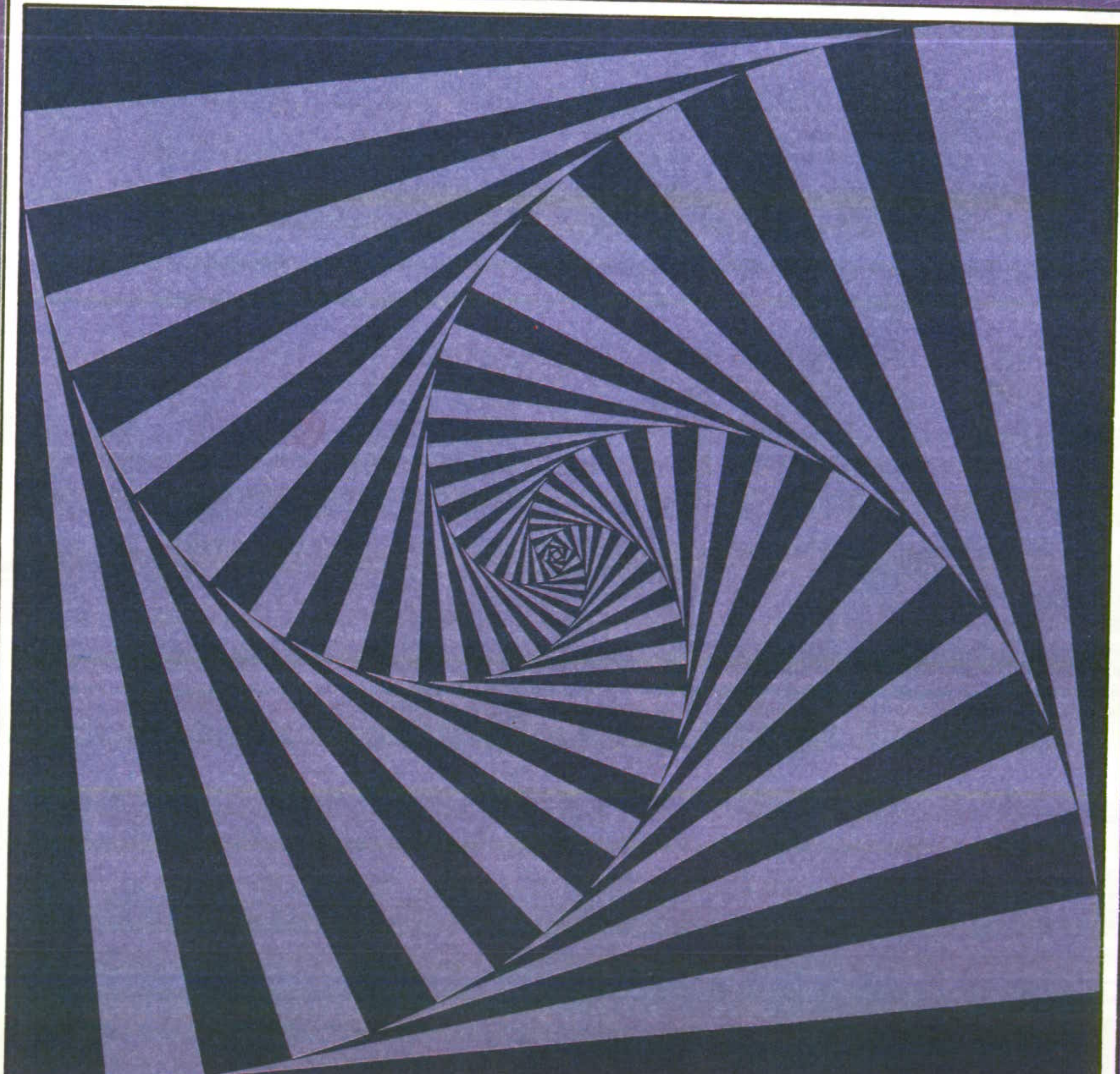
رشد آموزش ریاضی

سال پنجم پائیز و زمستان ۱۳۶۷ ـ شماره مسلسل ۲۰ ـ ۱۹

بها: ۲۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یکبار از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی منتشر می‌شود هدف از انتشار این مجله اعتلای دانش ریاضی دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلّم است. علاوه بر این ایجاد ارتباط متقابل بین معلّمین ریاضی و دفتر تحقیقات، به منظور تبادل تجارب، ارائه روشهای جدید آموزش ریاضی، معرفی جنبه‌های تاریخی، فلسفی، کاربردی ریاضیات در سطح پیش دانشگاهی است هیأت تحریریه از مشارکت و همکاری همهٔ علاقه‌مندان بویژه دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان در ارائه مقالاتی در زمینه‌های زیر استقبال می‌کند:

الف) آموزش ریاضی (طرح و بررسی آموزش ریاضی، بویژه آموزش ریاضی در دوره‌های پیش دانشگاهی).

ب) تاریخ ریاضی (مشتمل بر سیر تحول مفاهیم ریاضی، شرح و احوال ریاضیدانان و کارهای علمی آنها، بویژه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی).

ج) فلسفه ریاضی (تبیین مفاهیم ریاضی، ریاضیات چیست، بررسی مکاتب ریاضی بررسی ارتباط تاریخ و فلسفه ریاضی)

ریاضی کاربردی (مشتمل بر مباحثی در زمینه‌های آنالیز عددی، کامپیوتر و برنامه‌ریزی، تحقیقات و عملیات، آمار و احتمال).

د) سایر مباحث ریاضی (مشتمل بر مقالات مختلفی در زمینه‌های مختلف، ارائه راه‌حلهای مختلف برای مباحث ریاضی، ارائه مسائل نمونه).

رعایت نکات زیر در مورد مقالات ارسالی ضروری است:

۱) مقالات ارسالی باید در چهارچوب اهداف فوق و با سبکی مشابه با سبک مقالات چاپ شده در رشد ریاضی باشد و در سطحی عرضه شوند که ضمن داشتن محتوی مطلوب دارای کیفیت عرضه مطلوب هم باشند؛

۲) مقالات باید با خط خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) و به صورت یک سطر در میان و با در نظر گرفتن جای کافی در حاشیه تهیه شود و صفحات به طور دقیق شماره‌گذاری شود؛

۳) فهرست مراجع مقاله به طور کامل و در دو قسمت فارسی و خارجی و به ترتیب الفبایی و طبق استاندارد مقالات علمی درج شود؛

۴) مقالات ترجمه شده از زبانهای خارجی همراه با متن اصلی ارسال شود؛

۵) مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور به چاپ رسیده باشد؛

۶) رد یا قبول و حک و اصلاح و ویراستاری مقالات به عهدهٔ هیأت تحریریه است.

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

رشد آموزش ریاضی

سال پنجم ـ پاییز و زمستان ۱۳۶۷ ـ شمارهٔ مسلسل ۱۹ و ۲۰
نشریه گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی کتب درسی تلفن ۴ ــ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۵۲)

سردبیر : دکتر علیرضا مدقالچی
مدیر داخلی: سید محمدعلی بصام‌تبار
مدیر فنی هنری و تولید: حسین فرامرزی نیکنام
صفحه‌آرا : محمد پریسای

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مرکز تربیت معلم و سایر دانش‌پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. جهت ارتقاء کیفی آن نظرات ارزنده خود را به صندوق پستی تهران ۳۶۳ ــ ۱۵۸۵۵ ارسال فرمائید.

فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

علیرغم وعده‌ای که به خوانندگان محترم مجله در مورد انتشار چهار شماره در سال داده بودیم متأسفانه انتشار این شماره رشد ریاضی بیش از حدّ به تأخیر افتاد آنچه از دست ما بر می‌آید غیر از پوزش و عذرخواهی نمی‌تواند چیز دیگری باشد. در شماره‌های گذشته به بعضی از مشکلات اشاره کرده‌ایم قصد تکرار آنها را نداریم. احتمالاً خوانندگان عزیز تمام مسائل مربوط به انتشار مجله را به عهدهٔ هیأت تحریریه می‌دانند. شاید حق هم چنین باشد ولی باید توجه داشت که نه تنها هیأت تحریریه بلکه مسئولین سازمان هم نهایت سعی و کوشش خود را در جهت تسریع انتشار به کار می‌برند امّا وجود انتشارات و مجلات متنوع و عدم وجود نیروی خدماتی لازم برای اداره انتشار این تعداد وسیع مجلات مانع از نظم و ترتیب دقیق در انتشار این مجلات شده است. امید می‌رود که عنایت بیشتری نسبت به این مجله که به گواهی خوانندگان یکی از پربارترین و مفیدترین انتشارات سازمان پژوهش است مبذول گردد.

موضوع تأخیر را به یک سو می‌نهیم و به مسائل دیگری می‌پردازیم. گرچه عموماً عنوان این نوشتارها پیشگفتار است ولی در واقع به جای سرمقاله و سخن سردبیر است. جایگاهی است برای ارائه

بقیه در صفحه ۴۶

رشد آموزش ریاضی

سید محمدعلی بصام تبار

آموزش ریاضی را از درک عدد به وسیلهٔ کودک آغاز می‌کنیم. ادراک اعداد در کودک از کلّ به جزء واز تباین به تشابه انجام می‌گیرد. مطالعات بوهلر[1] نشان می‌دهند که کودک مجموعه عددی را پیش از خود اعداد ادراک می‌کند. چنانکه دردوسالگی می‌تواند مجموعه‌های دوگانه، سه‌گانه و چهارگانه را بفهمد وادراک اودرهمین حدّ است. بنابراین اگر به او چهار عدد پرتقال داده شود بعد، یکی از آنها را بردارند همینقدر درک می‌کند که سهمش کم شده و به جستجوی پرتقال گم شده می‌پردازد. کودک دراین ادراک خود شبیه بعضی حیوانات است با این تفاوت که دایرهٔ ادراک او برعکس حیوانات گسترش می‌یابد. چنانکه گربه وقتی سه بچّه می‌زاید اگر یکی از آنها را پنهان کنند، کاهش شمارهٔ بچّه‌هایش را ادراک می‌کند و پی جستجوی آن می‌رود در صورتی که اگر چهار بچه بزاید و یکی گم شود دیگر کاهش بچّه‌های خود را ادراک نمی‌کند. بنابه گفته جان لوبوک[2] هرگاه در لانهٔ پرنده، چهارتخم باشد و یکی را بردارند، مادر هیچگونه علامت تأثر واندوه نشان نمی‌دهد، لیکن اگر دویا بیشتر بردارند لانه را به علّت تأثر و ناراحتی ترک می‌گوید.

از تجارب لانگ[3] و ولش[4] چنین برمی‌آید که استعداد کودک به شناختن مجموعهٔ عددی بزرگ و کوچک، پیش از سه سالگی ظاهر می‌شود و می‌داند که مجموعهٔ مرکب از ده پرتقال، بزرگتر از مجموعهٔ دیگری است که پنج پرتقال دارد، یعنی او می‌تواند کم وزیاد را تشخیص دهد و زیاد را برای خود انتخاب کرده، کم را ترک کند. سپس میان سالهای پنج وشش می‌تواند شباهت مجموعه‌های برابر را دریابد وهمانندی موجود میان مجموعه‌های گوناگون را درک کند، چنانکه می‌تواند جلوی دوپرتقال، مقدار مساوی ومانند آنها یعنی دوپرتقال دیگر را قرار دهد (تناظر یک به یک).

بعد در اثر نضج ورشد، به درک تسلسل عددی قادر می‌شود. چنانکه ابتدا می‌تواند انگشتان خودرا بشمارد وسپس رشد می‌یابد و می‌تواند انگشتان دیگران را در شمردن به کار ببرد تا اینکه سرانجام به ادراک اعداد، بدون کمک گرفتن از انگشتان خود یا دیگران، قادر می‌شود.

میان سالهای پنج و نه سالگی می‌تواند چهارعمل اصلی حساب را به ترتیب جمع، تفریق، ضرب وتقسیم یاد بگیرد و غالباً عمل تقسیم را بعد از نه سالگی یاد می‌گیرد.

گزل[5] می‌گوید: «اساس یادگیری شمارش در کودکان، همانندی است، به همین سبب آموزش جمع باید از طریق اضافه کردن چیزهای همانند انجام گیرد». کودکان از لحاظ توانایی حساب کردن با یکدیگر اختلاف دارند و علّت آن، اختلاف در میزان هوش، تجارب واطلاعات قبلی است.

ادراک روابط. کودک بعد از آموختن نامهای اشیاء و کشف اینکه آنها چگونه ساخته می‌شوند وبا آنها چه می‌توان کرد، به درک و شناختن روابط آنها می‌پردازد. یادگیری روابط فاصله‌ای جلوعقب، پائین وبالا، قبل و بعد، معمولاً زودتر از پنج سالگی انجام نمی‌گیرد. کودک در آموختن روابط، ابتدا فاصله‌های اشیاء را درارتباط با خودش می‌شناسد، سپس به روابط موجود میان آنها متوجه می‌شود و سرانجام به تفکر از فاصله به صورت انتزاعی آغاز می‌کند.

از آزمایشهای هوشی چنین برمیآید که کودک فرقهای موجود بین اشیای محسوس را آسانتر از وجوه مشابه و مشترک آنها درک می‌کند، ولی بتدریج دراثر رشد وتکامل، این قدرت دراو پیدا می‌شود یعنی می‌تواند فرقهای اشیاء را تمیز دهد و از روی آنها وجوه مشابه را دریابد.

افکار کودک بین ۶ تا ۱۲ سالگی به تجارب عملی وی بستگی دارند ولی بعدها او می‌تواند تا حدی به تجرید و تعمیم بپردازد و از آنچه احساس می‌کند افکاری را منتزع نماید. تجرید به صورت کامل تقریباً بعد از دوران نوجوانی امکان دارد.

پس از ذکر این مقدمات به اهداف آموزش ریاضیات می‌پردازیم

ریاضیات به‌عنوان یک عامل اساسی ارتباط

ریاضیات می‌تواند برای توصیف، تفسیر، پیشگویی وتشریح کردن وبالاخره برای رساندن مقصود به کار رود. دلیل اصلی آموزش ریاضی، اهمیّت آن در تحلیل و تبادل اطلاعات ونظریات است. محاسبهٔ عددی و علائم جبری محض و غیره در درجهٔ دوم اهمیّت قرار دارد.

