بررسی مکاتب ریاضی، بررسی ارتباط تاریخ و فلسفه ریاضی).

ریاضی کاربردی (مشتمل بر مباحثی در زمینه‌های آنالیز عددی، کامپیوتر و برنامه‌ریزی، تحقیق در عملیات، آمار و احتمال).

د) سایر مباحث ریاضی (مشتمل بر مقالات مختلفی در زمینه‌های مختلف، ارائه راه‌حلهای مختلف برای مباحث ریاضی، ارائه مسائل نمونه).

رعایت نکات زیر در مورد مقالات ارسالی ضروری است:

۱) مقالات ارسالی باید در چهارچوب اهداف فوق و با سبکی مشابه با سبک مقالات چاپ شده در رشد ریاضی باشد و در سطحی عرضه شوند که ضمن داشتن محتوی مطلوب دارای کیفیت عرضه مطلوب هم باشند؛

۲) مقالات باید با خط خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) و به صورت یک سطر در میان و با در نظر گرفتن جای کافی در حاشیه تهیه شود و صفحات به طور دقیق شماره‌گذاری شود؛

۳) فهرست مراجع مقاله به طور کامل و در دو قسمت فارسی و خارجی و به ترتیب الفبایی و طبق استاندارد مقالات علمی درج شود؛

۴) مقالات ترجمه شده از زبانهای خارجی همراه با متن اصلی ارسال شود؛

۵) مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور به چاپ رسیده باشد؛

۶) رد یا قبول و حک و اصلاح و ویراستاری مقالات به عهدهٔ هیأت تحریریه است.

رشد آموزش ریاضی

سال ششم ـ تابستان ۱۳۶۸ ـ شمارهٔ مسلسل ۲۲

نشریه گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی. تلفن ۴ ـ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۵۲)

سردبیر : دکتر علیرضا مدقالچی

مدیر داخلی: سید محمدعلی بصام‌تبار

مدیر فنی هنری و تولید: حسین فرامرزی نیکنام

صفحه‌آرا : محمد پریسای

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر دانش‌پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. جهت ارتقاء کیفی آن نظرات ارزنده خود را به صندوق پستی تهران ۳۶۳ ـ ۱۵۸۵۵ ارسال فرمائید.

فهرست

پیشگفتار

تیم جمهوری اسلامی ایران درسی امین المپیاد ریاضی به مقام چهاردهم دست یافت و بسیاری از کشورهای پیشرفته را پشت سرگذاشت. یعنی، در واقع از بلوک غرب فقط کشورهای آمریکا آلمان غربی و فرانسه جلوتر از ما قرار دارند. این نتیجه نوید بخش و این جهش غیر منتظره نتیجه فعالیتهای مختلف سازمان پژوهش، دفتر تحقیقات، کمیته المپیاد و گروه ریاضی است. بعد از دهه شصت سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش دست به فعالیتهای مختلفی برای جلوگیری از افت ریاضی زده است که از آن جمله می‌توان به انتشار مجله رشد آموزش ریاضی و تقویت مسابقات دانش‌آموزی و تشکیل کمیته مسابقات دانش‌آموزی اشاره کرد. هم اکنون درمی‌یابیم که این فعالیتها منشاء اثر بوده است و نتیجه آن را هم در جنب و جوش ریاضی داخل کشور مشاهده می‌کنیم و هم از کارنامه سه ساله خود در المپیاد بین‌المللی ریاضی درمی‌یابیم. درست است که مشاهده این موفقیتها در ما ایجاد شور و شعف می‌کند، اما در عین حال مسؤولیت همه ما را سنگینتر کرده است. دریافته‌ایم که استعداد بالقوه در جوانان ما وجود دارد و مختصر برنامه‌ریزی و دقت، اندکی از این استعداد را شکوفا کرده است از این رو باید برای به فعل درآوردن این استعدادهای بالقوه کار و کوشش شود برنامه ریزی دقیق انجام گیرد و این نوع برنامه‌ریزیها باید در سطوح وسیعتر گسترش یابد و فقط مختص تربیت شش نفر نگردد. ما تعهد به بسازسازی و دگرگونی جامعه خود داریم. ما باید از هر نظر در جامعهٔ خود رفع استضعاف کنیم. لهذا، نیاز به نیروهای کارآمد و متخصص داریم نیروهایی که مسائل و مشکلات جامعه را دریابند و با برنامه‌ریزی دقیق در راه رفع مشکلات تقلا و کوشش نمایند برای تربیت این نیروها، باید ترتیبی اتخاذ شود تا این نوع استعدادهای درخشان شناخته شده و شکوفا گردند و برای ارتقاء علمی آن مساعدت شود. بطوری که اشاره کردیم کوششهایی که در این چند سال به عمل آمده است این چنین نتایج و برآمدهایی درخشان به بار آورده است. بی‌شک رسالت ما در هیأت تحریریه رشد آموزش ریاضی هم سنگیتر شده است. این

مجله که شش سال پیش بنیانگذاری شده است اکنون به مرحله‌ای رسیده است که تریبونی است برای ارائه مقالات ریاضی دانش‌آموزان عزیز و دبیران محترم. حجم عظیم نامه و مکاتبات نشانگر این واقعیت است که این مجله در جامعه ریاضی ما جای خود را باز کرده است. باتوجه به اینکه اینجانب کلیه نامه‌های ریاضی را به دقت مطالعه کرده و پاسخهای ارائه شده توسط اعضاء محترم هیات تحریریه را خود تنظیم می‌نمایم، دقیقاً از نظریات خوانندگان نسبت به مجله آگاهم و این تشویقها و ترغیبها و اعلام نظرها و مساعدتهای علمی خوانندگان است که وظیفه ما را دو چندان می‌کند. این مساعدتهای علمی باید بیشتر شود. باید مجله تقویت شود. امید است که عنایت بیشتری نسبت به این مجله مبذول گردد

با توجه به حجم عظیم مقالات رسیده، مسائل و نامه‌های ارسالی که به هیأت تحریریه می‌رسد هیأت تحریریه در نظر دارد عده‌ای از همکاران دبیرستانی را به عنوان داوران مقالات انتخاب نماید تا برحسب تخصصهای خود در مورد مقالات ارسالی به مجله اظهار نظر نمایند. البتّه در حال حاضر بعضی از همکاران دانشگاهی داوری مقالات را به عهده می‌گیرند که جا دارد از همه آنان تشکر نمائیم. پیام ما به دانش‌آموزان و دبیران این است که این مجله، متعلق به شما است برای ارتقاء دانش ریاضی شما بنیانگذاری شده است در تقویت آن کوشش نمائید. مقالات و مسائل خود را مطابق اسلوب مجله تدوین کرده و به دفتر مجله ارسال کنید.

تذکر ما این است که در تدوین مقالات و مسائل حتماً به دستورالعمل پشت جلد توجه شود و از ارسال مقالات بدون ذکر مرجع جداً خودداری شود، بار دیگر از دانش‌آموزان عزیز می‌خواهیم که از کوشش وتقلاً در مورد مسائلی نظیر محاسبه محیط بیضی و معادله فرما صرفنظر کنند و وقت گرانبهای خود را صرف این نوع مسائل نکنند و در عوض کوشش کنند تا کتابهای درسی خود را دقیقتر مطالعه کنند. میزان معلومات ریاضی خود را افزایش دهند. مسائل مطروحه در رشد ریاضی و مسائل مسابقات داخلی و المپیاهای بین‌المللی را تجزیه و تحلیل کرده و آنها را حل نمایند. بدون شک با این روش هم معلومات شما افزایش پیدا خواهد کرد و هم در زندگی علمی و اجتماعی موفق خواهید شد.

بالاخره، برای تقویت صنعت و تکنولوژی کشور باید علوم پایه و نیز رشته ریاضی را تقویت کرد. برای ارتقاء دانش ریاضی در کشور باید تدبیری اتخاذ شود تا عده‌ای از استعدادهای درخشان و دانش‌آموزان شرکت کننده در المپیادهای بین‌المللی ریاضی وارد رشته‌های ریاضی شوند تا در آینده به عنوان متخصصین ریاضی محض و پشتیبانان این علم پا به صحنه بگذارند و از شمع وجود آنان جامعه ریاضی منور گردد.

مصاحبه با آقای غیور

مدتهاست که دوستان، سروران و گردانندگان مجلهٔ رشد ریاضی از من می‌خواهند که شرح حال خود را برای درج در مجله بنویسم تا باشد که برای دانش‌آموزان یا دانشجویانی که قصد معلمی دارند یا سایر خوانندگان مجله مفید و منشأ اثر واقع شود. من که از سرگذشت و وضع زندگانی خود آگاهم و می‌دانم که در این صندوق جز لعنت چیزی وجود ندارد! از قبول این کار سر باز می‌زدم و عذر می‌آوردم. «اندرین صندوق جز لعنت نبود». وقتی این امر و درخواست دوستان به حدّی رسید که تصور کردم نپذیرفتن آن حمل بر بی‌اعتنائی به عزیزانی می‌شود که به یکایک آنها ارادت دارم و همکاری با آنها را برای خود افتخاری می‌دانم ناگزیر از قبول آن شدم. بطوری که در شناسنامهٔ من ذکر شده در ۱۲۹۷ هجری شمسی در همدان متولد شده‌ام و در ۱۳۱۱ از دبستان دولتی همدان تصدیق کلاس ششم ابتدائی را گرفته‌ام. از تحصیلات دورهٔ ابتدایی خود چیزی به خاطر ندارم و فقط از دو سال آخر دورهٔ ابتدایی چیزهایی به یادم مانده

است. (آقای حسن علائی یکی از دوستان هم سن و سال من که حامی و سرور من از دورهٔ ابتدایی تا زمان حال بوده و هست می‌گوید کلاس چهارم ابتدایی را با ایشان در دبستان شاهپور همدان گذرانده‌ام. من از سال چهارم ابتدایی چیزی به خاطر ندارم حتی شکل معلم و نام او را.

معلم کلاس ششم ابتدایی ما در دبستان نصرت که دو سال بعد از اتمام تحصیلات ابتدایی من بر اثر ابتلاء به مرض حصبه درگذشت مردی فاضل و معلمی شایسته و متین بود. ادبیات فارسی، املا و انشاء، حساب و هندسه، و تاریخ و جغرافی ما به عهدهٔ او بود کلیله و دمنه را با معنی لغات در درس املا از او یاد گرفتیم. گاهی در املا از تاریخ معجم هم استفاده می‌کردیم. حساب در آن زمان انباشته از مسائل پیچیده‌ای بود که بعدها فهمیدیم باید در جبر حل شود مسأله‌ها را به اشکال از راه فکری حل می‌کردیم و مجهول را به جای x عدد یک می‌گرفتیم. مرحوم فریبور صبح زود یک ساعت قبل از اینکه زنگ کلاس زده شود در زمستان سرد همدان به ما حساب و هندسه درس می‌داد. بعد از اتمام تحصیلات دورهٔ عالی که به خدمت دولت در آمدم و در همدان مشغول کار شدم. از آقای مهدی نثری مدیر دبستان نصرت که افتخار همکاری با او را پیدا کرده بودم پرسیدم: آن زمان که شما مدیر دبستان نصرت بودید و آقای فریبور صبح‌ها به ما حساب و هندسه درس می‌داد به ازاء کار فوق‌العاده‌ای که در سرمای سخت و یخ بندان همدان انجام می‌داد چه پاداشی می‌گرفت؟ گفت حقوق و پاداشی در بین نبود می‌خواست شاگردانش در امتحان نهائی نمره خوب بیاورند و نفر اول در امتحان نهایی از دبستان نصرت باشد. «چنین کنند بزرگان چو کرد باید کار» دو خاطرهٔ دیگری را که از مرحوم مهدی‌نثری مدیر دبستان نصرت به خاطر دارم می‌نویسم و دنبالهٔ مطلب را می‌گیرم:

۱) از آقای نثری پرسیدم در کلاس ششم ابتدایی بعد از عید، من و فاتح که مدرسه تعطیل می‌شد می‌ماندیم و در محوطهٔ مدرسه جغرافی حفظ می‌کردیم عدهٔ دیگر هم والیبال بازی می‌کردند. شما به ما گفتید نام کسانی را که والیبال بازی می‌کنند بنویسید و فردا به من بدهید ما این کار را انجام دادیم. شما اول بار فاتح و مرا مورد مواخذه قرار دادید. فاتح چوبهارا نوش جان کرد و من فرار کردم و دَرِ اطاق دفتر محکم به هم خورد و شیشهٔ آن شکست من متواری شدم و دو روز از ترس به دبستان نیامدم. جرم ما چه بود. گفت کاملاً یادم است، گناه آن عده این بود که بدون اجازه والیبال بازی کرده بودند و جرم شما سنگین‌تر بود زیرا مرتکب جاسوسی شده بودید.

۲) من در دبیرستان پهلوی (سابق) همدان معلم ریاضی بودم و مرحوم مهدی نثری معلم عربی بود. یکی از دانش‌آموزان سیکل دوم متوسط مرتکب خطای شدیدی شد. ادارهٔ فرهنگ دستور داد شورای دبیران تشکیل شود و او را از تحصیل در دبیرستانهای همدان اخراج کنند. شورا رأی داد و او را سه سال از تحصیل در شهرستان همدان محروم کرد. آقای مهدی نثری بعد از انجام کار خطاب به جمع حضار گفتند:

رفقا، با صدور این حکم خود را نیز محکوم کرده‌ایم. زیرا وظیفه معلم در دبیرستان تعلیم و تربیت است و ما وظیفهٔ تربیتی خود را درست انجام نداده‌ایم که دانش‌آموزی در سیکل دوم متوسطه مرتکب چنین خطای عظیمی شود.

مهدی نثری دست پرورده آقای موسی نثری ریاضی‌دان و نویسندهٔ بزرگ کشور ما است که سالها در همدان معلم و مدیر دبیرستان و رئیس فرهنگ بوده است و کارهای او در جبر مورد تأیید غلامحسین رهنما یکی از دبیران ممتاز آن دوره و وزیر فرهنگ اسبق ایران است. که اینک محض تیمن و تبرک به ذکر آن می‌پردازیم.

وه چه خوش باشد که وصف دلبران
گفته آید در حدیث دیگران
مولوی

نقل از کتاب قوانین نثری صفحهٔ ۲:

«صورت تقریظ و نظریه‌ایست که دانشمند معظم حضرت آقای میرزا غلامحسین خان رهنما معلم و ممتحن ریاضیات عالی و معاون وزارت جلیلهٔ معارف راجع به این کتاب مرسوم داشته‌اند.

اینجانب رسالهٔ قوانین نثریه را من البدو الی الختم با کمال دقّت مرور نموده‌ام اگرچه بعضی مطالب مندرجه سابقه دارد ولی تا آنجا که این بنده مطلع است بسیاری از موضوعات جدید که افتخار ابداع آن به مصنف محترم راجع است در این رساله به نظر رسید در هر حال یعنی اعم از اینکه مطالب کتاب سابقه داشته باشد یا چنانکه این بنده تصور می‌کنم کشف آقای موسی نثری باشد باید به قریحهٔ سرشار معزی‌الیه آفرین گفت و زحمات ایشان را تقدیر کرد عجالتاً لازم می‌دانم اظهار کنم که از مطالعه رساله قوانین نثریه در حسن حس اعجاب و تحسین فوق‌العاده دربارهٔ آقای نثری ایجاد شد چه علاوه بر حدّت قریحه حسن انتخاب اصطلاحات را باید به معزی الیه تبریک گفت».

(غلامحسین رهنما)

تهران ۷ فروردین ۱۳۱۱

برگردم به حدیث خود: در دورهٔ متوسطه من فقط دو سال مرتب در دبیرستان آلیانس همدان

درس خوانده‌ام در این دو سال صبح‌ها را در دبستان دانش قبل از اینکه درس دبیرستان شروع شود و عصر در دبستان کمال بعد از ختم کار در دبیرستان، به مدت یک ساعت صبح و یک ساعت عصر به شاگردان کلاس ششم ابتدایی درس حساب و هندسه می‌دادم. این آغاز کار معلمی من بود کلاس سوم متوسطه را داوطلبانه امتحان دادم و در دبیرستان شرافت همدان سه کلاس اول متوسطه را ریاضی و فیزیک درس دادم و از صبح تا عصر کار می‌کردم در این دوران امتحان کلاس پنجم متوسطه را گذراندم و امتحان کلاس ششم متوسطه را در سال ۲۵ در تهران به طور داوطلب امتحان دادم. در همان سال در کنکور دانشسرایعالی شرکت کردم و نفر اول شدم و در شبانه‌روزی دانشسرایعالی به مدت سه سال لیسانس ریاضی از دانشسرایعالی و دانشکده علوم گرفتم و در سال ۲۷ به خدمت دبیری در شهرستان همدان منصوب شدم.

در دوران تحصیل در دانشگاه مورد تشویق مرحوم دکتر هشترودی و استادان بزرگوار دکتر منوچهر وصال و پرفسور فاطمی قرار گرفتم. دکتر هشترودی چند بار مرا پیش دکتر مزّینی معاون وزارت فرهنگ و وزیر فرهنگ برد که در تهران بمانم. و برای ادامهٔ تحصیل به اروپا بروم سالهای بعد از جنگ بود و دانشگاههای اروپا دانشجو نمی‌پذیرفتند و این اقدامات بی‌نتیجه ماند.

در سال ۳۹ که در همدان خدمت می‌کردم از طرف رئیس دانشگاه شیراز با چند نامهٔ پیاپی از بنده دعوت شد که به پیشنهاد آقای دکتر وصال به دانشگاه شیراز بروم. تا مقدمات انتقال من از همدان فراهم شود یک سال طول کشید و رئیس دانشگاه شیراز منفصل شد و آقای دکتر وصال مرا به دانشسرالعالی پیش دکتر بیانی برد و به دانشسرایعالی منتقل شدم که تحت نظر وزارت فرهنگ اداره می‌شد. گمان می‌کنم علّت پیشنهاد آقای دکتر وصال گذشته از اینکه در تحصیلات دانشگاهی مورد توجه و عنایت ایشان بودم، رساله‌ای بود که در هندسهٔ کروی به سبک هندسه اقلیدسی نوشته بودم که در همدان به ایشان دادم که آن را مطالعه کنند و اگر مسبوق به سابقه نیست و مفید است آن را ادامه دهم. در دانشسرایعالی به غیر از تدریس شغل دیگری را نپذیرفتم و نامه‌ای را که در ۴۱/۱۲/۱۹ به من ابلاغ شده به عنوان یادگاری می‌آورم: «*آقای حسین غیور دبیر دانشسرایعالی، با کمال مسرت به اطلاع شما می‌رساند که صلاحیت تدریس شما در دانشسرایعالی طی چهل و چهارمین جلسه مورخ ۴۱/۱۱/۲۸ شورای دانشسرایعالی به تصویب رسیده است.*

دکتر اسمعیل فیلسوفی سرپرست دانشسرایعالی»

در دانشسرایعالی که بعدها تبدیل به دانشگاه تربیت معلم شد تا سال ۱۳۵۸، که بازنشسته شدم، تدریس هندسه تحلیلی به عهدهٔ من بود و بعد از بازنشستگی تا تعطیل موقت دانشگاهها برای تدریس درسهای خود مجدداً به دانشگاه دعوت شدم.

بعد از تعطیل موقت دانشگاهها مدت سه سال به طور مداوم در جبر برداری کار کردم و تمام قضایای مهم هندسه را با روش برداری ثابت کردم و تعمیم دادم و این کارها هنوز ادامه دارد. گرچه مطالعه در هندسه با روش برداری در بیشتر کشورها صورت گرفته است. در مطالعات خود مطالب تازه‌ای پیدا کرده‌ام که تا به حال اثری از اینکه این مطالب در کشورهای دیگر پیدا شده باشد ندیده‌ام. امید است امکاناتی پیش آید که در آیندهٔ نزدیک این رساله را که نتیجهٔ یک عمر، پی‌گیری و کار و کوشش مستمّر و مداوم است و ممکن است در دنیای مترقی و پیشرفتهٔ امروز راهی به دهی باشد در اختیار همگان قرار دهم.

۱ ــ آقای غیور فکر می‌کنید در حل مسایل هندسه با نوعی نبوغ سروکار داریم یا می‌توان با اتکاء به روشهای معیّن به حل آنها نائل آمد.

با اتکاء به روشهای معین می‌توان به حل مسائل نائل آمد. توضیح اینکه (الف) هندسه نخستین علمی است که با روش اصل موضوعی شروع شده است. اولین درس سال اول متوسطه باید راجع به تعریف و شکلهای تعریف نشده و قراردادها و پنج اصل اقلیدس به طور کامل صحبت کرد و بعد از آن فصل‌های هندسه شروع می‌شود. در هر فصل باید تعریفها و قضیه یا قضایای آن را دقیقاً درس داد. آنگاه به پرسشهای مناسبی دربارهٔ مطالب آن فصل پرداخت. این پرسشها که تمرین نامیده می‌شود باید طوری طرح شوند که دانش‌آموزی که مطالب آن فصل را خوانده و یاد گرفته بتواند با اندک وقتی به آنها جواب دهد. باید به متعلم فهماند که هر کس به این پرسشها نتواند جواب بدهد درس را یاد نگرفته و پرسیدن پرسشها از دیگری مانع یاد گرفتن درس است طرح این پرسشها در هر فصل کتاب خوب می‌خواهد. هر معلم در کلاس به جای اینکه یک مشکل را مطرح و حل کند بهتر است سوالات ساده‌ای از شاگردان در کلاس بپرسد.

ب) رسمهای سادهٔ هندسی مانند رسم عمودمنصف پاره‌خط، رسم نیمساز و زاویه رسم خطی که از نقطهٔ مفروض می‌گذرد و بر خط مفروض عمود می‌شود، رسم خطی که از نقطهٔ مفروض بگذرد و با خط مفروض زاویهٔ معلومی بسازد، رسم مثلث در چهار حالت کلاسیک... باید در هر فصل مناسب حل شود.

ج) در تمام فصل‌های هندسه باید آنچه در الف و ب گفته شد عمل شود و هیچ فصلی بدون تمرین یعنی بدون پرسش از متعلّم تمام نشود.

د) در هر فصل مسأله‌هایی یافت می‌شود که کلیت قضیه را ندارند ولی به جواب دادن بسیاری از تمرینات کمک می‌کنند. این مسأله‌ها را مسأله‌های اصلی یا حکم می‌نامند. این احکام یا مسأله‌های اصلی باید متن کتاب طرح شود تا راهنمای حل تمرینات باشد.

یادآوری بعد از یادگیری چند فصل باید تمرینات یا مسایل ترکیبی از متعلم سوال شود. در دو سال اول متوسطه اگر دانش‌آموز درس هندسه را با این روش یاد بدهند صاحبنظر می‌شود و پیشرفت می‌کند در ابتدای کار مسألهٔ مشکل به دانش‌آموز دادن و حتی حل کردن آن مضرّ و بی‌فایده است.

۲ ـ مسایل هندسه به صندوقچه‌های دربسته شبیه هستند که برای حلشان باید رمز قفلهایشان.را شناخت و بازشان کرد به نظر شما چگونه می‌توان به این رموز دست یافت؟ آیا باز کردن در این صندوقچه به هر طریق مجاز است یا حتماً باید از تکنیک خاصی استفاده کرد مثلاً بعضی‌ها استفاده از مثلثات و یا روش تحلیلی یا برداری را مجاز نمی‌دانند نظر شما در این مورد چیست؟

اگر مسأله هندسه را صندوقچهٔ دربسته‌ای فرض کنیم رمز باز کردن آنها دانستن قضایای هندسه است که در سوال (۱) جواب آن داده شده است. پاسخ قسمت دوم این سؤال این است که به کار بردن مثلثات و بردار در هندسه مجاز است زیرا هم نسبتهای مثلثاتی و هم بردار هر دو جزء هندسه هستند.

مثلثاتی که در متوسطه تدریس می‌شود مبتنی بر تعریف هندسی آنست (از نقطهٔ دلخواه روی یک ضلع زاویه عمودی بر ضلع دیگر آن فرود می‌آوریم نسبت طول این عمود به وتر مثلث قائم الزاویهٔ حادث $\sin\alpha$ (سینوس زاویه α) نامیدهٔ می‌شود و $\cos\alpha$ یعنی $\sin(90-\alpha)$ که سینوس زاویه متمم α باشد. باید به نوآموز گفته شود اگر جای نقطه روی هر ضلع زاویه عوض شود سینوس آن تغییر نمی‌کند و اثبات درس موضوع به فصل تشابه در هندسه مربوط می‌شود). اگر زاویه جهت‌دار فرض شود اندازه نسبت مثلثاتی آن علامت پیدا می‌کند و این موضوع باید در متمم هندسه با رسم دایرهٔ مثلثاتی گفته شود و $\sin(\alpha+\beta)$ یا $\cos(\alpha+\beta)$ برحسب نسبتهای مثلثاتی α و β حساب می‌شود. مخصوصاً در هندسه باید قضیه سینوسها و قضیهٔ کسینوسها در فصل روابط متری مطرح و اثبات شود جای معادلات مثلثاتی در جبر است و آنجا که نسبتهای مثلثاتی زوایای جهت‌دار برحسب اندازه‌های آنها بیان میشود مربوط به آنالیز می‌شود.

تعریف بردار و جمع بردارها ابتدا در فیزیک و مکانیک پیدا شده ولی تعریف ابتدائی .بردار که پاره‌خط جهت‌دار است و جمع آن که گویا بوسیلهٔ گالیله کشف شده است، جنبهٔ هندسی دارد. از ابتدای کشف بردار، بردار را در هندسه مطرح کرده و درس داده‌اند ولی از آن در مکانیک و فصل‌های مختلف فیزیک استفاده شده است. بعضی‌ها معتقدند که نباید نسبتهای مثلثاتی یا بردار در هندسه مطرح شود زیرا در هندسه اقلیدسی نوشته نشده است جواب این سوال این است نه اگر این مطلب درست فرض شود باید قضایای مربوط به محیط و مساحت دایره و سطح و حجم کره که از کشفیات ارشمیدس است، و او بعد از اقلیدس متولد شده باید از هندسه‌ها حذف شود و همینطور متمم هندسه و

مفاهیم عالی و گستردهٔ آن.

۳ ـ همهٔ معلمین کم و بیش مسائل کتابهای درسی را قبلاً در خانه حل و بعد به کلاس می‌روند. حل بعضی از این مسایل گاهی ساعتها وقت می‌گیرد اما این مهمّ از چشم دانش‌آموزان دور می‌ماند درنتیجه وقتی آنها در حل مسأله با مشکل مواجه می‌شوند و به کمک معلّم مسأله را حل می‌کنند نوعی نبوغ و استعداد خاص را به او نسبت می‌دهند. به نظر شما معلمین در نمایش خود به عنوان معلم موفق، پشت صحنه را هم باید به دانش‌آموزان نشان بدهند یا برای موفقیت در کار تدریس بنوعی خود را بزرگ کنند و کار سخت شبانه‌روزی را از دانش‌آموزان پنهان نگهدارند در این مورد هم لطفاً نظر خودتان را بیان بفرمائید.

برای هر کس در دوران معلمی نظیر این اوضاع پیش می‌آید ولی بُرد باکسانیست که صحنه را همان گونه که هست نشان می‌دهند.

«کس ندیدم که گمشد از ره راست»

من اساساً با اینکه معلم سر کلاس مسأله را از اول تا آخر حل کند موافق نیستم مثالی می‌آورم که برای خودم اتفاق افتاده و چون مثال عینی است یقین دارم مورد توجه دبیران محترم همکاران گرامی من واقع می‌شود.

در سال ۴۱ یا ۴۲ در دانشسرایعالی حل مسائل مکانیک به عهدهٔ من گذاشته شده بود تصمیم گرفتم مسایل را سر کلاس مطرح و شروع به حل کنم. برای انجام این کار درسها

را که چهارده پانزده سال قبل خوانده بودم با دقت مطالعه کردم. به دانشجویان گفتم می‌خواهم به شما روش حل مسأله را بیاموزم «مطمئن باشید این کار مفیدتر از آنست که مسأله‌ها را در خارج حل کنم یا از جایی نقل کنم و روی تابلو برای شما بنویسم و نیز مطمئن باشید توانایی آنرا دارم که مسأله‌ای را بدون حل نگذارم. در جلسه‌های اول و دوم کار خوب پیشرفت نمی‌کرد ولی کم‌کم براه افتادیم و دانشجویان همه به کلاس می‌آمدند و راههای را اعم از اینکه در وهلهٔ اول بجواب نرسد می‌نوشتند کم‌کم کلاس جان گرفت و عده‌ای در حل مسأله شرکت کردند جلسه که در آخرین ساعت بعد از ظهر تشکیل میشد تا نیم ساعت بعد از زنگ کلاس هم ادامه پیدا می‌کرد. نه دانشجویان خسته می‌شدند نه من. این بهترین خاطره‌ایست که از تدریس در دانشسرایعالی دارم. بکار بردن این گونه روشها در دو کلاس آخر دبیرستان هم بهتر از این است که مقام عالی تعلیم را در حد یک حل‌المسائل پایین بیاوریم.

۴ ــ موفقیت دانش‌آموزان ما در مسابقات المپیاد بخصوص موفقیت چشمگیر آنان در حل مسائل هندسه نشان می‌دهد که این درس به طور سنتی پایه‌های استواری در جامعهٔ ما دارد. از طرفی تکنیک‌های جدیدی در حل مسایل هندسه پیدا شده است. به نظر شما چه نوع تغییراتی در کتابهای هندسهٔ دبیرستانی ضرورت دارد؟

شرکت در مسابقات المپیاد در پیشرفت ریاضی و فیزیک در کشورها اثری مثبت و مفید دارد. تغییراتی که باید در هندسه‌های اول تا سوم انجام شود اضافه کردن ترکیب تبدیلهای انتقال و تقارن و دوران است که قبلاً بوده و حذف شده است و اضافه شدن قضیه تصویر شکل مسطح روی صفحه است که جا مانده است. در کتاب چهارم که خود من در تألیف آن دخالت تام و تمام داشته‌ام دو تبدیل قطب و قطبی و انعکاس و تصویر مرکزی روی صفحه باید اضافه شود و همینطور تقسیم غیر توافقی. علت اینکه در سال ۵۹ این تبدیلات از برنامهٔ دبیرستان حذف شد، جو آن دوران بود که می‌خواستند هندسه را هم به کلی از برنامه دبیرستان‌ها در همهٔ دنیا حذف کنند که بعدها تغییر روش دادند. هندسه تحلیلی که در هندسه سال چهارم آمده است، آزمایش نشان داده که در متوسطه مفید و ضروری است و نباید حذف شود.

بطور کلی در شورای ریاضی که در دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی وزارت آموزش و پرورش تشکیل شده است، باید این مطالب مورد دقت و بحث و بررسی واقع شود.

۵ ــ بیشتر خوانندگان مجلهٔ ما شما را به عنوان یک دبیر موفق هندسه می‌شناسند بدون اینکه از سایر وجوه شخصیت فرهنگی شما اطلاع کافی داشته باشند. به عبارت دیگر تنها وجهی از شخصیت فرهنگی شما در معرض دید خوانندگان ما قرار گرفته است و سایر وجوه آن درپردهٔ ابهام باقی مانده است. مثلاً اخیراً اطلاع پیدا کرده‌ایم شما شاعر هم هستید و دیوان شعر دارید. در این خصوص و سایر قسمتهایی که برای ما هم ناشناخته مانده است اگر مایل باشید توضیحاتی بفرمائید.

علاقهٔ من بو شعر و شاعری سابقهٔ طولانی دارد. پدر من حاجی شیخ صادق مردی ادیب و عربی‌دان و منشی بود اغلب اشعار مولوی و حافظ و باباطاهر و حتی اشعار عربی دورهٔ جاهلیت را از حفظ داشت. من در کلاس ششم ابتدایی و اول و دوم متوسطه مقدمهٔ گلستان سعدی و مقدمهٔ بوستان و بسیاری از حکایات آنرا از حفظ بودم و شعر هم می‌گفتم ولی پنهان از پدر و برادرم. زیرا هر دو مخالف بودند که من شاعر شوم. در دوره متوسطه قبل از اینکه دیپلم بگیرم شعر می‌گفتم و یکی از شاگردانم اشعارم را به خط زیبایی نوشته بود. در مقدمهٔ این دفتر شرح حالی به شعر از خودم ساخته بودم که یک بیتش که یادم مانده این است.

بر سر هر که ز دانش عشقی است
شرح احوال منش سرمشقی است

بر اثر اشتغال به درسهای ریاضی و فیزیک مکانیک که پیش خود یاد می‌گرفتم شعر را کنار گذاشتم و دفتر شعرم را آتش زدم. از آن دفتر یک بیت بالا، و یک دوبیتی که در زیر عکس خود نوشته و به دوست همکلاسیم داده بودم، و یک قطعه که مقتبس از حکایتی است به نثر که در کتاب حجازی نویسنده معروف به یادم مانده است این دوبیتی و قطعه را بعنوان یادگاری در این مقاله می‌آورم.

دوبیتی

این عکس که صورتیست بی‌جان
دانم به یقین نه در خور تست
عکس تو بود به خاطر من
عکس من اگر به دفتر تست

قطعه

افتاده بود در گندی لاشهٔ سگی
با هیاتی که نفرت از آن جانور کند
از بس که بوی و منظره‌اش ناپسند بود
مانع از این که یکتن ازان ره گذر کند
مردی حکیم را گند افتاد سوی آن
بی‌آنکه رخ بتابد و از او حذر کند
با دقتی تمام نظر کرد لاشه را
آری حکیم بر همه چیزی نظر کند

با یار خویش گفت به دندان او نگر
کز روشنی حکایتِ عِقد گُهر کند
یادی ز بوی ناخوش و شکل بدش نکرد
زیرا که با هنر نغمه وصف هنر کند
آری کسی که پاکدل و نیک بین بود
زشتی به خاطرش نتواند اثر کند

از سال ۲۵ به بعد گاهگاه شعرهایی در سیر و سیاحت در دامنهٔ الوند زادگاه خود یا در دورهٔ تحصیل دانشگاهی یا سال ۴۰ به بعد، در دامنه‌های متنوع و جالب و با عظمت سلسله جبال البرز سروده‌ام. اشعارم به گلهای وحشی که در قله‌های کوهساران یا شکاف صخره‌ها می‌رویند شباهت دارد

به دل کوه زنم کز دل و جان
رفع دلتنگی و اندوه کنم
راز دل با همه گفتن نتوان
درد دلها همه با کوه کنم

از قطعهٔ دل کوه مجموعهٔ رویا

در این دوران برخلاف دورهٔ طفولیت و نوجوانی همواره شعر به سراغ من آمده است و اگر خوب از آب درآمده آن را یادداشت کرده‌ام. در سال ۳۶ برادرم که در تهران می‌زیست با همت عالی خود ۳۳ قطعه از اشعار مرا در چاپخانهٔ محمد علی علمی به چاپ رسانید. این مجموعه بنام رویا تقدیم به استاد بزرگوار دکتر محسن هشترودی شده است.

۶ ــ می‌دانیم شعر بر عاطفه و هندسه بر منطق خشک اتکاء دارند با وجود این بسیاری از ریاضی‌دانهای نام‌آور ما شاعر و ادیب بوده‌اند. خیام یک نمونه و دکتر هشترودی یک نمونهٔ دیگر است. فکر می‌کنید ظرافتهای شعری را می‌توان با ساختارهای ریاضی آشتی داد و اصولاً از فضاهای بغرنج هندسه می‌توان در تمثیلات شعری سود جست؟

ج ــ اگر مسلم شود که در ریاضی هم مانند شعر حالت زیبایی وجود دارد، آنگاه می‌توان «ظرافتهای شعری را با ساختارهای ریاضی آشتی داد» و به عکس «می‌توان از فضاهای بغرنج هندسی در تمثیلات شعری سود جست». به نظر این جانب در ریاضی نسبت زیبایی وجود دارد برای مثال ــ ریاضی‌دانی که از هنر نقاشی بهره‌ور باشد، از اثبات نامتناهی بودن اعداد اول در تحریر اقلیدس همان لذتی را می‌برد که از دیدن یک تابلو نقاشی کار هنرمندان بزرگ.

انیشتاین دانشمند بزرگ قرن بیستم بعد از مطالعه کتاب تحریر اقلیدس چنین می‌گوید در جهان با همهٔ بی‌نظمی و نقص، عاملی نیز وجود دارد که از جنبهٔ فرهنگ و روانشناسی صاحب نظم و دقت و زیبایی است (فیلیپ فرانک ــ داستان زندگی آلبرت اینشتاین و تاریخ سیاسی و اجتماعی دوران او)

به مقاله‌ای که راجع به عدد طلائی و نسبت زیبائی در رشد ریاضی شماره ۱۸ چاپ شده مراجعه کنید.

۷ ــ گاه انسان در خلوت وجود خویش خرمن زندگیش را ارزیابی می‌کند بی‌تردید شما هم چنین کاری را می‌کنید، اگر این امکان وجود داشت که شما دوباره به دوران دانش‌آموزی برگردید پس از اتمام تحصیلات خودتان دوباره محصول زندگانی‌تان را درو کنید. فکر می‌کنید در محصول کنونی خرمن زندگی شما چه تغییراتی حاصل می‌شد؟ در این بارهٔ از تجارب خودتان چه توصیه‌ای به نسل جوان دارید؟

تصادفات روزگار گاهی زندگی انسان را تغییر می‌دهد. اگر من سه سال دیرتر وارد دانشگاه می‌شدم امکان اینکه برای ادامهٔ تحصیلات به خارج بروم برایم میسر بود و می‌توانستم ادامهٔ تحصیلات بدهم در این صورت تدریس در دانشگاه برایم جالبتر بود و مفیدتر واقع می‌شدم و گذشته از این دنبال تزی را که گذرانده بودم می‌گرفتم و ادامه می‌دادم و این برایم خوشایندتر از وضع فعلی بود.

من برخلاف اکثر دوستان معتقدم پول انسان را سعادتمند نمی‌کند پول تا آن حد به درد می‌خورد که انسان محتاج دیگران نشود

آب در کشتی هلاک کشتی است
لیک اندر پشت کشتی پشتی است.

مولوی

به نسل جوان هم توصیه‌ای غیر از این ندارم که کوشش کنند در هر کاری که وارد می‌شوند مولد و مفید باشند و سعی کنند جامعهٔ خود را به پیش ببرند.

۸ ــ بخشی از این محصول بی‌تردید مربوط به کتابهای شما می‌شود در این مورد هم لطفاً اطلاعاتی را که لازم می‌دانید در اختیار خوانندگان ما قرار دهید.