ریاضیات به عنوان ابزار قدرتمند

ابزاری مفید است که توانائی انجام کار را فراهم آورد، در غیراینصورت ممکن است انجام عمل را مشکل یا حتی غیرممکن سازد. ریاضیات چنین است. نمونه‌های متعددی در کلاسهای درسی، زندگی شغلی و به طورکلی درجامعه پیش می‌آید که این سئوال مطرح می‌شود: ریاضیات به عنوان ابزار کجا مورد استفاده قرار می‌گیرد؟ از این نقطه‌نظر، این خود ریاضی نیست که مهم است بلکه نتیجهٔ حاصل است که چیز مهمی است.

مهارتهایی چون اندازه گیری طول، بیان وقت، رسم نمودارها، ترسیم اشکال هندسی، حل یک معادله و... نهایتاً به خودی خود مهمّ نیستند، بلکه آنها زمانی که فعالیتهای هدفداری را دربرداشته باشند مهم هستند.

توجه به روابط موجود درخود ریاضی

ریاضی یک مجموعهٔ آزاد از اشیاء و جدا از هم نیست، بلکه در ساختمان آن، انسجامی وجود دارد که قسمتهای مختلف آن، باهم در ارتباط هستند. به عبارت ساده‌تر، ریاضی یعنی رابطه‌ها. مثلاً بین هر دو عدد روابط قابل بیانی وجود دارد. مثلاً ممکن است گفته شود ۱۸ از ۶ بزرگتر است یا ۱۸ از ۶، ۱۲ واحد بیشتر است یا۱۸سه‌برابر۶است‌یا ۱۸مضربی‌است‌از۶.

کسرهای اعشاری و متعارفی و درصدها همه دارای رابطه و بستگی هستند. خواص اشکال هندسی ممکن است با الگوهائی در اعداد و جبر مرتبط باشد. مثلاً کار روی مربع اعداد، ممکن است به وسیلهٔ ساختن مربع‌های واحد پیش برده شود، مثلاً

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

می‌تواند با روش هندسی و بررسی مساحات مطرح گردد.

در ریاضیات مدارس هنوز این خطر وجود دارد که این جنبه‌های اساسی مورد توجّه دانش آموزان قرار نگیرد، زیرا بیشتر توجّه ذهنی آنها صرفِ پیدا کردن مهارتهای جزئی می‌شود. درهر سطحی که دانش آموزان کار می‌کنند باید هدف این باشد که آنها را قادر سازد تا ارتباط بین اجزاء مختلف ریاضیات را درک کنند. شکی نیست که این کار، پیشرفتهای تحصیلی دانش آموزان را تسهیل می‌کند.

آگاهی از جاذبه ریاضیات

در ذات ریاضی ــ صرفنظر از سودمندی آن که ممکن است تا حدی به عده‌ای از دانش آموزان تعمیم داد ــ یک جاذبهٔ خاصی وجود دارد. البته جنبه‌های مختلف این جاذبه برای همه دانش آموزان یکسان نیست. امّا اگر دریک وضعیتِ مناسب، مورد بررسی قرار گیرد ممکن است چنین اقتضائی داشته باشد.

این جرقه ممکن است از احساس نسبت به ترتیب، توجه به الگو، یک رابطهٔ جالب، توانائی درک یک فرمول، سادگی یک تصمیم، یک نتیجه پویا یا غیرمنتظره، توجه به یک خبر مجرّد، جاذبهٔ خاص طرح‌ها یا مدلهای ریاضی دویاسه بعدی یا زیبائی یک برهان پیدا شود. البته این بیشتر بستگی به شور و شوق معلمین و روشهای به کار برده شده در کلاس دارد.

تصور، ابتکار و انعطاف پذیری ذهن در ریاضیات

هنگامی که به دانش آموزان یک کار ریاضی داده می‌شود، باید آنها تشویق شوند که راه حل خاص خودرا بیابند، حتی اگر یک راه حل مشخص و یا یک روش متداولی ممکن است وجود داشته باشد که آنها باید در نهایت یاد بگیرند.

دلائل قابل توجهی وجود دارد که نشان می‌دهد که بیشتر روشهای تحمیل شده در مدرسه که ساعتها وقت، صرف یاددادن آن می‌شود، غالباً به سرعت فراموش می‌شوند و کودکان حتی بزرگسالان معمولاً برمی‌گردند به همان روشی که قبلاً فرا گرفته‌اند و بیشتر می‌فهمند و به آن اطمینان دارند. دراین زمینه سردرگمی خاصی برسراینکه منظور از *«حل مسائل در ریاضی»* چیست برای دانش آموزان و حتی برای معلمان آنها وجود دارد. غالباً کتب درسی، مسائلی را ارائه می‌دهند که با کلمات توصیف شده و درست همان اندازه اطلاعاتی که برای حل آنها لازم است، داده شده است. حل اینگونه مسائل هیچگونه ضرورتی برای استفاده مستقیم از مهارتهای قرار گرفته شده را به دنبال ندارد. در حقیقت جائی برای فکر کردن واقعی باقی نمی‌گذارد.

باید به دانش آموزان فرصت کافی داده شود که از مهارتهای فردی استفاده نمایند وراه‌های خود را برای مسائل تحقیقاتی که روش آنها بلافاصله روشن نیست به کار ببرند وهرجالازم باشد ابتکار و انعطاف خویش را نشان دهند.

هدف باید این باشد که ریاضی به عنوان یک فرآیند و یک فعالیّت خلاق نشان داده شود که دانش آموز بتواند کاملاً در آن مشارکت داشته باشد نه به عنوان یک مجموعه علمی تحمیل شده مصون از هرگونه تغییر و پیشرفت و تکامل.

دراین زمینه، بعضی مباحث تاریخ ریاضیات، *«نظیر تکامل دستگاه اعداد»* می‌تواند برای اغلب دانش آموزان روشنگر راه باشد.

مطالعات عمیق در دانش ریاضی

همانطور که دانش آموزان به سرعت از بخشی به بخش دیگر ریاضی می‌روند، پیشرفتهای آنها پراکنده و تجربیات آموزشی

آنها گسسته از هم است. درحقیقت بـه علت وجود این عقیده رایج است که اکثر دانش آموزان نمی‌توانند برای مدّت طولانی روی یک مطلب تمرکز حواس داشته باشند. بـه هرحال، اگر مطالب مورد علاقه دانش آموزان انتخاب شود، اگر نـه بـرای همه ولی بـرای بعضی می‌توان ادامهٔ مطالعهٔ عمیق ریاضی را تبلیغ و تشویق کرد. چنین کاری با ایجاد انگیزه به روشهای گوناگون امکان پذیر است:

اشتیاق و علاقه معلم، آموزش گروهی که درس را هدایت مـی‌کـند، علاقـه فـردی و یـا گـروهی دانش آمـوزان، نـیاز بـرای آمارگیری از عقاید مردم، منابع جالب توجه از مواد، فعالیتهای تحقیقاتی، استفـاده از میکروکامپیوترها، منابع تلویزیونی، بـازیها، جدولها، معماها و سرگرمی‌ها.

یک مطالعه عمیق بـه عنوان یک ارزش بالقوه برای دانش‌آموزان مطرح است، نه فـقط در ریاضیات همچنین در رشد شخصیت آنـها همچون تعهد و پشتکار برای همه دانش آموزان نهایت ارزش را داراست.

اطمینان خاطر دانش آموزان در تـوانائیهای مربوط به ریاضیات

ریاضی بـاید بـرای تـمام دانش‌آمـوزان، احساس موفقیت و مبارزه‌طلبی مـخصوص بـه خود را تأمین نـماید، و ایـن بـاید شامـل همه دانش‌آموزان گردد، مگر آنکه این تعمیم تـا حـد زیادی ایجاد شکست نماید.