کتابهایی که تألیف کرده‌ام عبارتند از: ۱) کتاب هندسه چهارم، ۲) کتاب هندسه تحلیلی به پیشنهاد مرحوم دکتر مصاحب که با همکاری برادرم آقای محسن غیور نوشته شده است، ۳) کتاب هندسه برای مراکز تربیت معلم، ۴) تحقیقاتی در زمینه جبربرادری و موارد استعمال آن در هندسه. و سلسله درسهایی از هندسه در مجله رشد آموزش ریاضی شماره‌های مختلف.

تعمیم در ریاضی

متن زیر سخنرانی آقای دکتر امیدعلی کرمزاده عضو هیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه شهید چمران اهواز است که در کنفرانس ریاضی - فیزیک رامسر ایراد شده است.

ما معلمین ریاضی معمولاً در کلاس‌های آخر دبیرستان و کلاس‌های اول دانشگاه با این سؤال از طرف بعضی از دانش‌آموزان ریاضی مواجه می‌شویم که اصلاً ریاضیات به چه درد می‌خورد؟ پاسخی که از ما می‌شنوند تقریباً در همه جا یکسان است، ریاضیات در فیزیك، مهندسی و نقشه‌برداری، دریانوردی، هواپیمائی، زیست‌شناسی و به طورکلی در همه علوم به‌کار می‌رود و در حقیقت میزان درستی یك نظریه علمی بستگی به مقدار ریاضیاتی دارد که در آن نظریه به‌کار رفته است. بعضی از دانش‌آموزان با این پاسخ قانع می‌شوند و بعضی هم بدون قانع شدن مجبور به ادامه تحصیل در ریاضیات می‌شوند. آیا هیچوقت از خود پرسیده‌اید که چرا ما با این سؤال مواجه هستیم؟ آن هم سؤالی که معمولاً با این قصد مطرح می‌شود که ریاضیات اصلاً بد است و سخت است و فایده‌ای ندارد. چرا در کلاهای درس تاریخ، جغرافیا، دینی، فیزیك و سایر دروس این سؤال کمتر مطرح می‌شود یا اصلاً مطرح نمی‌شود؟. چرا وقتی که مثلاً معلم در کلاس درس تاریخ از فتوحات وکشورگشائی فلان شخص حرف می‌زند همه دانش‌آموزان به راحتی می‌فهمند ولی وقتی معلم ریاضی از فتوحات اقلیدس، تالس، اویلر و دیگران حرف می‌زند و آنها را نشان می‌دهد براحتی مورد استقبال قرار نمی‌گیرد؟. چرا وقتی که همه می‌دانند که در تمام کشورهای دنیا بچه‌ها از سال ورود به مدرسه تا دانشگاه ریاضیات را مطالعه می‌کنند و تنها چیزی است که شاید تمام کشورها به طور یکسان در آن وحدت نظر دارند بازاین سؤال ریاضیات به چه درد می‌خورد مطرح می‌شود. من فکر می‌کنم بجز تفاوت در ماهیت ریاضی با سایر دروس دو عامل مهم دیگر نیز این تفاوت را زیادتر کرده است. یکی اینکه تمام کارهای روزانه، گفتگوهای بین افراد در خانواده و برنامه‌های رادیو و تلویزیون و نوشته‌های روزنامه‌ها و غیره به شکلی هستندکه کار معلم تاریخ و معلمینی راکه با استدلال سروکار ندارند راراحت‌تر کرده است و عامل دیگری که ریاضیات را ظاهراً مشکل کرده است شکل ارائه آن از بدو پیدایش آن است. از زمانی که دانش ریاضی و ریاضی‌دان به وجود آمدند معمولاً ریاضی‌دان علم خود را به شکل معما مطرح می‌کرده و هرچه که دانسته خود را پیچیده‌تر و مشکل‌تر مطرح می‌کرده معمولاً دیگران به او به دیده برتری نگاه می‌کردند. از این رو سعی آنها براین بوده که یافته‌های

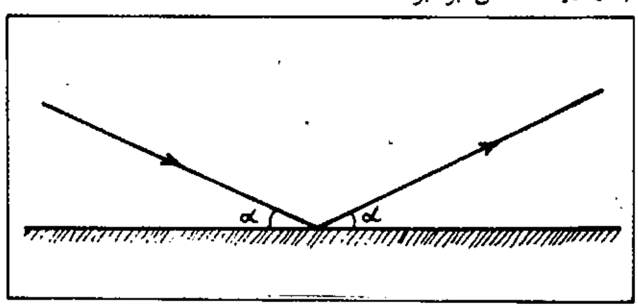
خود را طوری عنوان کنندکه نشان دهند از جای دیگری ایده نگرفته‌اند و نتایج آنها اصیل اصیل است. در نتیجه از ارتباط بین نتایج ریاضی آن طورکه باید وشاید درکتب ومنابع بحث نشده وهرنتیجه ریاضی مهارت خاصی را برای یادگیری بخود اختصاص داده‌است.ولی باید دانست که‌بیشترکارهای‌ریاضی‌حتی نتایج ریاضی‌دانهای برجسته معمولاً تعمیم کارها ومفاهیمی است که وجود داشته‌اند و بعضی افراد با مهارت خاصی نتایج خود را طوری ارائه می‌دهندکه این تعمیم آشکار نیست و در نتیجه کارش اصیل‌تر به نظر می‌رسد. گرچه تقریباً همه معنی تعمیم را می‌دانند ولی بهتراست منظورخود را ازتعمیم بیان‌کنم. منظور از تعمیم یك تعریف، تعریفی است‌که شامل دسته بزرگتری از اشیائی‌که تعریف اول به دست می‌دهد شود. تعریف یك قضیه

A، قضیه‌ای است‌که با همان فرض قضیه، نتیجه وسیعتری به دست می‌دهد به طوری‌که قضیه A ازآن به دست می‌آید. یا با فرض‌کمتری از قضیه A همان نتیجه قضیه A یا بیشتر را به دست می‌دهد. در اینجا منظور از تعمیم، غیراینها، این موضوع نیز می‌باشدکه بتوانیم یك قضیه یا نتیجه‌ای را از یك قسمت ریاضی به قسمت دیگری ببریم و درآنجا آنرا بررسی و حل‌کنیم. خوب برای اینکه از موضوع خارج نشویم من اعتقاد دارم‌که ما ریاضی را بایدآن طورکه هست به دیگران یاد دهیم. اولاً باید توجه‌کردکه ریاضیات تنها مجموعه‌ای ازحقایق نیست‌که‌آنها را به شکل قضیه، لم ومسأله به دیگران نشان دهیم بلکه ریاضی یك تفکر است‌که ما به وسیله این این مجموعه از قضایا و مسائل باید‌آن تفکر را درکسانی‌که خواستار‌آن هستند به‌وجود‌آوریم، تا هرکس با هر مقدار ریاضی‌که می‌داند بتواند با مسائل برخوردکند (چه مسائلی‌که در خود ریاضی مطرح می‌شوند و چه در خارج‌آن).

یکی از راههای ایجاد این تفکردر دانش‌آموزان سالهای بالا و دانشجویان این است‌که به‌آنها اجازه داده شود و تشویق شوندکه خود قضیه و مسأله تازه ارائه دهند حتی اگر معلم و استاد خود قادر به انجام این‌کار نباشند. مهم نیست‌که قضیه یا مسأله ارائه شده چقدر ساده و ابتدائی است مهم این است‌که فکری تازه باشد. چون در علم سئوال تازه و درست از پاسخ آن مهمتر است. یك راه رسیدن به این هدف این است‌که به آنها فکر تعمیم دادن را یاد دهیم، تاآنجاکه می‌توانیم مطالب را به شکل تعمیمی ارائه دهیم و بخواهیم درباره تعمیم هر مطلب ریاضی قابل فهم فکر کنند. باید به‌آنها یاد دادکه تمام تاریخ ریاضیات چیزی نیست بجز ثبت تعمیم‌های متوالی در ریاضی. باید به‌آنها گفت‌که راز تمام پیشرفت‌های علمی بشر از اول تاکنون بشکلی در تعمیم نه در مفهوم‌کلی‌آن بلکه در تعمیم سیستم اعداد از اعداد طبیعی به اعداد صحیح به اعداد، گویا به اعداد چهاربرگی و سیستم‌های جبری نهفته است. در این رابطه بد نیست به این جمله از «راجر پنروز»که یکی از فیزیکدانان و ریاضی‌دانان معاصر است اشاره کنم. وی در سخنرانی خود درکنگره ریاضی‌دانان در سال ۱۹۷۸ در هلسینکی‌که درباره هندسه طبیعت صحبت می‌کردند گفت «ما به میدان اعداد مختلط نباید بعنوان ابزار و وسیله‌ای‌که دارای کاربردهائی در فیزیك است نگاه‌کنیم بلکه به‌آن به عنوان چیزی نگریست‌که در بنیاد فیزیك وارد شده است البته ما توجه می‌کنیم‌که میدان اعداد مختلط درریاضی نیز شخصیت یکتائی دارد مثلاً تنها میدانی است شامل میدان حقیقی‌که بعنوان فضای برداری روی‌آن دارای بعد متناهی بیش از یك است. گرچه در ریاضی هم تعمیم خوب هم بد وجود دارد و ما در اینجا نمی‌خواهیم ازاین دو صحبت‌کنیم ومسلم است‌که وقتی شخص تفکر ریاضی را به دست‌آورد خود این دو را متمایز می‌کند. دراینجا می‌خواهیم نشان دهیم چگونه می‌توانیم به‌کمك تعمیم بعضی از مسائل را بهتر حل‌کنیم و چگونه می‌توانیم نتایج تازه به دست‌آوریم. مثال‌های خود را از هندسه انتخاب کرده‌ام، به چند دلیل. یکی اینکه فیزیك وهندسه همیشه با هم بوده‌اند و هندسه‌آنقدر طبیعی است‌که همه مردم درکی از مفاهیم اولیه‌آن دارند. بعلاوه هندسه شاید تنها درس دبیرستانی است‌که از نظر محتوا و دید ریاضی با هر قسمت پیشرفته‌ای از ریاضیات برابری می‌کند و تمام‌آنچه راکه یك ریاضی‌دان در تخصص خود انجام می‌دهد تا به نتایج تازه دست یابد می‌توان از طریق هندسه به دیگران نشان داد. دلیل دیگر این است‌که متأسفانه در سالهای اخیر نسبت به هندسه در متوسطه کم توجهی شد و این موضوعی بوده‌که از جاهای دیگر به کشورما سرایت‌کرده و همان‌کشورهائی‌که با گنجانیدن چیزی به اسم ریاضیات جدید حجم هندسه را درآموزش متوسط‌کم کرده بودند اخیراً بیشترشان متوجه این اشتباه خود شده‌اند. این موضوع کاملاً در ششمین کنگره‌آموزش ریاضی‌که در

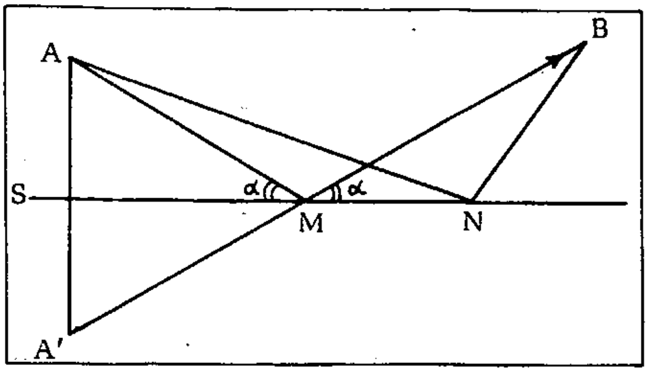
تابستان گذشته در مجارستان برگزار شد به چشم می‌خورد. قبل از اینکه با مثال شروع کنیم بهتر است لطیفه‌ای را که جورج پولیا (ریاضی‌دان معروفی که به‌آموزش ریاضی علاقه خاصی داشت و اخیراً فوت کرده است) تعریف کرده عنوان کنم. ایشان در یک کنفرانس ریاضی چشمش به خانم «امی نتر» که از زنان برجسته ریاضی بوده و کارهای با اهمیتی در جبر و هندسه جبری کرده و به تعمیم علاقه خاصی داشت می‌افتد نزدیک می‌رود و سلام و احوالپرسی می‌کند، پولیا شروع می‌کند به گفتن این مطلب که ریاضیات امروزه خیلی مبتذل شده هر کس سریع شروع می‌کند به تعمیم کارهای دیگران و مرتب مقاله چاپ می‌کنند. خانم نتر از این حرف کمی جا می‌خورد و پولیا دوباره ادامه می‌دهد، من اصلاً فکر می‌کنم آنهائی که فقط تعمیم می‌دهند مانند میمونی هستند که وقتی پای درختی می‌رسند بدون اینکه مفهوم درخت را بفهمند سریع از آن بالا می‌روند. در این موقع خانم امی طاقت نیاورده و سرش را پائین انداخته و می‌رود. پولیا پیش خود گفت چرا ناراحت شد می‌توانست بگوید آنهائی هم که حالت‌های خاص را در ریاضی بررسی می‌کنند مانند همان میمونی هستند که یواش یواش از همان درخت پائین می‌آیند.

خوب حالا می‌رویم سراغ مثالمان، از اقلیدس شروع می‌کنیم. ایشان در کتاب اپتیک خود دو اصل را در مورد نور عنوان می‌کنند. یکی اینکه نور به شکل خطوط راست منتشر می‌شود دیگر اینکه زاویه تابش نور بر یک آینه مسطح در هوا با زاویه انعکاس برابر است.



سالها بعد مهندس و فیزیک‌دانی بنام هرون با پذیرش این اصل که نور برای رسیدن از نقطه‌ای به نقطه دیگر کمترین مسافت را می‌پیماید نشان داد که این اصل با دو اصل اقلیدس معادلند. اثبات هرون به شکل زیر است.

با فرض اصول اقلیدس برای اینکه نشان دهد نور برای رسیدن از A به B از طریق آینه S کمترین مسافت را طی



می‌کند. قرینه A را نسبت به آینه S، A' نامید و نشان داد که $MA+MB=A'B$ ولی برای هر نقطه دیگر N، $NA+NB > A'B$. عکس آن هم به همین طریق ثابت می‌شود.

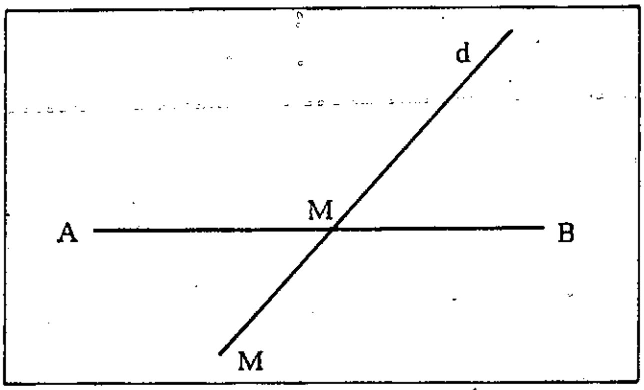
بعد از این موضوع این مسأله هندسه تقریباً در همه جا مطرح شد، خط d و دو نقطه A و B در یک طرف آن داده شده‌اند روی d نقطه‌ای بیابید که مجموع فواصلش از A و B کمترین باشد. تقریباً معلمین هندسه در همه کشورها به شکل زیر این مسأله را برای دانش‌آموزان حل می‌کنند. قرینه A را نسبت به d پیدا کرده آنرا A' می‌نامیم A' را به B وصل کنیم تا d را در M قطع کند M جواب است زیرا $MA+MB=A'B$ ولی برای هر نقطه دیگر N روی d داریم

$$NA+NB > A'B$$

یعنی درست حل هرون، چیزی که برای دانش‌آموزان به عنوان معما جلوه می‌کند این است که معلم چگونه به فکرش رسید قرینه A را نسبت به d پیدا کند و وقتی این سؤال را از معلم می‌کند متأسفانه اکثر معلمین با به‌کار بردن کلماتی نظیر حقه ریاضی، ابتکار ریاضی و شگرد ریاضی جواب قانع‌کننده‌ای به دانش‌آموز نمی‌دهند. باید توجه داشت که ما در ریاضی چیزی بنام حقه ریاضی و نظیر آن نداریم و همین مراحل توجیه نشده در اثبات این مساله و مسائل نظیر در کل تاریخ ریاضی جمع شده‌اند و ریاضی را به ظاهر مشکل کرده‌اند و ما افراد هم برای راحتی اسم این مراحل توجیه نشده را حقه ریاضی و غیره نامیده‌ایم و همه پذیرفته‌اند که ریاضی همین است. در صورتیکه چنین نیست اگر هرون قرینه A را به دست آورد به این دلیل بود که اصل اقلیدس را داشت و می‌دانست که قرینه A در امتداد MB قرار می‌گرفت ولی ما معلمین ریاضی حق

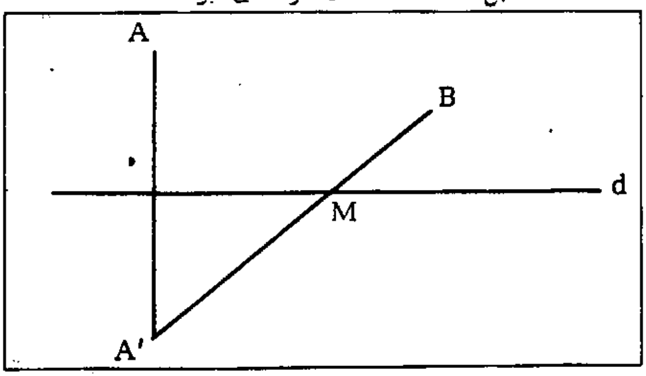
نداریم این عمل را توجیه نکرده انجام دهیم. به هرحال برای اینکه به مطالب دیگر برسیم بگذارید مسأله خط d و دو نقطه B و A در یك طرف آنرا مسأله هرون بنامیم و به شکل زیر آنرا حل کنیم:

اول این مسأله را مطرح کنیم که دو نقطه B و A درصفحه وجود دارند نقطه‌ای بیابیدکه مجموع فواصلش از B و A کمترین باشد. آشکار است که نقطه هرجا باشد این مجموع از AB بیشتر است پس برای نقاط روی پاره خط AB که این مجموع خود AB است مجموع کمترین است. یعنی تمام نقاط پاره خط AB جواب است.



حال این مسأله را مطرح کنیم که خط d ودو نقطه B و A در دو طرف آن داده شده‌اند روی d نقطه M را بیابیدکه MA+MB کمترین باشد. آشکار است که با توجه به قسمت قبل نقطه M محل برخورد d با AB است.

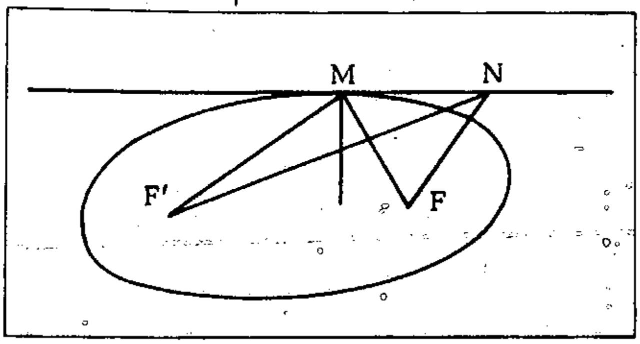
حال مسأله هرون را مطرح کنیم جائی که دو نقطه B و A در یك طرف خط d باشند. بدیهی است که آرزو می‌کردیم مانند حالت قبل دو نقطه در دو طرف d بودند.



پس این سؤال را مطرح می‌کنیم آیا نقطه‌ای درطرف دیگر d وجود داردکه فاصله‌اش تا نقاط d با فاصله A تا نقاط d فرقی نداشته باشد آشکاراست که A' قرینه A نسبت به d این خاصیت را دارد. پس مسأله به جای A و B و خط d برمی‌گردد به A' و خط d که همان حالت قبل است. جالب توجه است که دراین اثبات نیازی نیست که نقطه دیگری مانند N روی d در نظر بگیریم و نشان دهیم

$$NA+NB > MA+MB$$

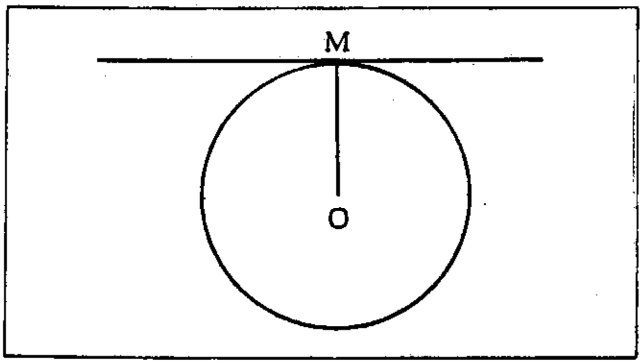
حال قبل از اینکه به تعمیم این مسأله بپردازیم بهتر است به یك کاربرد کلاسیك این مسأله اشاره کنیم



فرض کنیم از یك نقطه M روی یك بیضی بخواهیم مماسی برآن رسم کنیم واضح است که

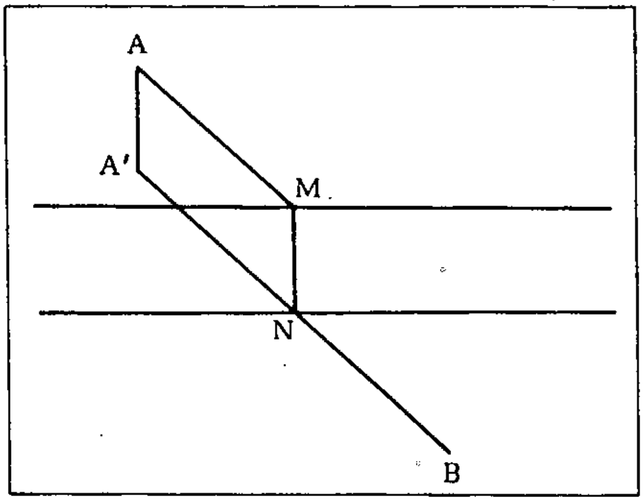
$$NF+NF' > MF+MF'$$

پس نقطه M روی خط مماس در حقیقت همان نقطه‌ای است که $MF+MF'$ می‌نیموم است یعنی خط مماس نیمساززاویه خارجی $F\hat{M}F'$ است. پس برای رسم مماس بربیضی کافیست نیساز زاویه $F\hat{M}F'$ را رسم کرده و از M برآن عمود کنیم و این موضوع خود تعمیم رسم مماس از یك نقطه M بردایره است که از M بر OM عمود می‌کنیم.

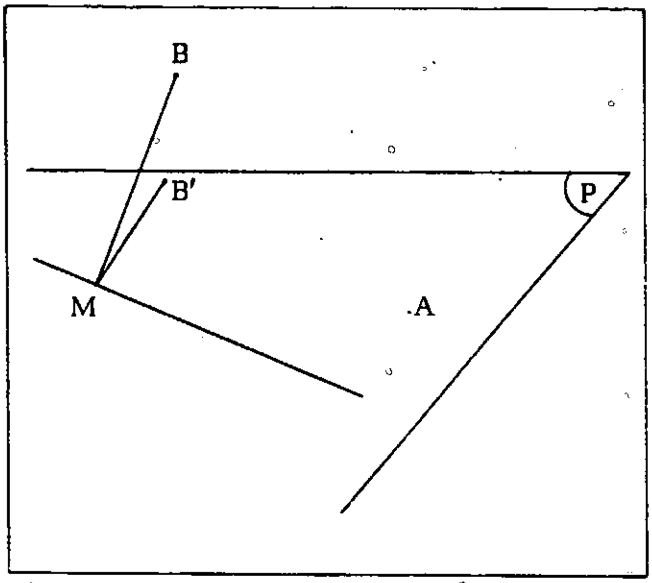


بعدها فرما با الهام گرفتن از این موضوع برای پیداکردن خط مماس در یك نقطه روی یك منحنی ناچار شدکه قسمت زیادی از حساب دیفرانسیل راکشف کند. حال یك کاربرد غیرریاضی هم عنوان کنیم و بعد به تعمیم بپردازیم. فرض کنیم که

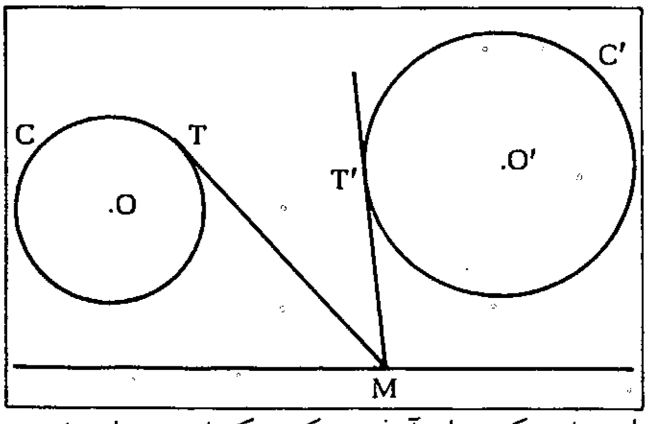
رودخانه‌ای از میان شهری مـی گذرد مانند کارون در اهواز و B و A دو مـرکز بـرای نواحی دو طرف رودخانه باشند و بخواهیم یك پل روی رودخانه بزنیم که مسیر از A تا B از



طریق این پل کمترین باشد. البته قرار است که شهرداری کاری کندکه عرض رودخانه در وسط شهر یکسان باشد. چون طول پل در همه جا یکی است پس از A در امتداد عمود بر ساحل به اندازه عرض رودخانه پائین می‌آئیم تـا نقطه 'A . B را به 'A وصل‌کرده تا ساحل دیگر را در N قطع‌کند پل MN عمود بر ساحل جواب خواهد بود. پس می‌بینیم که شهردارها هم باید هندسه بدانند. حـال برویم سراغ مسأله هرون. اول مـی‌رویم در فضا و دو نقطه B و A و صفحه P را در نظر می‌گیریم و درصفحه P نقطه‌ای یافت شودکه مجموع فواصلش از B و A کمترین باشد. می‌بینیم که حل این مسأله بـا مسأله هرون کاملاً یکی است واین چیزی است که درریاضی به‌آن تعمیم بد می‌گویند و به‌کسی‌که اولین بـار این مسألـه را مطرح‌کند متأسفانه هیچ امتیازی داده نمی‌شود. بعد برویم سراغ دونقطه و یك خط در فضاکه در یك صفحه نباشند یعنی دو نقطه B و A و خط D در فضا داده شده‌اند می‌خواهیم روی D نقطه‌ای بیابیم‌که مجموع فواصلش از B و A کمترین باشند. آشکار است که آرزو می‌کردیم کاش همه چیز در یك صفحه بود. پس شروع کنیم به اینکه تـا می‌توانیم همه چیز را بـه یك صفحه منتقل‌کنیم. اول از D و یکـی از نقاط مثلاً A صفحه P را می‌گذرانیم بعد دوباره آرزو مـی‌کردیم کاش نقطه B در صفحه P بود. پس این سؤال را مطرح می‌کنیم کـه آیا در صفحه P نقطه‌ای می‌توان یافت‌که فاصله‌اش از نقاط خط D بـا فاصله نقطه B از نقاط خط یکسان باشد. خوشبختانه بلی زیرا کافی است از B به خط D عمودکرده تا آنرا در M قطع‌کند از M درصفحه P به خط D عمودکنیم وطول 'MB را مساوی MB جدا می‌کنیم. حال فاصله هرنقطه خط D از B و 'B یکی است پس‌کافیست بـه جای B و A و خط D نقاط 'B و A و خط D را در نظر گرفت که همان مسأله هرون است.

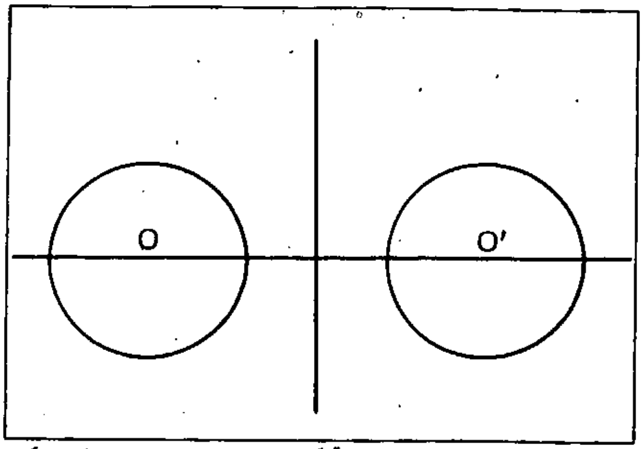


حال دوباره برمی‌گردیم به صفحه و به جـای خط و دو نقطه، خط d و دو دایره C و 'C را درنظر می‌گیریم و این سؤال را مطرح می‌کنیم که روی d نقطه‌ای بیابیدکـــــه مجموع مماس‌های وارد به دو دایره‌کمترین شود.

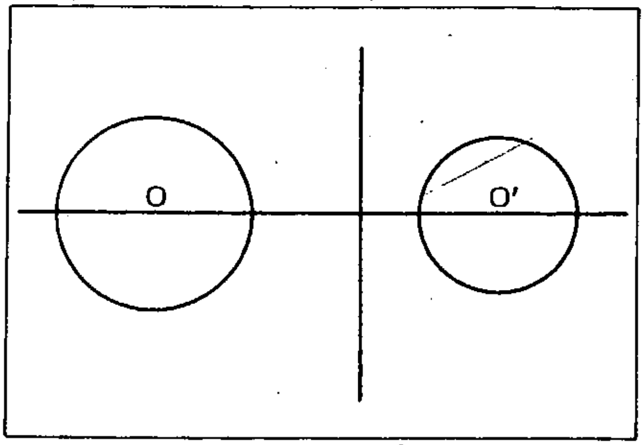


طبیعی است که دوباره‌آرزو می‌کردیم‌که این دو دایره نیز دو نقطه بودند (توجه‌کنیدکه نقطه دایره‌ای است به شعاع صفر). پس این سؤال را دوباره مطرح مـی‌کنیم آیا نقطه‌ای وجـود داردکه فاصله هر نقطه M خط d تاآن برابر طول مماس از M بر دایره باشد. خوشبختانه بلی. زیرا می‌دانیم کـه اگر

دو دایره مساوی داشته باشیم عمود منصف خط‌المرکزین مکان هندسی نقاطی است که از آنجا می‌توان دو مماس مساوی بدو دایره رسم کرد.

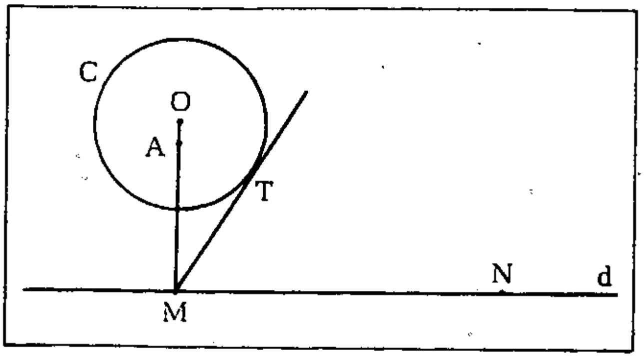


حال وقتی شعاع دو دایره فرق‌کند این امکان به دایره‌کوچکتر نزدیکتر می‌شود و چیزی است که به‌آن محور اصلی دو دایره گفته می‌شود. پس می‌بینیم که محور اصلی خود تعمیم عمود

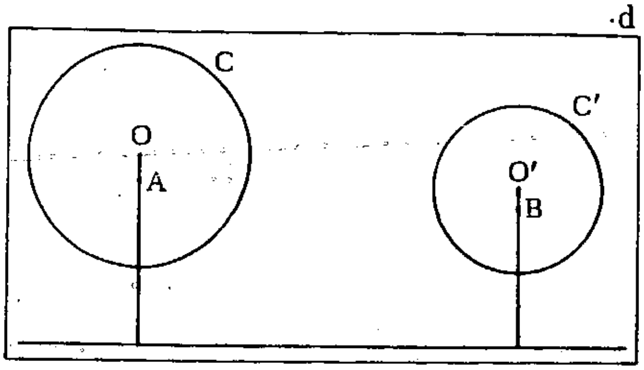


منصف است. حال اگر یک خط داشته باشیم و یک دایره و بخواهیم دایره‌ای دیگر بیابیم که این خط محور اصلی باشد معلوم است چه‌کار باید‌کرد. پس مسأله را به این شکل مطرح می‌کنیم خط d و دایره C داده شده‌اند دایره‌ای به شعاع صفر (همان نقطه مورد نظر ما) بیابید که خط d محور اصلی دایره C و این دایره باشد. به شکل زیر عمل می‌کنیم:

از O مرکز دایره به d عمود می‌کنیم تا نقطه M به دست آید مماس MT را رسم می‌کنیم و روی OM نقطه A را طوری می‌یابیم که $MA = MT$. براحتی می‌توان دید که اگر N نقطه دیگری روی خط باشد فاصله NA با طول مماس وارد از A به دایره مساویست.

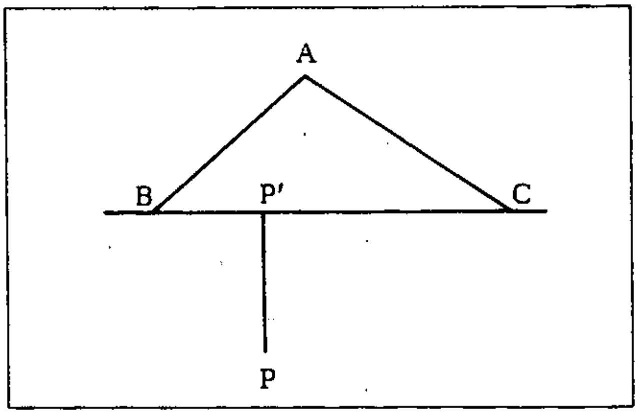


حال برگردیم به‌مسأله خودمان به‌جای دایره C نقطه A را مانند بالا پیدا می‌کنیم و به‌جای C′ نیز نقطه B را پیدا می‌کنیم حال مسأله برمی‌گردد به مسأله هرون برای B و A و خط d.



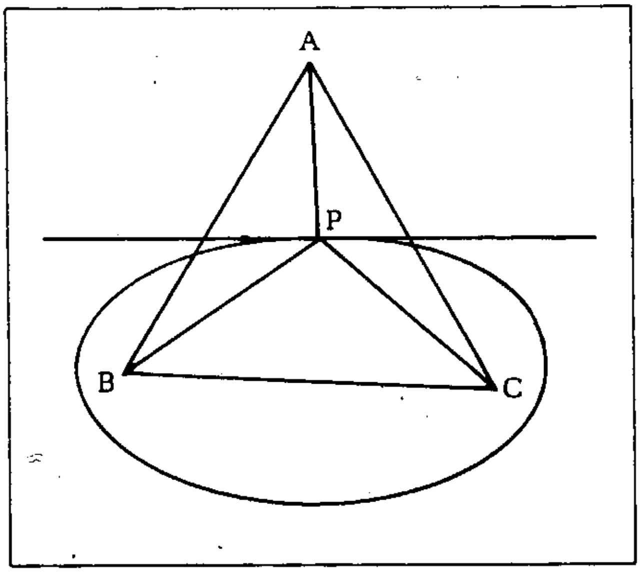
دوباره می‌توان رفت در فضا و دو کره و یک صفحه و یا دو کره و یک خط را در نظر گرفت و مسأله را در این حالت نیز حل کرد. این دو حالت مانند حالت دو دایره و خط هستند و حل مسأله هرون در این حالت را به شما واگذار می‌کنم. حال به تعمیم این مسأله از یک دید دیگر بنگریم. فرض کنیم دو نقطه B و A و یک دایره C داشته باشیم و بخواهیم روی دایره نقطه‌ای بیابیم که مجموع فواصلش از B و A کمترین باشد. مسأله برمی‌گردد به رسم یک بیضی به‌کانون‌های B و A و مماس به دایره که در حالت کلی حل هندسی ندارد. گرچه می‌توان با گذاشتن مقداری شرایط مثلاً مساوی بودن فواصل B و A از مرکز دایره مسأله را حل کرد (دو نقطه را هم می‌توان درخارج وهم در داخل دایره فرض کرد) ولی این موضوع این ایده را به ما می‌دهد که در مسأله هرون به محض اینکه به جای خط، دایره که موجودی ساده بعد از خط است قرار دهیم مسأله مشکل می‌شود پس بهتر است سراغ خم‌های دیگر به جای خط نرویم و تعمیم دیگری را درنظر گیریم. فرض کنیم سه نقطه C و B و A در صفحه باشند و بخواهیم

در صفحه نقطه‌ای مانند P بیابیم بطوریکه $PA+PB+PC$ کمترین باشد. این مسأله را اولین‌بار فرما در اواخر قرن شانزدهم برای فیزیکدان ایتالیائی بنام توریچلی که شاگرد گالیله بود مطرح کرد. حل آن توسط ویویانی که شاگرد توریچلی بود انجام گرفت.



برای حل می‌بینیم که اولاً نقطه P باید درون یا روی اضلاع مثلث باشد زیرا اگر P خارج مثلث باشد، فرض کنیم که P و A هردو طرف BC باشند از P به BC عمود کنیم تا P′ بدست آید براحتی می‌توان دید که

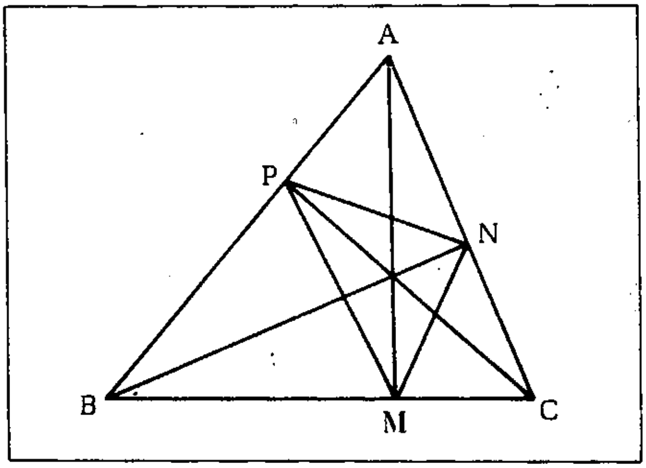
$$PA+PB+PC > P'A+P'B+P'C$$



پس فرض کنیم که P درون مثلث نقطه مطلوب باشد حال نقاط P بطوریکه مجموع فواصلشان از C و B برابر با $PB+PC$ باشد روی یك بیضی به کانونهای C و B قرار دارند. اما AP هنگامی می‌نیموم است که AP به مماس بر بیضی در نقطه P عمود باشد پس $\hat{APC}=\hat{APB}$ طبق مسأله هرون، و اگر به همین طریق $PA+PC$ را ثابت بگیریم می‌بینیم که $A\hat{P}C=A\hat{P}B$ پس P باید از سه ضلع به یك زاویه دیده شود. در نتیجه برای حل، کمان درخور ۱۲۰° را براضلاع AC و AB رسم کرده تا همدیگر را در نقطه P قطع کنند. البته باید توجه داشت که وقتی همهٔ زوایای مثلث کمتراز ۱۲۰° باشند این دو دایره همدیگر را در داخل دایره قطع می‌کنند ولی اگر یك زاویه مثلث بیش‌از یا مساوی ۱۲۰° باشد این حالت پیش نمی‌آید و می‌توان ثابت کرد که رأس همان زاویه بیش‌از یا مساوی ۱۲۰° جواب مسأله است.

حال به مسأله معروف دیگری که باز تعمیمی از مسأله هرون است و در منابع کشف آن را به فاگناتو ایتالیائی نسبت می‌دهند اشاره می‌کنیم. روی اضلاع یك مثلث حاده‌الزاویه مثلثی با محیط می‌نیمم محاط کنید.

آشکار است که اگر فرض کنیم N و P روی AC و AB انتخاب شده‌اند نقطه M روی BC باید طوری باشد که $MP+MN$ کمترین باشد یعنی باز همان مسأله هرون، باید



M طوری باشد که $C\hat{M}N=B\hat{M}P$ یعنی BC نیمساز خارجی زاویه $P\hat{M}N$ شود. همینطور برای نقاط N و P می‌توان مانند M عمل کرد. یعنی اضلاع باید نیمسازهای خارجی زوایای مثلث MNP باشند و می‌دانیم که اگر مثلث MNP مثلث ارتفاعیه باشد (یعنی AM و BN و CP ارتفاع باشند) اضلاع این خاصیت را خواهند داشت. پس مثلث ارتفاعیه جواب مسأله است. حال دو مسأله اخیر را تعمیم داده و بجای سه نقطه، n نقطه و به‌جای مثلث یك n ضلعی را درنظر بگیرید و مسائل مشابه را مطرح کنید خواهید دید باید قضایای تازه‌ای کشف کنید. قبل‌ازاینکه به مطلب دیگری بپردازیم باید به این

نکته اشاره کنیم که مسأله هرون یك اهمیت تاریخی در علم دارد. زیرا مسأله هرون شاید از اولین لحظه‌هائی باشد که فیزیك به کمك ریاضی آمده و دیدیم که تعمیم‌های آن نیز توسط چند فیزیکدان حل و بررسی شده‌اند ولی متأسفانه این لحظات در تاریخ علم ریاضی خیلی تکرار نشد یعنی لحظاتی که مسائل ریاضی را فیزیکدانان حل کنند وشاید یك علت جدایی ریاضی ازفیزیك وپیشرفت سریع ریاضی بدون توجه به مسائل فیزیك این بوده است. و جای تأسف است که هوارد ایور دردو جلد کتاب خود به نام «لحظه‌های بزرگ در ریاضی» لحظه بالارا از دست داده است.

موضوع دیگری که به ایجاد تفکر ریاضی و تفکر تعمیم کمك می‌کند چگونگی‌طرح یك قضیه با یك مسأله است. مثلاً بگذارید مسأله معروف زیر را مطرح کنیم: اگر c و b و a اضلاع مثلثی و S مساحت‌آن باشد نشان دهید

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\,S$$

و تساوی فقط موقعی برقرار است که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد. خوب این مسأله در خیلی منابع وجود دارد مثلاً در کتاب هندسه‌های اقلیدسی و نا اقلیدسی، تألیف گرینبرگ که در سالهای اول دانشگاه تدریس می‌شود نیز وجود دارد. این مسأله تا آنجا که من تعقیب کرده‌ام گویا اولین‌بار در سال ۱۹۱۹ توسط شخصی به نام ویتزنبك در مجله Math. Z و بعد در سال ۱۹۳۷ توسط فینسلر و هادویگر در مجله Comm. Math. Hel مطرح وحل گردید. با توجه باینکه

$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

و

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

با یك توان رساندن نامساوی، تبدیل به نامساوی

$$(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2 \geqslant 0$$

می‌شود که بدیهی است و حل مسأله تمام می‌شود. خوب در اینجا نقش مثلث چه بود؟ اصولاً دانش‌آموز حق دارد این سؤال را مطرح کند که اولین کسی که این نامساوی را مطرح کرد چگونه به‌آن رسید؟آیا همینطور با حروف a و b و c و S و اعداد حقیقی بازی می‌کرد تا به این نتیجه رسید. آیا همه نامساویها و روابط ریاضی و مسائل ریاضی شانسی به وجود آمده‌اند. قبل‌از اینکه این موضوع را بررسی‌کنیم ذکر این نکته را لازم می‌دانم که این مسأله در سال ۱۹۶۱ در سومین المپیاد ریاضی دانش‌آموزان یکی از سؤالات بود. گرچه قرار است که سؤالات المپیاد قبلاً جای دیگری چاپ نشده باشد. به هرحال به اکثر مسائل ریاضی و بخصوص نامساویها معمولاً شخص وقتی موضوع دیگری‌را مطالعه می‌کند برخورد می‌کند ولی متأسفانه هنگام طرح آن، از چگونگی تفکر و مطالعه‌ای که منجر به طرح مسأله یا نامساوی می‌شود ذکر نمی‌گردد وبه خاطر همین موضوع است که اکثر مسائل ریاضی و نامساویها معما گونه به نظر می‌رسند. باید دانست که هیچ ریاضیدانی نمی‌تواند بدون یك مطالعه و بررسی قبلی، همین طوری یك نامساوی معقول در مثلث بنویسد. با توجه به اینکه ریاضیدانان ومعلمین ریاضی به گیجی هم معروفند چطوری یك نامساوی دقیق می‌نویسند. قبل‌از اینکه به بحث ادامه دهم بگذارید یك لطیفه هم درباره گیجی معلمین ریاضی بگویم. معروف است که معلم ریاضی در کلاس درس می‌گوید a می‌نویسد b منظورش c است و تازه درستش هم d است. حال با توجه به اینکه من هم معلم ریاضی هستم ترتیب صحیح حروف چه باید باشد؟. حال بهتر است برگردیم به

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\,S$$

برای حل این مسأله سه راه‌حل متفاوت درکتاب مسائل المپیاد سالهای ۱۹۷۷-۱۹۵۹ وجود دارد و راه‌حلهای زیاد دیگری نیز در منابع مختلف وجود دارد. یك راه‌حل هم درکتاب گرینبرگ وجود دارد. ولی هیچکدام از این راه‌حلها کمکی به ما در چگونگی طرح این مسأله و تعمیم آن نمی‌کنند. من ضمن یك سخنرانی در پانزدهمین کنفرانس ریاضی کشور به اهمیت تصویر کردن یك مثلث بروی یك مثلث متساوی‌الاضلاع اشاره کردم. دوباره می‌خواهم با کمك همان روش چگونگی پیدایش این نامساوی را توجیه کرده و هم به تعمیمی ازآن و چند نتیجه دیگر رسیده باشم. فرض کنیم مثلث ABC داده شده و بخواهیم صفحه‌ای بیابیم که تصویر قائم این مثلث روی آن یك مثلث متساوی‌الاضلاع شود.

فرض کنیم صفحه P از رأس A گذشته و تصویر مثلث ABC روی‌آن $AB'C'$ یك مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع x باشد اگر

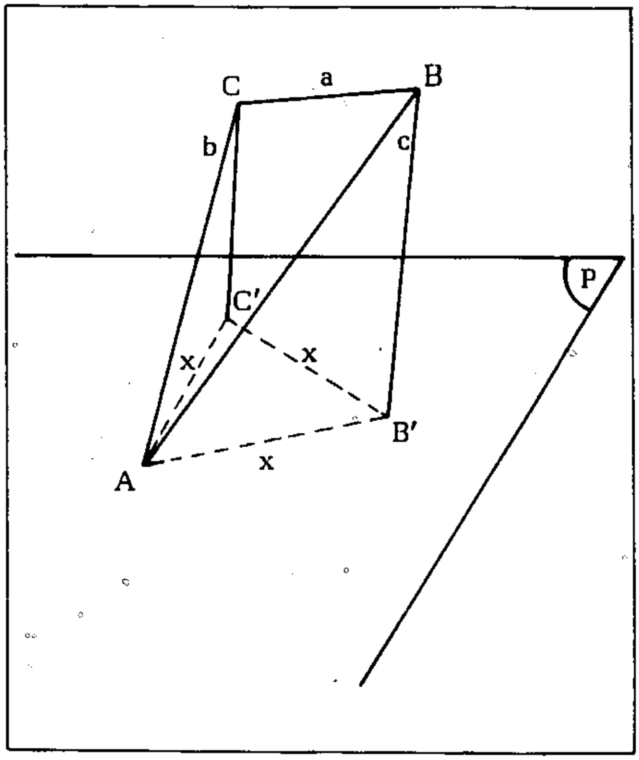
$$BB'=d' \quad \text{و} \quad CC'=d$$

خواهیم داشت،

$$b^{۲}=x^{۲}+d^{۲}$$

$$c^{۲}=x^{۲}+d'^{۲}$$

$$a^{۲}=x^{۲}+(d'-d)^{۲}$$



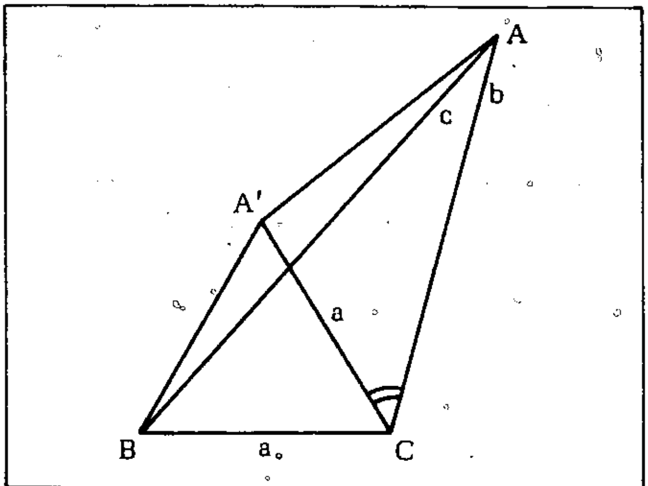
پس‌از حذف d' و d خواهیم داشت،

$$۳x^{۴}-۲(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})x^{۲}+۱۶S^{۲}=۰$$

و S مساحت مثلث است. شرط جواب در این معادله این است که

$$\Delta=(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})^{۲}-۴۸S^{۲}\geqslant ۰$$

پس می‌بینیم که شرط داشتن جواب در معادله فوق، برقراری نامساوی ما است. پس این دلیل پیدایش نامساوی. حال در مورد حلش توجه می‌کنیم که اگرمستقیماً ثابت کنیم که همواره می‌توان مثلث را بر روی یك مثلث متساوی‌الاضلاع تصویر کرد آنگاه این نامساوی برقرار است و اگر نامساوی را جداگانه ثابت‌کنیم این قضیه هندسی درست خواهد بود. با توجه به اینکه این قضیه هندسی در اواخر قرن هفدهم توسط شوارتز [۳] ثابت شده است پس این نامساوی هم در حقیقت همان قضیه شوارتز به شکل دیگری است و کاشف آن مثلاً در سال ۱۹۱۹ چیز تازه‌ای کشف نکرده است. به هر حال از آنجا که مقداری ایده به دست‌آوردیم و اثبات هندسی قضیه شوارتز نیز ساده نیست مبادرت به حل ساده‌ای از نامساوی می‌کنیم و بعدآنرا تعمیم می‌دهیم. با توجه به آنچه که در بالا گفتیم معلوم می‌شود که هر چه مثلث از متساوی‌الاضلاع بودن دور باشد این نامساوی تیزتر می‌شود. این موضوع به ما نشان می‌دهد که ببینیم این مثلث چقدر از متساوی‌الاضلاع بودن دور است تا نامساوی به دست‌آید. برای این منظور روی ضلع BC مثلث متساوی‌الاضلاع $A'BC$ را جدا می‌کنیم واضح است که طول AA' دور بودن مثلث را از متساوی‌اضلاع



بودن نشان می‌دهد این طول را حساب می‌کنیم،

$$AA'^{۲}=a^{۲}+b^{۲}-۲ab\cos(c-۶۰^{\circ})$$

آنگاه با توجه به

$$\cos C=\frac{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}{۲ab}$$

و

$$\sin C=\frac{۲S}{ab}$$

خواهیم داشت

$$AA'^{۲}=\frac{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}-۴\sqrt{۳}\,S}{۲}$$

پس چون $AA'^{۲}\geqslant ۰$ نامساوی مطلوب برقرار است و آشکار است که مثلث ABC وقتی متساوی‌الاضلاع است که $AA'=۰$ یعنی حل مسأله تمام شد. حال توجه‌کنیم که در حل ما می‌توان نامساوی را قوی ترکرد. زیرا در شکل بالا داریم

$$AA'>b-a$$

و

$$AA' > c-a$$

پس

$$AA'^2 > \frac{(b+c-2a)^2}{4}$$

در نتیجه می‌توان گفت نامساوی زیر را ثابت کنید

$$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S \geqslant \frac{1}{2}(b+c-2a)^2$$

که در آن a کوچکترین ضلع باشد. حال معلوم است که اگر ما روشی را که به پیدایش این نامساوی منجر شد عنوان نکنیم و فقط بگوئیم این نامساوی را ثابت کنید. دانش‌آموز حق دارد به عنوان معما به آن نگاه کند. پس ما تا به حال نامساوی را ثابت کردیم آن را قدری تعمیم دادیم و قضیه شوارتز را نیز ثابت کرده‌ایم. حال قبل از اینکه به فکر تعمیمی دیگر بیافتیم بهتر است نتیجهٔ جالبی از قضیه شوارتز را بیان کنیم و بعد به کارمان ادامه دهیم. از آنجائی که هر مثلث را می‌توان به روی یك مثلث متساوی‌الاضلاع تصویر کرد و دایره محاطی مثلث متساوی‌الاضلاع در اوساط سه ضلع به ضلع مماس است و با توجه به اینکه دایره تصویر قائم دایره یا بیضی است نتیجه می‌گیریم در هر مثلث می‌توان در اوساط سه ضلع یك بیضی به سه ضلع مماس کرد. یعنی بیضی محاطی که از اوساط سه ضلع می‌گذرد برای هر مثلث غیرمتساوی‌الاضلاع وجود دارد. حال این فکر به ما دست می‌دهد که آیا ممکن است یك مثلث‌را بر روی یك مثلث با شکلی معین (یعنی متشابه با مثلثی داده شده) تصویر کرد. خوشبختانه جواب مثبت است و این قضیه توسط ریاضیدان فرانسوی، سوئیسی به نام سیمون لهویلیه اولین بار به این شکل مطرح شد که هر مثلث، تصویر قائم یك مثلث با شکلی معین است. براحتی می‌توان دید که این بیان با بیان قبل معادل است. حال با توجه به روش قبل باید مطمئن بود که این قضیه هندسی نیز باید با برقراری یك نامساوی معادل باشد پس مطابق روش پیش عمل کنیم و نامساوی را بیابیم.

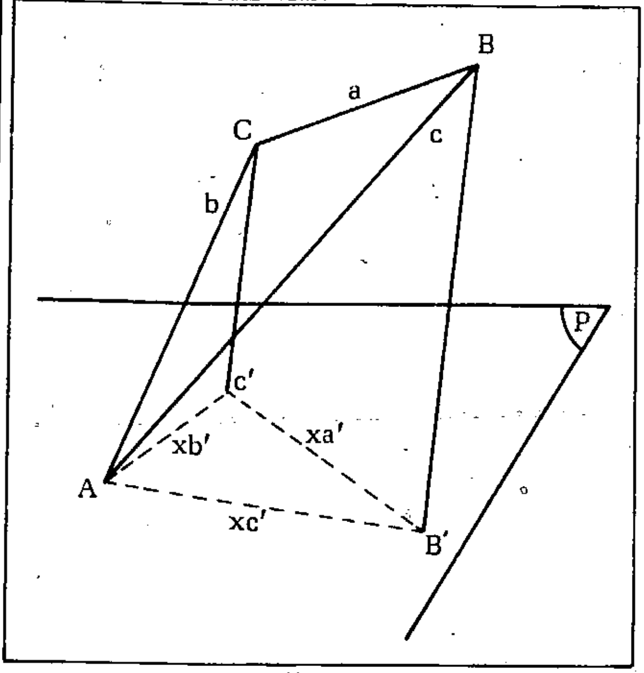
فرض می‌کنیم صفحه P از رأس A طوری گذشته است که تصویر مثلث ABC روی آن مثلثی متشابه با مثلثی به اضلاع c' و b' و a' باشد.

قرار می‌دهیم

$$BB'=d' \quad \text{و} \quad CC'=d$$

خواهیم داشت،

$$b^2=x^2b'^2+d^2$$
$$c^2=x^2c'^2+d'^2$$
$$a^2=x^2a'^2+(d'-d)^2$$



پس از حذف d و d' خواهیم داشت

$$16S'^2x^4-2[\Sigma a^2(b'^2+c'^2-a'^2)]x^2+16S^2=0$$

که در آن S و S' بترتیب مساحت‌های مثلث با ضلع c و b و a و مثلث به اضلاع c' و b' و a' هستند. شرط وجود جواب این است که:

$$a^2(b'^2+c'^2-a'^2)+b^2(a'^2+c'^2-b'^2)+c^2(a'^2+b'^2-c'^2) \geqslant 16SS'$$

پس اگر این نامساوی را ثابت کنیم قضیه هندسی فوق ثابت شده است و اگر قضیه هندسی فوق ثابت شود این نامساوی برقرار است.

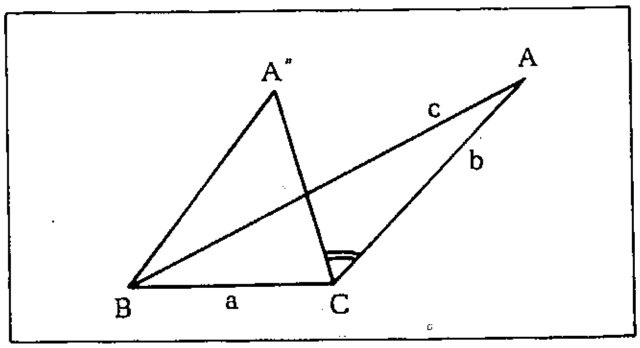
این نامساوی را اولین بار دانیل پدو که یك هندسه‌دان است مطرح کرد شکی نیست او ایده این نامساوی را از همین قضیه هندسی گرفته است ولی آن را عنوان نکرده است. به هر حال ما در اینجا اثباتی بر این نامساوی مطابق نامساوی قبل ارائه می‌دهیم. توجه داشته باشید که این نامساوی بین اضلاع و

مساحتهای دو مثلث دلخواه برقرار است و تساوی هنگامی برقرار است که این دو مثلث متشابه باشند. پس نامساوی بستگی دارد به اینکه چقدر مثلث ABC از متشابه بودن با مثلث $A'B'C'$ بدور باشد. از این‌رو چنین عمل می‌کنیم. روی ضلع BC مثلث $A''BC$ را متشابه با مثلث $A'B'C'$ جدا می‌کنیم پس

$$\frac{A''B}{c'}=\frac{A''C}{a'}=\frac{BC}{a'}$$

در نتیجه

$$A''B=\frac{ac'}{a'} \quad \text{و} \quad A''C=\frac{ab'}{a'}$$



حال مانند قبل AA'' را حساب می‌کنیم

$$AA''^{2}=b^{2}+\frac{a^{2}b'^{2}}{a'^{2}}-\frac{2abb'}{a'}\cos(C-C')$$

حال با گذاشتن $\cos C$ و $\cos C'$ برحسب اضلاع و $\sin C$ و $\sin C'$ برحسب اضلاع و مساحت خواهیم داشت

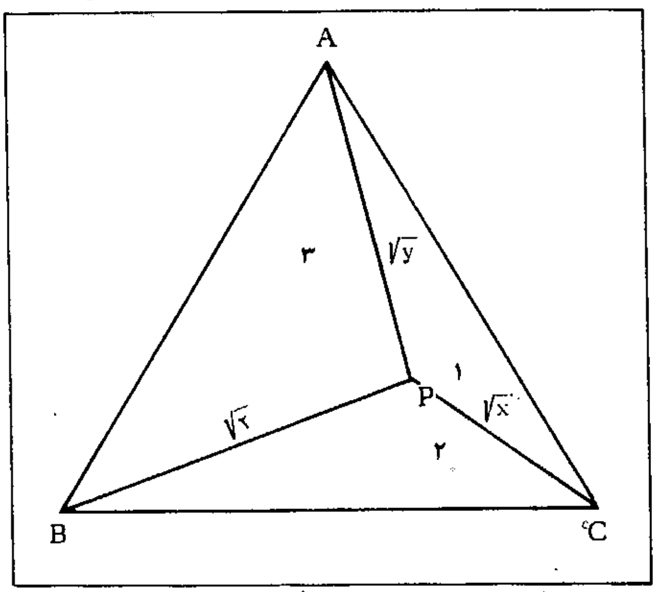
$$a'^{2}AA''^{2}=\frac{\Sigma a^{2}(b'^{2}+c'^{2}-a'^{2})-16SS'}{2}$$

وچون $0 \leqslant a'^{2}AA''^{2}$ پس نامساوی مطلوب به دست می‌آید.

این سخنرانی را با دو تعمیم به مفهوم دیگر به پایان می‌رسانیم. فرض کنیم که از ما بخواهند نشان دهیم که دستگاه

$$\begin{cases}\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=4\sqrt{3}\\ \sqrt{x-4}+\sqrt{z-4}=4\sqrt{3}\\ \sqrt{y-9}+\sqrt{z-9}=4\sqrt{3}\end{cases}$$

دارای جواب یکتاست. اگر بخواهیم از روش معمولی بتوان ۲ رساندن استفاده کنیم به معادلات کسل کننده‌ای بر می‌خوریم و تازه معلوم نیست که موفق شویم. اما اگر تفکر بردن یک موضوع از یک قسمت ریاضی به قسمت دیگر را داشته باشیم و توجه داشته باشیم که مقدار $\sqrt{a-b}$ همواره طول یک ضلع مثلث قائم‌الزاویه به وتر $\sqrt{a}$ و ضلع $\sqrt{b}$ است و این مطلب را نیز بدانیم که مجموع فواصل هر نقطه درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع همواره برابر است با ارتفاع مثلث آنگاه دستگاه فوق یک حل خیلی سریع هندسی پیدا می‌کند. کافی است مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع $4\sqrt{3}$ را در نظر گیریم پس ارتفاع آن برابر ۶ خواهد بود. حال اگر نقطه P را درون مثلث طوری گیریم که فاصله‌اش از BC برابر ۲ و از AC برابر ۱ باشد آشکار است فاصله‌اش از AB برابر ۳ خواهد بود و PC و PA و PB به ترتیب $\sqrt{x}$ و $\sqrt{y}$ و $\sqrt{z}$ خواهند بود که جوابهای دستگاه به دست می‌آیند و یکتائی جواب نیز بدیهی خواهد بود. پس روابط



جبری دستگاه فوق را به یک مسأله هندسی تعمیم دادیم و در آنجا حلی ساده یافتیم این موضوع در ریاضیات پیشرفته خیلی به کار گرفته می‌شود. متأسفانه ارتباط جبر و هندسه به جای آنکه دو طرفه باشد یکطرفه است یعنی افراد فقط آن دسته از مسائل هندسه را مطرح می‌کنند که حل ساده جبری دارند و آنگاه ادعا می‌کنند که به هندسه نیازی نیست. بالاخره آخرین مسأله. فرض کنیم بخواهیم یک چند جمله‌ای از درجه n مانند $f(x)$ بیابیم که

$$f(a_i)=b_i \quad \text{و} \quad i=1,2,\dots,n+1$$

که در آن a_iها متمایز هستند. اگر بخواهیم مستقیم آن را حل

کنیم به حل یك دستگاه $n+1$ معادله و $n+1$ مجهولی برمی‌خوریم که حلش با روش‌های معمولی غیر ممکن است اما لاگرانژ روش حل این مسأله را به ما گفته است. کافی است قرار دهیم

$$g_j(x)=\prod_{j\neq i=1}^{n+1}\frac{(x-a_i)}{a_j-a_i}$$

آنگاه

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n+1} b_j g_j(x)$$

جواب است.
توجه کنیم که

$$g_j(a_i)=\delta_{ij}$$

(δ_{ij} دلتای کرونکر است). خوب این مسأله‌ای بود مربوط به جبر خطی، حال در حساب قضیه باقیمانده چینی را به خاطر بیاوریم اگر m_n و ... و m_2 و m_1 اعداد طبیعی باشند که دو به دو نسبت به هم اول باشند آنگاه دستگاه

$$\begin{cases} x\equiv b_1 \pmod{m_1} \\ x\equiv b_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \quad \vdots \\ x\equiv b_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

دارای جواب است. برای حل کافی است به شکل این مسأله توجه کنیم که با شکل مسأله بالا یکی است پس اگر مانند بالا فرض کنیم که g_j عدد طبیعی باشد که

$$g_j\equiv\delta_{ij} \pmod{m_i} \text{ و } \forall_i$$

آنگاه

$$x=\sum_{j=1}^{n} b_j g_j$$

یك جواب خواهد بود و جواب کلی

$$X'=x+km_1m_2\cdots m_n$$

خواهد شد. یعنی تقلید یك روش از یك قسمت ریاضی در قسمت دیگر ما را سریع به نتیجه رسانید. در پایان لطیفه زیر بی‌ارتباط با عنوان سخنرانی نخواهد بود.

یك ریاضیدان که معمولاً هنگام سخنرانی دیگران خواب می‌رفت، در پایان سخنرانی که با کف زدن حضار از خواب می‌پرید برای اینکه نشان دهد خواب نبوده است همیشه این سؤال کلی را از سخنران می‌کرد که آیا امکان تعمیم آنچه را که گفته‌اید وجود دارد. یکبار در یکی از این سخنرانیها ریاضیدان ما ازهمان شروع کنفرانس به خواب رفت وهنگامی که معرفی کننده سخنران جلو رفت که سخنران را معرفی کند ریاضیدان در خواب بود، مدت معرفی مقداری بیش‌از معمول طول کشید ومعرفی کننده در آخر گفت که سخنران بیش‌از ۲۰۰۰ مقاله ریاضی دارد که در این موقع حضار شروع به کف زدن کردند و ریاضیدان ماهم طبق معمول از خواب پرید و چون یك عدد ۲۰۰۰ هم در لحظه‌های آخر به گوشش خورده بود دست بالا برد و پرسید معذرت می‌خواهم این عدد ۲۰۰۰ را نمی‌توان تعمیم داد؟

مراجع

1– Berger. M, Geometry I, II, Springer – Verlag, 1987.

2– Davis. P. J, Hersh. R, the Mathematical Experience Penguin, 1981.

3– Dorrie. H, 100 great Problems of Elementary Mathematics Dover. 1965.

4– Eves. H, Great Moments in Mathematics, Vol I, II, MAA. 1983.

5– Greitzer. S. L., International Mathematical Olympiads, MAA, 1978.

6– Polya.G, Induction & Analogy in Mathematics, Princeton univ Press, 1954.

7– Polya. G, Mathematical Discovery, John Wiley, 1981.

8– Pritulenko. P. V., Plane figures & Sections, Mir Pudlishers Moscow, 1980.

9– Schiffer M. M, Bowden. L, the Role of Mathematics in Sciense, MAA, 1984.

۱۰ــ هشترودی، محسن، هندسه دوایر، انتشارات یکان ۱۳۴۵.

۱۱ــ کرم‌زاده، امیدعلی، کدام مسائل انگیزه‌بخش‌اند؟ گزارش پانزدهمین کنفرانس ریاضی کشور و مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۳ پائیز ۱۳۶۳.

۱۲ــ گرینبرگ، هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی (ترجمه دکتر شفیعها) نشر دانشگاهی.

درسهایی از هندسه (۵)

قطب و قطبی نسبت به منحنی‌های درجهٔ دوم

حسین غیور

(قبل از مطالعهٔ این مبحث به بخش ناهمساز در رشد شمارهٔ ۱۴ـ۱۳ صفحهٔ ۵۴ و دنبالهٔ آن در رشد شماره ۱۶ صفحه ۳۰ مراجعه کنید)

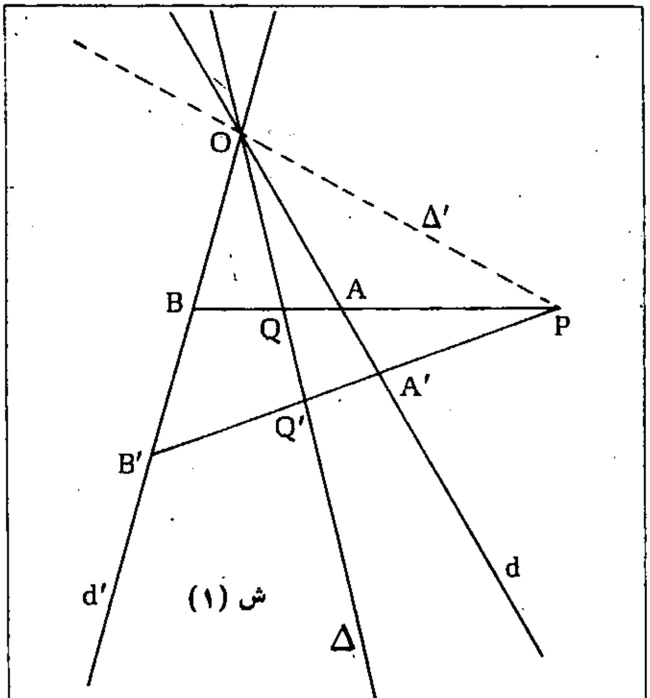
۱) قطب و قطبی نسبت به دو خط: نقطهٔ P و دو خط d و d' در یک صفحه مفروضند. مکان هندسی مزدوج توافقی نقطه P نسبت به نقطه تقاطع هرخط از دسته خط به مرکز P که d و d' را قطع می‌کند، خط راستی است که با دو خط d و d' عضو یک دسته خط است.

تعریف: تمام خطهایی که از یک نقطه می‌گذرد، و تمام خطهای موازی با هم، یک دسته خط نامیده می‌شوند. نقطه‌ای را که تمام خطها از آن نقطه می‌گذرد مرکز دسته گویند.

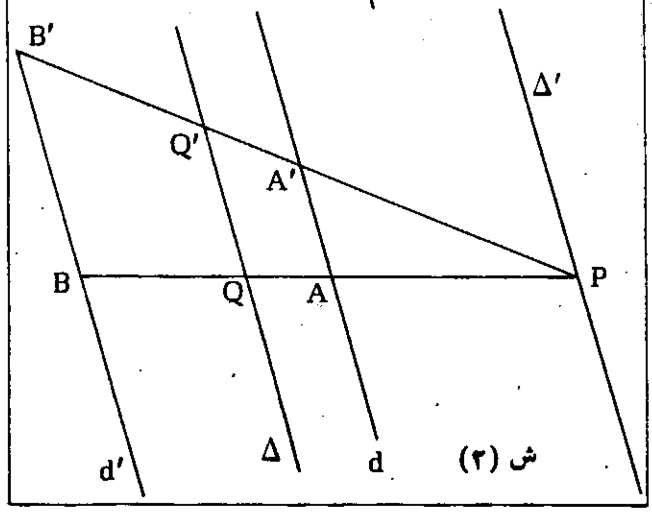
از P قاطعی رسم می‌کنیم که d و d' را در A و B قطع کند نقطهٔ Q مزدوج توافقی P را نسبت به A و B تعیین کرده و آنرا به Q وصل می‌کنیم (ش ۱) خط Δ که از O و Q می‌گذرد مکان هندسی نقطه Q است زیرا دستگاه ABPQ، O توافقی است و هر خط دیگری مانند $PA'B'$ در نقطه Q' آنرا قطع کند Q' مزدوج توافقی P نسبت به A' و B' است.

به عکس اگر نقطهٔ Q' مزدوج P نسبت به A' و B' روی Δ نباشد چون PQ' از دسته خطهایی به مرکز P است که بنا به فرض باید هر دو خط d و d' را قطع کند بنا به آنچه گذشت مزدوج P نسبت به A' و B' روی خط OQ واقع می‌شود و چون P نسبت به A' و B' بیش از یک مزدوج ندارد، Q' روی خط OQ است. با اثبات این قضیه تعریف ذیل برای قطبی نقطه نسبت به دو خط پیدا می‌شود.

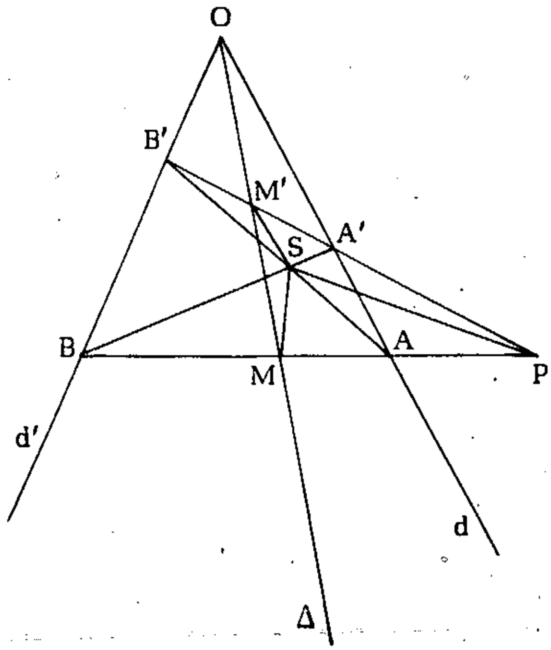
۲) تعریف قطبی نقطه نسبت به دوخط: قطبی نقطهٔ P نسبت به دو خط d و d' خط مستقیمی است شامل قطبی‌های نقطهٔ P، نسبت به خطهائی از دستهٔ به مرکز P که d و d' را قطع می‌کنند. این خط با d و d' در یک دسته است. ازاین تعریف



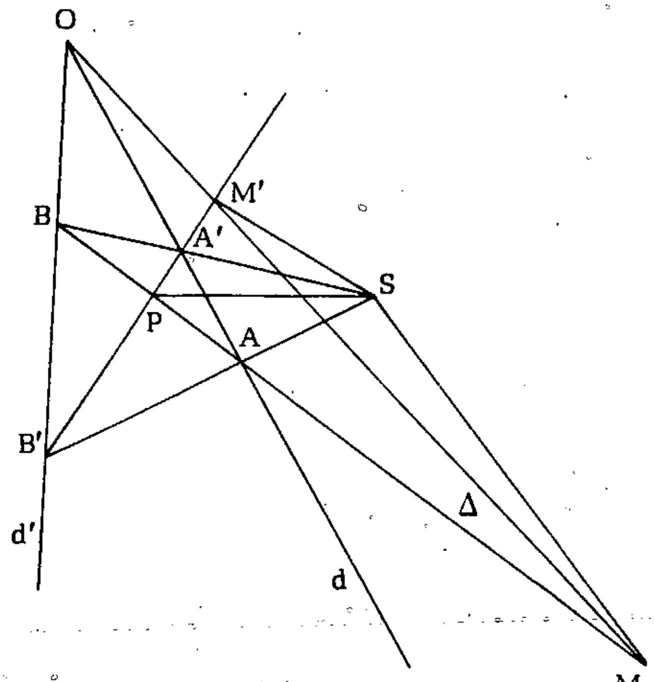
ش (۱)



ش (۲)



ش (۳)



ش (۴)

نتیجه می‌شود، که:

الف) اگر P روی یکی از دو خط باشد قطبی آن همان خط است در نتیجه اگر P نقطه مشترک آن دو خط باشد قطبی آن همان نقطه است.

ب) اگر دو خط با هم موازی و نقطهٔ P در نوار بین دو خط و به فاصله‌های مساوی از دو خط باشد نسبت به دو خط قطبی ندارد (ش ۲) (یا قطبی آن خط بینهایت صفحه است: همان گونه‌که مزدوج توافقی وسط یك پاره خط نقطهٔ بی‌نهایت راستای آن خط است).

۳) **قطب خط نسبت به دوخط:** اگر خط Δ قطبی نقطهٔ P نسبت به دو خط d و d' باشد، نقطه P قطب خط Δ نسبت به آن دو خط نامیده می‌شود. بنابراین خطی که با دو خط عضو یك دسته نیست نسبت به آن دو خط قطب ندارد.

تبصره: هر نقطه نسبت به دو خط تنها یك قطبی دارد، خطی که با دوخط مفروض عضو یك دسته است، نسبت به آن دوخط قطب‌های بیشمار دارد که روی خطی جـــا دارند که مزدوج توافقی آن خط نسبت به دو خط مفروض است.

۴) **قضیه اصلی.** دو خط d و d' و نقطهٔ P مفروض است. از نقطهٔ P دو خط رسم می‌کنیم، اولی d و d' را در A و B و دومی در A' و B' قطع می‌کند دراین صورت S نقطهٔ تقاطع دو خط AB' و BA' متعلق به قطبی P نسبت به d و d' است.

برهان. M و M' مزدوج توافقی P را نسبت به A و B و A' و B' تعیین می‌کنیم بنابراین MM' قطبی نقطهٔ P است که با d و d' جز یك دسته خط است. S نقطهٔ تقاطع AB' و BA' را به P و M و M' وصل می‌کنیم دو دستگاه توافقی $S \cdot PMAB$ و $S \cdot PM'A'B'$ پدید مـی‌آید. در این دو دستگـاه دو خط شعاعی SA و SB از دستگاه اولی بر SB' و SA' از دستگـاه دومی منطبق است (شکلهای ۳ و ۴ را ببینید). از طرف دیگر چون

$$(PMAB)=\frac{PA}{PB}:\frac{MA}{MB}$$

و

$$(PM'B'A')=\frac{PB'}{PA'}:\frac{M'B'}{M'A'}$$

$$(PM'B'A')=\frac{1}{(PMAB)}=-1 \Longrightarrow$$

$$(PM'B'A')=(PMAB)=-1$$

در دو دستگاه توافقی $(S \cdot PMAB)$ و $(S \cdot PM'B'A')$ چون سه شعاع SP و SA و SB بر سه شعاع SP و SB' و SA' منطبق است شعاعهای SM و SM' نیز برهم منطبق‌اند و قضیه ثابت است.