بـرنامه‌های ریـاضی بـاید بـرای اغلب دانش‌آمـوزان مـفید بـاشد و حتی دوبـاره برنامه‌ریزی گردد بقسمی که در هر مـرحله بـا فعالیتهای مفید، تمام مـطالب تـدریس گـردد، و این کار، دانش‌آموزان را قـادر مـی‌سازد کـه اعتماد به نفس پـیدا کـرده و در بـرخورد بـه کارهای ریـاضی بـدون تـرس و واهمه مـوفق باشند. ریاضیات باید به عنوان تجربه‌ای بـاشد که فراگیران از آن لذت و نشاط ببرند.

حال می‌پردازیم به ابعاد گـوناگون «مساله و حلّ آن»

مسأله چیست

«حل مساله، عبارتست از خود ویژه‌تـرین و خاص‌ترین نوع تفکر آزاد»

واژه «مسأله» به مفهوم کاملاً گسترده به کار می‌رود، بنابراین قبل از هر چیز بـاید بـه طـور دقـیق روشن شود کـه مـنظور از ایـن واژه چیست؟ در نـظام امـروزی مـعمولاً بـه دست آوردن غذا، مسأله‌ای نست! اگـر در خـانه احساس گرسنگی کنیم، چیزی از یخچال برمی‌داریم و اگر در شهر بیرون از خانه بـاشیم به جائی جهت خرید غذا مراجعه می‌کنیم. ولی اگر یخچال خالی باشد یا در خانه غذایی نباشد و یا در شهر بدون پول مانده باشیم، وضع کاملاً به گونهٔ دیگری در می‌آید. در چنین مواردی میل به غذا، مسأله‌ای ایجاد می‌کند و گاهی مسأله‌ای دشوار. به طور کلی تمایل و نیاز، گاهی منجر به یک مسأله می‌شود و گـاهی هم مسأله‌ای ایـجاد نمی‌کند. اگر همراه با تـمایلی کـه در مـغز بـه وجود می‌آید و یـا بـلافاصله بـه دلیلی بـه ذهن می‌رسد که به کمک آن بـتوان بـه طـور قـطع، تمایل خود را برآورد، مسأله به وجود نمی‌آیـد. ولی چنین وسیله‌ای اگر پیدا نشود با یک مسأله سرو و کار داریم.

بنابراین مسأله عبارتست از:

«ضرورت جستجوی آگاهانهٔ وسیلهٔ مناسبی برای رسیدن به هدفی روشن ولی در بـدو امـر غیر قابل دسترس.»

حل مسأله به معنای پـیدا کـردن ایـن وسیله است.

می‌توان «حل مساله» را به عنوان جستجوی راهی برای برطرف کردن دشواری‌ها و یـا دور زدن موانع در نظر گرفت؛ بـا وجـود ایـن، مـا نمی‌خواهیم روی این دیـدگاه پـافشاری کـنیم. بخش اصلی تفکر آگـاهانهٔ فـرد بـه حـل مسأله مربوط مـی‌شود. انـدیشهٔ فـرد هدف مـعینی را تعقیب می‌کند و او در پیدا کردن راه و وسیله‌ای برای رسیدن به ایـن هدف مـی‌بـاشد، مسیر یـا مسیرهایی را جستجو می‌کند که بتواند خـود را به هدفِ محدودِ خود برساند.

حـل مسأله مـوفقیتی است کـه تـنها ذهن و عقل می‌تواند به آن دست یابد و ذهن و عقل هم هدیـه‌ای است کـه در انسان نـهاده شده است. برطرف کـردن مـوانع و یـافتن گـذرگاهها در جایی کـه راه مستقیمی وجـود نـدارد، خصلتی است که مـوجب امـتیاز جانوران بـاهوش از جانوران کندهوش، مـوجب بـرتری انسان بـر سایر جانوران باهوش و موجب تمایز انسان بـا استعداد از سایر انسان‌ها می‌شود.

چیزی جالب‌تر از مطالعهٔ جنبه‌های مختلف فعالیت انسانی نیست. اصیل‌ترین خصلت ایـن فعالیت عبارتست از «**حل مساله**». اندیشهٔ یافتن راهی برای رسیدن به هدفی معین و جستجـوی وسیله‌هایی که برای این منظور مناسب است که دانستن روش حل مسأله و مراحل آن و مـاهیت خود مسأله برای هر مـربی و مـعلّم در هر رشته مـخصوصاً ریـاضی لازم و واجـب است و بـه کارگیری این روش حـل مسأله در کـلاس، بـه طور عملی دانش‌آموزان را منطقی بار می‌آورد.

روش حلّ مسأله

۱) **برخورد بـه مسأله.**[۶] آنچه فـرد بـا آن برخورد می‌کند وقتی مسأله خوانده می‌شود کـه او نتواند بـلافاصله از تـجربیات گـذشته خـود استفاده کند و راه حـل مـناسب بـرای آن پـیدا نماید. اگر مسأله کاملاً روشن بـاشد و راه حـل آن در تجربیات گذشته فرد حاضر و آماده باشد در این صورت احتیاج به تـفکر نـیست و فـرد فعالیت قابل ملاحظه‌ای از خود نشان نمی‌دهد. بنابراین برای اینکه فرد به تفکر بپردازد باید به مسأله‌ای برخورد کند که روشن نمودن جهات مختلف آن نیاز بـه تـفکر داشته بـاشد و وقـتی بتواند از تجربیات گذشته خود برای پیدا کردن راه حل استفاده کند که آنها را در ارتباط با هم و با مسأله دریابد آنگاه برای پیدا کردن راه حل کوشش نماید.

۲) جمع‌آوری مفروضات.[7] در این مرحله نیز فرد باید کوشش کند و فکر خود را به کار بیاندازد تا بتواند آنچه را که با مسأله مورد نظر ارتباط دارد جمع‌آوری نماید. دلائل و مدارک مربوط به مسأله به طور مشخص در تجربیات ما قرار ندارد، باید آنچه را در گذشته خوانده‌ایم، مشاهده کرده‌ایم و آزمایش نموده‌ایم مورد بررسی قرار دهیم.

یادآوری تجربیات ما به صورت فرمولهای مشخص در ذهن قرار ندارند تا بدون تفکر بتوان یکی از آنها را انتخاب نمود و مسأله را به وسیلهٔ آن حل کرد. باید دلالتها و اشارات آنچه را که در گذشته آموخته‌ایم مشخص سازیم، ارتباط آنها را با مسأله مورد بحث درک کنیم و نتایج مطالعات دیگران را بررسی کنیم آنگاه راه حل یا راه حل‌هائی را برای برخورد با مسأله پیدا نمائیم.

۳) فرضیه.[8] بعد از اینکه مدارک جمع‌آوری شد و در طرح و سازمان معینی قرار گرفت باید به تفسیر و ترجمه آنها پرداخت و مدلولها و اشارات آنها را در نظر گرفت. آنگاه فرضیه یا فرضیه‌هائی را از مدارک موجود استنتاج کرد.

قدرت تفکر فرد در این مرحله ظاهر می‌گردد. فرد برای جمع‌آوری مدارک آزمایش می‌کند. نتیجه تحقیقات دیگران را مورد توجه قرار می‌دهد، راه حل‌ها یا فرضیه‌هایی را که دیگران دربارهٔ مسائل تقریباً مشابه با مسأله مورد بحث ارائه داده‌اند بررسی می‌کند آنچه را که از طریق گوناگون به دست می‌آورد در یک طرح و زمینه قرار می‌دهد تا ارتباط آنها را بهتر درک کند و مدلولات و اشارات آنها را در خاطر مجسم سازد و بالاخره فرضیه یا راه حلی را پیدا می‌کند.