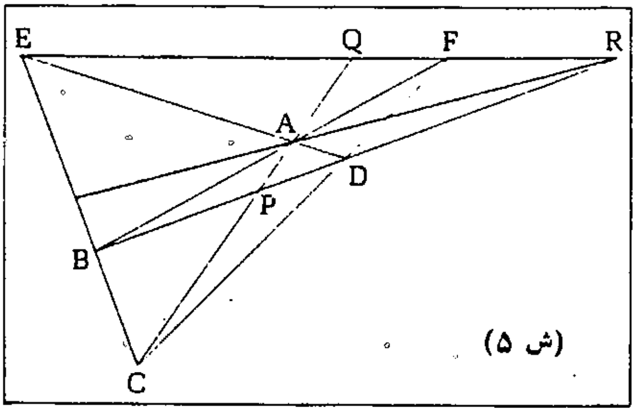
نتیجه. به‌کمك این قضیه قطبی نقطهٔ مفروض را نسبت به دو خط با استفاده ازخط‌کش بدون به‌کار بردن پرگار می‌توان رسم‌کرد.

تمرین. اگر دو خط باهم موازی باشند قطبی نقطهٔ P را نسبت به خط متوازی رسم‌کنید.

۵) چهارضلعی کامل. چهارضلعی کامل از تقاطع چهار خط دوبه‌دو متقاطع با نقطه‌های تقاطع متمایز تشکیل می‌شود چهارضلعی کامل شش رأس و سه قطر دارد.

قضیه. در چهارضلعی کامل هر قطر به وسیلهٔ دو قطر دیگر به نسبت توافقی تقسیم می‌شود.

برهان. بنابه قضیهٔ ۴ خط ACPQ قطبی رأس R نسبت به دو خط CDF و CBE است پس دو تقسیم (QREF) و (PRBD) توافقی‌اند (ش ۵).



(ش ۵)

بنابه قضیهٔ ۴ AR قطبی C نسبت به BD و EF است. پس تقسیم (QPAC) توافقی است.

تبصره. دربارهٔ چهارضلعی کامل دو قضیهٔ جالب و مهم است که مربوط به قطب و قطبی نمی‌شود.

برهان قضیه اول را در اینجا می‌آوریم و برهان قضیه دوم را به عهده خواننده می‌گذاریم:

قضیهٔ اول. در چهارضلعی کامل وسطهای سه قطر بر یك خط راست قرار دارند، و مرکزهای ارتفاعی چهار مثلث که از تقاطع اضلاع چهارضلعی دوبه‌دو پدید می‌آیند برخطی واقعند که بر خط اول عمود است.

قضیهٔ دوم. دایره‌های محیطی چهارمثلث که از تقاطع اضلاع چهارضلعی دوبه‌دو پدید می‌آیند از یك نقطه می‌گذرند که با مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثها، ۵ نقطه واقع بر محیط یك دایره‌اند.

برهان.

قضیهٔ اول. در شکل (۵) ارتفاع‌های یکی‌از چهار مثلث مثلاً مثلث ECD را رسم‌کنید پای سه ارتفاع را F' و C' و D'، و نقطهٔ تلاقی سه ارتفاع را H بنامید. بسادگی به‌کمك قوت نقطه تساوی ذیل به دست می‌آید

$$HE \cdot HE' = HC \cdot HC' = HD \cdot HD'$$

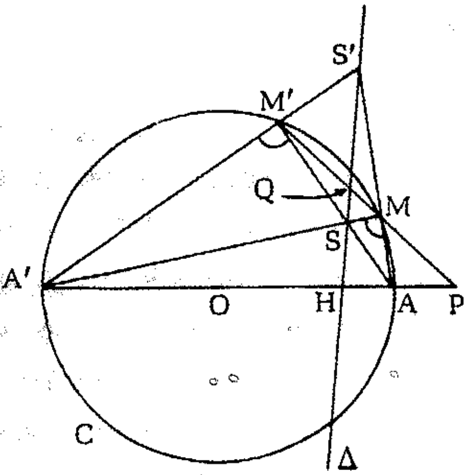
سه دایره به قطرهای سه قطر چهارضلعی رسم‌کنید. (شکل ۶ و ۷ را ببینید) $HD \cdot HD'$ قوت نقطه H نسبت به دایرهٔ به قطر BD و $HC \cdot HC'$ قوت نقطه H نسبت به‌دایرهٔ به‌قطر AC و $HE \cdot HE$ قوت نقطه H نسبت به‌دایرهٔ به قطرEF است یعنی H نسبت به سه دایره قوتهای مساوی دارد چون دربارهٔ سه مثلث دیگر نیز این حکم صادق است. مرکزهای ارتفاعی چهار مثلث که با اضلاع چهارضلعی تشکیل می‌شوند نسبت به سه دایره قوتهای مشترك دارند، بنابراین سه دایره عضو یك دسته دایره‌اند و مراکزآنها بر یك استقامت که پایهٔ دسته خط نامیده می‌شود و مرکزهای ارتفاعی چهار مثلث بر محور این دسته دایره واقعند.

قطب و قطبی نسبت به دایره

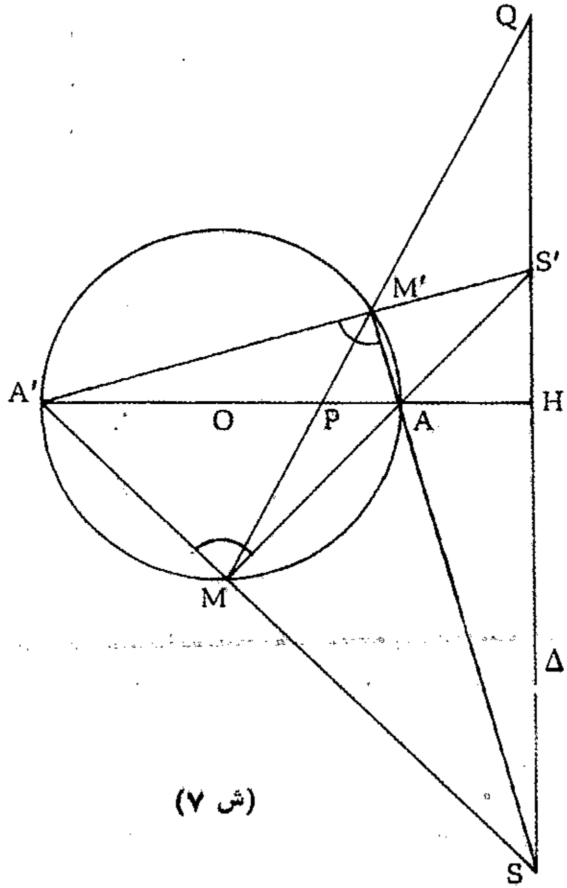
۱) تعریف قطب و قطبی نسبت به دایره. نقطهٔ P در صفحهٔ دایرهٔ C مفروض است. مزدوجهای توافقهای نقطهٔ P نسبت به خطهایی از دسته خط به مرکز P که هریك دایره را در دو نقطه قطع می‌کنند (یا با آن مماس می‌شوند) برخطی جا دارند که‌آن را قطبی P نسبت به دایره‌گویند. اگر خط Δ قطبی نقطهٔ P باشد نقطهٔ P قطب خط Δ نامیده می‌شود.

قبول این تعریف به اثبات قضیهٔ زیر نیاز دارد.

قضیه. نقطهٔ P درصفحه‌دایرهٔ C مفروض است. مزدوجهای توافقی نقطهٔ P نسبت به دسته خط به مرکز P برای خطهایی



(ش ۶)



(ش ۷)

از این دسته‌که دایره را در دو نقطه (یا دو نقطهٔ منطبق برهم) قطع می‌کند، بر خط راستی قرار دارد.

برهان. از O مرکز دایرهٔ C به P وصل می‌کنیم تا دایرهٔ C را در A و A' قطع‌کند واز P قاطع PMM' را با راستای دلخواه رسم می‌کنیم بنا به قضیهٔ ۴، قطبی P نسبت به دو خط AM و $A'M'$ از S نقطهٔ تقاطع AM' و MA' و S' نقطهٔ تقاطع AM و $A'M'$ و H مزدوج توافقی P نسبت به A و A' و Q مزدوج توافقی P نسبت به M و M' می‌گذرد. خط Δ بر AA' عمود است زیرا در مثلث $S'AA'$، AM' بر $S'A'$ عمود است و MA' بر $S'A$: بنابراین S مرکز ارتفاعی مثلث $S'AA'$ است و $S'H$ بر AA' عمود است و چون H مزدوج توافقی P نسبت به A و A' نقطه ثابتی است خط Δ که از H می‌گذرد و بر OP عمود است خط ثابتی است و هموارهٔ نقطه Q مزدوج P نسبت به M و M' برخط Δ واقع است. وقتی‌که P خارج دایرهٔ C است (ش۷)، اگرقاطع PMM' در حول P تغییر کند چون همواره Q بین M و M' است آنگاه‌که خط با دایره مماس شود نقطه Q بر M و M' منطبق می‌شود ونقطه تماس روی خط Δ قطبی P واقع می‌شود. یعنی اگر از نقطه P در خارج دایره دو مماس بردایره رسم کنیم خطی‌که نقطه‌های تماس وبه هم وصل می‌کند. قطبی P نسبت به دایره است.

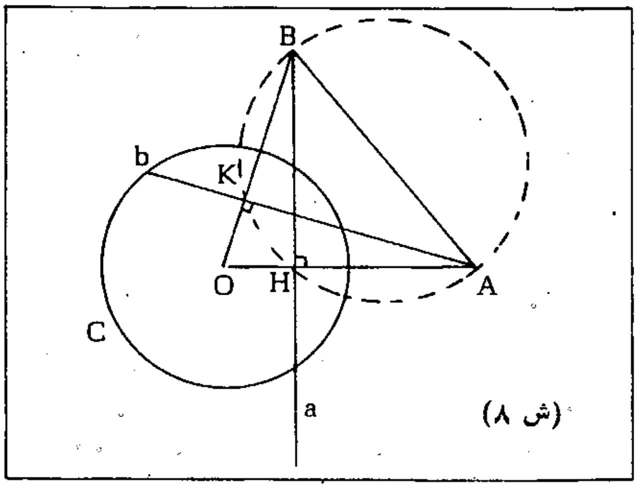
تبصره ۱. در حالت خاصی‌که P روی دایره (یعنی منطبق بر A) باشد مماس نقطه A قطبی P نسبت به دایره است.

تبصره ۲. اگر نقطه P بر مرکز دایره منطبق شود خط Δ از بین می‌رود و با قبول فرض خط بینهایت صفحه، قطبی P نسبت به دایره خط بینهایت. صفحه عمود بر راستای AA' است.

۲) رسم قطبی نقطه P نسبت به دایرهٔ C بدون استفاده از پرگار. از نقطهٔ P دو قاطع رسم می‌کنیم‌که یکی دایره را در M و M' و دیگری در N و N' قطع‌کند اگر S نقطهٔ تقاطع MN' و NM' و S' نقطه تقاطع MN و $M'N'$

باشد. خط SS' که بنا به قضیه ۴ از H مزدوج P نسبت به M و M' و H' مزدوج P نسبت به N و N' می‌گذرد قطبی P نسبت به دایره است شکل را رسم کنید.

قضیه. دو نقطهٔ A و B در صفحهٔ دایرهٔ C مفروضند هرگاه قطبی نقطهٔ A از B بگذرد قطبی نقطه B نیز از A می‌گذرد.



(ش ۸)

برهان. فرض می‌کنیم خط a قطبی نقطهٔ A از نقطهٔ B بگذرد. O مرکز دایرهٔ C را به B وصل کرده و از A خط b را بر OB عمود رسم می‌کنیم دایرهٔ به قطر AB از H و K می‌گذرد و این تساوی به دست می‌آید

$$OK \cdot OB = OH \cdot OA$$

$$OH \cdot OA = R^2$$

از این‌دو تساوی نتیجه می‌گیریم

$$OK \cdot OB = R^2$$

پس خط b قطبی نقطهٔ B است.

نتیجه ۱) اگر قطب خط d روی خط d' باشد قطب خط d' نیز روی خط d است.

نتیجه ۲) قطبی‌های نقطه‌های یک خط از قطب آن خط می‌گذرد.

نتیجه ۳) قطب‌های خطهایی که از یک نقطه می‌گذرد روی قطبی آن نقطه واقع است.

نتیجه ۴) از نقطهٔ P قاطعی رسم می‌کنیم تا دایره C را در دو نقطه M و M' قطع کند مماسهائی که از M و M' بر دایره رسم می‌شود یکدیگر را در Q قطع می‌کند هرگاه قاطع در حول P دوران کند مکان Q خط مستقیم است.

۳) دو نقطهٔ مزدوج نسبت به دایره. هرگاه دو نقطه در صفحهٔ دایره طوری واقع شوند که قطبی هریک نسبت به دایره از نقطهٔ دیگر بگذرد دو نقطه را مزدوج یکدیگر نسبت به دایره گویند.

تعریف. هرگاه دو خط نسبت به دایره طوری رسم شوند که قطب هریک روی دیگری باشد دو خط را مزدوج یکدیگر نسبت به دایره گویند.

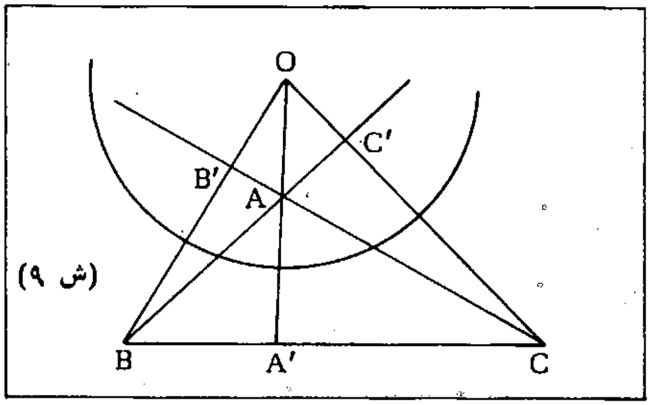
۴) مثلث مزدوج نسبت به دایره. مثلثی که هر دو ضلع (یا هر دو رأس) آن نسبت به دایرهٔ مزدوج یکدیگر باشند، مثلث مزدوج نسبت به دایره نامیده می‌شود.

قضیه. در مثلث مزدوج نسبت به دایره:

الف) هر ضلع قطبی رأس مقابل است.

ب) مرکز ارتفاعی (نقطهٔ تلاقی ارتفاعها) مثلث منطبق بر مرکز دایرهٔ هادی است.

ج) مثلث مزدوج نسبت به‌دایره زاویه داخلی منفرجه دارد (منفرج‌الزاویه است).



(ش ۹)

برهان.

الف) چون بنا به تعریف AB و BC مزدوج یکدیگرند. قطب AB روی BC و قطب BC روی AB است و نیز چون BC و AC مزدوج یکدیگرند، قطب BC روی AC و قطب AC روی BC است، که نتیجه می‌شود قطب BC هم روی AB و هم روی AC است یعنی قطب BC نقطه A است یا BC قطبی رأس A است وهمینطور ثابت می‌شود دو رأس B و C قطبهای AC و ABاند.

ب) چون A قطب ضلع BC است ارتفاع رأس A یعنی

AA' از O مرکز دایره هادی می‌گذرد و همینطور چون B قطب AC ارتفاع رأس B یعنی BB' از O مـرکـز دایرهٔ هادی می‌گذرد پس O مرکز ارتفاعی(نقطه تلاقی سه ارتفاع) مثلث ABC است.

ج) از تساوی‌های

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = R^2$$

نتیجه مـی‌گیریم O خارج ارتفاعهای AA' و BB' و CC' از مثلث است یعنی O مرکز ارتفاعی مثلث درخارج آن‌است. بنابراین در مثلث یکـی از زاویه‌هـای A و B و C منفرجه است.

تبدیل قطبی معکوس نسبت به دایره

تعریف. قطبی معکـوس در مبحث قطب و قطبی نسبت بـه دایره، تبدیلی است‌که عمل‌آن به مأخذ قطب و قطبی نسبت به دایرهٔ هادی انجام می‌گیرد.

آشنائی به تبدیل قطبی معکوس نیاز به مطالب ذیل دارد:

الف) اگـر شکل مفروض نقطه‌ای باشد، تبدیل یافتهٔ آن خط مستقیم و اگـر خطی بـاشد، تبدیل یافتهٔ آن نقطه است. زیرا قطبی نقطه نسبت بـه دایره خط مستقیم و قطب خط نسبت به‌دایره نقطه است. برهان اینکه تبدیل یافتهٔ خط، نقطه است‌را می‌توان از این حکم نتیجه‌گرفت قطبی‌های تمام نقطه‌های یك خط، از نقطه‌ای‌که قطب‌آن است می‌گذرد.

ب) تبدیل یافتهٔ قطبی معکوس مثلث یا n ضلعی مفروض، مثلث یا n ضلعی‌است که رأسهای‌آن قطب‌اضلاع‌و اضلاع‌آن قطبی رأسهای مثلث یا n ضلعی مفروض است.

تبصره. اگـر نقطهٔ مفروض منطبق بر مرکز دایرهٔ هادی و خط مفروض از مرکز دایرهٔ هادی بگذرد نه‌آن نقطه تبدیل به خط می‌شود، نه خط تبدیل به نقطه. برای رفع این اشکال‌کـه تبدیـل قطبی معکـوس حـالت استثنائـی پیدا نکند از اصل دزارگ[1] استفاده می‌کنیم.

---

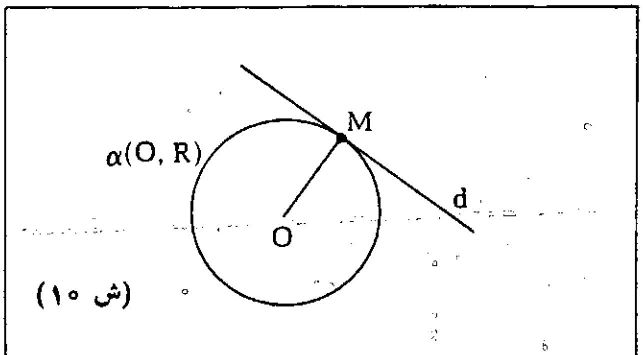
(1) Desargues (۱۵۹۳ ـ ۱۶۶۲) ریاضیدان و مهندس فرانسوی از مؤسسین هندسهٔ جدید ... که مفاهیم نقطه بینهایت و خـط بینهـایت و قطب و قطبی و بسیاری مفاهیم دیگـر را وارد هندسه کـرد (نقل بـه اختصار از دایرةالمعارف فارسی غلامحسین مصاحب).

اصل دزارگ ـ هر خط واقـع در صفحه یك نقطهٔ بینهایت دارد.

I. نقطه‌های بینهایت تمام خطهای موازی‌برهم منطبق است. یعنی خطهای موازی، یك نقطهٔ بینهایت مشترك دارند ودرنتیجه عضو یك دسته خطند‌که نقطه بینهایت مشترك مرکزآنها است.

II. نقطه‌هـای بینهایت تمام خطهای یك صفحه بر یك خط واقعند‌که خط بینهایت صفحه نامیده می‌شود.

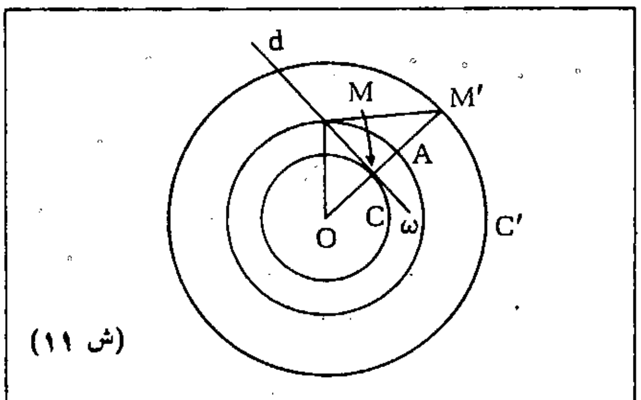
با قبول این اصل، قطبی مـرکـز دایرهٔ هادی خط بینهایت صفحه است و قطب خطی‌کـه از مـرکز دایرهٔ هادی بگذرد، نقطهٔ بینهایت، خطهای عمود برآن خط است.



(ش ۱۰)

ج) در تبدیل قطبی معکـوس، مبدل دایـرهٔ هادی منطبق برآن است. از M نقطه‌ای از دایرهٔ هـادی خط d را برآن مماس مـی‌کنیم M قطب خط d نسبت به دایرهٔ هادی است، یعنی M قطبی معکـوس M است، و قطبی معکـوس دایـره هادی، دایرهٔ هادی است.

د) تبدیل یافتهٔ دایرهٔ C به مرکز O وشعاع R C(O٫R) نسبت به دایرهٔ ω به مرکز O و شعاع K، دایرهٔ C' به مرکز



(ش ۱۱)

O و شعاع $\frac{K^2}{R}$ است.

برهان. از نقطه M روی دایره C خط d را مماس بر آن رسم می‌کنیم 'M قطب خط d نسبت به دایرهٔ ω(O, K) را روی خط OM تعیین می‌کنیم

$$OM \cdot OM' = OA^2 \Longrightarrow OM' = \frac{K^2}{R}$$

'M مبدل قطبی معکوس مماس نقطه M بر دایرهٔ C است. پس دایرهٔ 'C به مرکز O و شعاع $\frac{K^2}{R}$ قطبی معکوس دایره C به مرکز O و شعاع R نسبت به دایرهٔ هادی به مرکز O و شعاع K است.

هـ) قضیه اساسی. دو دایره با مرکزهای مختلف در یك صفحه مفروضند تبدیل یافتهٔ یك دایره نسبت به دایرهٔ دیگر مقطع مخروطی است.

فرض می‌کنیم دایرهٔ ω به مرکز O وشعاع K دایرهٔ مأخذ تبدیل قطبی معکوس، و دایرهٔ C به مرکز C و شعاع R دایره مفروض باشدکه منظور تعیین قطبی معکوس‌آن است.

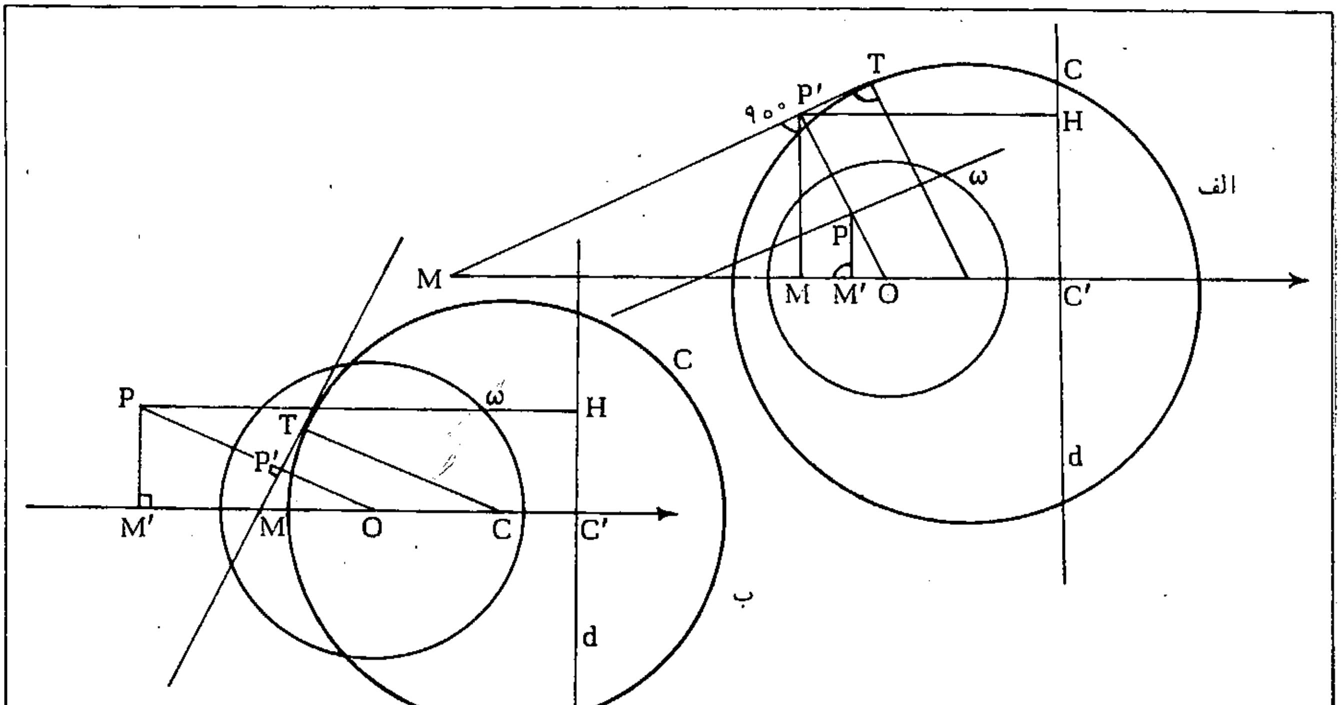
قبل‌از شروع برهان تعریفی از مقاطع مخروطی را که در مخروطات سال‌آخردبیرستانها تدریس می‌شود برای یادآوری به اختصار شرح می‌دهیم.

تعریف. مقطع مخروطی به کانون O و خط هادی d مربوط به کانون O، و خروج از مرکز e، مکان هندسی نقطه‌ایست‌که نسبت فاصلهٔ آن از کانون به فاصلهٔ از خط هادی، مساوی عدد e باشد (اگر $e<1$ و $e>1$ و $e=1$ باشد بترتیب مقطع مخروطی بیضی و هذلولی و سهمی نامیده می‌شود در حالی‌که $e=0$ باشد مقطع مخروطی مقطع تبدیل به دایره می‌شودکه خط هادی‌آن خط بینهایت صفحه موازی با خط عمود بر محور آن است).

برهان. از نقطهٔ T متعلق به دایرهٔ C مماسی رسم می‌کنیم و نقطهٔ P قطب مماس T را نسبت به دایرهٔ ω تعیین می‌کنیم. خط d قطبی C مرکزدایره را نسبت به دایرهٔ ω رسم می‌کنیم تا OC را در 'C قطع‌کند

$$OC \cdot OC' = k^2$$

و نقطه O را به P وصل می‌کنیم تا مماس نقطه T را در 'P قطع‌کند و تساوی $OP \cdot OP' = k$ به دست‌آید و از P عمود 'PM را بر OC رسم می‌کنیم و مماس I را امتداد



(ش ۱۲)

می‌دهیم تا OC را در M قطع کند و تساوی

$$OM \cdot OM' = OP \cdot OP' = k^{2}$$

برای اینکه ثابت کنیم مکان P مقطع مخروطی است وقتی که T روی دایرهٔ C جابجا می‌شود از P عمود PH را برخط d فرود می‌آوریم و کوشش می‌کنیم با توجه به تساویهای (۱) و (۲) و (۳) تساوی $\frac{PH}{OP}=\frac{1}{e}$ را به شرح زیر به دست آوریم.

$$\frac{PH}{OP}=\frac{OC'-OM'}{OP}=\frac{k}{OP}\left(\frac{OC'}{k}-\frac{OM'}{k}\right)$$
$$=\frac{OP'}{k}\left(\frac{k}{OC}-\frac{k}{OM}\right)$$
$$=\frac{OP'}{OM}\left(\frac{OM}{OC}-1\right)=\frac{CT}{CM}\cdot\frac{CM}{CO}$$
$$=\frac{R}{OC}=\frac{1}{e}$$

و) عکس قضیه اساسی شماره ۷ نیز صحیح است از این قرار: قضیهٔ عکس تبدیل یافتهٔ قطبی معکوس مقطع مخروطی نسبت به دایره‌ای که مرکز آن کانون مقطع مخروطی باشد یك دایره است که مرکز آن نقطه ثابتی روی محور مقطع مخروطی است.

برهان. برهان این قضیه عین قضیه شمارهٔ ۷ است که در آن از نقطه تماس T روی دایره‌ای به مرکز C و شعاع CT دایره‌ای رسم می‌کنیم، و از رشته تساویهائی که دنبال هم نوشته شده‌اند از آخر یعنی در تساوی $\frac{R}{OC}=\frac{1}{e}$ به طرف تساوی اول حرکت می‌کنیم تا به اولین تساوی برسیم. از تساوی اخیر نتیجه می‌شود که R شعاع دایره OC مقدار ثابتی مساوی $\frac{OC}{e}$ است که بنابر فرض هم OC ثابت است و هم e یعنی وقتی که P روی مقطع مخروطی جابجا می‌شود نقطه T روی دایرهٔ $C\left(C\ ,\ \frac{OC}{e}\right)$ حرکت می‌کند و دایره ثابتی را که تبدیل یافته مقطع مخروطی است رسم می‌کند.

بقیهٔ مقاله در شمارهٔ آینده

تاریخ پیدایش بعضی از علائم

آقای رضا علاقه‌بندان دانش‌آموز
سال چهارم ریاضی از بوشهر

تاریخ پیدایش بعضی از علائم ریاضی را از شماره ۳ مجله یکان اقتباس نموده و ارسال داشته‌اند. اصل مطالب توسط آقای فتح‌ا... زرگری تنظیم‌شده است. با توجه به‌جالب بودن این نکات تاریخی، ذیلاً این نمادها را می‌آوریم.

علامت	مفهوم	مبتکر	تاریخ
∞	بینهایت	والیس	۱۶۵۵
e	مبنای لگاریتم	اویلر	۱۷۳۶
π	نسبت محیط دایره	جونس	۱۷۰۶
	به قطر	اویلر	۱۷۳۶
i	$\sqrt{-1}$	اویلر	۱۷۷۷
x ، y	مقادیر متغیر مجهول	دکارت	۱۶۳۷
$\vec{r}$	بردار	کوشی	۱۸۵۳
$\pm$	جمع، تفریق	ریاضیدانان آلمان	اواخر قرن ۱۵
$\times$	ضرب	اوترید	۱۶۳۱
$\cdot$	ضرب	لایب نیتز	۱۶۹۸
:	تقسیم	"	۱۶۳۷
a^{n}	توان	دکارت	۱۶۳۷
$\sqrt[n]{\ }$	ریشه	روولف	۱۵۲۵
		ژیرار	۱۶۲۹
log	لگاریتم	لپکر	۱۶۲۴
sin, cos	سینوس، کسینوس	اویلر	۱۷۴۸
tg	تانژانت	اویلر	۱۷۵۳
arc sin	ارك سینوس	لاگرانژ	۱۷۷۲

دوران با اعداد چهاربرگی

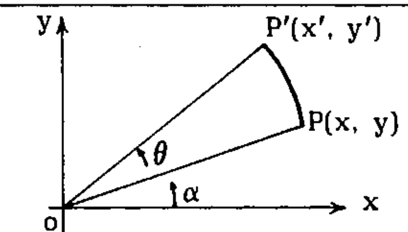
محمدهادی فراهی

۱) مقدمه. فرض کنید نموداری حول مبدأ مختصات دوران نماید، غالباً نیاز داریم بدانیم هنگامی‌که نقطه‌ای با مختصات (x, y) یا (x, y, z) دوران می‌کند، مختصات جدیدآن چیست. در دستگاه دوبعدی، معمولاً دو روش متفاوت برای محاسبه مختصات جدیدآموخته می‌شود، یکی با استفاده از اعداد مختلط و دیگری با استفاده از بردارها و ماتریسها.

در اینجا اشاره‌ای مختصر به دوران در فضای دوبعدی، با استفاده از اعداد مختلط و ماتریسها می‌کنیم، سپس توضیح خواهیم دادکه چگونه اعداد چهار برگی در دوران در فضای سه‌بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند واین روش را باروشهای معمولی‌که متکی بر استفاده از ماتریسها است مقایسه می‌کنیم تا نشان دهیم‌که استفاده از اعداد چهاربرگی به محاسبات‌کمتری نیاز دارد.

۲) دوران در فضای دوبعدی با استفاده از ماتریسها

فرض‌کنیم P نقطه‌ای ازصفحه xoy به‌مختصات (x, y) باشدکه بعداز دوران در جهت مثلثاتی به اندازهٔ زاویه θ، به P' با مختصات (x', y') تبدیل شده است (شکل ۱).



شکل ۱

چون P حول مبدأ دوران‌کرده پس P و P' هردو به یك فاصله از مبدأ می‌باشند. فرض‌کنیم این فاصله r باشد و فرض کنیم زاویه بین OP و محور xها، α باشد. آنگاه دیده می‌شودکه

$$(۱)\quad \begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$$

در حالی‌که

$$(۲)\quad \begin{cases} x' = r\cos(\theta+\alpha) \\ y' = r\sin(\theta+\alpha) \end{cases}$$

که بعداز بسط توابع مثلثاتی و با استفاده از (۱) داریم

$$(۳)\quad \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = y\cos\theta + x\sin\theta \end{cases}$$

معادلات(۳) مختصات جدید را برحسب مختصات قدیم وزاویه دوران θ به دست می‌دهد. اکنون اگر بخواهیم این دوران را به شکل ماتریسی بنویسیم، می‌توانیم مختصات جدید وقدیم را به صورت بردارهای ستونی نوشته و بردار مختصات قدیم را در ماتریس ۲×۲ که در زیرآمده ضرب‌کنیم تا بردار مختصات جدید به دست آید.

$$(۴)\quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

این معادله دقیقاً صورت ماتریسی معادله (۳) است و بنابراین دوران را برحسب یك ماتریس ۲×۲ بیان می‌کند.

۳) دوران در فضای دوبعدی با استفاده از اعداد مختلط

اکنون اگر تصورکنیم‌که P و P' در صفحه مختلط واقع هستند، موقعیت هر یك ازآنها را می‌توان به ترتیب با اعداد مختلط Z و Z' نمایش داد:

$$(۵)\quad \begin{cases} Z = x + iy = r\cos\alpha + ir\sin\alpha = re^{i\alpha} \\ Z' = x' + iy' = r\cos(\alpha+\theta) + ir\sin(\alpha+\theta) \\ \qquad = re^{i(\alpha+\theta)} \end{cases}$$

روابط فوق با استفاده از رابطه اویلر

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

نوشته شده است. حال از (۵) دیده می‌شودکه

$$(۶)\quad Z' = Ze^{i\theta}$$

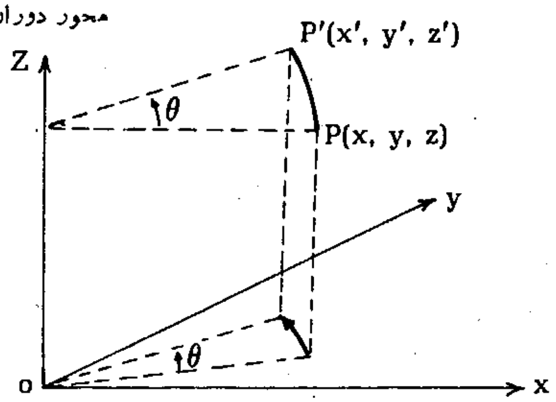
و این همان فرمول مورد نیاز است که مختصات جدید Z' را برحسب مختصات قدیم Z و زاویه دوران θ به دست می‌دهد. لذا دوران برحسب عدد مختلط

$$(۷) \quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

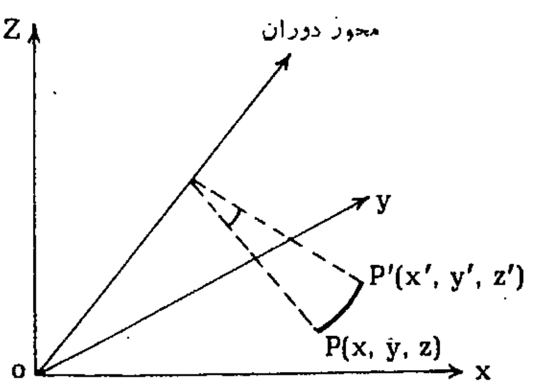
بیان شده.

۴) دوران در فضای سه‌بعدی با استفاده از ماتریسها

دوران در فضای سه‌بعدی، بسیار پیچیده‌تر از فضای دو بعدی است (و این جای تعجب ندارد) اکنون همان‌گونه که نیاز داریم مقدار زاویه‌ای را که دوران به اندازهٔ آن انجام می‌شود بدانیم، محوری را هم که باید دوران حول آن انجام شود باید مشخص کنیم.



شکل ۲



شکل ۳

در ابتدا حالت ساده‌ای را در نظر می‌گیریم که دوران حول محور Z و به اندازه زاویه θ در صفحه انجام شده (شکل ۲) چون دوران حول محور Z بوده لذا ارتفاع نقاط P و P' در بالای صفحه $x\,o\,y$ یکسان است و داریم

$$(۸) \quad Z = Z'$$

در واقع دوران در صفحه‌ای موازی صفحه $x\,o\,y$ انجام شده و لذا فرمول فضای دوبعدی، (۳)، را می‌توان برای محاسبه مختصات جدید x' و y' به کار برد. اکنون اگر فرمول (۳) و فرمول (۸) را به شکل ماتریسی بنویسیم و از یك ستون ۱ × ۳ برای مختصات و یك ماتریس ۳ × ۳ برای نمایش دوران استفاده‌کنیم خواهیم داشت:

$$(۹) \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & ۰ \\ \sin\theta & \cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

اکنون اگر دوران را حول محور دیگری که با برداریکه $\langle u, v, w \rangle$ مشخص شده و به اندازهٔ زاویهٔ θ انجام دهیم، (شکل۳)، بازهم دوران با استفاده از یك ماتریس۳ × ۳ می‌تواند به شکل ماتریسی بیان شودکه در معادله (۱۰) آمده. برای چگونگی محاسبه این ماتریس به مرجع [۳] مراجعه شود.

$$(۱۰) \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^{۲}(۱-\cos\theta)+\cos\theta & uv(۱-\cos\theta)-w\sin\theta & uw(۱-\cos\theta)+v\sin\theta \\ uv(۱-\cos\theta)+w\sin\theta & v^{۲}(۱-\cos\theta)+\cos\theta & uw(۱-\cos\theta)-u\sin\theta \\ uw(۱-\cos\theta)-v\sin\theta & uw(۱-\cos\theta)+u\sin\theta & w^{۲}(۱-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

دوران با اعداد چهاربرگی

۵) اعداد چهاربرگی[1]

اکنون چند لحظه‌ای توجهمان را به‌چگونگی پیدایش اعداد چهاربرگی و خواص چهاربرگی‌ها معطوف می‌کنیم. این اعداد توسط ریاضیدان نامدار ایرلندی به نام ویلیام راوئن هامیلتون[2] بعداز پانزده سال‌کوشش بی‌وقفه در توسعه ایدهٔ اعداد مختلط در فضای دوبعدی به اعدادی با خواص مشابه در فضای سه‌بعدی در سال ۱۸۴۳ اختراع شد. هنگامی‌که او سرانجام درحالی‌که روی پلی قدم می‌زد، موفق بداین اختراع گردید، آنقدر خوشحال شدکه فرمولها را روی بدنهٔ پل حل نمود.

یکی از دلایلی‌که باعث شد هامیلتون بعداز این مدت طولانی موفق به ابداع این اعدادگردد، این بودکه این اعداد به چهار مؤلفه نیاز دارند درحالیکه تصورمی‌شد برای گسترش این اعداد ازفضای دوبعدی به سه‌بعدی، به اعداد سه مؤلفه‌ای نیاز خواهد بود. یك عدد چهاربرگی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

(۱۱) $q=a+ib+jc+kd$

که a و b و c و d اعدادی حقیقی هستند و i و j و k در روابط زیر صدق می‌کنند

$$(۱۲)\begin{cases} i^2=j^2=k^2=-1 \\ ij=k \text{ ، } jk=i \text{ ، } ki=j \\ ji=-k \text{ ، } kj=-i \text{ ، } ik=-j \end{cases}$$

دوعدد چهاربرگی مساویند اگروفقط اگرمؤلفه‌های متناظرشان برابر باشند، جمع وتفریق دو عدد چهاربرگی به طریق معمول خواهد بود و نمادهای معمولی نیز برای جمع وتفریق به کار می‌روند.

$$(۱۳)\ q_1 \pm q_2=(a_1 \pm a_2)+i(b_1 \pm b_2)+j(c_1 \pm c_2)+k(d_1 \pm d_2)$$

قابل ذکراست که اعداد چهاربرگی در ضرب بیشتربه ماتریسها شبیه هستند تا به اعداد مختلط، زیرا حاصلضربشان خاصیت جابجایی ندارد. (یعنی ترتیب عوامل ضرب در چهاربرگی‌ها اهمیت دارد و در حالت‌کلی $q_1 \cdot q_2 \neq q_2 \cdot q_1$) با استفاده از خاصیتهای (۱۲) به عنوان حاصلضرب دو عدد چهاربرگی داریم:

$$(۱۴)\ q_1 \cdot q_2=(a_1+ib_1+jc_1+kd_1)\cdot(a_2+ib_2+jc_2+kd_2)$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)+i(a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2-d_1c_2)$$
$$+j(a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2+d_1b_2)+k(a_1d_2+b_1c_2-c_1b_2+d_1a_2)$$

شبیه ماتریسها، می‌توانیم وارون یك عدد چهاربرگی راتعریف کنیم. اگر نرم (طول) عدد چهاربرگی q را با $|q|$ نمایش دهیم و به صورت زیر تعریف‌کنیم

$$(۱۵)\ |q|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

آنگاه وارون $q \neq 0$ که با q^{-1} نوشته می‌شود به صورت منحصر به فرد زیر خواهد بود.

$$(۱۶)\ q^{-1}=\frac{a-ib-jc-kd}{|q|^2}$$

به سادگی می‌توان تحقیق‌کردکه

$$(۱۷)\ q \cdot q^{-1}=q^{-1} \cdot q=1$$

توجه به قوانین جمع‌وضرب دراعداد چهاربرگی نشان می‌دهد که مجموعه اعداد چهاربرگی، با اعمال تعریف شده در فوق، یك حلقه است و چنانچه q_1 و q_2 و q_3 عناصر دلخواه این مجموعه باشند داریم:

$$(۱۸)\begin{cases} q_1 \cdot (q_2 \cdot q_3)=(q_1 \cdot q_2) \cdot q_3 \\ q_1 \cdot (q_2+q_3)=q_1 \cdot q_2+q_1 \cdot q_3 \\ (q_2+q_3) \cdot q_1=q_2 \cdot q_1+q_3 \cdot q_1 \end{cases}$$

هامیلتون در نمایش اعداد چهاربرگی، به شکل

$$q=a+ib+jc+kd$$

عدد a را قسمت اسکالر و $ib+jc+kd$ را قسمت برداری آن نامید. فرض‌کنیم دو بردار

$$\vec{V}_1=\langle x_1 \text{ ، } y_1 \text{ ، } z_1 \rangle$$

و

$$\vec{V}_2=\langle x_2 \text{ ، } y_2 \text{ ، } z_2 \rangle$$

را به ترتیب با دو عدد چهاربرگی q_1 و q_2 نمایش دهیم، خواهیم داشت

$$q_1 = ix_1 + jy_1 + kz_1$$

$$q_2 = ix_2 + jy_2 + kz_2$$

پس قسمت اسکالردوعدد صفر است. با توجه به (۱۴) داریم:

$$(19)\quad q_1 \cdot q_2 = -(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) + i(y_1z_2 - z_1y_2) + j(z_1x_2 - x_1z_2) + k(x_1y_2 - y_1x_2)$$

اکنون اگر بخواهیم جواب را برحسب بردارهای $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ بیان کنیم، قسمت اسکالر $q_1 \cdot q_2$ برابر $-\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}$، یعنی قرینه حاصلضرب داخلی دو بردار، و قسمت برداری آن، همان حاصلضرب برداری $\vec{V_1} \times \vec{V_2}$ می‌باشد. بنابراین حاصلضرب چهاربرگی دو بردار، شامل حاصلضرب داخلی و خارجی آن دو بردار خواهد بود.

۶) دوران در فضای سه‌بعدی با استفاده از اعداد چهاربرگی

همان‌گونه که از اعداد مختلط برای نمایش نقاط در صفحه دوبعدی استفاده کردیم، می‌توانیم از اعداد چهاربرگی برای نمایش نقاط درفضای سه‌بعدی استفاده کنیم. نقطهٔ $P(x, y, z)$ را می‌توان با عدد چهاربرگی

$$(20)\quad q = ix + jy + kz$$

نمایش داد. توجه داریم که قسمت اسکالر در این عدد چهاربرگی، صفر است. چگونه دوران در فضای سه‌بعدی را می‌توان با عدد چهاربرگی محاسبه کرد؟ می‌توان نشان داد که اگر بخواهیم نقطهٔ P را حول محور $< u ,v ,w >$ مانند قبل به اندازهٔ θ دوران دهیم، در این دوران، عدد چهاربرگی زیر نقش اساسی دارد.

$$(21)\quad r = \cos\frac{\theta}{2} + iu\sin\frac{\theta}{2} + jv\sin\frac{\theta}{2} + kw\sin\frac{\theta}{2}$$

اگر موقعیت اولیه نقطهٔ P با عدد چهاربرگی q مشخص‌شود، موقعیت جدید P، با عدد چهاربرگی q' مشخص خواهد شد که q' از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$(22)\quad q' = rqr^{-1}$$

این فرمولی است مشابه (۴)، (۶) و (۱۰) که به ما چگونگی محاسبات را بترتیب با استفاده از ماتریسها و اعداد مختلط در فضای دوبعدی و با استفاده از ماتریسها در فضای سه‌بعدی بیان می‌شود. در واقع فرمول (۲۲) همان فرمول (۱۰) می‌باشد. اولی دوران را حول محور $< u, v, w >$ به اندازه زاویه θ برحسب اعداد چهاربرگی بیان می‌کند و دومی دوران را حول همان محور به اندازهٔ همان زاویه θ برحسب ماتریسها. اگر چه باید متذکر شویم که فرمول (۲۲) از سه فرمول قبلی متفاوت است، در هریك از فرمولهای قبلی بایستی مختصات قدیم را تنها در «یك» کمیت (یك ماتریس یا یك عدد مختلط) ضرب می‌کردیم تا مختصات جدید حاصل گردد، در حالی که در اینجا می‌باید مختصات قدیم را در «دو» عدد چهاربرگی (یا یك عدد چهاربرگی و وارون آن) ضرب کنیم تا جواب حاصل گردد. دراینجا از استدلال کسل کننده‌ای که منجر به فرمولهای (۲۱) و (۲۲) می‌شود خودداری می‌کنیم، علاقمندان به مرجع [۳] مراجعه کنند.

۷) احیاء اعداد چهاربرگی

نظریه اعداد چهاربرگی بیش‌ازیك قرن قبل توسط هامیلتون ابداع شدکه یکی‌از اهداف‌آن انجام محاسبات دوران در فضای سه‌بعدی بود و به عنوان پدیده‌ای شگرف در جهان ریاضیات تلقی گردید. مدتها بعدازآن گیبز[۳] حاصلضرب داخلی و خارجی را ابداع نمود که اکنون در بردارها مورد استفاده قرار می‌گیرند. بعداز مدتها بحث داغ بین حامیان روشهای برداری وآنانی که از چهاربرگی‌ها حمایت می‌کردند، به وضعیت کنونی رسیده‌ایم، حالتی‌که بردارها به تفصیل در مدارس و دانشگاهها تدریس و مطالعه می‌شوند و از اعداد چهاربرگی، فقط نامی برده می‌شود. قطعاً دلایل این موضوع جایگاه خاص محاسبات برداری در روند تکاملی آن

بقیه در صفحه ۳۷

چهاروجهی‌هائی که خاصیت مرکز ارتفاعی دارند*

ترجمه: ابراهیم دارابی

می‌دانیم در هر مثلث ارتفاعات در یك نقطه متقاربند. اما در مورد چهاروجهی‌ها این موضوع صدق نمی‌کند. یعنی ارتفاعات چهاروجهی همواره در یك نقطه متقارب نیستند. مثلاً در چهاروجهی ABCD که درآن وجه ABC مثلث متساوی‌الاضلاع و یال BD عمود برقاعده باشد این خاصیت برقرار نیست. (در این چهاروجهی یال BD ارتفاع وارد از رأس D برقاعده ABC می‌شود. اما ارتفاع وارد از رأس C بر وجه ABD خط BD را قطع نمی‌کند.) باوجود این چهاروجهی‌هایی با چنین خصوصیاتی هم وجود دارند. (چهاروجهی که یك کنج آن سه قائمه است، همچنین چهاروجهی‌های منتظم) در این مقاله ازاین گونه چهاروجهی‌ها که ارتفاعاتشان در یك نقطه متقارب‌اند با عنوان «چهار ـ وجهی‌هائی که خاصیت مرکزارتفاعی دارند» نام خواهیم برد، همچنین محل برخورد ارتفاعات چهاروجهی‌را «مرکزارتفاعی» چهاروجهی و محل برخورد ارتفاعات هروجه چهاروجهی را «مرکز ارتفاعی» همان وجه خواهیم نامید.

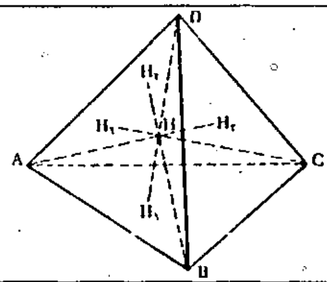
اکنون به مجموعه‌ای از قضایا و خواص مربوط به این گونه چهاروجهی‌ها اشاره می‌کنیم و یادآور می‌شویم که این مقاله علاوه‌برسالهای چهارم وسوم می‌تواند برای‌دانش‌آموزان کلاس دوم نیز مفید واقع شود.

قضیه ۱. در چهاروجهی‌هایی‌که خاصیت مرکز ارتفاعی دارند، هر دو یال متقابل بر یکدیگر عمود هستند.

اثبات. اگر ABCD چهاروجهی‌ای باشد که خاصیت مرکز ارتفاعی دارد و H مرکز ارتفاعی‌آن درنظر گرفته شود (شکل ۱) خطوط AB و CD همدیگر را قطع نمی‌کنند. پس نقطه H لااقل به یکی ازآنها تعلق ندارد. فرض‌کنیم نقطه H روی CD نباشد یعنی CDH یك صفحه‌را مشخص کند. چون DH_1 و CH_2 ارتفاعات‌چهاروجهی‌اند پس $DH_1 \perp AB$ و $CH_2 \perp AB$ یعنی AB بر صفحه CDH عمود است. از آنجا $AB \perp CD$، به طریق مشابه می‌توان عمود بودن سایر یالهای متقابل را هم اثبات کرد.

قضیه ۲. اگر هردو یال متقابل چهاروجهی بریکدیگر عمود باشند، چهاروجهی خاصیت مرکزارتفاعی خواهد داشت.

اثبات. فرض‌کنیم DH_1 و CH_2 و AH_3 و BH_4 ارتفاعات چهاروجهی ABCD باشندکه یالهای متقابل آن دوبه‌دو برهم عمودند.



(شکل ۱)

ابتدا حالتی را درنظر می‌گیریم‌که هیچ یك ازنقاط H_1 و H_2 و H_3 و H_4 بر رأس چهاروجهی منطبق نباشند. ازآنجا که $AB \perp CD$ و DH_1 و CH_2 ارتفاعات چهاروجهی‌اند نتیجه می‌شود یال AB بر صفحات CDH_1 و CDH_2 عمود است. (ملاحظه می‌شود صفحه CDH_1 مشخص شده زیرا $H_1 \neq C$، بنابراین خطوط DC و DH_1 متمایزند. به همین طریق صفحه CDH_2 هم مشخص شده است.)

چون این صفحات بریك خط عمودند بنابراین بریکدیگر منطبق هستند. خطوط DH_1 و CH_2 به یك صفحه تعلق‌دارند و موازی هم نیستند پس DH_1 و CH_2 همدیگر را قطع می‌کنند. محل برخوردآنها را با H نشان می‌دهیم. بنابه فرض $BC \perp DH$ و $BC \perp ADH$ پس $BC \perp AH$ به‌طریق مشابه ثابت می‌شود $BD \perp AH$ بالنتیجه خط AH بروجه BDC عمود است. یعنی AH_3 از نقطه H می‌گذرد. به‌طریق مشابه ثابت می‌شود BH_4 هم ازنقطه H می‌گذرد.

اکنون حالتی را درنظر می‌گیریم که یکی از نقاط H_1 یا H_2 یا H_3 و یا H_4 بر رأس منطبق باشد. برای مثال فرض کنیم $H_1 = C$. درآن صورت DC بر صفحه ABC عمود خواهدبود. علاوه برآن‌چون $BC \perp AD$ پس $AC \perp BC$ (قضیه سه عمود) یعنی همه زوایای رأس C در چهاروجهی قائمه‌اند. بنابراین ارتفاعات AC و BC و DC و CH_2

در یك نقطه C متقاطع خواهند بود. یعنی در این حالت هم چهاروجهی خاصیت مرکز ارتفاعی دارد.

تذکر. اگر دوزوج از یالهای متقابل چهاروجهی دوبه‌دو برهم عمود باشند، درآن‌صورت یالهای زوج سوم هم متقابلاً بر یکدیگر عمود می‌شوند یعنی چهاروجهی خاصیت مرکز ارتفاعی دارد.

قضیه ۴. در چهاروجهی‌هایی‌که خاصیت مرکز ارتفاعی دارند، هر رأس بر مرکز ارتفاعی وجه مقابل تصویر می‌شود.

اثبات. اگر ABCD چهاروجهی‌ای باشدکه خاصیت مرکزارتفاعی دارد، DH_1 ارتفاع آن درنظرگرفته شود، H_1 می‌تواند بر یکی از نقاط A و B و C منطبق شود. واضح است درآن صورت دو نقطه از این نقاط متمایز از H_1 خواهند بود. فرض‌کنیم $H_1 \neq B$ و $H_1 \neq C$ بنابر قضیه (۱) یالهای متقابل چهاروجهی بر یکدیگر عمودند:

$$AC \perp BD \quad \text{و} \quad AB \perp CD$$

پس

$$AB \perp H_1C$$

و

$$AC \perp H_1B$$

(بنابر قضیه سه عمود) بنابراین H_1 مرکز ارتفاعی مثلث ABC است.

قضیه. اگر هر یك از رئوس چهاروجهی بر مرکزارتفاعی وجه مقابل تصویر شود، چهاروجهی خاصیت مرکز ارتفاعی دارد.

اثبات. مستقیماً از قضیه سه عمود نتیجه می‌شود.

قضایایی که اثبات شدند،آزمونهایی برای‌چهاروجهی‌هایی که خاصیت مرکز ارتفاعی دارند، محسوب می‌شوند. سایر خواص این‌گونه چهاروجهی‌ها در قضایا و مسائل زیر آورده می‌شود.

قضیه ۵. اگر H مرکز ارتفاعی چهاوجهی ABCD و O مرکزکره محیطی چهاروجهی باشد، همواره رابطه زیر برقرار است،

$$OH = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

اثبات. اگر P نقطه‌ای باشدکه برای‌آن،

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

(ثابت می‌کنیم P بر H منطبق است. م) ابتدا فرض می‌کنیم نقطه P بر D منطبق نباشد ثابت می‌کنیم بردار DP برصفحه ABC عمود است زیرا $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DP}$ پس

$$\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})$$

$$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$+ \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}$$

بنابفرض چهاروجهی ABCD خاصیت مرکز ارتفاعی دارد (قضیه ۱) بنابراین

$$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$$

یعنی،

$$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2) = 0 \qquad (1)$$

(زیرا O مرکزکره محیطی چهاروجهی است بنابراین $|OA|=|OB|$) بطریق مشابه ثابت می‌شود

$$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \qquad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود خط راست DP بروجه ABC عمود است. یعنی نقطه P برروی خط DH_1 قرار دارد. ملاحظه می‌شود اگر P بر D منطبق شود درآن صورت $P \in DH_1$ و به طریق مشابه $P \in CH_2$. خطوط DH_1 و DH_2 تنها در یك نقطه H مشترك هستند پس P بر H منطبق می‌شود. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

خواص زیر در مورد هر چهاروجهی صادق است.

قضیه ۶. چهار خط که هریك ازآنها یکی از رئوس چهاروجهی ABCD را به‌محل برخورد میانه‌های وجوه مقابل آن وصل می‌کنند، همدیگر را در نقطه‌ای مانند M و به‌نسبت ۳:۱ از رأس قطع می‌کنند، این نقطه را مرکز ثقل چهاروجهی

می‌نامیم، ثابت کنید برای هر نقطه دلخواه مانند O همواره داریم،

$$\overline{OM}=\frac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD})$$

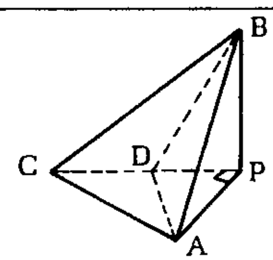
از دو قضیه اخیر، قضایای زیر نتیجه می‌شود:

قضیه ۷. در چهاروجهی‌هائی که خاصیت مرکز ارتفاعی دارند، نقطه O مرکز کره محیطی، M مرکز ثقل و H مرکز ارتفاعی چهاروجهی روی یک خط راست قرار دارند و نقاط O و H نسبت به نقطه M قرینه یکدیگر هستند. خط OH را خط اولر می‌نامند.

قضیه ۸. زوایای رأس چهاروجهی‌هایی که خاصیت مرکز ارتفاعی دارند، یا همه قائمه‌اند، یا همه حاده‌اند و یا همه منفرجه.

اثبات. زوایای نظیر D در چهاروجهی ABCD را درنظر می‌گیریم. اگر یکی ازاین زوایا قائمه باشد، بسادگی دیده می‌شود که دو زاویه دیگر هم قائمه‌اند.

اکنون فرض می‌کنیم یکی از زوایای رأس D مثلاً زاویه ADC منفرجه باشد (شکل ۲) درآن صورت H مرکز ارتفاعی مثلث ADC در خارج مثلث قرار می‌گیرد. اگر AP ارتفاع Δ_{ADC} باشد درآن صورت P به پاره خط DC تعلق نخواهد داشت، زیرا $AB \perp CD$ و $AP \perp CD$ در نتیجه CD بر صفحه ABP عمود خواهد بود. بنابراین یال DC بر خط BP عمود است. به عبارت دیگر BP ارتفاع Δ_{BDC} خواهد بود که ازرأس B وارد شده است. چون P روی پاره خط DC قرار ندارد، پس زاویه BDC منفرجه خواهد بود.



(شکل ۲)

به طریق مشابه ثابت می‌شود زاویه ADB هم منفرجه است.

بالاخره اگر هریک از زوایای رأس D نه قائمه باشند ونه منفرجه، درآن صورت همه حاده خواهند بود.

نتیجه. در چهاروجهی‌هائی که خاصیت مرکز ارتفاعی دارند، لااقل یک‌وجه مثلث حاده‌الزاویه است. در پایان، صورت چند مسأله راکه با استفاده ازخواص چهاروجهی‌هائی که خاصیت مرکزارتفاعی دارند،حل می‌شوند، ارائه می‌دهیم:

۱) ثابت کنید درچهاروجهی‌هائی که خاصیت مرکزارتفاعی دارند، اگر یکی از وجوه مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، درآن صورت چهاروجهی هرم منتظم مثلث‌القاعده خواهد بود.

۲) در چهاروجهی ABCD که خاصیت مرکز ارتفاعی دارد، زاویه ADC قائمه است ثابت کنید،

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h^2}$$

که درآن $a=DA$ و $b=DB$ و $c=DC$ و h طول ارتفاع وارد از رأس D می‌باشد.

توضیح: از فرمول

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{(|AB|\cdot|AC|^2-(AB\cdot AC)^2}$$

استفاده کنید.

۳) در چهاروجهی ABCD که خاصیت مرکز ارتفاعی دارد، زاویه ABC قائمه و S_1 و S_2 و S_3 به ترتیب مساحتهای وجوه BAC و BAD و BCD می‌باشند. ثابت کنید حجم چهاروجهی برابر است با،

$$S=\frac{1}{3}\sqrt{2S_1\cdot S_2\cdot S_3}$$

۴) در چهاروجهی ABCD که خاصیت مرکز ارتفاعی دارد،زاویه ADC قائمه است. مطلوب است $S_{\triangle ADB}:S_{\triangle ADC}$ درصورتی که

$$DC=c \quad و \quad DB=b$$

۵) ثابت کنید می‌توان چهاروجهی‌هایی راکه خاصیت مرکز ارتفاعی دارند، با یک صفحه طوری قطع کرد که مقطع یک مستطیل باشد.

۶) ثابت کنید عمود مشترک دو یال متقابل چهاروجهی‌هائیکه خاصیت مرکز ارتفاعی دارند، از مرکز ارتفاعی‌آن می‌گذرد.

۷) ثابت کنید در هرچهاروجهی‌که خاصیت مرکز ارتفاعی دارد، مجموع مربعات یالهای متقابل برابرند.

تذکر: برای سادگی عمل در حل مسائل ۷ و ۸ از فرمول

$$AB\cdot AC=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)$$

استفاده کنید.

۸) ثابت کنید اگر در یك چهاروجهی مجموع مربعات یالهای متقابل برابر باشند، چهاروجهی خاصیت مرکز ارتفاعی دارد.

۹) یالهای AB و AC و AD و BC درچهاروجهی‌ای که خاصیت مرکز ارتفاعی دارد بترتیب ۵، ۷، ۸ و ۶ سانتیمتر است طول بقیه یالها را حساب کنید.

۱۰) اگر در چهاروجهی ABCD داشته باشیم

AB = ۸cm و BC = ۱۲cm و DC = ۶cm

آیا چهاروجهی خاصیت مرکز ارتفاعی دارد؟

۱۱) یال AB از چهاروجهی ABCD با یالهای AD و AC زاویه ۶۰° می‌سازد و زاویه $\widehat{CAD} = 45°$ و

AD = AC = ۲ و AB = ۲√۲

ثابت کنید ABCD خاصیت مرکز ارتفاعی دارد.

۱۲) ثابت کنید اگر

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA}$$

آنگاه چهاروجهی ABCD خاصیت مرکز ارتفاعی دارد.

۱۳) ثابت کنید اگر در چهاروجهی ABCD خاصیت مرکز ارتفاعی موجود باشد و زاویه ADC هم قائمه باشد آنگاه رأس D روی خط راستی قرار دارد که نقطه O مرکز کره محیطی چهاروجهی و نقطه M مرکز ثقل مثلث ABC را بهم وصل می‌کند. علاوه بر آن

$$\overrightarrow{DO} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DM}$$

۱۴) پاره خطهای DA و DB و DC با طولهای بترتیب ۶و۴و۸ یالهای چهاروجهی‌ای هستند که خاصیت مرکز ارتفاعی دارد، شعاع کره محیطی چهاروجهی را حساب کنید. درصورتی که زاویه ADB قائمه می‌باشد.

۱۵) در چهاروجهی ABCD که خاصیت مرکز ارتفاعی دارد، ABC قائمه است. فاصله رأس B تا مرکز ثقل وجه ACD برابر ۱۲ سانتیمتر می‌باشد. شعاع کره محیطی چهاروجهی ABCD را حساب کنید.

مرجع

* م. م. الینا، ریاضیات در مدرسه مه و زوئن؛ شماره ۳، ۱۹۸۷

اهمیت این مقاله در این است که چهاروجهی‌هایی که خاصیت مرکز ارتفاعی دارند تمام خواص مثلث را به طور متناظر دارا می‌باشند (غیور).

بقیه از صفحهٔ ۳۳

بوده که خود انگیزه تحقیق در زمینه‌های دیگر ریاضیات شد، اما در سالهای اخیر استفاده از کامپیوترهای تصویری و هندسه محاسباتی بسیار شایع شده و در بعضی‌از مسائل از این نوع، شاید صحیح نباشد که گفته شود روشهای برداری همواره از چهاربرگی‌ها بهتر هستند.

مثال ساده‌ای را در این مورد بررسی می‌کنیم. غالباً در محاسبات نیاز داریم که اثر دو دوران پی‌درپی را محاسبه کنیم، هنگامی که از بردارها و ماتریسها استفاده شود، نیاز به ضرب دو ماتریس ۳×۳ در یکدیگر است که اگر این کار به طریق معمول انجام شود در مجموع ۲۷ عمل ضرب و۱۸ عمل جمع مورد نیاز است، درحالی که اگر دورانها را با چهاربرگی‌ها نمایش دهیم مجموعاً ۱۶ عمل ضرب و ۱۲ عمل جمع یا تفریق مورد نیاز خواهد بود. لذا به کار بردن چهاربرگی‌ها نیاز به کارکمتر و زمان کمتری دارد.

مثال بعدی حتی سرراست‌تر است. یك ماتریس ۳×۳ که برای نمایش یك دوران مورد استفاده قرار می‌گیرد، به ۹ جای ذخیره در ماشین محاسبه نیاز دارد، درحالی که اگر از چهاربرگی‌ها برای نمایش این دوران استفاده کنیم، تنها ۴ جای ذخیره مورد نیاز خواهد بود و در نتیجه در ذخیره حافظه ماشین محاسب صرفه‌جویی می‌شود.

بنابراین، بانیازهای محاسباتی زمان حاضر که با کامپیوترها انجام می‌شود و تفاوت زیادی با زمان هامیلتون و گیبز دارد، شاید زمان برای زدودن گرد فراموشی از چهاربرگی‌ها وشگفتن مجدد آنها مناسب باشد.

زیرنویسها

(1) Quaternions
(2) William Rowan Hamilton
(3) Gibbs

مراجع

۱) اعداد چهاربرگی، منصور معتمدی، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره چهارم، ۱۳۶۳.

2) Rotatioh by Quaternions, R. R. Martin., Mathematical Spectrum Volume 17.,Number 2.

3) Computational Geometry for Design & Manufacture, I. D. Faux & M. J. Pratt, Ellis Horwood, Chichester 1979.

روشهائی در محاسبه انتگرال معین

محمود نصیری

انتگرالهای معین خواصی دارند که محاسبه آنها را ساده‌تر می‌کند و گاهی بدون محاسبه مستقیم انتگرال می‌توان حاصل را پیدا کرد. در اینجا چند خاصیت اساسی را با ذکرمثالهائی بررسی می‌کنیم.

I) اگر f تابعی انتگرالپذیر بربازهٔ بسته $[0, a]$ باشد، آنگاه

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx + \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x)dx$$

اثبات. برای اثبات کافیست ثابت کنیم

$$\int_0^{\frac{a}{2}} (a-x)dx = \int_{\frac{a}{2}}^a f(x)dx$$

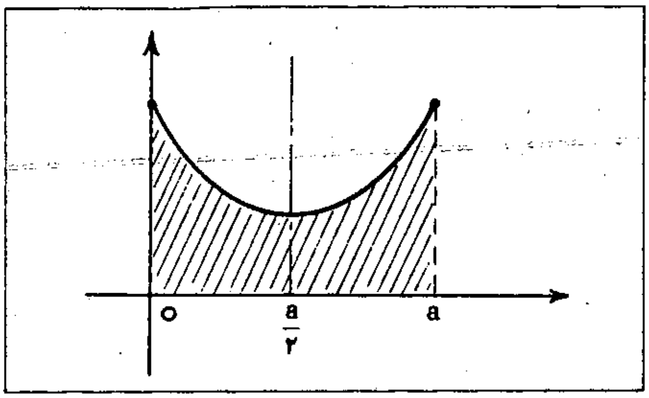
اگر فرض کنیم $a-x=t$ آنگاه $dx=-dt$ و اگر $x=0$ یا $x=\frac{a}{2}$ آنگاه $t=a$ یا $t=\frac{a}{2}$ در نتیجه

$$\int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x)dx = \int_a^{\frac{a}{2}} f(t)\,(-dt) = \int_{\frac{a}{2}}^a f(t)dt$$

نتیجه ۱. اگر $f(a-x)=f(x)$ آنگاه

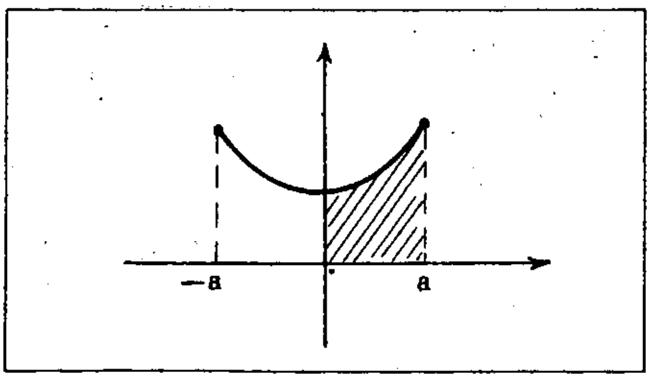
$$\int_0^a f(x)dx = 2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx$$

با اندك تأملی مشاهده می‌کنیم که در اینجا تابع f بربازهٔ $[0, a]$ نسبت به خط $x=\frac{a}{2}$ متقارن است.



بنابراین اگر f در بازهٔ $[-a, a]$ پیوسته و زوج باشد آنگاه خط $x=0$ محور تقارن است و داریم،

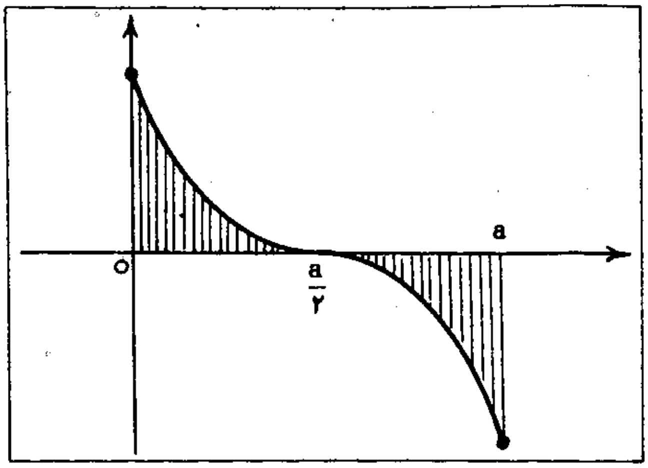
$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$



نتیجه ۲. اگر $f(a-x)=-f(x)$ آنگاه

$$\int_0^a f(x)dx = 0$$

و باز مشاهده می‌کنیم در این حالت تابع f بر بازهٔ [۰, a] نسبت به نقطهٔ $\left(\frac{a}{۲}\,,\,۰\right)$ متقارن است.



بنابراین اگر تابع f بر بازهٔ [−a, a] پیوسته و فرد باشد (۰, ۰) مرکز تقارن نمودارآن است و در نتیجه.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = ۰$$

مثال ۱ـ مطلوبست محاسبه $\int_{۰}^{۴} |x-۲|dx$

حل. در اینجا تابع $f(۴-x)=f(x)$ یا نمودار تابع در بازهٔ [۰, ۴] نسبت به خط $x=۲$ متقارن است بنابراین با توجه به نتیجه (۱)،

$$\int_{۰}^{۴} |x-۲|dx = ۲\int_{۰}^{۲} |x-۲|dx$$

$$= -۲\int_{۰}^{۲} (x-۲)dx$$

$$= -۲\left(\frac{۱}{۲}x^{۲}-۲x\right)\Big|_{۰}^{۲} = ۴$$

مثال ۲ـ مطلوبست محاسبه

$$I=\int_{-۱}^{۱} \cos x \log \frac{۲+x}{۲-x}\,dx$$

حل. تابع با ضابطه $f(x)=\cos x \log \frac{۲+x}{۲-x}$ در بازهٔ [−۱, ۱] فرد است، لذا $I=۰$.

II) اگر تابع f بر بازهٔ بسته [۰, a] انتگرالپذیر باشد، آنگاه،

$$\int_{۰}^{a} f(x)dx = \int_{۰}^{a} f(a-x)dx$$

اثبات. اگر فرض کنیم $a-x=t$ آنگاه $dx=-dt$ و $x=۰$ یا $x=a$ در نتیجه $t=a$ یا $t=۰$ لهذا

$$\int_{۰}^{a} f(a-x)dx = \int_{a}^{۰} f(t)\,(-dt)$$

$$= \int_{۰}^{a} f(t)dt = \int_{۰}^{a} f(x)dx$$

نتیجه ۱. می‌دانیم

$$\sin\left(\frac{\pi}{۲}-x\right) = \cos x$$

یا

$$\cos\left(\frac{\pi}{۲}-x\right) = \sin x$$

بنابراین اگر f بر بازهٔ [۰, ۱] تابعی پیوسته باشد آنگاه

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} f(\sin x)dx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} f(\cos x)dx$$

مثال ۳ـ انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$I=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin^{n}x}{\sin^{n}x+\cos^{n}x}\,dx$$

حل. با توجه به خاصیت (۲) و نتیجه‌آن داریم

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\,dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}\,dx$$

بنابراین

$$2I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x+\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx=\frac{\pi}{2}$$

و در نتیجه، $I=\frac{\pi}{4}$.

تذکر. می‌توان خاصیت (۲) را به صورت کلی‌تری نیز بیان کرد. اگر تابع f بر بازهٔ $[a, b]$ انتگرالپذیر باشد.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{a}^{b} f(a+b-x)dx$$

مثال ۴.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \quad \text{و} \quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$$

را به‌کمک یکدیگر محاسبه‌کنید.

حل.

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$$

بنابراین

$$2I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x+\cos^2 x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx=\frac{\pi}{2}$$

یا

$$I=\frac{\pi}{4}$$

به عنوان تمرین

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx \quad \text{و} \quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx$$

را به‌کمک یکدیگر حساب‌کنید.

مثال ۵- مطلوبست محاسبه

$$\int_{0}^{\pi} \log_2(\sin x)dx$$

حل. بنابه نتیجه (۱) از خاصیت (۱) داریم.

$$\int_{0}^{\pi} \log_2(\sin x)dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log_2(\sin x)dx$$

و بنا به خاصیت (۲) داریم.

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log_2(\sin x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log_2(\cos x)dx$$

بنابراین.

$$2I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} [\log_2(\sin x)+\log_2(\cos x)]dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log_2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log_2(\sin 2x)dx-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log_2(2)dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log_2(\sin 2x)dx-\frac{\pi}{2}$$

اکنون برای محاسبه انتگرال به دست‌آمده، قرار می‌دهیم

بقیه در صفحه ۴۳

حل هندسی و جبری معادله درجه سوم

سید محمدرضا هاشمی‌موسوی

معادله زیر را درنظر می‌گیریم

$$(1) \quad ax^3+bx^2+cx+d=0$$

آنرا به دو طریق حل می‌کنیم.

الف) حل هندسی

ابتدا معادلهٔ (۱) را بر a تقسیم می‌کنیم. سپس به جای $\frac{b}{a}$ و $\frac{c}{a}$ و $\frac{d}{a}$ پارامترهای p، q، r را اختیار می‌کنیم. بنابراین معادلهٔ (۱) به معادلهٔ زیر تبدیل می‌گردد:

$$(2) \quad x^3+px^2+qx+r=0$$

حال تبدیل $x=X+\beta$ را انجام می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$X^3+(3\beta+p)X^2+(3\beta^2+2p\beta+q)X+\beta^3+p\beta^2+q\beta+r=0$$

(مقدار β چنین است:

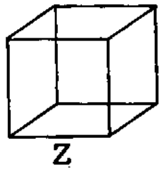
$$\left(\beta=\frac{-(pq-qr)\pm\sqrt{(pq-qr)^2-4(p^2-3q)(q^2-3pr)}}{2(p^2-3q)}\right)$$

سپس تبدیل $X=\frac{1}{Z}$ را انجام می‌دهیم. پس‌از تبدیل به معادله‌ای برحسب مجهول Z می‌شود. پس‌از تقسیم معادله بر ضریب Z^3 به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$(3) \quad Z^3+\alpha Z^2+\frac{\alpha^2}{3}Z=\gamma$$

لازمهٔ حل هندسی معادلهٔ (۳) این است‌که α و γ مثبت باشند یعنی: $\gamma>0$ و $\alpha>0$ حال معادلهٔ (۳) را می‌توان به روش هندسی حل نمود.

ابتدا مکعبی را به ضلع Z درنظر می‌گیریم. سپس تمام اضلاع مکعب را به اندازهٔ $\frac{\alpha}{6}$ امتداد می‌دهیم وانتهای هر طرف را به یکدیگر وصل می‌کنیم. در هر طرف مکعب اولیه مکعب مستطیلی به‌طول Z و عرض $\frac{\alpha}{6}$ و به ارتفاع Z به‌وجود خواهد آمد.