۴) بررسی و آزمایش فرضیه.[9] در این مرحله باید فرضیه یا فرضیه‌های استنباط شده را مورد بررسی و آزمایش قرار داد. برای بررسی فرضیه‌ها مجدداً باید مدارک و دلائل جمع‌آوری شده را بررسی کرد و در صورت لزوم از طریق آزمایش یا مطالعه، مدارک تازه‌ای نیز به دست آورد، آنگاه فرضیه‌های مورد نظر را با مدارک موجود مقایسه نمود و فرضیه‌ای را که از هر جهت موافق با مدارک جمع‌آوری شده باشد انتخاب کرد و آن را به عنوان راه حل موقتی مسأله مورد بحث، پذیرفت.

۵) استنتاج.[10] پس از انتخاب فرضیه، محقق آن را به عنوان یک اصل یا قاعده تلقی می‌کند و در موارد مشابه تعمیم می‌دهد. طی این مراحل از نقطه نظر منطقی لازم است. یعنی برای اینکه فرد منطقی فکر کند باید در برخورد به مسائل، ابتدا آنها را مشخص سازد بعد تجربیات گذشته را به خاطر آورد و امکانات خود را در نظر گیرد و در مرحله سوم راه حلهایی پیدا نماید، سپس آنها را مورد بررسی قرار دهد و راه حل مناسب را انتخاب کند و راه حل انتخاب شده را به عنوان یک اصل یا قاعده بپذیرد و در موارد مشابه تعمیم دهد.

امّا از دید روانشناسی، جریان تفکر فرد همانطور که اتفاق می‌افتد بررسی می‌گردد، از این نظر، نظم و ترتیب معین برقرار نیست و فرد ممکن است از مرحلهٔ اول به مرحلهٔ چهارم وارد شود و دوباره به مرحله اول برگردد یا قبل از بررسی فرضیه به انتخاب آن اقدام کند.

چگونه مساله حل می‌شود

اوّل) باید مسأله را فهمید (فهمیدن مسأله)

مجهول چیست، داده‌ها کدام است، شرط چیست، آیا تحقق یافتن شرط مسأله امکان پذیر است، آیا شرط مسأله برای تعیین مجهول کفایت می‌کند، یا این که کافی نیست یا حشووزاید است یا متناقض است؟

دراین مرحله می‌توان با رسم نمودن شکل، گذاردن علائم مناسب و جداکردن قسمت‌های مختلف شرط این مرحله را بررسی نمود.

دوم) ارتباط میان داده‌ها و مجهول را پیدا کنید. ممکن است مجبور شوید که در صورت پیدا شدن ارتباط مستقیم میان داده‌ها و مجهول مسأله‌های کمکی در نظر بگیرید. باید سرانجام یک نقشه برای حل مسأله طرح کنید (طرح نقشه)

آیا آن را پیشتر دیده‌اید، آیا همین مسأله را به صورت دیگر دیده‌اید، آیا از مسأله‌ای وابسته آگاهی دارید، آیا از قضیه‌ای که بتواند سودمند باشد آگاهید؟

به مجهول نگاه کنید و بکوشید تا دربارهٔ مسأله‌ای بیندیشید که همین مجهول یا شبیه آن را داشته باشد.

دراین جا مسأله‌ای وابسته به مسأله شما وجود دارد که پیشتر حل شده است. آیا می‌توانید آن را به کار برید؟ آیا می‌توانید روش آن را به کار برید، آیا یک عنصر کمکی را باید وارد کنید تا به کار بردن آن را ممکن سازد، آیا می‌توانید صورت مسأله را دوباره بیان کنید، آیا می‌توانید آن را به صورتی دیگر بیان کنید؟ به تعاریف رجوع کنید.

اگر نمی‌توانید مسأله طرح شده را حل کنید؛ نخست به حل مسأله‌ای وابسته به آن بپردازید. آیا می‌توانید مسأله وابسته‌ای را که بیشتر در دسترس باشد تخیّل کنید؟ یا یک مسأله کلّی‌تر؟ یا یک مسأله خاص‌تر؟ یا یک مسأله مشابه؟ آیا می‌توانید یک قسمت از مسأله را حل کنید؟ تنها یک جزء از شرط را نگاه دارید و آن را کنار بگذارید. دراین صورت مجهول تا چه اندازه معلوم می‌شود و چگونه تغییر می‌کند؟ آیا می‌توانید از داده‌ها چیز سودمندی استخراج کنید؟ آیا داده‌های دیگری به فکر شما خطور می‌کند که بتواند برای به دست آوردن مجهول سودمند باشد؟ آیا می‌توانید مجهول یا داده‌ها یا در صورت لزوم هر دو را چنان تغییر دهید که مجهول تازه و داده‌های تازه به یکدیگر نزدیکتر باشند؟

آیا همهٔ داده‌ها را به کار بردید؟ آیا همهٔ شرط را بکار بردید؟ آیا همهٔ مفاهیم اصلی مندرج در مسأله را بکار بردید؟

سوم) اجرای نقشه

در ضمن اجرای نقشه حل مسأله، هر گام

که برمی‌دارید وارسی و امتحان کنید؛ آیا می‌توانید آشکارا ببینید که گام برداشته شده درست بوده است؟ آیا می‌توانید درست بودن آن را ثابت کنید؟

چهارم) امتحان کردن جوابی که بدست آمده

آیا می‌توانید نتیجه را وارسی کنید؟ آیا می‌توانید نتیجه را از هر راه دیگری به دست آورید؟ آیا می‌توانید نتیجه یا روش را در مسأله‌ای دیگر به کار برید؟

(ادامه دارد)

زیرنویسها

۱ _ Buhler
۲ _ J. Lubock
۳ _ D. Long
۴ _ L. Welch
۵ _ A. L. Gesell
۶ _ Problem – Problematic situation
۷ _ Data
۸ _ Hypothesis
۹ _ Verification
۱۰ _ Inference – Deduction

مراجع

۱ _ شعاری نژاد، علی اکبر (دکتر)، «روانشناسی یادگیری» انتشارات توس تهران چاپ چهارم ۱۳۶۳

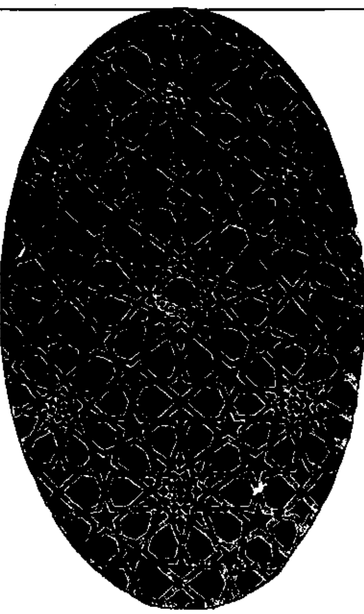
۲ _ شعاری نژاد، علی‌اکبر (دکتر)، «روانشناسی رشد» انتشارات اطلاعات ۱۳۶۴