Z

تعداد این مکعب مستطیلها به تعداد وجه‌های مکعب می‌باشد. بنابراین ۶ مکعب مستطیل خواهیم داشت. می‌دانیم که حجم مکعب اولیه Z^3 می‌باشد. حجم هر مکعب مستطیل نیز برابر $\frac{\alpha}{6}Z^2$ می‌باشد. اگر حجم مکعب اولیه را به V_1 و حجم هر مکعب مستطیل را به V_2 نمایش دهیم داریم:

$$V_1=Z^3 \quad \text{و} \quad V_2=\frac{\alpha}{6}Z^2$$

چون تعداد مکعب مستطیلها ۶ عدد می‌باشد داریم:

$$6V_2=\alpha Z^2$$

حال برای تکمیل پوشش مکعب اولیه باید تیغها و گوشه‌های مکعب را پرکنیم. پس‌از پرکردن تیغها و گوشه‌ها، به مکعبی بزرگتر می‌رسیم که هر ضلع آن برابر است با:

$$a=Z+\frac{\alpha}{3}$$

می‌دانیم مکعب دارای ۱۲ تیغه می‌باشد، بنابراین باید ۱۲ مکعب مستطیل به‌طول و عرض $\frac{\alpha}{6}$ و ارتفاع Z بکار بریم، از آنجاکه حجم هر یك از ۱۲ مکعب مستطیل برابر:

$$V_3=\frac{\alpha}{6}\times\frac{\alpha}{6}\times Z$$

می‌باشد، پس حجم ۱۲ مکعب مستطیل روی هم برابر است با:

$$12V_3=\frac{\alpha^2}{3}Z$$

در اینجا برای کامل شدن نهائی پوشش مکعب اولیه کافی‌است که گوشه‌های خالی را با مکعبهائی به ضلع $\frac{\alpha}{6}$ پرکنیم. از آنجاکه مکعب دارای ۸ گوشه می‌باشد، بنابراین باید ۸ مکعب به ضلع $\frac{\alpha}{6}$ به کار بریم. بدیهی است که چون حجم یکی از این مکعبها برابر $V_4=\frac{\alpha^3}{6^3}$ می‌باشد، حجم ۸ عدد از این

مکعبها برابر است با $8V_4=\frac{\alpha^3}{27}$ در اینجا پوشش مکعب اولیه کامل می‌گردد. حال دارای یك مکعب بزرگتر به ضلع $a=Z+\frac{\alpha}{3}$ می‌باشیم. بدیهی است که $V_1=Z^3$،

$$6V_2=\alpha Z^2،\quad 12V_3=\frac{\alpha^2}{3}Z،\quad 8V_4=\frac{\alpha^3}{27}$$

$$V_1+6V_2+12V_3=Z^3+\alpha Z^2+\frac{\alpha^2}{3}Z$$

پس

(۴) $V_1+6V_2+12V_3=\gamma$

اگر به دوطرف تساوی (۴) مقدار $8V_4=\frac{\alpha^3}{27}$ را بیافزائیم، نتیجه می‌شود:

$$V_1+6V_2+12V_3+8V_4=\gamma+\frac{\alpha^3}{27}$$

از طرفی می‌دانیم که

$$V=V_1+6V_2+12V_3+8V_4$$

(حجم مکعب ثانویه).

بنابراین حجم مکعب ثانویه چنین است

$$V=\frac{\alpha^3}{27}+\gamma$$

از طرفی دیگر چون $V=a^3$ می‌باشد داریم

$a=\sqrt[3]{\frac{\alpha^3}{27}+\gamma}$ یعنی $a^3=\frac{\alpha^3}{27}+\gamma$

چون a یك ضلع مکعب ثانویه می‌باشد بنابراین داریم

$$\begin{cases} a=\sqrt[3]{\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3+\gamma} \\ a=Z+\frac{\alpha}{3} \end{cases}$$

و

$$Z+\frac{\alpha}{3}=\sqrt[3]{\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3+\gamma}\Rightarrow$$

$$Z=-\frac{\alpha}{2}+\sqrt[3]{\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3+\gamma}$$

از رابطهٔ اخیر مقدار Z محاسبه می‌گردد. و ازآنجا مقدار X و سپس مقدار x را می‌توان به دست‌آورد.

ب) حل جبری

حل: ابتدا معادلهٔ (۱) را بر a تقسیم می‌کنیم. سپس به جای $\frac{b}{a}$، $\frac{c}{a}$ و $\frac{d}{a}$ پارامترهای p، q، r را اختیار می‌کنیم.

بنابراین معادلهٔ (۱) به معادلهٔ زیر تبدیل می‌گردد:

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

همانطورکه در حل هندسی معادلهٔ درجهٔ سوم (۱) گفته شد.

با تبدیل $x=X+\beta$ و سپس $X=\frac{1}{Z}$ معادلهٔ (۲) به معادلهٔ:

$$Z^3+\alpha Z^2+\frac{\alpha^2}{3}Z=\gamma$$

تبدیل می‌گردد، (مقدار β معلوم می‌باشد، زیرا برحسب پارامترهای p و q و r می‌باشد).

حال کافی است که به دو طرف معادلهٔ (۳) مقدار $\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3$ را بیافزائیم، که در این صورت داریم:

$$Z^3+\alpha Z^2+\frac{\alpha^2}{3}Z+\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3=\gamma+\left(\frac{x}{3}\right)^3$$

همانطورکه دیده می‌شود طرف اول معادلهٔ (۴) مکعب $\left(Z+\frac{\alpha}{3}\right)$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\left(Z+\frac{\alpha}{3}\right)^3=\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3+\gamma\Longrightarrow$$

$$Z+\frac{\alpha}{3}=\sqrt[3]{\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3+\gamma}$$

یعنی:

$$Z=-\frac{\alpha}{3}+\sqrt[3]{\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3+\gamma}$$

از رابطهٔ اخیر مقدار Z و سپس مقدار X و پس‌ازآن مقدار x محاسبه می‌گردد.

تعیین تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم کامل

(۵) $X^3+pX^2+qX+r=0$

در معادلهٔ (۵) اگر داشته باشیم

$p^2-3q=0$ یا $q^2-3pr=0$

معادله دارای یك ریشهٔ حقیقی می‌باشد، که ریشهٔ آن بسادگی قابل محاسبه است. بنابراین برای محاسبهٔ ریشهٔ معادلهٔ (۵)

کافی است تبدیل $X=Z+\beta$ را انجام دهیم، وسپس شرایط فوق‌الذکر را برقرار کنیم. همانطور که می‌دانیم پس‌از تبدیل به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$Z^3+\underbrace{(3\beta+p)}_{A}Z^2+\underbrace{(3\beta^2+2p\beta+q)}_{B}Z+\underbrace{\beta^3+p\beta^2+q\beta+r}_{C}=0 \qquad (6)$$

حال برای محاسبه β شرط اول را یعنی $A^2-3B=0$ برقرار می‌کنیم. پس‌از برقرار کردن این شرط خواهیم دید که مقدار β به دست نمی‌آید.

حال شرط دوم یعنی، $B^2-3AC=0$ را بر قرار می‌کنیم. وخواهیم دید که مقدار β محاسبه می گردد. بنا براین داریم

$$(3\beta^2+2p\beta+q)^2-3(3\beta+p)\times(\beta^3+p\beta^2+q\beta+r)=0 \qquad (7)$$

پس‌از خلاصه‌کردن رابطهٔ (۷) به معادلهٔ درجهٔ دوم زیر (برحسب β) می‌رسیم:

$$(p^2-3q)\beta^2+(pq-9r)\beta+(q^2-3pr)=0 \qquad (8)$$

در اینجا برای محاسبهٔ مقدار β کافی است معادلهٔ درجهٔ دوم (۸) را حل کنیم، پس‌از حل معادلهٔ(۸) مقدار β چنین می‌شود:

$$\beta=\frac{-(pq-9r)\pm\sqrt{(pq-9r)^2-4(p^2-3q)(q^2-3pr)}}{2(p^2-3q)}$$

از مقدار β مبین معادلهٔ درجهٔ سوم (۵) به دست می‌آید یعنی

$$\Delta=(pq-9r)^2-4(p^2-3q)(q^2-3pr)$$

در اینجا با در دست داشتن چنین معادله می‌توان در تعداد ریشه‌های آن بحث کرد. یعنی،

۱) اگر $\Delta>0$ باشد معادلهٔ (۵) یك ریشهٔ حقیقی و دو ریشهٔ مختلط دارد.

۲) اگر $\Delta=0$ باشد معادلهٔ (۵) یك ریشهٔ مضاعف و یك ریشهٔ ساده دارد.

۳) اگر $\Delta<0$ باشد معادلهٔ (۵) سه ریشهٔ حقیقی دارد.

تبصره: در معادلهٔ (۵) اگر $p=0$ باشد، معادله چنین می‌شود:

$$X^3+qx+r=0$$

یعنی معادلهٔ کانونیك درجهٔ سوم حاصل می گردد. حال اگر در مبین معادلهٔ (۵) مقدار p را قرار دهیم مبین معادلهٔ کانونیك حاصل می گردد یعنی:

$$\Delta=3(4q^3+27r^2)$$

مراجع

۱) ریاضیات چیست؟ کورانت، ریچارد، رابینز، هربرت، ترجمه حسن صفاری

۲) ریاضیات عالی، سوکولینکاف الیزابت وایوان، ترجمه سیروس فرمانفرمائیان

۳) متمم جبر، بیژن‌شمس و کیخسرو فرخ‌زاد.

بقیه از صفحهٔ ۴۰

$2x=t$، $dx=\frac{dt}{2}$، و با به کاربردن نتیجهٔ (۱) از خاصیت (۱) داریم.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log_2(\sin 2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\log_2(\sin t)dt$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log_2(\sin t)dt=I$$

لهذا،

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log_2(\sin 2x)dx-\frac{\pi}{2}=I-\frac{\pi}{2}$$

یعنی

$$I=-\frac{\pi}{2}$$

در نتیجه،

$$\int_0^{\pi}\log_2(\sin x)dx=2I=-\pi$$

تمرین

۱- می‌دانیم $Lnx=\log_e x$ که e عدد نپر است $\int_0^{\pi}Ln(1+\cos x)dx$ را پیدا کنید.

۲- $\int_0^{\pi}\frac{a^n\sin^2x+b^n\cos^2x}{a^{2n}\sin^2x+b^{2n}\cos^2x}\,dx$ را محاسبه کنید.

مرجع

MATHEMATICAL MONTHLY February 1988
Volume 95, Number 2.

گزارش سفر هیأت اعزامی ایران جهت شرکت در سی‌امین المپیاد بین‌المللی ریاضی

دکتر علیرضا مدقالچی

شهر برانشویک آلمان غربی از تاریخ ۱۳ تا ۲۴ جولای یعنی ۱۹ تیر ماه تا ۲ مرداد ماه میزبان ۵۱ کشور (هند و پرتقال برای اولین بار شرکت کرده بودند و ژاپن به عنوان میهمان شرکت کرده بود) شرکت کننده در سی امین المپیاد بین‌المللی ریاضی بود. این شهر در تاریخ ریاضیات جهان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است زیرا زادگاه کارل فریدریش گاوس[۲] (۱۸۵۵ ــ ۱۷۷۷) یکی از بزرگترین ریاضیدانان جهان است. موقع را مغتنم شمرده و اشاره‌ای مختصر به زندگی او می‌اندازیم. نبوغ ریاضی او از سه سالگی آغاز شد. دوک برانشویک (متوفی در ۱۸۰۶) بر حسب تصادف از نبوغ وی اطلاع یافت و او را تحت حمایت خود قرار داد. «گاوس در ادبیات یونان و روم استعدادی قرین استعداد ریاضی داشت و چندی در این اندیشه بود که زبانشناسی را رشته کار خود قرار دهد.» اما او در ۳۰ مارس ۱۷۹۶ موفق به حل یک مسألهٔ تاریخی ــ یعنی مسأله محاط کردن کثیرالاضلاعهای منتظم در دایره ــ گردید که از این به بعد راه او مشخص شد. در ۱۲ سالگی هندسه اقلیدسی را مورد انتقاد قرار داد. در ۱۳ سالگی اندیشه هندسه نااقلیدسی در او پدید آمد. بعد از به دست آوردن نتایج زیاد در زمینه‌های مختلف در حدود ۲۲ سالگی توابع بیضوی را کشف کرد و در ۱۸۰۱ کتاب مشهور او به نام تحقیقات در علم حساب انتشار یافت. در ۱۸۰۷ به مدیریت رصدخانه و استادی علم نجوم در دانشگاه گوتینگن منصوب شد. او در سایر بخشهای ریاضی از جمله آنالیز و توابع مختلط و نیز ریاضیات کاربردی و فیزیک ریاضی دستی توانا داشت.[۱]

هیأت اعزامی کشورمان در صبح روز دوشنبه ۱۹ تیر ماه جاری با بدرقه و دعای خیر ریاست محترم سازمان و جمعی از اعضاء دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی درسی عازم کشور آلمان شد. سرپرستی این هیأت را آقایان دکتر رضوی و دکتر مدقالچی عهده‌دار بودند. دانش‌آموزان شرکت کننده در این تیم عبارت بودند از:

۱) مهدی رضایی	سال چهارم ریاضی فیزیک	از تهران
۲) شهریار مختار شرقی	سال چهارم ریاضی فیزیک	از مشهد
۳) محمد جابر بران	سال چهارم ریاضی فیزیک	از تبریز
۴) کوروش علیانی	سال چهارم ریاضی فیزیک	از تهران
۵) محمدعلی خجسته‌پور	سال چهارم ریاضی فیزیک	از شیراز
۶) امیر عباس عابدی	سال چهارم ریاضی فیزیک	از تهران

یادآوری می‌شود که اعضاء این تیم از طریق دو آزمون استانی و نهایی انتخاب شده و در دو اردو یکی در دانشگاه شهید بهشتی و دیگری در منظریه تهران شرکت کرده بودند. بنا به تصویب شورای عالی آموزش و پرورش امتحان نهایی کلاس چهارم این دانش‌آموزان در شهریور ماه امسال برگزار می‌شود و نمره آن به حساب نمره خرداد ماه می‌باشد. همانند سال‌گذشته، بنا به تصویب شورایعالی انقلاب فرهنگی، این شش نفر بدون کنکور وارد یکی از رشته‌های علوم پایه و یا مهندسی در دانشگاه مورد علاقه خود خواهند شد. آرزوی ما این است که این قبیل دانش‌آموزان زبده وارد رشته ریاضی شده و در این رشته به تحصیلات خود ادامه دهند تا در آتیه، همچون قرون گذشته، شاهد شکوفایی دانش ریاضی در کشور و پدیدار شدن دانشمندان برجسته در ریاضیات باشیم. اما با توجه به وضعیت رشته ریاضی در حال حاضر، نمی‌توان انتظار داشت که همه استعدادهای درخشان وارد این رشته شوند. اما حداقل انتظار این است که وزارت فرهنگ و آموزش عالی و وزارت آموزش و پرورش چاره‌ای اندیشیده و با اعطاء بورس‌های مناسب تعدادی از این دانش‌آموزان را به ادامه تحصیل در رشتهٔ ریاضی ترغیب نمایند.

روز دوشنبه بیست و ششم تیرماه مراسم افتتاحیه سی‌امین المپیاد ریاضی با رژه راهنمایان تیمها که پلاکاردهایی با نام کشورها را حمل می‌کردند و با سخنان وزیر آموزش و پرورش ایالت ساکسونی سفلی (Lower Saxony) و وزیر آموزش و پرورش فدرال و شهردار برانشویک و پروفسور آرتور انگل (Arthur Engel) رئیس هیأت ژوری برگزار شد. انگل در قسمتی از سخنان خود به دانش‌آموزان گفت:«شما ستارگان این مسابقه بین‌المللی ریاضی هستید. ریاضیات از هر دانشی بین‌المللی‌تر است. برای کار در ریاضیات نیازی به وسایل گران قیمت نیست. هوش و ذکاوت، یک مداد نوک تیز، و مقدار معتنابهی کاغذ برای کار در ریاضیات کافی است. از این رو المپیاد ریاضی از هر مسابقهٔ علمی دیگر مردمی‌تر است. هنوز کامپیوتر این شیوه را دگرگون نساخته است، گرچه، ریاضیات کامپیوتر را به طور روزافزون به عنوان یک ابزار تحقیق به کار می‌گیرد. بنابراین ممکن

است در آتیه الگوریتمها در یکی از شش مسأله راه پیدا کند. ولی، در آینده قابل پیش بینی، شما صرفاً نیاز به ذکاوت، کاغذ و مداد دارید.»

روز سه‌شنبه بیست و هفتم تیر ماه اولین امتحان در ساعت ۹ صبح شروع شد و مدت ۴/۵ ساعت وقت داشت. امتحان بعدی روز چهارشنبه ۹ صبح و به مدت ۴/۵ ساعت انجام شد. بعد از انجام این دو آزمون بلافاصله تصحیح اوراق شروع شد. مراحل تصحیح تقریباً مثل سال گذشته بود ولی هیأت مصححین برای هر سوال به جای دو نفر از سه نفر مرکب از دو دانشجوی ریاضی و یک دبیر تشکیل شده بود. تصحیح اوراق و اعطای امتیاز تا روز جمعه ادامه داشت. ساعت سه بعد از ظهر روز جمعه سی‌ام تیرماه هیأت ژوری برای رده‌بندی مدالها تشکیل جلسه داد. با توجه به امتیازات اخذ شده و فرمول اعطاء مدالها مقرر گردید که به نمرات ۳۸ تا ۴۲ مدال طلا، به نمرات ۳۰ تا ۳۷ مدال نقره و به نمرات ۱۸ تا ۲۹ مدال برنز تعلق گیرد. هیأت ژوری در این جلسه تصویب کرد که به افرادی که یک مسأله را به طور کامل جواب داده و مدال دریافت نکرده‌اند دیپلم افتخار اعطا نماید.

تیم جمهوری اسلامی ایران در این مسابقه موفق به دریافت دو مدال نقره و سه مدال برنز و یک دیپلم افتخار شد و در مجموع در بین پنجاه و یک کشور شرکت کننده به مقام چهاردهم دست یافت.

مراسم اختتامیه المپیاد و اعطاء جوایز در ساعت ۹ صبح روز یکشنبه اول مرداد ماه در سالن تاترشهر انجام شد. مدالها توسط وزیر آموزش و پرورش فدرال، وزیر آموزش و پرورش ایالتی پروفسور انگل اعطاء گردید. در این مراسم سرپرست تیم جمهوری خلق چین رسماً از کلیه کشورهای شرکت کننده برای شرکت در سی و یکمین المپیاد ریاضی که در پکن برگزار می‌شود دعوت کرد.

در طول مدت این المپیاد بازدیدهای متنوعی از قسمتهای مختلف ایالت فوق‌الذکر برنامه‌ریزی شده بود. از همه مهمتر نمایشگاهی بود که از کلیه کتب و آثار ریاضیدانان آلمانی و غیرآلمانی و ابزار و وسایل تشکیل شده بود در این نمایشگاه کتاب تحریر اصول اقلیدس تألیف خواجه نصیرالدین طوسی جزو کتابهای نمایشگاه بود. عنوان این کتاب بدین صورت بود «کتاب تحریر اصول الاوقلیدوس من تألیف خوجه نصیرالدین الطوسی». یکی از سرپرستان اروپائی که تسلط کاملی بر تاریخ ریاضیات داشت با مشاهده این کتاب به ما اظهار داشت که علوم یونانی توسط دانشمندان اسلامی و ایرانی به اروپا منتقل شده است و شما دارای این افتخار هستید. در این نمایشگاه آثاری از اویلر، گاوس، برنویی، به نمایش گذاشته شده بود. مرکز دیگری که مورد بازدید قرار گرفت مرکز مطالعات کتابهای درسی جغرافی و تاریخ کشورهای مختلف جهان بود که به نظر می‌آمد مرکز مطالعات سیاسی است.

هیأت اعزامی صبح روز پنجشنبه به تهران بازگشت، علیرغم تأخیر زیاد هواپیما ریاست محترم سازمان و خانواده‌ها از هیأت اعزامی استقبال کردند. پاویون دولتی سرشار از شادی و امید بود، شاخه‌های گل توسط ریاست محترم سازمان نثار جوانان پاکدل ما گردید که این بار با کسب امتیازات غیرمنتظره تعجب همگان را برانگیخته بودند.

بطوری که تجربه سه سال نشان می‌دهد دانش‌آموزان ما دارای هوش و استعداد کافی ریاضی هستند، بطوری که در این سه سال گذشته از مقام بیست و ششم به مقام چهاردهم رسیده‌ایم یعنی در واقع از بلوک غرب فقط کشورهای آلمان غربی، فرانسه و آمریکا جلوتر از ما هستند. اگر همت به خرج دهیم و برنامه‌ریزی دقیقی به عمل آوریم امکان دستیابی به مراتب بالاتر غیرممکن نیست. پیشنهاد می‌شود که:

۱) کمیته المپیاد کوشش نماید که دانش‌آموزان سال دوم را هم در آزمونهای اول و دوم شرکت دهد؛

۲) آزمون اول در اواخر آبانماه و آزمون دوم در بهمن ماه انجام گیرد؛

نتایج تیم‌اعزامی جمهوری اسلامی ایران

اسامی	کد	سؤال ۱	سؤال ۲	سؤال ۳	سؤال ۴	سؤال ۵	سؤال ۶	مجموع امتیازها	مدال
شهریار مختاری شرقی	IRA 1	۲	۷	۰	۰	۷	۴	۲۰	برنز
کوروش علیانی	IRA 2	۰	۰	۰	۰	۱	۷	۸	دیپلم افتخار
مهدی رضایی	IRA 3	۷	۷	۱	۷	۷	۲	۳۱	نقره
محمد جابر بران	IRA 4	۶	۷	۷	۷	۰	۵	۳۲	نقره
محمد علی خجسته پور	IRA 5	۷	۶	۲	۷	۷	۰	۲۹	برنز
امیر عباس عابدی	IRA 6	۴	۷	۰	۷	۷	۲	۲۷	برنز
								جمع امتیازها ۱۴۷	

۳) آزمون دوم دارای هشت نفر قبولی به جای شش نفر فعلی باشد؛

۴) از اول اردیبهشت ماه ۶۹ به مدت دو ماه اردوی تربیت دانش‌آموزان به طور مرتب و جدی تشکیل شود؛

۵) بعد از اردوی دوم شش نفر از بین هشت نفر طی یک آزمون کتبی انتخاب شود؛

۶) تعیین رشته دانش‌آموزان برحسب مدالهای دریافتی باشد.

امید است که پیشنهادات فوق‌الذکر مورد توجه کمیته المپیاد قرار گیرد.

ردیف	نام کشور	تعداد اعضاء تیم	امتیاز	تعداد مدالها: طلا	نقره	برنز
۱	جمهوری خلق چین	۶	۲۳۷	۴	۲	۰
۲	رومانی	۶	۲۲۳	۲	۴	
۳	اتحاد جماهیر شوروی	۶	۲۱۷	۳	۲	۱
۴	جمهوری دموکراتیک آلمان	۶	۲۱۶	۳	۲	۱
۵	آمریکا	۶	۲۰۷	۱	۴	۱
۶	چکسلواکی	۶	۲۰۲	۲	۱	۳
۷	بلغارستان	۶	۱۹۵	۱	۳	۲
۸	جمهوری فدرال آلمان	۶	۱۸۷	۱	۳	۲
۹	ویتنام	۶	۱۸۳	۲	۱	۳
۱۰	مجارستان	۶	۱۷۵	۰	۴	۱
۱۱	یوگسلاوی	۶	۱۷۰	۱	۳	۱
۱۲	لهستان	۶	۱۵۷	۰	۳	۳
۱۳	فرانسه	۶	۱۵۶	۰	۱	۵
۱۴	جمهوری اسلامی ایران	۶	۱۴۷	۰	۲	۳
۱۵	سنگاپور	۶	۱۴۳	۰	۰	۴
۱۶	ترکیه	۶	۱۳۳	۰	۱	۴
۱۷	هنگ کنگ	۶	۱۲۷	۰	۲	۱
۱۸	ایتالیا	۶	۱۲۴	۰	۱	۲
۱۹	کانادا	۶	۱۲۳	۰	۱	۳
۲۰	یونان	۶	۱۲۲	۰	۱	۳
۲۱	بریتانیا	۶	۱۲۲	۰	۲	۱
۲۲	استرالیا	۶	۱۱۹	۰	۲	۲
۲۳	کلمبیا	۶	۱۱۹	۰	۱	۲
۲۴	اتریش	۶	۱۱۱	۰	۲	۱
۲۵	هند	۶	۱۰۷	۰	۰	۴
۲۶	اسرائیل (رژیم اشغالگر قدس)	۶	۱۰۵	۰	۲	۱
۲۷	بلژیک	۶	۱۰۴	۰	۰	۳
۲۸	جمهوری کره	۶	۹۷	۰	۱	۰
۲۹	هلند	۶	۹۲	۰	۱	۱
۳۰	تونس	۶	۸۱	۰	۱	۰
۳۱	مکزیک	۶	۷۹	۰	۰	۱
۳۲	سوئد	۶	۷۳	۰	۰	۲
۳۳	کوبا	۶	۶۹	۰	۰	۱
۳۳	نیوزیلند	۶	۶۹	۰	۰	۲
۳۵	لوکزامبورگ	۳	۶۵	۰	۱	۱
۳۶	برزیل	۶	۶۴	۰	۰	۳
۳۶	نروژ	۴	۶۴	۰	۰	۱
۳۸	مراکش	۶	۶۳	۰	۰	۱
۳۹	اسپانیا	۶	۶۱	۰	۰	۱
۴۰	فنلاند	۶	۵۸	۰	۰	۰
۴۱	تایلند	۶	۵۴	۰	۰	۱
۴۲	پرو	۶	۵۱	۰	۰	۰
۴۳	فیلیپین	۶	۴۵	۰	۱	۰
۴۴	پرتقال	۶	۳۹	۰	۰	۰
۴۵	ایرلند	۶	۳۷	۰	۰	۰
۴۶	ایسلند	۶	۳۳	۰	۰	۰
۴۷	کویت	۶	۳۱	۰	۰	۰
۴۸	قبرس	۶	۲۴	۰	۰	۰
۴۹	اندونزی	۶	۲۱	۰	۰	۰
۵۰	ونزوئلا	۴	۶	۰	۰	۰
۵۱	مغولستان	—	—	—	—	—

شگفتیهای اعداد

محمدعلیپور اسکندانی

مربعهای اعدادی که ۹ رقم اصلی را بدون تکرار در خود دارند.

$۵۴۹۳۸۶۷۲۱ = ۲۳۴۳۹^{۲}$ $۱۳۹۸۵۴۲۷۶ = ۱۱۸۲۶^{۲}$

$۵۹۷۳۶۲۴۸۱ = ۲۴۴۴۱^{۲}$ $۱۵۲۸۴۳۷۶۹ = ۱۲۳۶۳^{۲}$

$۶۲۷۹۵۳۴۸۱ = ۲۵۰۵۹^{۲}$ $۲۱۵۳۸۴۹۷۶ = ۱۴۶۷۶^{۲}$

$۷۳۵۹۸۲۶۴۱ = ۲۷۱۲۹^{۲}$ $۳۲۶۵۹۷۱۸۴ = ۱۸۰۷۲^{۲}$

$۸۴۲۹۷۳۱۵۶ = ۲۹۰۳۴^{۲}$ $۳۶۱۸۷۴۵۲۹ = ۱۹۰۲۳^{۲}$

$۹۲۳۱۸۷۴۵۶ = ۳۰۳۸۴^{۲}$ $۴۱۲۷۳۹۸۵۶ = ۲۰۳۱۶^{۲}$

$۵۲۳۸۱۴۷۶۹ = ۲۲۸۸۷^{۲}$

مسائل
مسابقه المپیاد ریاضی برانشویك آلمان غربی

روز اول

۱۸ جولای ۱۹۸۹ (۶۸/۴/۲۷) برانشویك، آلمان غربی

۱- ثابت کنید که مجموعه $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ را می‌توان به صورت اجتماعی از ۱۱۷ زیر مجموعه دوبدو جدا از هم A_1 و A_2 و ... و A_{117} نوشت بطوری که:

(الف) هر A_i درست ۱۷ عضو داشته باشد؛

(ب) مجموع اعضاء A_iها با یکدیگر برابر باشند.

۲- در مثلث حادالزاویه ABC نیمساز داخلی زاویه A دایره محیطی مثلث را در نقطه دیگری مانند A_1 قطع می‌کند. نقاط B_1 و C_1 به همین ترتیب تعریف می‌شوند. فرض کنیم A_0 نقطه تقاطع خط AA_1 با نیمسازهای خارجی زوایای B و C باشند. نقاط B_0 و C_0 نیز به همین ترتیب تعریف می‌شوند. ثابت کنید:

(الف) مساحت مثلث $A_0B_0C_0$ دو برابر مساحت شش ضلعی $AC_1BA_1CB_1$ می‌باشد.

(ب) مساحت مثلث $A_0B_0C_0$ بزرگتر یا مساوی چهار برابر مساحت مثلث ABC می‌باشد.

۳- فرض کنیم n و k اعداد صحیح مثبت و S مجموعه‌ای از n نقطه در صفحه باشد بطوری که:

(الف) هیچ سه نقطه S روی یك خط واقع نباشند.

(ب) به ازاء هر نقطه P در S حداقل k نقطه در S وجود داشته باشد که از نقطه P به یك فاصله باشند.

ثابت کنید:

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$$

روز دوم

۱۹ جولای ۱۹۸۹ (۶۸/۴/۲۸) برانشویك، آلمان غربی

۴- فرض می‌کنیم چهارضلعی محدب $ABCD$ دارای خواص زیر باشد:

(الف) اضلاع AB، AD و BC در رابطه

$$AB = AD + BC$$

صدق کنند؛

(ب) یك نقطه P درون این چهارضلعی و به فاصله h از خط CD وجود داشته باشد بطوری که

$$BP = h + BC \quad و \quad AP = h + AD$$

ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$$

۵- به ازاء هر عدد صحیح مثبت n ثابت کنید n عدد صحیح مثبت متوالی وجود دارد بطوری که هیچیك از آنها را نمی‌توان به صورت توان صحیحی از یك عدد اول نوشت.

۶- فرض کنیم n یك عدد صحیح مثبت باشد. تبدیل یا جایگشت $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ از مجموعه $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ را دارای خاصیت P گوئیم اگر به ازاء حداقل یك i در $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ داشته باشیم $|x_i - x_{i+1}| = n$. ثابت کنید که به ازاء هر n، تعداد تبدیل‌های دارای خاصیت P از تعداد تبدیل‌هائی که این خاصیت را ندارند بیشتر است.

مسائل شمارهٔ ۲۲

تنظیم از: محمود نصیری

۱ـ حاصلضرب دو ریشه از چهار ریشه معادله

$$x^4-18x^3+kx^2+200x-1984=0$$

برابر ۳۲ـ است مقدار k را پیدا کنید.

۲ـ ثابت کنید

$$\frac{1}{\pi}=\frac{1}{4}\,tg\,\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8}\,tg\,\frac{\pi}{8}+\frac{1}{16}\,tg\,\frac{\pi}{16}+\cdots$$

۳ـ ماکزیموم تابع f با ضابطهٔ

$$f(x)=(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2$$

بـه ازاء چـه مقداری از x به دست مـی‌آید. و این مقدار ماکزیموم را پیدا کنید.

۴ـ فرض می‌کنیم به ازاء هر $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ،

$$-1 \leqslant ax^2+bx+c \leqslant 1$$

که a و b و c اعداد حقیقی هستند. ثابت کنید به ازاء هر x، $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ، داریم $-4 \leqslant 2ax+b \leqslant 4$

تعمیم مسأله فوق چنین است.

اگر

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$$

یك چند جمله‌ای ازدرجه n با ضرائب حقیقی a_n ، ... ، a_1 ، a_0 باشد به طوری که برای

$$-1 \leqslant f(x) \leqslant 1 \ ، \ -1 \leqslant x \leqslant 1$$

ثابت کنید برای هر $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ،

$$-n^2 \leqslant f'(x) \leqslant n^2$$

۵ـ انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$I=\int_1^5 \frac{\sqrt[3]{7-x}}{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{7-x}}\,dx$$

۶ـ فرض می‌کنیم A یك ماتریس حقیقی 3×3 با دترمینان منفی بـاشد. نشان دهید هیچ مـاتریس حقیقی B روی اعداد حقیقی وجود ندارد بطوری که A یك ماتریس الحاقی (وابسته) ماتریس B باشد.

۷ـ فرض مـی‌کنیم A و B دو عضو نـا صفر یك گـروه باشند بقسمی که $ABA=BA^2B$ ، $A^3=1$. و برای بعضی مقادیـر ممکن n، $B^{2n-1}=1$، ثابت کنید $B=1$. (۱ عضو خنثی گروه است).

۸ـ اگـر x یك عدد حقیقی مثبت و n یك عـدد صحیح منفی باشد. ثابت کنید

$$1+\frac{n}{x+1} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^n$$

۹ـ سه عدد طبیعی متمایز پیدا کنید بطوری کـــه مجموع معکوسات آنها عددی طبیعی باشد.

۱۰ـ فـرض مـی‌کنیم k کـوچکترین عدد صحیح مثبت با خاصیت زیر باشد:

اعداد صحیح و متمایز m_1، m_2، m_3، m_4، m_5 موجود باشند بطوری که چند جمله‌ای

$$P(x)=(x-m_1)(x-m_2)(x-m_3)(x-m_4)(x-m_5)$$

درست k ضریب مخالف صفر داشته باشد.

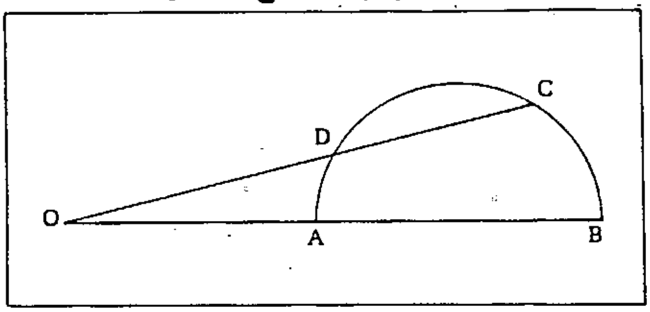
اعداد صحیح m_1، m_2، m_3، m_4، m_5 را بقسمی تعیین کنید که k مقدار مینیموم خود را بگیرد، و این مقدار k را پیدا کنید.

۱۱ـ بردایره (C) بـه مرکز O سه کمان AB و CD و EF هـم جهت بوده و اندازه هر یك 60° است و اگـر B' وسط OB و E' وسط OE و M و N و P وسطهـای وترهـای BC و DE و AF باشند ثابت کنید هـریك از

مثلثهای $PB'E'$ و PMN متساوی‌الاضلاع هستند.

(فرستنده. رضا علاقه‌بندان ـ دانش‌آموز ـ بوشهر)

۱۲ـ مطابق شکل زیر از نقطه O روی امتداد قطر AB از نیم دایره قاطع ODC را رسم می‌کنیم. ثابت کنید مساحت چهارضلعی ABCD وقتی ماکزیمم است که تصویر عمودی DC روی قطر AB برابر R شعاع نیمدایره باشد.



۱۳ـ اگر O و I به ترتیب مراکز دایره‌های محیطی و محاطی داخلی مثلث ABC و نقاط M و H و D بترتیب پای میانه و ارتفاع و نیمساز رأس A روی ضلع BC باشد، مثلث ABC را در هریك از حالتهای ذیل رسم کنید.

الف ـ نقاط O، M و I معلوم باشند.

ب ـ نقاط O، H و D معلوم باشند.

۱۴ـ اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ثابت کنید.

$$tgx < \frac{\pi x}{\pi - 2x}$$

۱۵ـ فرض کنیم که s واسطه هندسی اعضای مجموعه S متشکل از n عدد مثبت باشد. اگر S_k زیر مجموعه ناتهی kام S و s_k واسطه هندسی اعضای S_k باشد نشان دهید که s واسطه هندسی s_kها است.

۱۶ـ اگر x و y و z اعدادی صحیح باشند جوابهای معادله‌های زیر را پیدا کنید.

الف ـ $1+3^x=7^y+3^z$

ب ـ $1+5^x=7^y+5^z$

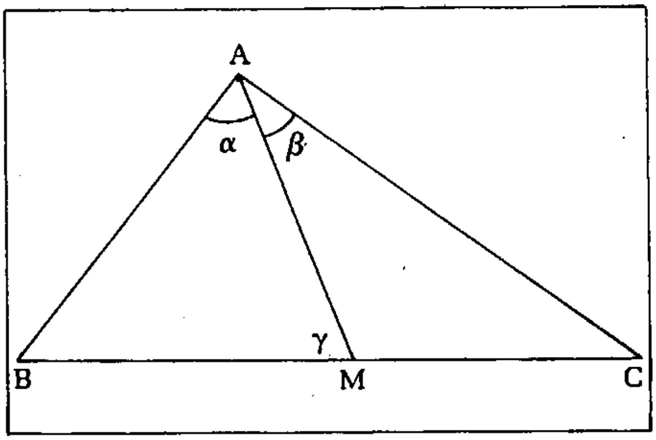
۱۷ـ الف) آیا عدد صحیحی مانند x موجود است که از تقسیم آن بر ۸ و ۱۲، بترتیب باقیمانده‌های ۶ و ۷ به دست آید؟ درصورتی که باقیمانده x در تقسیم بر اعداد ۸ و ۱۲ بترتیب، ۲ و ۱۰ باشد کلیه این نوع xها پیدا کنید (درصورت وجود).

ب) فرض می‌کنیم که m و n دو عدد طبیعی باشند. شرط لازم و کافی برای اینکه باقیمانده‌های x درتقسیم بر m و n، بترتیب برابر a و b باشد، چیست؟

۱۸ـ روی دایرهٔ مفروضی، شش نقطه A، B، C، D، E، F به تصادف و مستقل، بطور یکنواخت انتخاب شده‌اند. احتمال اینکه دو مثلث ABC و DEF جدا از هم باشند، یعنی هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند، چیست؟

۱۹ـ ثابت کنید اگر میانه AM از مثلث ABC با اضلاع AB و AC زوایای α و β و با ضلع BC زاویه γ تشکیل دهد در این صورت

$$\frac{2}{tg\gamma}=\frac{1}{tg\alpha}-\frac{1}{tg\beta}$$



(فرستنده: علی‌محمد بنان‌زاده ـ دانش‌آموز ـ شیراز)

۲۰ـ ثابت کنید که مرکز دایره‌ای که از قرینه‌های نقطهٔ دلخواهی در درون مثلث مفروض نسبت به اضلاع آن مثلث می‌گذرد. درون آن مثلث خواهد بود.

(فرستنده: نسترن مفراضی).

حل مسائل شمارهٔ ۱۹ و ۲۰

تنظیم از: محمود نصیری

۱ـ عبارت

$$A=\frac{a-b}{1+ab}+\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ac}$$

را به حاصلضرب عوامل تجزیه کنید.

حل. اگر فرض کنیم، $a=tg\alpha$ ، $b=tg\beta$ ، $c=tg\gamma$ آنگاه،

$$A=tg(\alpha-\beta)+tg(\beta-\gamma)+tg(\gamma-\alpha)$$

ولی

$$(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)+(\gamma-\alpha)=0$$

لذا

$$tg(\alpha-\beta)+tg(\beta-\gamma)+tg(\gamma-\alpha)$$
$$=tg(\alpha-\beta)tg(\beta-\gamma)tg(\gamma-\alpha)$$

بنابراین

$$A=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(1+ab)(1+bc)(1+ac)}$$

۲ـ به ازاء چه مقادیر صحیح a و b حاصلضرب دو ریشهٔ معادلهٔ

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

برابر ۳ است.

حل. فرض کنیم به ازاء بعضی مقادیر a و b حاصلضرب دو ریشه معادله برابر ۳ باشد. این دو ریشه را p و q می‌نامیم $(p\neq q)$ چون صفر ریشه معادله نمی‌باشد لذا می‌توانیم معادله را به صورت زیر بنویسیم.

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b=0$$

با فرض

$$x+\frac{1}{x}=y$$

داریم.

$$y^2+ay+b-2=0$$

که اعداد $p+\frac{1}{p}$ و $q+\frac{1}{q}$ ریشه‌های معادله فوق می‌باشند

اگر $p+\frac{1}{p}=q+\frac{1}{q}$ آنگاه $p-q=\frac{p-q}{3}$ یا $p=q$

با توجه به روابط بین ریشه‌ها داریم.

$$p+\frac{1}{p}+q+\frac{1}{q}=-a$$

و

$$\left(p+\frac{1}{p}\right)\left(q+\frac{1}{q}\right)=b-2$$

چون $pq=3$ لذا از تساوی‌های فوق داریم.

$$\frac{p}{q}+\frac{q}{p}=b-\frac{16}{3}$$

و

$$p+q=-\frac{3a}{4}$$

یا

$$p^2+q^2=\frac{9a^2}{16}-6$$

و

$$p^2+q^2=3b-16$$

و در نتیجه

$$9a^2=48b-160$$

اما به ازاء مقادیر صحیح a و b این تساوی برقرار نیست. زیرا ۱۶۰ بر ۳ بخش‌پذیر نمی‌باشد.

اگر $p=q$، آنگاه هردوی p و q برابر $\sqrt{3}$ یا $-\sqrt{3}$ می‌باشند، فرض کنیم برابر $\sqrt{3}$ باشند. پس

$$9+3a\sqrt{3}+3b+a\sqrt{3}+1=0$$

و چون $\sqrt{3}$ اصم است پس باید $a=0$ و $b=-\frac{10}{3}$ که چون b صحیح است، ممکن نیست. در نتیجه به ازاء هیچ مقدار صحیح a و b حاصلضرب دو ریشه معادله فوق برابر ۳ نمی‌باشد.

۳ـ تابع f باضابطه زیر تعریف شده است.

$$f(x)=\begin{cases} x^{2}\left|\cos\frac{\pi}{x}\right| & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$$

الف) a را چنان تعیین کنید که تابع درنقطه $x=0$ پیوسته باشد.

ب) مشتق راست و چپ f را در نقطه $x=0$ ($f'_{+}(0)$ و $f'_{-}(0)$) پیدا کنید.

ج) $\lim\limits_{x\to 0^{+}} f'(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^{-}} f'(x)$ را (در صورت وجود) پیدا کنید.

حل.

الف) برای پیوستگی در نقطه $x=0$ داریم.

$$\lim_{x\to 0} x^{2}\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|=f(0)=a$$

اما $\lim\limits_{x\to 0} x^{2}=0$ و تابع $\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|$ در یک همسایگی محذوف صفر محدود است لذا

$$a=0 \quad و \quad \lim_{x\to 0} x^{2}\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|=0$$

ب)

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{x^{2}\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^{+}} x\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|=0$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{x^{2}\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|}{x}=0$$

و در نتیجه تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر و $f'(0)=0$ است.

ج) اگر $x\neq 0$ و $\cos\frac{\pi}{x}\neq 0$ یا $x\neq\frac{2}{2k+1}$ آنگاه:

$$f'(x)=2x\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|$$

$$+\frac{\frac{\pi}{x^{2}}\cdot\sin\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}}{\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|}\times x^{2}$$

یا

$$f'(x)=2x\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|+\frac{\pi\sin\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}}{\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|}$$

که مشاهده می‌شود $\lim\limits_{x\to 0^{+}} f'(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^{-}} f'(x)$ موجود نمی‌باشند زیرا حدهای $\cos\frac{\pi}{x}$ و $\sin\frac{\pi}{x}$ وقتی x به سمت صفر میل کند موجود نمی‌باشند. در واقع f' در هیچ همسایگی صفر قابل تعریف نیست و از این‌رو نمی‌توان از وجود حد صحبت کرد.

۴ـ مطلوب است تعیین همه چند جمله‌ای‌های f بر R که در رابطه زیر صدق می‌کنند.

$$f(x)=xf'\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\qquad (x\in R).$$

حل. فرض کنیم

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_{i}x^{i}$$

در این صورت

$$f'(x)=\sum_{i=1}^{n} ia_{i}x^{i-1}$$

بنابراین،

$$xf'\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)=\sum_{i=1}^{n} i\frac{a_{i}}{(\sqrt{3})^{i-1}}x^{i}$$

در نتیجه بنا به فرض مسأله باید،

$$a_{n}=\frac{na_{n}}{(\sqrt{3})^{n-1}}\ ،\ n=0, 1, 2, \ldots$$

اگر $a_{n}\neq 0$ آنگاه $n^{2}=3^{n-1}$.

واضح است که $n=1$ و $n=3$ ریشه‌های معادله فوق می‌باشند، به استقراء ثابت می‌کنیم که به ازاء هر $n\geqslant 4$، $3^{n-1}>n^{2}$ اگر $n=4$ آنگاه، $3^{3}>4^{2}$ فرض کنیم $3^{k-1}>k^{2}$ در این صورت،

$$3^{k}=3\cdot 3^{k-1}>3(k^{2})>(k+1)^{2}$$

و بنابراین حکم ثابت است.

پس به ازاء هر x حقیقی $f(x)=a_{3}x^{3}+a_{1}x$ که a_{1} و a_{3} اعداد حقیقی دلخواه می‌باشند. اگر $a_{3}=0$ آنگاه

$$f(x)=a_{1}x$$

۵ـ حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x}\,dx$$

حل. اگر $0 < x \leqslant 1$،

$$\frac{nx^{n-1}}{2} \leqslant \frac{nx^{n-1}}{1+x} \leqslant \frac{nx^{n-1}}{2x} \quad (n \geqslant 1)$$

بنابراین به ازاء $n \geqslant 2$،

$$\int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{2}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{n}{2}x^{n-2}dx$$

لذا،

$$\frac{1}{2} \leqslant \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x}\,dx \leqslant \frac{n}{2(n-1)}$$

حال اگر n به سمت بینهایت میل کند دو طرف نامساوی فوق به $\frac{1}{2}$ میل می‌کند، بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x}\,dx = \frac{1}{2}$$

۶ـ معادله سیاله زیر را در مجموعه اعداد اول حل کنید. ([ ] جزء صحیح است)

$$[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{x^2-1}]=y$$

حل. ملاحظه می‌شود که،

$$[\sqrt{n^2}]=[\sqrt{n^2+1}]=\cdots=[\sqrt{(n+1)^2-1}]=n$$

پس،

$$[\sqrt{n^2}]+[\sqrt{n^2+1}]+\cdots+[\sqrt{(n+1)^2-1}]=n(2n+1)$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}&[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+\cdots+[\sqrt{x^2-1}]\\&=([\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}])+([\sqrt{4}]+\cdots+[\sqrt{8}])+\cdots+([\sqrt{(x-1)^2}]+\cdots\\&+[\sqrt{x^2-1}])=\sum_{n=1}^{x-1} n(2n+1)\\&=2\sum_{n=1}^{x-1} n^2+\sum_{n=1}^{x-1} n\\&=\frac{2(x-1)x(2x-1)}{6}+\frac{x(x-1)}{2}\\&=\frac{x(4x^2-3x-1)}{6}=y\end{aligned}$$

بنابراین باید معادله

$$x(4x^2-3x-1)=6y$$

را درمجموعه اعداد اول حل کنیم. ازآنجا $x=3$ یا $x=2$ به دست می‌آید. لذا

$$\begin{cases} x=2 \implies y=3 \\ x=3 \implies y=13 \end{cases}$$

به ازاء $x=y$ معادله به صورت $4x^2-3x-1=6$ نوشته می‌شود که در مجموعه اعداد اول جواب ندارد. پس تنها جواب‌های قابل قبول $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ و $\begin{cases} x=3 \\ y=13 \end{cases}$ است.

۷ـ ۹ عدد حقیقی متمایز مفروضند.

نشان دهید حداقل دو عدد x، y از این ۹ عدد وجود دارند بطوری‌که در رابطه زیر صدق می‌کنند.

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < \sqrt{2}-1$$

حل. ابتدا توجه داریم که

$$\sqrt{2}-1 = tg\,\frac{\pi}{8}$$

فرض کنیم a_1، a_2، ...، a_9، ۹ عدد متمایز حقیقی باشند، به ازاء $i=1$، ۲، ...، ۹ کمانهای متمایز b_i در فاصله $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ وجود دارند بطوری‌که $a_i = tg\,b_i$. بازهٔ $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ را به ۸ زیر بازه بطول $\frac{\pi}{8}$ افراز می‌کنیم. بنابراین بنابه اصل حجره‌ها حداقل دوتا از b_iها مانند b_k و b_r وجود دارندکه $0 < b_k-b_r < \frac{\pi}{8}$، چون $tg\,b_k=a_k$ و $tg\,b_r=a_r$ اگر $a_k=x$ و $a_r=y$ را فرض کنیم داریم.

$$0 < b_k-b_r < \frac{\pi}{8}$$

$$tg(0) < tg(b_k-b_r) < tg\,\frac{\pi}{8}$$

$$0 < \frac{tg\, b_k - tg\, b_r}{1 + tg\, b_k\, tg\, b_r} < \sqrt{2} - 1$$

در نتیجه:

$$0 < \frac{x - y}{1 + xy} < \sqrt{2} - 1$$

مسأله فوق را می‌توانیم به صورت زیر تعمیم دهیم.

فرض می‌کنیم $n \geqslant 4$ عدد حقیقی متمایز مفروض باشند، در این صورت حداقل دو عدد x و y ازاین n عدد وجود دارند بطوری‌که

$$0 < \frac{x - y}{1 + xy} < tg\, \frac{\pi}{n - 1}$$

عیناً به روش فوق اثبات می‌شود.

۸ـ اگر تابع f بر $[0, a]$ دارای مشتق دوم باشد و به ازاء هر x از این بازه $f''(x) < 0$ و $f(0) = 0$. ثابت کنید به‌ازاء هرx، $0 < x < a$ وهر m، $0 < m < 1$، $mf(x) < f(mx)$.

حل. $g(x) = mf(x) - f(mx)$، تعریف می‌کنیم چون f'' بر $[0, a]$ موجود است لذا f' موجود و f' و f بر بازهٔ فوق پیوسته می‌باشند. در نتیجه g نیز بر $[0, a]$ مشتق‌پذیر است و

$$g'(x) = m(f'(x) - f'(mx))$$

چون $f''(x) < 0$ لذا تابع f' بربازهٔ $[0, a]$ اکیداً نزولی است. و همچنین $x > 0$ و $0 < m < 1$، پس $mx < x$ و در نتیجه

$$f'(x) - f'(mx) < 0 \quad \text{یا} \quad f'(mx) > f'(x)$$

و چون $m > 0$ بنابراین $g'(x) < 0$. یعنی تابع g اکیداً نزولی است. پس، اگر $x > 0$ آنگاه

$$g(x) < g(0)$$

یعنی،

$$mf(x) - f(mx) < mf(0) - f(0)$$

یا

$$mf(x) - f(mx) < 0$$

و لذا

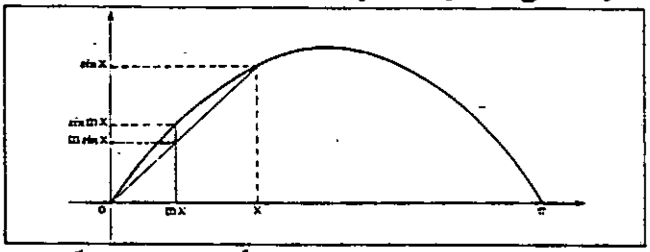
$$mf(x) < f(mx)$$

به ازاء $x = 0$، تساوی برقرار است.

نتیجه. اگر $0 \leqslant x \leqslant \pi$ و $0 < m < 1$، آنگاه

$$m \sin x \leqslant \sin mx$$

تعبیر هندسی به صورت زیر است.



۹ـ نمودار تابع مشتق‌پذیر و اکیداً صعودی f را که در ربع اول بوده و از مبدأ نیز می‌گذرد تا نقطه $P(x, f(x))$ یك‌بار حول محور yها و بار دیگر حول محور xها دوران می‌دهیم. اگر حجم حاصل از دوران سطح بین نمودار تابع و محور yها و خط افقی مار بر P، n برابر حجم حاصل از دوران سطح بین نمودار تابع و محور xها و خط عمودی مار بر P باشد، معادله f را بیابید. $(n > 0)$

حل.

$$n\pi \int_0^x f(u)^2 du = \pi \int_0^{f(x)} f^{-1}(v)^2 dv.$$

که

$$f^{-1}(v) = u \quad \text{یا} \quad v = f(u)$$

چون f اکیداً صعودی و لذا وارون پذیر است. اگر از دو طرف رابطه فوق مشتق بگیریم.

$$nf(x)^2 = x^2 f'(x)$$

یا

$$nf(x)^2 = f'(x) \cdot f^{-1}(f(x))^2$$

و در نتیجه $\frac{n}{x^2} = \frac{f'(x)}{f(x)^2}$ که با انتگرال‌گیری از طرفین داریم

$$f(x) = \frac{x}{n + cx} \quad \text{یا} \quad \frac{-n}{x} - c = -\frac{1}{f(x)}$$

که c مقداری ثابت است.

۱۰ـ فرض‌کنیم p و q دو عدد اول دلخواه باشند که تفاضل‌آنها ۲ است (اعداد اول دوقلو).

ثابت‌کنید از تقسیم $p^2 + q^2$ بر ۷۲ خارج قسمت، مربع کامل و باقیمانده ۲ به دست می‌آید، $(p, q > 3)$.

حل. می‌دانیم هر عدد اول بزرگتر از ۳ را می‌توان به یکی از صورتهای $6k - 1$ یا $6k + 1$ نوشت. k صحیح و مثبت است. چون $p \neq q$ و p و $q > 3$، داریم.

$$p^2 + q^2 = (6k - 1)^2 + (6k + 1)^2 = 72k^2 + 2$$

و بنابراین خارج قسمت $p^2 + q^2$ بر ۷۲، مربع کامل و باقیمانده، ۲ است.

۱۱ــ تمام اعداد صحیح مثبت و زوج n را پیدا کنید که به ازاء هر عدد صحیح b که $1 < b < n$ و $(b, n)=1$ معادله

$$(b-1)x \equiv \frac{n}{2}(\mathrm{mod}\, n)$$

جواب داشته باشد.

حل. فرض کنیم $n=2m$. همنهشتی

$$(b-1)x \equiv m(\mathrm{mod}\, n)$$

دارای جواب است اگر و فقط اگر $d|m$، که

$$d=(b-1, n)$$

اگر $n=2^k$، آنگاه، عددی صحیح و مثبت مانند j وجود دارد که $d=2^j$ که $1 \leqslant j < k$، بنابراین $d|m$. بعکس، فرض کنیم $n=2^k c$، که $c > 1$ و فرد است دراین صورت عددی مانند t، $1 \leqslant t < c$، وجود دارد بطوری که،

$$2^k t \equiv 1(\mathrm{mod}\, c)$$

فرض کنیم $b=2^k t+1$. آنگاه

$$(b, n)=1 \quad \text{و} \quad 1 < b < n$$

اما

$$d=2^k | m$$

بنابراین n، این خاصیت مشخص را دارد اگر و فقط اگر n توانی از ۲ باشد.

۱۲ــ مجموعه غیر خالی S ازاعداد صحیح و مثبت را منتها خطی گوئیم درصورتی که اعداد صحیح N و k وجود داشته باشند بطوری که به ازاء هر $n > N$، $n \in S$ اگــر و فقط اگر $k|n$.

نشان دهید هر مجموعه غیر خالی از اعداد صحیح مثبت که نسبت به عمل جمع بسته باشد منتها خطی است.

حل. فرض کنیم

$$S=\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$$

یك مجموعه غیر خالی از اعداد صحیح و مثبت باشد که نسبت بــه عمل جمع بسته است. و $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$.
فرض مــی کنیم $D=\{a_{i+1}-a_i |$ عددی طبیعی است $i\}$ و k کوچکترین عضو D باشد. فرض کنیم $m \in S$، بطوری کــه $m+k \in S$ و $N=km^2$.

ابتدا، فرض می کنیم $n > N$ و $k|n$.

عددی صحیح مانند q وجود داردکــه $n=N+qk$.
بنا به قضیه تقسیم، اعدادی صحیح مانند i و j وجود دارند که

$$0 \leqslant j < km \quad \text{و} \quad q=ikm+j$$

بنابراین،

$$n=(km-j)m+j(m+k)+ik^2m$$

که یك عضو S است زیرا به صورت مجموع مضربهای m و $m+k$ است.

بنابراین اگــر $n > N$ و $k|n$، آنگاه $n \in S$ اکنون فــرض کنیم $n > N$ و $n \in S$. بنابــه قضیه تقسیم، اعداد صحیح q و r وجود دارند که،

$$n-N=qk+r$$

که $0 \leqslant r < k$. اگر $r > 0$، آنگاه،

$$n=N+qk+r < N+qk+k$$

و

$$n > N+qk$$

لذا داریم

$$N+qk < n < N+(q+1)k$$

اما این متناقض با فرضی است کــه k کــوچکترین عضو D است. بنابراین $r=0$ ودر نتیجه $k|n$ پس، اگر $n > N$ و $n \in S$، آنگاه $k|n$.

نتیجه. k بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك تمام اعضای S است.

اثبات. فرض کنیم $n \in S$. آنگاه عدد اول p وجود دارد بطوری که $p > k$ و $pn > N$، که N مانند فوق تعریف می‌شود. چون k و p نسبت بهم اولند، و $k|pn$. درنتیجه $k|n$. یعنی k یك مقسوم‌علیه هــر عضو S است. همچنین k بزرگترین مقسوعلیه‌ها می‌باشد چون عدد صحیح دیگری مانند k' نمی‌تواند وجود داشته باشد بطوری که $k'|N$ و هــــم $k'|N+K$.

۱۳ــ در چهارضلعی محدب $ABCD$، نقطه M وسط AB را به دو رأس C و D و نقطه N وسط CD را به دو رأس A و B وصل مــی‌کنیم تلاقی NB و MC را P و تلاقــی MD و AN را L می‌نامیم ثابت‌کنید

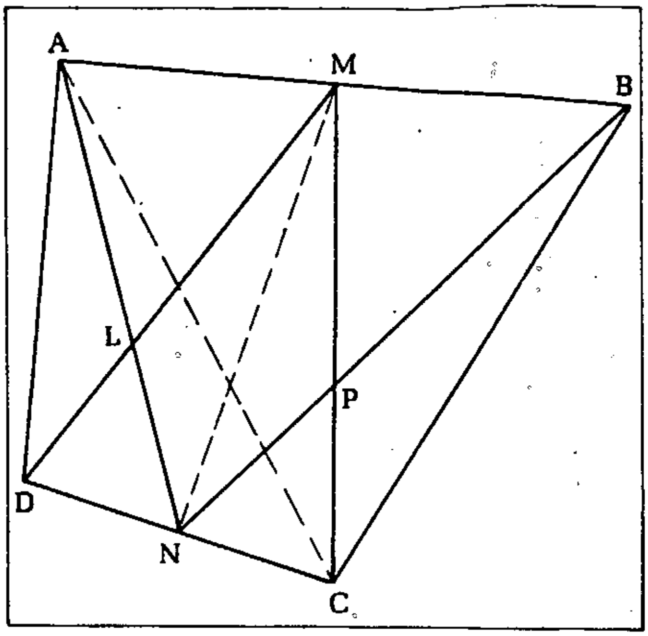
$$S_{ALD}+S_{BPC}=S_{MPNL}$$

حل.

(روش اول).

اگر از M به N و از A به N وصل‌کنیم داریم.

$$\begin{cases} S_{MBP}+S_{MPN}=S_{AML}+S_{MLN} \\ S_{MLN}+S_{DLN}=S_{MPN}+S_{PNC} \end{cases}$$



در نتیجه

$$S_{MBP}+S_{DLN}=S_{AML}+S_{PNC} \qquad (۱)$$

از طرف دیگر،

$$S_{MPB}+S_{PBC}=S_{AMC}$$

و

$$S_{ALD}+S_{DLN}=S_{ANC}$$

بنابراین با توجه به رابطه‌های فوق و رابطه (۱) داریم

$$S_{MPB}+S_{PBC}+S_{ALD}+S_{DLN}=S_{ANCM}$$
$$=S_{MBND}=S_{MPB}+S_{DLN}+S_{MPNL}$$

و لذا

$$S_{PBC}+S_{ALD}=S_{MPNL}$$

(روش دوم).

اگر از D و N و C عمودهائی بر AB رسم می‌کنیم

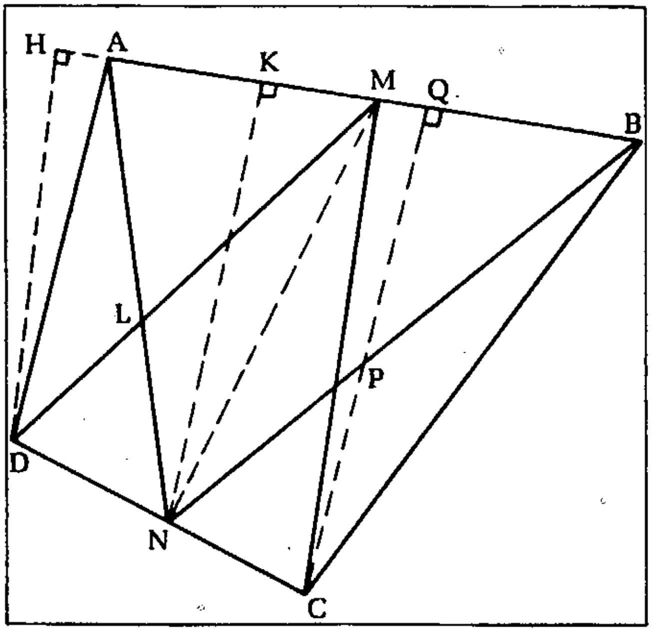
$$S_{MBC}+S_{AMD}=\frac{MB(CQ+DH)}{2}$$
$$=\frac{MB\cdot 2NK}{2}=\frac{2MB\cdot NK}{2}$$
$$=\frac{AB\cdot NK}{2}=S_{ANB}$$

در نتیجه

$$S_{MBP}+S_{PBC}+S_{ALD}+S_{AML}$$
$$=S_{MPNL}+S_{MBP}+S_{AML}$$

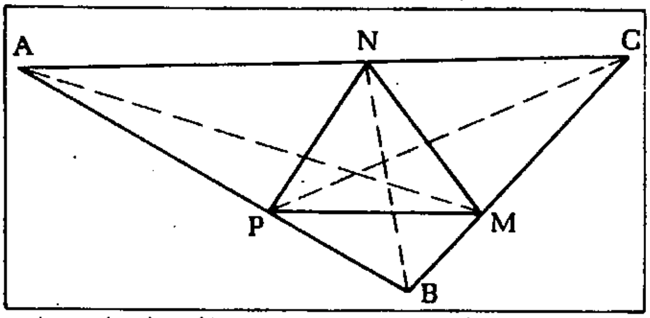
پس

$$S_{PBC}+S_{ALD}=S_{MPNL}$$



۱۴ـ مثلث متساوی‌الاضلاع MNP در مثلث ABC محاط است، بطوری‌که M روی BC و N روی AC و P روی AB قرار دارد ثابت کنید.

$$AM+BN+PC<AB+AC+BC$$



حل. قضیه بطلمیوس را در هر یك از چهارضلعی‌های، PNCM و ANMP و BPNM می‌نویسیم،

پس
$$\begin{cases} MN\cdot PC\leqslant PN\cdot MC+PM\cdot NC\\ PN\cdot AM\leqslant MN\cdot AP+MP\cdot AN\\ MP\cdot BN\leqslant MN\cdot PB+PN\cdot MB\end{cases}$$

پس داریم

$$\begin{cases} PC\leqslant MC+NC\\ AM\leqslant AP+AN\\ BN\leqslant PB+MB\\ PC+AM+BN\leqslant AB+AC+BC\end{cases}$$

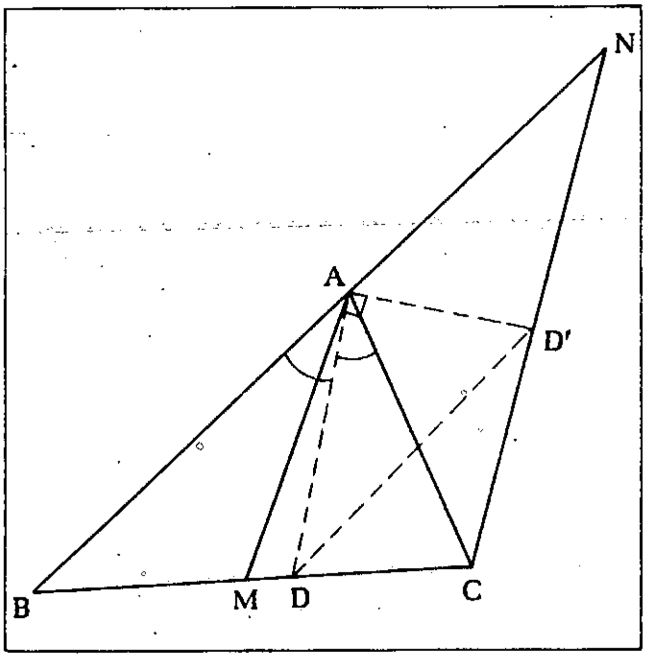
تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که مثلث ABC بر مثلث MNP منطبق شود. حالت کلی مسأله فوق چنین است: اگر سه مثلث APN و MNC و PBM را روی اضلاع مثلث

متساوی‌الاضلاع MNP بسازیم آنگاه،

$$AM+BN+PC \leqslant AN+NC+AP+PB+BM+MC$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که نقاط A و B و C روی دایرهٔ محیطی مثلث MNP واقع شوند. اثبات آن مانند فوق است.

۱۵ـ از مثلث ABC میانه AM و نیمساز AD و زاویه A معلومند مثلث را رسم کنید.



حل. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم، از رأس C خطی موازی میانه AM رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطه N قطع کند، بنابراین $AB=AN$ همچنین نیمساز خارجی زاویه BAC را رسم می‌کنیم و تلاقی آنرا با NC، نقطه D' می‌نامیم.

چون AD و AD' نیمساز می‌باشند لذا،

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{AN}{AC}=\frac{D'N}{D'C}$$

پس

$$\frac{DB}{DC}=\frac{D'N}{D'C}$$

در نتیجه DD' موازی BN و بنابراین

$$\widehat{ADD'}=\frac{\hat{A}}{2}$$

پس مثلث قائم‌الزاویه ADD' قابل رسم است و طول AD' مشخص می‌شود. همچنین $NC=2AM$ و معلوم است.

اکنون در مثلث ANC، ضلع NC و نیمساز AD' و زاویه $\widehat{NAC}=\pi-\hat{A}$ معلومند. پس این مثلث قابل رسم است (مسأله پاپوس، رشد شماره ۱۸ مسأله ۱۲).

پس‌از رسم مثلث ANC، AN را به اندازهٔ خودش از طرف A امتداد می‌دهیم رأس B مشخص می‌شود.

۱۶ـ صفحه P به معادله،

$$x+y+z-3=0$$

و دو نقطه $A(2, 2, 2)$ و $B(5, 4, 3)$ مفروضند روی صفحه P نقطه‌ای تعیین کنید که

الف) مجموع فواصلش از A و B مینیمم باشد؛

ب) قدرمطلق تفاضل فواصلش از A و B ماکزیمم باشد.

حل. قبل‌از حل، دو مسأله را در هندسه مسطحه یادآوری می‌کنیم.

اگر خط Δ ودو نقطه A و B در یکطرف یا دو طرف آن مفروض باشند، نقطه‌ای روی خط Δ مشخص کنید که مجموع فواصلش از A و B مینیمم یا قدرمطلق تفاضل فواصلش از A و B ماکزیمم باشد.

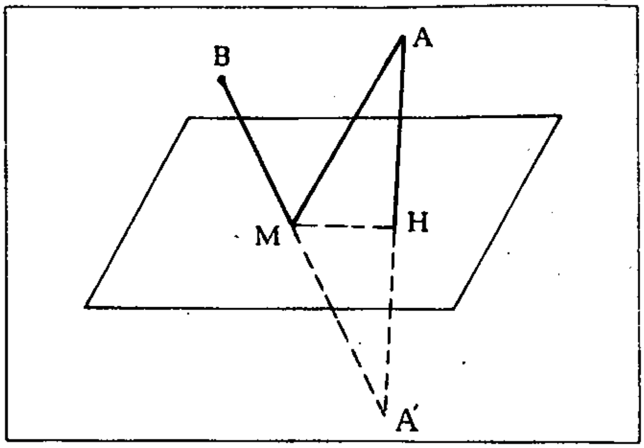
اگر A و B در یك طرف Δ باشند، قرینه یکی از آنها مثلاً A را نسبت به Δ پیدا کرده A' می‌نامیم، A'B را رسم می‌کنیم هرجا خط Δ را قطع کند مجموع فواصل آن از Δ مینیمم است. (مسأله هندسه سوم ریاضی) همچنین در این حالت اگر از A به B وصل کرده امتداد دهیم، هرجا خط Δ را قطع کند نقطه‌ای است که قدرمطلق تفاضل فواصل آن از A و B ماکزیمم است، زیرا هر نقطه دلخواه M که روی Δ انتخاب کنیم همواره $|MA-MB| \leqslant AB$، اگر AB موازی Δ باشد، M نقطه بینهایت دور Δ است.

اگر B و A در دو طرف Δ باشند، از A به B وصل می‌کنیم هرجا Δ را قطع کند، مجموع فواصل از A و B مینیمم است و اگر قرینه یکی از آنها مثلاً A را نسبت به Δ پیدا کرده، A' بنامیم امتداد A'B هرجا Δ را قطع کند قدرمطلق تفاضل فواصل آن از A و B ماکزیمم است.

اکنون برای حل مسأله اگر از A و B صفحه‌ای برصفحه P عمود کنیم و فصل مشترك آنرا با صفحه P، Δ بنامیم مسأله مانند حالت مسطحه می‌باشد.

اگر مختصات A و B را در معادله صفحه P قرار دهیم هر دو هم علامت می‌باشند (هر دو مثبت می‌شود) پس A و B در یك طرف صفحه P قرار دارند.

الف) برای پیدا کردن قرینه نقطه A نسبت به صفحه P، معادله خطی را می‌نویسیم که از A گذشته بر صفحه P عمود باشد بردار هادی خط AH همان بردار نرمال صفحه P یعنی (۱ , ۱ , ۱) است. پس، معادله خط AA' به صورت زیر است.



$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{1} \quad \text{یا} \quad x=y=z$$

$$\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x=y=z \end{cases} \Longrightarrow$$

$$x=1 \quad \text{و} \quad y=1 \quad \text{و} \quad z=1$$

در نتیجه مختصات H، (۱ , ۱ , ۱) است و چون H وسط AA' است، پس (۰ , ۰ , ۰) مختصات A' است. اکنون معادله $A'B$ را پیدا کرده تلاقی‌آن را با صفحه P پیدا می‌کنیم مختصات M به دست می‌آید معادله $A'B$،

$$\frac{x-0}{5-0}=\frac{y-0}{4-0}=\frac{z-0}{3-0} \Longrightarrow \frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}$$

$$\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ \dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{3} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

$$x=\frac{5}{4} \quad \text{و} \quad y=1 \quad \text{و} \quad z=\frac{3}{4}$$

یا

$$M\left(\frac{5}{4}\ ,\ 1\ ,\ \frac{3}{4}\right)$$

ب) برای حل قسمت (ب) معادله خط AB را پیدا کرده با صفحه P نقطه تلاقی‌آنرا پیدا می‌کنیم، نقطه N جواب مسأله است

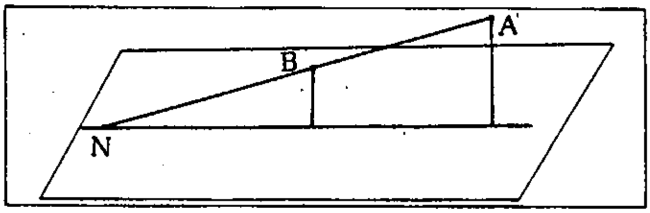
$$AB:\ \frac{x-5}{2-5}=\frac{y-4}{2-4}=\frac{z-3}{2-3}$$

یا

$$\frac{x-5}{+3}=\frac{y-4}{+2}=\frac{z-3}{1}$$

$$\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ \dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-3}{1} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$N\left(\frac{1}{2}\ ,\ 1\ ,\ \frac{3}{2}\right)$$



۱۷- اگر A و B دو ماتریس متعامد باشند که در شرط

$$|A|+|B|=0$$

صدق کنند، ثابت کنید،

$$|A+B|=0$$

حل. چون A و B متعامد می‌باشند،

$$A'A=AA'=I \quad \text{و} \quad BB'=B'B=I$$

و

$$|A|=\pm 1 \quad \text{و} \quad |B|=\pm 1$$

اما بنا به فرض

$$|A|=-|B|$$

یعنی $|A|$ و $|B|$ مختلف‌العلامه می‌باشند پس یکی برابر ۱ و دیگری برابر ۱ــ است لذا

$$|A|\,|B|=-1$$

اکنون چنین داریم،

$$A'(A+B)B'=A'+B'=(A+B)'$$

و در نتیجه،

$$|A'|\,|A+B|\,|B'|=|(A+B)'|$$

پس،

$$|A|\,|B|\,|A+B|=|A+B|$$

در نتیجه

$$-|A+B|=|A+B|$$

و از این‌رو

$$|A+B|=0$$

۱۸- نشان دهید وارون یك ماتریس بالا مثلثی که وارون‌پذیر باشد، ماتریس بالا مثلثی است.

حل. فرض کنیم

$$T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

در این صورت T در چند جمله‌ای

$$(x-a_{11})(x-a_{22})\cdots(x-a_{nn})$$

صدق می‌کند. بنابراین

$$(T-a_{11})(T-a_{22})\cdots(T-a_{nn})=0$$

یا

$$T^n-S_1T^{n-1}+S_2T^{n-2}+\cdots+(-1)^nS_nI=0$$

$$(S_n=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn})$$

چون T وارون‌پذیر است،

$$|T|=S_n\neq 0$$

با تقسیم رابطه بر S_n داریم.

$$T\left[\frac{(-1)^{n-1}}{a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}}\left(T^{n-1}-S_1T^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}S_{n-1}I\right)\right]=I$$

در نتیجه با ضرب طرفین در T^{-1} به دست می‌آید.

$$T^{-1}=\frac{(-1)^{n-1}}{S_n}\left(T^{n-1}-S_1T^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}S_{n-1}I\right)$$

چون T^iها بالا مثلثی و جمع ماتریسهای بالا مثلثی، بالا مثلثی است پس T^{-1} بالا مثلثی است.

۱۹ـ فرض کنید W یك بردار یکه و T تبدیلی در صفحه باشد بطوری که به هر بردار در صفحهٔ تصویر آن بردار روی W را نظیر کند.

الف) نشان دهید مقادیر ویژه T عبارتند از صفر و یك؛

ب) بردارهای ویژه این تبدیل را بیابید.

حل. می‌دانیم X بردار ویژه تبدیل خطی T است هرگاه راستای بردار X تحت تبدیل T پایدار بماند. بردارهایی که تحت تبدیل T پایدارند عبارتند از:

۱) بردارهایی که همراستای بردار یکه W می‌باشند.

در این صورت اگر X برداری همراستای W باشد

$$T(X)=X$$

پس، عدد یك یکی از مقادیر ویژه T است. بردار نظیر $\lambda=1$ تمام بردارهای ناصفر همراستا با W می‌باشند.

۲) بردارهایی که بر W عمودند.

در این صورت اگر X برداری عمود بر W باشد

$$T(X)=O$$

است. و لذا،

$$T(X)=O\cdot X$$

و ازآنجا عدد صفر یکی دیگر از مقادیر ویژه تبدیل T است. بردار ویژه نظیر $\lambda=0$ تمام بردارهای نا صفر عمود بر W می‌باشند.

تبدیل T راستای کلیه بردارهایی که نه در راستای W قرار دارند و نه بر W عمودند را تغییر می‌دهند. بنابراین مقادیر ویژه T منحصر به صفر و یك می‌باشند.

۲۰ـ احتمال به دست آوردن حداقل یك «۶» در پرتاب شش مکعب (تاس) بیشتر است یا احتمال به دست آوردن حداقل دو «۶» در پرتاب دوازده مکعب؟

حل.