۳ _ شریعتمداری، علی (دکتر)، «روانشناسی تربیتی» انتشارات امیرکبیر ۱۳۶۶

۴ _ شهریاری، پرویز (مترجم)، جورج پولیا (نویسنده) «خلاقیت ریاضی» انتشارات فاطمی ۱۳۶۶

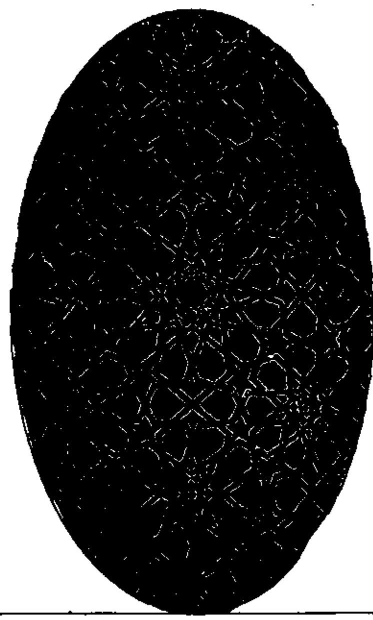
۵ _ آرام، احمد (مترجم) _ جورج پولیا (نویسنده)، «چگونه مسأله را حل کنیم» انتشارات مؤسسه کیهان ۱۳۶۶

۶ _ Mathematics from 5 to 16 Curriculum Matters, 3 AN HMI SERIES 1985, LONDON



ریاضیات دورهٔ اسلامی (۷)

دکتر محمد قاسم وحیدی



ریاضیات دورهٔ اسلامی را می‌توان بنا به ملاحظاتی به چهار دوره تقسیم کرد:

(۱) حسابی که از قرار معلوم از هند سرچشمه گرفته و براصل ارزش موضعی استوار است.

(۲) جبری که گرچه اساساً ریشه در یونان، هند، وبابل دارد، در دست مسلمین شکلی منظم و موجودیتی تازه یافت.

(۳) مثلثاتی که مواد اصلی آن عمدتاً ریشهٔ یونانی داشت، امّا مسلمین به آن‌شکل هندسی دادند و تابعها و فرمولهای جدیدی برآن افزودند.

(۴) هندسه‌ای که از یونان وارد شده بود امّا ریاضیدانان دورهٔ اسلامی تعمیمهایی در قسمتهای مختلف آن وارد کردند.

قبلاً سهم برخی از دانشمندان برجستهٔ دورهٔ اسلامی را در هر یک از موارد فوق دیده‌ایم. اینک از شخصیتی یاد می‌کنیم که سهم بسیار مهمّی در بسط جبر و هندسهٔ دورهٔ اسلامی داشته و این شخصیت همانا خیام یا عمرخیام [غیاث الدین ابوالفتح (یا ابوحفص) عمرابن ابراهیم خیام (یا خیامی)] است. خیام از بزرگترین ریاضیدانان قرون وسطی و از شعرا و حکماو منجمین معروف ایران در نیمهٔ دوّم قرن پنجم و اوایل قرن ششم هجری قمری است. وی در نیشابور متولد شد، و هم در آنجا وفات یافت. تاریخ ولادت او در جایی ثبت نیست، ولی در سال ۱۹۴۱ میلادی سوامی گوویندا تیرتهه، دانشمند هندی، از روی طالعی که در کتاب تتمهٔ *صوان الحکمهٔ* بیهقی ذکر شده است و با استفاده از اطلاعات تاریخی و احتمالی تاریخ ولادت خیام را به هنگام طلوع آفتاب روز شنبه هجدهم ذیقعدهٔ سال ۴۳۹ هجری قمری مطابق با پانزدهم ماه مه سال ۱۰۴۸ میلادی تعیین کرده است. بعداً انستیتوی

نجوم نظری آکادمی علوم شوروی محاسبات گوویندا را بررسی و درستی آن را گواهی نموده است.

گفته‌اند به سمرقند و بلخ و هرات وری و اصفهان و حجاز سفر کرد، و نام وی جزو منجمینی ذکر شده است که به امر سلطان ملکشاه سلجوقی، برای اصلاح سال و ماه ایرانی، در ۴۶۷ هجری قمری در ری یا اصفهان یا نیشابور گردآمده بودند.

قبل از کشف رسالهٔ او در جبر و پیش از آنکه تحقیقات جبری او چنانکه شاید و باید مورد توجه قرار گیرد، در مشرق زمین به واسطهٔ سهم عمده‌ای که در اصلاح سال و ماه برای او قائل بودند، و در اروپا به سبب ترجمهٔ انگلیسی رباعیات وی توسط فیتزجرالد[1] شهرت یافته بود، متأسفانه دانشمندان و مورخین اسلامی از تحقیقات جبری او بکلّی بی‌خبر بودند، و از اواخر قرن نوزدهم میلادی به بعد است که وی جای خود را در تاریخ ریاضیات باز می‌کند، تا آنجا که رسالهٔ او در جبر یکی از برجسته‌ترین آثار قرون وسطایی در این علم شناخته می‌شود.

آثار خیام، علاوه بر تألیفات ریاضی و رباعیات معروف او، مشتمل است بر چند رسالهٔ فلسفی و رساله‌ای به نام *رسالة فی الاحتیال لمعرفة مقداری الذهب و الفضه فی جسم مرکب منهما* در وزن مخصوص و غیره.

و امّا آثار ریاضی خیام عبارت‌انداز:

۱ ــ رسالهٔ جبر خیام (رسالة فی البراهین الجبروالمقابله)

عمده‌ترین اثر ریاضی خیام رسالهٔ او در جبر است که خیام آن را به نام «قاضی القضاة ابوطاهر» تدوین کرده است که این ابوطاهر را همان ابوطاهر عبدالرحمان بن ملک (۴۳۰ ــ ۴۸۴ هجری قمری) فقیه شافعی توانگر و متنفذ سمرقند شمرده‌اند.

رسالهٔ جبر خیام نخستین بار در سال ۱۷۴۲ در شهر لیدن، از شهرهای هلند، به دست آمد و برحسب عنوان رساله، آن را مشتمل برحل معادلات درجهٔ سوّم پنداشتند.

بعدها، ژان اتین مونتوکلا،[2] (۱۷۲۵ ــ ۱۷۹۹) مورخ معروف ریاضیات، در جلد اوّل *تاریخ ریاضیات* مشهور خود به همین موضوع اشاره می‌کند.

با این حال، رساله مورد توجه ریاضیدانان و مستشرقین واقع نشد تا آنکه سدیو[3] (۱۸۵۸ ــ ۱۸۷۵) پاره‌ای از یک نسخهٔ خطی در علم جبر در کتابخانهٔ سلطنتی (کتابخانهٔ ملی پاریس) کشف کرد که موضوعش شباهت تامّی با موضوع نسخهٔ کتابخانهٔ لیدن داشت، و در ضمن مقاله‌ای، تفصیلات زیادتری دربارهٔ این نسخه آورد. سپس گاسپار مونژ[4] (۱۷۴۶ ــ ۱۸۱۸) در کتاب مهم خود به نام *نظر تاریخی درباب بسط و تکامل هندسه* (بروکسل، ۱۸۳۷) به استناد مقالهٔ سدیو، مطالعهٔ کتاب خیام را از لحاظ تاریخ علوم ریاضی حائز اهمیت شمرد.