پیشامد به دست آمدن حداقل یك «۶» در پرتاب ۶ تاس $=A$

پیشامد به‌دست آمدن حداقل دو «۶» در پرتاب دوازده تاس $=B$

اگر $\bar{A}$ متمم A باشد، آنگاه،

$$P(A)=1-P(\bar{A})$$

$P(\bar{A})=P($نیامدن «۶» با شش تاس$)=\left(\frac{5}{6}\right)^6$

$P(\bar{B})=P($نیامدن یك یا هیچ «۶» با دوازده تاس$)$

$$=\left(\frac{5}{6}\right)^{12}+\binom{12}{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{11}\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\left(\frac{5}{6}\right)^{11}\left(\frac{5}{6}+2\right)=\frac{17\times 5^{11}}{6^{12}}$$

$$P(A)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^6$$

$$P(B)=1-\frac{17\times 5^{11}}{6^{12}}=1-\frac{17}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{11}$$

لذا،

$$P(A)>P(B)$$

مسأله ۶ مرحله نهایی ششمین، دورهٔ مسابقات دانش‌آموزی کشور و حل آن

(این راه حل را آقای دکتر امیدعلی کرمزاده ارسال داشته‌اند)

تعداد n(۱۳۶۹) عدد گویای مثبت با این خاصیت مفروضند که با کنار گذاشتن هریك از این اعداد بقیه را می‌توان به ۱۳۶۸ دسته مساوی (از نظر تعداد) تقسیم کرد که حاصلضرب تمام اعداد در هر دسته یکسان باشند. ثابت کنید تمام این اعداد متساویند.

حل. بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود تمام اعداد را می‌توان طبیعی در نظر گرفت (کافی است تمام اعداد را در کوچکترین مضرب مشترك مخرجها ضرب کنیم). آشکار است که تمام اعداد را می‌توان به دو دسته مساوی تقسیم کرد که حاصلضرب هردو دسته یکسان گردد. تمام اعداد اولی را که در تجزیه این اعداد به‌کار رفته است به p_1، p_2، …، p_k نشان می‌دهیم با ضرب تمام اعداد در $p_1 p_2 \cdots p_k$ می‌توان فرض کرد که در تجزیه تمام اعداد، اعداد اول یکسان به‌کار رفته است. حال کافی است نشان دهیم که توان هریك از این اعداد اول در هر یك از این اعداد یکسان است. اگر توانهای عدد اول p_1 را بترتیب با α_1، α_2، …، α_m نشان دهیم که $m = ۱۳۶۹^n$ است ادعا می‌کنیم که $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m$ و برای سایر p_iها نیز چنین است. حال توجه می‌کنیم که α_iها دارای این خاصیت هستند که هریك را کنار بگذاریم، بقیه را می‌توان به دو دسته مساوی تقسیم کرد که حاصلجمع اعداد هر دسته یکسان گردند و توجه می‌کنیم که اگر هر α_iها را به یك عدد تقسیم و یا در هر عدد ضرب و یا با یك عدد جمع کنیم این خاصیت باقی می‌ماند. آشکار است که همه α_iها باهم یا زوج هستند یا فرد، زیرا اگر یکی را کنار می‌گذاشتیم مجموع بقیه به ۲ قابل قسمت می‌شد. حال فرض می‌کنیم که α_k کوچکترین این اعداد باشد پس اعداد $\alpha_1 - \alpha_k$، $\alpha_2 - \alpha_k$، …، $\alpha_n - \alpha_k$ نیز دارای این خاصیت α_iها هستند. حال فرض می‌کنم که $\alpha_i - \alpha_k = 4\gamma_i^{m_i}$ که γ_iها فرد هستند آنگاه همه $\alpha_i - \alpha_k$ را به 2^p تقسیم می‌کنیم. (p کوچکترین عدد m_iها است): بنابراین در بین اعداد $\frac{\alpha_1 - \alpha_k}{2^p}$، …، $\frac{\alpha_n - \alpha_k}{2^p}$ یك عدد فرد و یك عدد زوج (که همان صفر است) ظاهر می‌گردد که غیر ممکن است مگر اینکه به ازاء هر i $\alpha_i = \alpha_k$.

فهرست عناوین

نامه‌ها

برادر شهریار ابراهیمی ــ دانش‌آموز ــ تهران

از ارسال چند مسأله با حل تشکر می‌کنیم. مسأله اول شما بدون استفاده از قضیه استوارت و فقط با استفاده از رابطهٔ بین میانه و اضلاع بسادگی ثابت می‌شود. امیدواریم که موفق باشید.

برادر صدرالدین ابوترابی ــ دانش‌آموز ــ تهران

از ارسال چند مسأله با حل تشکر می‌کنیم، متأسفانه حل ارسالی شما برای مسأله ۶ المپیاد استرالیا درست نیست. زیرا از رابطهٔ $d^2a^2 + d^2b^2 - kd^2ab = kr^2a^2 + s^2b^2k + 2rskab$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $kr^2 = d^2$، ... بقیه مسائل به بخش مسایل ارجاع گردید.

برادر گلپرور روزبهانی ــ دانش‌آموز ــ تهران، برادر فرهاد مقدم سلیمی ــ دانش‌آموز ــ تهران

از ارسال راه حل خیلی ساده برای مسأله ۴ ششمین مسابقات ریاضی تشکر می‌نماییم. حال صورت این مسأله را با راه حل شما می‌آوریم: معادله سیاله $\sqrt{mnpq} = 49(q!) + 50\cdot p! + (n-8)^2(n!) + (m-9)^2(m!)$ را حل کنید. همواره $\sqrt{mnpq}\,99 \leqslant qq$ و از طرفی $99 \geqslant 49(q!) + 50(p!)$ پس $\sqrt{mnpq} = 99$. لازم به ذکر است که عده‌ای دیگر از خوانندگان نیز این راه حل را پیشنهاد کرده بودند. از تذکر شما در مورد این مسأله تشکر می‌کنیم. بطوری که بارها و بارها تذکر داده‌ایم تا به حال حدس فرما ثابت نشده است.

برادر داریوش افتخارپور ــ دانش آموز ــ تهران، برادر فواد عظیمی ــ دیپلم ریاضی ــ بندر انزلی، برادر مهدی امینی ــ دانش‌آموز ــ تهران

با عرض سلام و ضمن تشکر از شما، بدینوسیله جواب سؤالات شما را می‌آوریم:

۱ ــ اثبات فرمول $e^{\pi i} = -1$ بعد از تعریف دقیق $e^z\ (= \Sigma \frac{z^n}{n!})$ امکانپذیر است که معمولاً در ریاضیات عمومی دانشگاه ثابت می‌شود. ۲ ــ محیط بیضی را می‌توان با یک انتگرال بیان کرد ولی این انتگرال را نمی‌توان به طور دقیق حساب کرد به عبارت دیگر تابع اولیه تابع زیر علامت انتگرال قابل محاسبه نیست. ۳ ــ مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین با اضلاع صحیح وجود ندارد. از ارسال حل مسائل ۱۸ تشکر می‌کنیم.

برادر محمد ایزدی ــ دانش‌آموز ــ تهران

ضمن عرض سلام متقابل در مورد سؤالات شما، دوره‌های کارشناسی ارشد و دکترای ریاضی در داخل کشور وجود دارد. تعداد تقریبی پذیرفته‌شدگان دورهٔ کارشناسی ارشد ریاضی سالیانه حدود هشتاد نفر و تعداد تقریبی پذیرفته‌شدگان دورهٔ دکترای ریاضی سالیانه حدود بیست نفر است. ادامهٔ تحصیل در خارج از کشور، بعد از دوره‌های کارشناسی یا کارشناسی ارشد از طریق آزمون اعزام به خارج انجام می‌گیرد.

برادر فرشید طلوعی ــ دانش‌آموز ــ تهران

ضمن تشکر از ابراز قدرانی شما نسبت به مجله، به اطلاع شما می‌رسانیم که قبلاً در مورد آنالیز ترکیبی و روش حل معادلات و اعداد مختلط مقالاتی در مجله درج شده است. عبارت $\frac{\infty}{\infty}$ یک صورت از صور مبهم است و معنی آن این است که اگر f و g دو تابع باشند و در نقطه a حدود f و g برابر ∞ باشد آنگاه $\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ صورت $\frac{\infty}{\infty}$ است. ممکن است این حد موجود باشد یا موجود نباشد.

برادر داود فرشی ــ دانش‌آموز ــ تهران، برادر حمید حمادی ــ دانش‌آموز ــ اهواز

مسائل ارسالی شما در شماره ۲ ریاضیدان جوان حل شده است. امیدواریم که موفق باشید.

برادر محمد رضا پور معصوم ــ دانش‌آموز ــ تهران

مسائل المپیادهای اخیر در شماره‌های مختلف رشد آموزش ریاضی چاپ شده است. ترجمه کتاب مسائل المپیادهای گذشته اخیراً از طرف انتشارات فاطمی منتشر شده است.

برادر حمیدرضا سلطانزاده ــ شوش دانیال، برادر داوید ربیب ــ دانش‌آموز ــ تهران

نشریه ریاضیدان جوان از طرف گروه ریاضی به تعداد محدودی تکثیر و به مناطق آموزش و پرورش ارسال می‌شود. جواب سؤالات ۲ تا ۶ را می‌توانید از شماره‌های مختلف رشد پیدا کنید زیرا این مجلات قبلاً معرفی شده‌است. نشریات انجمن ریاضی ایران عبارتند از: بولتن، فرهنگ و اندیشه و خبرنامه که اولی مجله‌ای است علمی تحقیقی، دومی علمی توصیفی و سومی خبرنامه انجمن ریاضی است.

برادر سیدعلی قنادیان ــ دانش‌آموز ــ اصفهان

از ارسال مسأله ۶ ششمین مسابقات استانی تشکر می‌کنیم. امیدواریم که موفق باشید.

خواهر عاطفه شاهمرادی ــ دانشجو رشته ریاضی کاربردی ــ مشهد

با عرض سلام متقابل و ضمن تشکر از ارسال مقاله‌ای تحت عنوان «e متعالی است» باید به اطلاع شما برسانیم که این مقاله از سطح مجله رشد بالاتر است. عین مقاله عودت داده شده است.

برادر مجید وطنی‌باف ــ دانش‌آموز ــ کاشمر

با عرض سلام متقابل، گر چه مسأله ارسالی شما بدون ذکر مرجع ارسال شده است ولی چون صورت جالبی دارد جهت اطلاع خوانندگان درج می‌گردد: در مثلث غیر مشخص ABC قرینه‌های نقاط B و C را نسبت به A بترتیب A' و A'' می‌نامیم در مورد رئوس B و C نیز چنین عمل می‌کنیم. از A' به C' و از C' به B' و از B' به A' وصل می‌کنیم تا بترتیب CC'' را در M و BB'' را در r و AA'' را در P قطع کند. از A'' به B'' و از C'' به B'' و از B''، به A'' وصل کرده تا بترتیب AA' را در N و CC' را در k و BB' را در q قطع کند از M به r وصل کرده تا KC را در O قطع کند، ثابت کنید $OP = \frac{7}{5} AC$.

برادر بهرنگ نوحی ــ دانش‌آموز ــ تهران

از ارسال راه‌حل چند مسأله از مسابقات داخلی تشکر می‌کنیم. متأسفانه راه حل دیگر مسأله ششم المپیاد استرالیا فعلاًدر دسترس نیست.

برادر علیرضا عظیمی ــ دانش‌آموز ــ تهران

استاد غیور با رسم دایره‌های محاطی داخلی و خارجی راه حلی خیلی ساده برای مسأله ارسالی شما ارائه داده‌اند.

برادر علی خانی گزان بند ــ دانشجو ــ تبریز

با عرض سلام متقابل، برای ما معلوم نیست که منشأ مسأله‌ای را که مطرح کرده‌اید چیست؟ آیا ضمن حل یک مسأله در نظریه اعداد با چنین موضوعی مواجه نشده‌اید یا اینکه این مسأله دارای موارد استعمال است. از نظر ما طرح مستقل این مسأله مفید فایده نیست.

برادر مجیدرضا ناصح ــ دانشجو ــ مشهد

با عرض سلام متقابل و آرزوی موفقیت برای شما، بهتر است که فرمولهای خود را با برهان دقیق ارسال کنید تا مورد بررسی قرار گیرد. مسائل ارسالی شما به بخش مسائل ارجاع گردید.

برادر سید سعید گلباغی ــ دانش‌آموز ــ رشت، برادر سید ابوطالب گلباغی ــ دانش‌آموز ــ رشت

انتگرالهای نامعین $\int x^x dx$ و $\int \sin(\sin x)\, dx$ را نمی‌توان محاسبه کرد. انتگرالهای ۱ تا ۴ را می‌توان در بعضی از حالات پیدا کرد. در این مورد می‌توانید به کتابهای جدول انتگرالهای نامعین مراجعه کنید. از ارسال چند مسأله با حل تشکر می‌کنیم در مورد سؤال شما در قسمت ب نامه‌تان، بطوری که می‌دانید هر سال دو مسابقه استانی و نهایی برای انتخاب شش نفر دانش‌آموز جهت شرکت در المپیاد بین‌المللی ریاضی برگزار می‌شود.

برادر مهدی مهدی‌پور ــ دانش‌آموز ــ نیشابور

از ابراز محبت شما نسبت به مجله صمیمانه تشکر می‌نماییم. مسائل ارسالی شما به بخش مسائل ارجاع گردید. از ارسال راه حل درست مسأله ۲۰ شماره ۲۰ و ۱۹ تشکر می‌نمائیم.

برادر جعفری ــ دانش‌آموز ــ بندر انزلی

در مورد دریافت مجلات نشر ریاضی و مجله ماهنامه آمریکا در شماره‌های گذشته رشد توضیحات لازم داده شده است اما در مورد سؤالات شما، دایره آپولونیوس مکان هندسی نقاطی است که نسبت فواصل آن از دو نقطه مساوی عدد معلومی باشد $\frac{MA}{MB} = k$ مسائل ۲ و ۳ به بخش مسائل ارجاع گردید. در مورد مسأله‌ها منظور از زاویه میانه چیست؟ در مورد سؤال ۵ پارادوکس «هر مثلث متساوی‌الساقین است» به اطلاع شما می‌رسانیم که این موضوع در کتابهای هندسه بحث می‌شود.

برادر مسعود ساروی ــ دانشکده علوم دریایی نوشهر ــ مازندران

بطوری که می‌دانید تکنیک انتگرالهای جزء به جزء در اکثر کتابهای ریاضی عمومی مورد بحث قرار می‌گیرد. مقالهٔ قانون بخشی برای حاصلضرب برداری برای درج در مجله مفید تشخیص داده نشد.

برادر نادرعلی پور فانید ــ دانش‌آموز ــ تبریز، برادر سلطان پناه ــ خرم‌آباد

در حال حاضر شماره‌های اولیه رشد ریاضی موجود نیستند. از تذکر شما در مورد غلط چاپی در راه حل دوم مسأله پروانه تشکر

می‌کنیم. در مورد ازدیاد تیراژ مجله، پیشنهاد شما را در هیأت تحریریه بررسی خواهیم کرد. از ارسال حل بعضی از مسائل شماره ۱۸ تشکر می‌نمائیم.

برادر محمد داوری اردکانی ـ دبیر یزد

ضمن عرض سلام متقابل و آرزوی موفقیت برای جنابعالی و امید برای همکاری بیشتر با مجله، جناب غیور اظهار داشتند که معلومات مسأله مسابقه مندرج در شمار ۱۸ کافی است یعنی، در واقع، برای رسم چهار ضلعی وجود ۵ شرط مستقل ضرورت دارد.

برادر نصرا... حمید زاده ـ دانش‌آموز ـ تهران، برادر آرش صباحی فرد ـ دانش‌آموز ـ تهران

برادر گرامی، نامهٔ مشروح شما را دقیقاً مطالعه کردیم. بعضی از پیشنهادات شما را در هیأت تحریریه مطرح خواهیم کرد. باید بدانید که محتوای یک مجله ریاضی متفاوت از محتوای یک کتاب درسی است. این مجله دارای اهدافی است که عموماً در هر شماره ذکر می‌شود. در مورد توابع جزء صحیح می‌توانید به کتاب تئوری اعداد تألیف غلامحسین مصاحب مراجعه کنید.

برادر محمد حسین زمروی ـ دانش‌آموز ـ باختران

از ارسال چند مسأله با حلّ تشکر می‌کنیم. بطوری که می‌دانید بعضی از این مسائل در جاهای مختلف بحث شده است.

برادر نوید شهروزی ـ دانش‌آموز ـ کرج

جوابی که برای مسأله شماره ۶ المپیاد و استرالیا ذکر کرده‌اید فقط یک حالت خاصّ $a = b^3$ را به دست می‌دهد لازم است به اطلاع شما برسد که در استرالیا برای این جواب فقط یک نمره از هفت نمره در نظر گرفته شده بود.

برادر غلامرضا کریم پور ـ مازندران

همکار ارجمند، بطوری که ملاحظه کرده‌اید رابطهٔ ارسالی شما در مورد توابع محدب جزو یکی از نتایج مقالهٔ مربوط به توابع محدب در شماره ۱۷ است که البته شرط کافی در آنجا بیان نشده است. امّا رابطهٔ معادلی که در آن مقاله ذکر شده است فواید عدیده‌ای دارد که در ادامهٔ مقاله آمده است. در مسأله حتماً باید x_iها نامنفی باشند. مسائل ۲ و ۳، ۴ کلاسیک هستند. در مسأله‌ها بیان کرده‌اید: کاربرد مشتق برای اثبات ۱ ـ ۱ بودن تابع، ولی در عمل هیچ استفاده‌ای نکرده‌اید. مسأله ۵ مسأله‌ای از کتاب آنالیز ریاضی رودین است که در شماره‌های قبلی رشد مطرح و حلّ شده است.

برادر محمد مهاجرانی ـ تهران

بطوری که خودتان هم توجه کرده‌اید در بخش نامه‌های شماره ۲۰، ۱۹ نوشته‌ایم که نابرابری $\sin^n x + \cos^n x < 1$ به ازاء $x = 0$ درست نیست.

خواهر ط. ش ـ دانش‌آموز ـ رشت

بهترین رمز موفقیت، استواری و استقامت و پشتکار است. شما ابتدا علاقه خود به ریاضیات را برخودتان محرز کنید و سپس در راه این هدف پشتکار به خرج بدهید و از مشکلات و کمبود نمره نهراسید، امیدواریم که موفق شوید در ضمن بهتر است بعضی از مشکلات آموزشی خود را با دبیران دلسوزتان مطرح، و از آنان استمداد کنید.

برادر کاظم قنبری ـ دانشجو ـ تبریز

بطوری که می‌دانید مجله رشد از انتشارات آموزش و پرورش است و درج سؤالات کنکور کارشناسی ارشد در این مجله مقدر نیست. می‌توانید این سؤالات را از گروه ریاضی دانشگاه تبریز دریافت کنید، مسأله ارسالی شما گرچه بدون مرجع است ولی بدینوسیله در اختیار خوانندگان قرار می‌گیرد: مطلوبست تعین همه توابع مشتقپذیر مانند تعیین f از R به R که در رابطهٔ $f'of = fof'$ صدق می‌کنند

برادر سید جواد موسوی ـ گرگان

متأسفانه راه حلّ ارسالی شما برای مسأله ۶ المپیاد استرالیا درست نیست. معلوم نیست چگونه فرض کرده‌اید که $a = b^x$ که در آن $x \in R$.

برادر عباس موسوی نژاد ـ دبیر ـ قم

از ارسال چند مسأله با راه حلهای صحیح تشکر می‌کنیم. امیدواریم که موفق باشید مسائل شما به بخش مسائل ارجاع گردید.

برادر یعقوب شریفی ـ دانشجو ـ تهران

بهتر است مرجع مقالات ذکر شود. معمولاً براهین قضیه نیوستن هولم مقدماتی هستند. در کتابهای نظریه اعداد این قضیه را در

مبحث همنهشتیها چند جمله‌ای بـه هنگ یک عدد اوّل بـا استفـاده از قضیه لاگرانژ به اثبات می‌رسانند (نظریه تحلیلی اعداد، تـام اپـوستل) همچنین پیوستن هولم ثابت کرده است که صورتهای ـ + ۰۰۰ + ـ + ۱ و ـــ + ... + ـ + ۱ بترتیب بـر p و $P^{۲}$ بـخشپذیرند $(p>۳)$ در ایـن مورد می‌توانید به کتاب تاریخ نظریه اعداد دیکسن مراجعه کنید.

برادر هاشم سازگار ــ مشهد

شما با فرض ــ $m\geqslant n>e$ ثابت کرده‌اید که:

$$\pi(mn)>\pi(m)\pi(n)$$

در صورتی که قضیه ایشیکارا، ۱۹۳۸ همین حکم را بـا فـرض $m>۶$، $n>۲$ و $m>n$ ثابت کرده است (غلامحسین مصاحـب، تئوری مـقدماتی اعداد). در واقع شما فرض کرده‌اید که ۲۱۶۵ ≈ $m\geqslant n>e$. در مـورد قضیهٔ دوم (قضیه رایت) شما بـه جـای عدد ۲ عدد طبیعی P را قـرار داده‌اید که در واقع تعمیمی از قضیه رایت است ولی چندان مفید فـایده نیست.

برادر کورش محمدی ــ دانش‌آموز ــ مسجد سلیمان

با عرض سلام و آرزوی موفقیت، در حالت $(C_{۱,۲,۲,۳})$، x^n+y^n را به ازاء nهای زوج تجزیه کرده‌اید! کـه مسلماً نـادرست است. بـاید بـه اطلاّع شما برسانیم که اگر در آینه بُرهانی بـر حـدس فـرما پـیدا بشود مسلماً از ریاضیات خیلی پیشرفته مدد خواهد جست.

برادر پیام ناطر طیوب ــ دانش‌آموز ــ شیراز

از ارسال چند مسأله با حلّ تشکر می‌کـنیم. قـوه ابـتکار و پشتکار شما قابل تحسین است. امّا بهتر است پایه‌های ریاضی خـود را بـیشتر تقویت کنید.

خواهر نادیا حبیبی ــ دانش‌آموز ــ تهران

مسائل ارسالی شما به بخش مسائل ارجاع گـردید. از ارسال حـلّ چند مسأله از شماره ۲۰، ۱۹ تشکر می‌کنیم. امیدواریم که موفق باشید.

برادر سعید مقصودی ــ دانش‌آموز ــ اصفهان

ابتدا باید هدف خود را مشخص کـرده و در راه آن کـوشش کـنید. برای تقویت بنیه ریاضی می‌توانید از کتابها و مـجلات مثلاً مـجله رشد استفاده کنید. در مورد سؤالات خود مـی‌تـوانید مـقالات «ریـاضـیات چیست» را به دقت بخوانید. باید پاسخ این نوع سؤالات را به طور غیر مستقیم از لابلای مباحث ریاضی دریافت کرد.

برادر سیامک فیروزیان ــ دبیر ــ بابل

با عرض سلام متقابل از اینکه ما را مورد لطف و مـحبت قـرار داده‌اید صمیمانه تشکر می‌کنیم. همکارگرامی پـیشنهادات ارزنـده شما در هیأت تحریریه مطرح خواهد شد، ولی باید توجه داشت که این مجله اهداف مختلفی را دنبال می‌کند و از ایـن رو بـاید مـقالات مـتنوعی در سطوح مختلف و متناسب با سطح مـعلومان خـوانندگان مـختلف داشته باشد. امیدواریم که موفق باشید

برادر محمود رشید پور ــ دانش‌آموز ــ تهران

بهتر است که مقالات خود را با ذکـر مـرجع ارسال داریـد. بـه خاطر گلایه از تصحیح اوراق نیمه نهایی مسابـقات دانش‌آمـوزی سال گذشته، این نامه به کمیته المپیاد ارجـاع مـی‌شود تـا در صورت امکان ورقه شما را مجدداً بررسی نمایند.

برادر مهدی خدمتی ــ دانش‌آموز ــ آغاجاری

از ارسال حل مسائل شماره ۱۸ تشکر می‌کنیم. امـیدواریم کـه موفق باشید. امیدواریم که انتشار مجله کماکان ادامه داشته باشد.

برادر علی ربیعی ــ دانش‌آموز

ضمن تشکر از ابراز علاقـه شما نسبت بـه مـجله، راه حـلّ ارسالی شما در مورد اثبات تساوی دو زاویه در مثلثی کـه نـیمسازهای داخلی نظیر آنها برابر باشد کاملاً درست است. راه حلهای دیگری نـیز در این زمینه وجود دارد.

برادر بیژن صفوی ــ دانش‌آموز ــ آبدانان

از ابراز محبت شما نسبت به مجله تشکر می‌کنیم. امیدواریم که موفق باشید

برادر علی زاهدی ــ دانش‌آموز ــ تهران، برادر امیر عطا صهبایـی ــ دانش‌آموز ــ مشهد، برادر محمد رضا زرین ــ دانش‌آموز ــ تهران

از ارسال حلّ چند مسأله از شماره ۱۸ و مسابـقه دانش‌آمـوزی تشکر می‌نمائیم. هنوز تصمیمی در مورد چاپ شماره‌های نایاب گـرفته

نشده است.

برادر آرش عفیفی ــ دانش‌آموز ــ رشت، برادر کوروش عباچی، برادر مجید شعبانی، برادر فریبرز ساجد ــ دانش‌آموز ــ تهران

از ارسال حلّ چند مسأله از شما ۲۰ ــ ۱۹ و نیز ارسال چند مسأله با حلّ تشکر می‌نمائیم. این مسائل به بخش مسائل ارجاع گردید.

برادر عارف شاه منصوری ــ دانش‌آموز ــ رامسر

تعریف ذوذنقه در کتاب چهارم صحیح است. از راه‌حل مسأله‌ای که فرستاده‌اید تشکر می‌کنیم.

برادر یوسف احمدی ــ دبیر ریاضی، محمد امینی فدائیان ــ دانش‌آموز ــ بابلسر، برادر مرتضی براری از ارسال حل مسائل شماره ۱۸ تشکر می‌کنیم. امیدواریم که بیش از پیش با ما همکاری کنید. موفق باشید.

برادر علی دارمی ــ اهواز، برادر محمدعلی مهدی‌آبادی ــ دانش‌آموز ــ بیرجند، برادر علیرضا حسنی ــ دانش‌آموز ــ کنگاور از ارسال چند مساله تشکر می‌نمائیم. این مسائل به بخش مسائل ارجاع گردید.

برادر محمدرضا یزدانی، دانش‌آموز ــ تهران، برادر کیوانی بابائی ــ دانش‌آموز ــ شهرکرد، برادر پیمان‌کسایی ــ دانش‌آموز ــ تهران

از ارسال راه‌حل برای مسائل مسابقه دانش‌آموزی و المپیاد و نیز از ارسال چند مسأله تشکر می‌کنیم امیدواریم که موفق باشید.

برادر حسین راغب ــ دانش‌آموز ــ همدان، برادر غفارزاده نمازی ــ دانش‌آموز ــ زنجان، برادر حسن تیغ‌زن ــ دانش‌آموز عجب‌شیر

از ابراز لطف و محبت شما نسبت به مجله تشکر می‌کنیم. امیدوارم که شایسته این همه لطف و محبت باشیم. از ارسال چند مسأله و همچنین ارسال حلّ چند مسأله تشکر می‌نمائیم.

برادر محمدرضا عاقبتی ــ دانش‌آموز ــ زاهدان، خواهر معصومه دهقانی ــ دانش‌آموز ــ زاهدان،

از ارسال راه حل مسائل مسابقه دانش‌آموزی تشکر می‌کنیم

برادر مهرداد شمسی ــ دانش‌آموز ــ اصفهان، خواهر ویدا وکیل التجار ــ دانشجو ــ تهران

از همکاری شما با مجله تشکر و قدردانی می‌شود. امیدواریم که همیشه موفق باشید

دانش‌آموز دبیرستان شهید بهشتی گالیکش

ابراز لطف و محبت شما موجب دلگرمی ما برای ادامه این راه است. امیدواریم با راهنمائیهای دبیر ارزنده خود آقای بابکی همواره موفق باشید.

ذیلاً اسامی کلیه عزیزانی را که با ما همکاری صمیمانه داشته و حل مسائل شماره ۲۰-۱۹ را فرستاده با ذکر شماره مسائل می‌آوریم، امیدواریم که همواره موفق باشند و به همکاری خود با مجله ادامه دهند. همکاری شما پشتیبان راه ماست.

رضا صانعی فرد، دانش‌آموز، تهران، ۱، ۲، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۱، ۱۴، ۱۵
قادر شکراللهی مقدم، دانشجو، تهران، ۱، ۲، ۶، ۷
شهریار ابراهیمی، دانش‌آموز، تهران، ۱، ۲، ۸، ۹، ۱۱، ۲۰
ابوالحسن اسبکیان، دانش‌آموز، بابل، ۱، ۲، ۷، ۹
محمدرضا زرین، دانش‌آموز، تهران، ۱، ۲، ۸
پیمان سنایی، دانش‌آموز، اصفهان، ۱۳
مهدی جهانبخش، دانش‌آموز، تهران، ۷، ۱۱
طهمور آزمکان، تهران۷، ۱۱
طهمور آزمکان، تهران ۱، ۲، ۷، ۸، ۹، ۱۵
سپیده علی‌اصغری، دانش‌آموز، بندر انزلی، ۲
محمّدرضا مختارپور، ۲، ۴، ۷، ۸، ۱۱
هادی هادی زاده، نجف‌آباد، ۱
غضنفر فدوی، دانش‌آمو، گرگان، ۱
افشین فیضی، دانش‌آموز، استارا، ۲، ۶، ۹، ۱۲
محمدجابر برّان، دانش‌آموز، تبریز، ۱، ۲، ۶، ۷، ۹، ۱۱، ۱۲، ۱۷
محمود سخایی، آمل، ۱، ۲، ۶، ۷، ۹، ۱۱، ۱۲، ۱۷
فاضل قربانعلیان ، دانش‌آموز، دماوند، ۱، ۹، ۲۰
رضا طباطبایی، دانش‌آموز، قم، ۵، ۱۳
علی‌آذربر، دانش‌آموز، تهران ۱، ۲، ۳، ۱۱
وحید پور ویس، دانش‌آموز، بهبهان، ۱، ۹، ۱۱
بابک قالبساز جدّی، تبریز، ۱، ۹، ۱۱، ۱۲
علی محمد بنان زاده، دانش‌آموز، شیراز، ۲
داریوش سعیدکیا، دانش‌آموز، شیراز ۱، ۲، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۵
احمدرضا شیرزاد، دانش‌آموز، شیراز ۱، ۲، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۵
فرشید شعبانی مطلق، رشت، ۱، ۲، ۶، ۷، ۹، ۱۲
آرمین جهانگیری، دانش‌آموز، تهران، مسائل مسابقه دانش‌آموزی

اخبار ریاضی

* همانطور که در گزارش آمده است دانش‌آموزان شرکت کننده درسی امین المپیاد جهانی ریاضی در آلمان غربی از ایران ردهٔ چهاردهم را بدست آوردند. برادران محمد جابر برآن و مهدی رضائی مدالهای نقره و محمد علی خجسته‌پور و امیر عباس عابدی و شهریار مختاری شرقی مدالهای برنز و کوروش علیانی دیپلم افتخار و مجموعاً با ۱۴۷ امتیاز برای کشور خود افتخار آفریدند.

* دانشگاه صنعتی اصفهان طی نامه‌ای که به وزیر آموزش و پرورش نوشته است و رونوشت آنرا به دفتر مجله ارسال داشته است از دانش‌آموزان شرکت کننده در المپیاد جهانی آلمان غربی دعوت به عمل آورده است که در صورت انتخاب رشته از دانشگاه صنعتی اصفهان هرگونه امکانات رفاهی در اختیار آنان قرار می‌دهد.

* شهید علیرضا حمزه‌لو معلم و دانشجوی ریاضی که گوشه‌ای از زندگی‌اش در صفحات ۱۳ الی ۱۵ رشد معلم شماره ۳ آذرماه سال هفتم (۶۸ ـ ۶۷) آمده است جزوات و ترجمه‌هایی بشرح زیر از خود به یادگار گذارده است:

۱ ـ مجموعه مسائل ریاضی نوشته ا ـ ل ـ بریلیکو (ترجمه)

۲ ـ مجموعه مسائل و تستهای ریاضی در دو جلد

۳ ـ قوانین و مسائل از گزاره‌ها، سورها و مجموعه‌ها

۴ ـ معادلات ـ دستگاههای معادلات.

۵ ـ قضایا و مسائل هندسه تحلیلی مسطحه و فضائی نوشته جوزف ـ اچ ـ کنیدن (ترجمه)

۶ ـ معادلات ـ نا معادلات ـ دستگاهای مثلثاتی نوشته یاکولف (ترجمه)

۷ ـ معادلات ـ دستگاهها و نامعالات نمایی و لگار یتمی نوشته یا کولف (ترجمه)

* سازمان پژوهشهای علمی و صنعتی ایران وابسته به وزارت فرهنگ و آموزش عالی قصد دارد سمیناری برای نشریات علمی کشور در جهت هماهنگی مجلات علمی و رفع مشکلات مشابه آنها در خردادماه سال ۱۳۶۹ برگزار نماید. علاقمندان به همکاری در سمینار و تهیه مقالات می‌توانند با تلفن ۷ ـ ۸۲۸۰۵۱ سازمان پژوهشهای علمی و صنعتی ایران تماس حاصل نمایند.

*دومین نشریه ریاضی از گروه آموزش ریاضی استان یزد منتشر شد در این نشریه از ضیاء اسلامیان، فرهاد حاج شیر محمدی، عباسعلی میرجلیلی، محمد علی سالور، مطالبی در مورد ریاضیات چیست؟ آشنایی با رشته مهندسی شیمی، تابع جزء صحیح،نکاتی‌از تست مثلثات، انتگرالهای‌توابع کسری در بیست سئوال، مشتق و تابع اولیه رابطه‌های ضمنی ارائه شده است.

*سمیناری تحت عنوان «جبر و آنالیز» از ۱۱الی ۱۵شهریور ماه سال جاری در تبریز دانشگاه تبریز تشکیل می‌شود.

۱۶/۳/۷۱

اطلاعیه

در بارهٔ نشریات رشد آموزش تخصصی

مجلات رشد آموزش مواد درسی مدارس کشور که بمنظور ارتقاء سطح دانش معلمان و ایجاد ارتباط متقابل میان صاحبنظران، معلمان و دانشجویان با برنامه‌ریزان امور درسی از سوی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش هر سه ماه یکبار ــ چهار شماره در سال ــ منتشر می‌شود در حال حاضر عبارتند از:

۱ ــ آموزش ریاضی ۲۲
۲ ــ آموزش شیمی ۲۰
۳ ــ آموزش جغرافیا ۱۸
۴ ــ آموزش زیست شناسی ۱۶
۵ ــ آموزش ادب فارسی ۱۶
۶ ــ آموزش زبان ۱۶
۷ ــ آموزش زمین‌شناسی ۱۶
۸ ــ آموزش فیزیک ۱۴
۹ ــ آموزش معارف اسلامی ۴

دبیران، دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر علاقمندان به اشتراک این مجلات می‌توانند جهت دریافت چهار مجله در سال مبلغ ۴۰۰ ریال به حساب ۹۲۹ خزانه بانک مرکزی ــ قابل پرداخت در کلیه شعب بانک ملی ــ واریز و فیش آن را همراه با فرم تکمیل شده زیر به نشانی تهران، جادّه آبعلی، خیابان سازمان آب بیست متری خورشید مرکز توزیع انتشارات کمک آموزشی کد پستی ۱۶۵۹۸ ــ تلفن ۷۸۵۱۱۰ ــ ارسال دارند. ضمناً: معلمان، کارشناسان، مدیران، پژوهشگران و سایر علاقمندان به امور تعلیم و تربیت جهت آگاهی بیشتر از یافته‌های صاحبنظران می‌توانند با پرداخت مبلغ ۸۰۰ ریال در هر سال ۴ جلد **فصلنامه تعلیم و تربیت**: دریافت نمایند.

قابل توجه:

* شماره آخرین مجله منتشر شده در سمت چپ عنوان مجله مشخص گردیده است در صورت نیاز به مجلات شماره‌های پیشین درخواست خود را به آدرس مرکز توزیع ارسال تا چنانچه موجود باشد با پرداخت وجه مربوطه مجلات درخواستی را دریافت نمائید.

مجلات رشدتخصصی در مراکزاستان‌درکتابفروشیهای‌زیر و سایرشهرستانهادرفروشگاههای معتبرمطبوعات‌بصورت‌فروش‌آزادعرضه‌می‌شود

تهران: کتابفروشی شهید سیدکاظم موسوی ــ اوّل‌خیابان ایرانشهر شمالی

اهواز: کتابفروشی ایرانپور زیتون‌کارمندی خیابان کمیل بین زاویه وزهره پلاک ۲۰

اصفهان: کتابفروشی مهرگان چهارباغ ابتدای سیدعلی‌خان

ارومیه: کتابفروشی زینالپورنمایندگی وخبرنگاری روزنامه

اراک: کتابفروشی گنج‌دانش بازارچه امیرکبیر

بندرعباس: کتابفروشی مالوک‌خیابان‌سیدجمال‌الدین‌اسدآبادی

باختران: کتابفروشی دانشمند خیابان مدرس مقابل پارکینگ شهرداری

خرم‌آباد: کتابفروشی آسیا خیابان شهدا شرقی

رشت: کتابفروشی فرهنگستان خیابان نامجوجنب‌دانشگاه

زنجان: کتابفروشی شهید بهشتی خیابان آیت‌ا... طالقانی

سنندج: کتابفروشی شهریار خیابان فردوسی

ساری: شرکت ملزومات و معارف خیابان انقلاب روبروی اداره برق داخل کوچه

شیراز: پیام قرآن میدان شهدا جنب اداره‌آموزش‌وپرورش مرکز فرهنگی

کرمان: فرهنگ‌سرای زمین پارک مطهری

مشهد: انتشارات استان قدس رضوی خیابان امام خمینی روبروی باغ ملی

یاسوج: کتابفروشی فرهنگ جنب سینما دنا خیابان شهید هرمزپور.

* **دانشجویان مراکز تربیت معلم می‌توانند با ارسال فتوکپی کارت تحصیلی خود از ۵۰٪ تخفیف برخوردار شوند.**

فرم اشتراک مجلات رشد تخصصی

اینجانب با ارسال فیش واریز مبلغ ۴۰۰ ریال، متقاضی اشتراک یکسالهٔ مجلهٔ رشد آموزش هستم.

نشانی دقیق متقاضی: استان شهرستان خیابان

کوچهٔ پلاک کُد پستی تلفن

Contents

Roshd, Magazine of Mathematical, Vol VI No. 22 Summer 1989 Mathematics Section, **274 BLDG – NO. 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave., Tehran –** Iran
A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.

رشد آموزش معارف اسلامی
رشد آموزش ریاضی
فصلنامه
تعلیم و تربیت
آموزش زیست‌شناسی
رشد آموزش زمین‌شناسی
آموزش شیمی
رشد آموزش جغرافیا

رشد آموزش فیزیک
رشد آموزش زبان