در همین ایام گولیلمو لیبری[5] (۱۸۰۳ ــ ۱۸۶۹) نسخهٔ کاملی از این کتاب نفیس را در کتابخانهٔ سلطنتی یافت و اعلام کرد که قصد نشر کردن آن را دارد، ولی به این کار توفیق نیافت. سرانجام فرانتس وپکه[6] (۱۸۲۶ ــ ۱۸۶۴) متن رسالهٔ جبر خیام را با ترجمهٔ فرانسوی آن و حواشی گرانبها و ضمایمی به نام *جبرعمرالخیامی* در سال ۱۸۵۱ در پاریس به چاپ رسانید.

وپکه با نشر جبر خیّام خدمت بزرگی به تاریخ ریاضیات کرد، و نام خیام را در بین ریاضیدانان بلند نمود. بعلاوه کتابهایی که تاکنون دربارهٔ جبر خیام نوشته شده مبتنی برکتاب وپکه بوده، و مولفین آنها فواید بی‌حساب از این کتاب برده‌اند. شادروان غلامحسین مصاحب (۱۲۸۹ ــ ۱۳۵۸) همین اثر وپکه را در کتاب *جبر و مقابلهٔ خیام* به انضمام *تاریخ علوم ریاضی از سه هزار سال قبل تا زمان خیام* مبنای کار خود قرار داده و ضمن ترجمهٔ قسمتهای اساسی آن که مبیّن فکر ریاضی خیام است، به نقد و تحلیل جبر دورهٔ اسلامی، خاصه عمرخیام، می‌پردازد. در اثر دیگری از مصاحب تحت عنوان *حکیم عمرخیام به عنوان عالم جبر* که در سال ۱۳۳۹ هجری شمسی از سوی انجمن انتشارات آثار ملی منتشر شده، مصاحب متن کامل رسالهٔ خیام را ترجمه و همراه با اثری از خیام که آن را *رساله در تفسیر یک مسئله* نامیده (توضیح بیشتر راجع به این اثر در زیر آمده است)، منتشر کرده و در این کتاب تحلیل جامعتری از چند و چون کار خیام ارائه کرده است. این اثر نایاب است و متأسفانه خود مصاحب هم در زمان حیات خود به تجدید چاپ آن اقدام نکرده است.

۲ ــ رساله فی قسمة الربع الدایره

این رساله را خیام پیش از رسالهٔ جبر خود نوشته و موضوع آن تحلیل یک مسئلهٔ هندسی به معادلهٔ درجهٔ سوم و حل آن با استفاده از مقاطع مخروطی است. به نوشته ابوالقاسم قربانی [۲]، این همان رساله‌ای است که شادروان مصاحب آن را که فاقد عنوان است، *رساله در تحلیل یک مسئله* نامیده است متن عربی و فارسی این رساله در سال ۱۳۳۹ در کتاب *حکیم عمرخیام به عنوان عالم جبر* فوق الذکر از روی مجموعهٔ شمارهٔ ۱۷۵۱/۲ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران منتشر شده و

عکس نسخهٔ خطی، که منحصر به فرد است، دراین کتاب آورده شده است.

این رساله را علیرضا امیرمغر درسال ۱۹۶۱ میلادی به انگلیسی و کراسنواورزنفلد به روسی ترجمه کرده‌اند در سال ۱۹۸۱ میلادی رشدی راشدواحمدجبار متن عربی و ترجمهٔ فرانسوی و تفسیر این رساله را به زبان فرانسوی انتشار داده‌اند.

۳ ــ رسالة فی شرح ما اشکل من مصادرات کتاب اقلیدس

این رساله دربارهٔ اصل موضوع معروف اقلیدس (اصل پنجم) و مباحث مربوط به نسبت و تناسب در کتاب اوست.

این رساله در یک مقدمه و سه مقاله است: مقاله اوّل در حقیقت متوازیات و شک معروف، مقالهٔ دوّم درباز نمودن نسبت و تناسب و حقیقت آنها، مقالهٔ سوم در تألیف نسبت و تحقیق آن.

نسخه‌ای خطی از این رساله در کتابخانهٔ ملی پاریس و نسخه‌ای از آن در لندن موجود است (برای توضیح بیشتر رجوع کنید به [۲]).

۴ ــ مشکلات الحساب

مصاحب می‌نویسد که نسخه‌ای از این رساله در مونیخ موجود است، امّا بنا به نوشتهٔ ابوالقاسم قربانی در *زندگینامه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی* ([۲]، صفحهٔ ۳۳۴)، تاکنون نشانه‌ای از وجود این کتاب به دست نیامده است.

برای آشنایی وافی با شیوه و کیفیت کار خیام، حق آن است که خوانندهٔ علاقه‌مند به کتاب حکیم عمرخیام به *عنوان عالم جبر* و برای کسب اطلاعات تاریخی مبسوط در زمینهٔ زندگی و آثار وی به کتاب زندگینامهٔ *ریاضیدانان دورهٔ اسلامی* اثر ابوالقاسم قربانی مراجعه کند. ما برای آشنایی مختصر خواننده با لبّ کارهای ریاضی خیام در زیر نظر اجمالی بویر[۷] را که در کتاب *تاریخ ریاضیات* او مندرج است، می‌آوریم. بررسی کارهای خیام در این ایجاز، نبوغ و شیوهٔ کار او را پوشیده می‌دارد امّا چون در این سلسله مقالات بنابر اختصار و صرفاً مروری بر آثار و زندگی ریاضیدانان دورهٔ اسلامی است، گزیری از آن نیست.

جبر خیام حوزه‌ای وسیعتر از جبر خوارزمی را در بر می‌گیرد، زیرا او معادلات درجهٔ سوم را هم مشمول بررسی قرار می‌دهد. عمر خیّام مانند پیشینیانش در بین دانشمندان دورهٔ اسلامی، برای معادلات درجهٔ دوّم، هم راه حل حسابی و هم هندسی عرضه می‌کند؛ امّا در مورد معادلات درجهٔ سوم کلّی راه حلهای حسابی را (بخطا) غیرممکن می‌داند، و بنابراین فقط به ارائهٔ راه حلهای هندسی همت می‌گمارد. طرح استفاده از مقاطع مخروطی متقاطع را برای حل معادلات درجهٔ سوم قبلاً منا یخموس، ارشمیدس، و ابن هیثم (۳۵۴ ــ ۴۳۰ هجری قمری) به کار برده بودند، ولی عمرخیام گام ارزشمند تعمیم این روش را برای در حیطه در آوردن کلیهٔ معادلات درجهٔ سوم (با ریشه‌های مثبت) برداشت، خیام وقتی در *رسالهٔ فی قسمة ربع الدائرة* با معادلهٔ درجهٔ سومی روبه رو می‌شود، متذکر می‌شود که «... این را بدان سبب که مکعب در آن جای دارد، نمی‌توان به وسیلهٔ هندسهٔ مسطحه[۸] حل کرد، و در حلّش احتیاج به مقاطع مخروطی است.»

ظاهراً خیام برای معادلات درجهٔ سوم به بالا راه‌حلهای هندسی مشابهی را در مخیّله نمی‌آورد زیرا فضا بیش از سه بعد ندارد، و به قول خیام «... هرگاه جبری[۹] مال مال[۱۰] را در مسائل مربوط به مقادیر هندسی به کار برد، البته این استعمال بر سبیل مجاز است، نه از راه حقیقت، زیرا وجود مال مال در مقادیر ممکن نیست.» طریقه‌ای را که عمر خیام در نهایت پیچیدگی ــ و با تفاخر تمام ــ در مورد معادلات درجهٔ سوّم به کاربرد، می‌توان در منتهای ایجاز و با نمادها و مفاهیم امروزی به صورت زیر بیان کرد. فرض کنید که معادلهٔ درجهٔ سوم عبارت از:

$$x^3 + ax^2 + b^2x + c^3 = 0$$

باشد. در این صورت اگر به جای x^2 در معادله $2py$ قرار دهیم، به دست می‌آوریم (با یادآوری اینکه $x^3 = x^2.x$)،

$$2pxy + 2apy + b^2x + c^3 = 0$$

چون معادلهٔ حاصل، معادلهٔ یک هذلولی است، و تساوی $x^2 = 2py$ که در موقع جایگذاری از آن استفاده کردیم، معرف یک سهمی است، روشن است که اگر این هذلولی و سهمی را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم، آنگاه طولهای نقاط تلاقی دو منحنی ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم خواهند بود. بدیهی است که برای حل معادلهٔ درجهٔ سوّم زوج مقاطع مخروطی متعددی را می‌توان به کار برد.

این بررسی مختصر از کار خیام، آن گونه که پیشتر گفته شد، نبوغ و دهای خیام را بخوبی نشان نمی‌دهد، زیرا، با در دست نداشتن مفهوم ضرایب منفی، خیام مجبور بود که مسأله را بسته به مثبت، منفی، یا صفر بودن پارامترهای a، b، c به چندین حالت متمایز تفکیک کند. وی کلیهٔ ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم مفروض را نمی‌داد زیرا ضرورتی برای ریشه‌های منفی قائل نبود و به کلیهٔ نقاط تلاقی مقاطع مخروطی توجه نداشت. همچنین باید خاطرنشان کرد که در راه حلهای هندسی یونانیان پیشین برای معادلات درجهٔ سوم، ضرایب را طول پاره‌خطهائی می‌گرفتند، در حالی که در کار

خیّام، این ضرایب اعداد مشخصّی در نظر گرفته می‌شوند. یکی از نتایج ثمربخش خصلت التقاطی ریاضیات آن دوره، گرایش در جهت از بین بردن رخنهٔ بین جبر عددی و جبر هندسی بود. گام مؤثر در این جهت را بعدها دکارت برداشت، ولی خیام وقتی سطور زیرین را می‌نگاشت، قدم در این راه گذاشته بود، «... و آنکه گمان کرده است که جبر حیله‌ای در استخراج اعداد مجهول است، امر نامعقولی را گمان برده است، و نباید به اینکه جبر و هندسه در ظاهر متفاوت‌اند، توجه کرد؛ بلکه جبر و مقابله اموری است هندسی که به وسیلهٔ اشکال پنجم و ششم مقالهٔ دوم *اصول* مبرهن می‌شود.» خیام با جانشین کردن یک رهیافت عددی به جای نظریهٔ اقلیدسی تناسب، به تعریف اعداد گنگ نزدیک شد، و با مفهوم اعداد حقیقی در حالت کلی در آویخت.

خیام در رسالهٔ جبر خود نوشت که وی در جای دیگری قاعده‌ای را که برای یافتن قوای چهارم، پنجم، ششم، و بالاتر دو جمله‌ای کشف کرده، اعلام کرده است، ولی این کار خیام تا کنون به دست نیامده است. تصور می‌شود که اشارهٔ او به آرایه مثلثی موسوم به *مثلث پاسکال* باشد، آرایه‌ای که تقریباً در همان زمان در آثار چینی هم پدیدار شده بود (نگاه کنید به [۱]، صفحه ۲۱۷). همزمانی این دو رویداد را نمی‌توان بسادگی توضیح داد، اما مادام که شواهد بیشتری به دست نیامده است می‌توان تصور کرد که این دو کشف مستقلاً انجام گرفته‌اند. مراودهٔ علمی در آن زمان بین چین و ایران چندان گسترده نبوده ولی نباید فراموش کرد که جادهٔ ابریشم چین و ایران را به هم وصل می‌کرده و ممکن است اطلاعات علمی از این طریق مبادله شده باشد.

ریاضیدانان دورهٔ اسلامی بیشتر به جبر و مثلثات علاقمند بودند تا هندسه، ولی یکی از جنبه‌های هندسه برای آنها جذابیت خاصی داشته است و آن همانا «برهان» اصل موضوع پنجم اقلیدس است. حتی در بین یونانیان قدیم هم تلاش برای «اثبات» این اصل موضوع عملاً مُبدل به «چهارمین مسئلهٔ مشهور هندسه» (بعد از سه مسألهٔ مشهور تثلیث زاویه، تضعیف مکعب، و تربیع دایره)شده بود و چندین ریاضیدان مسلمان این کوششها را دنبال کرده بودند. ابن هیثم کار را با یک چهار ضلعی سه قائمه (که گاهی برای تجلیل از کارهای انجام شده در قرن هجدهم «چهارگوشه لامبرت[۱۱]» نامیده می‌شود) آغاز و تصور کرد ثابت کرده است که زاویهٔ چهارم هم باید قائمه باشد.

می‌توان به آسانی نشان داد که اصل پنجم اقلیدس از این «قضیه» دربارهٔ چهار ضلعی نتیجه می‌شود. ابن هیثم در «برهان» خود فرض کرده بود مکان هندسی نقطه‌ای که چنان حرکت می‌کند که همواره از خط مفروضی به یک فاصله می‌ماند، لزوماً خط راستی موازی خط مفروض است فرضی که در اعصار جدید نشان داده شده است که معادل اصل پنجم اقلیدس است. خیام «برهان» ابن هیثم را از این لحاظ که ارسطو استفاده از حرکت را در هندسه مردود دانسته بود، مورد انتقاد قرار داد. سپس خیام کار را با چهار ضلعی که دو ضلع آن برابر و هر دو بر قاعده عمود بودند، آغاز کرد (این چهار ضلعی را هم در تجلیل از کارهای انجام شده در قرن هجدهم چهار ضلعی ساکری[۱۲] نامند)، دربارهٔ دو زاویهٔ (فوقانی) دیگر چهارضلعی، که لزوماً با هم برابرند، به سؤال پرداخت. البته سه امکان وجود دارد. زوایا می‌توانند (۱) حاده، (۲) قائمه، یا (۳) منفرجه باشند. خیام دو امکان اول و سوم را بر اساس اصلی که به ارسطو منسوب کرده بود، رد کرد. مضمون این اصل آن است که دو خط همگرا به یک نقطه باید متلاقی باشند. این اصل مورد استفاده خیام باز هم معادل دیگری بر اصل پنجم اقلیدس است.

زیرنویسها

1) Edward Fitzgerald
2) Jean Etienne Montucla
3) Louis Pierre Eugene Amelie sedillot
4) Gaspard Monge
5) Gulilemo Libri
6) Franz Woepcke
7) Carl B. Boyer
۸) یعنی با استفاده از خط‌کش و پرگار
۹) یعنی جبردان
۱۰) یعنی توان چهارم مجهول
11) Johann Heinrich Lambert
12) Girolamo Saccheri

مراجع

۱) ایوز، هاورد، *آشنایی با تاریخ ریاضیات*، ترجمهٔ محمد قاسم وحیدی اصل، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی تهران، ۱۳۶۳.

۲) قربانی، ابوالقاسم، *زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی*، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۵.

۳) مصاحب، غلامحسین، جبر و مقابلهٔ خیام به *انضمام تاریخ علوم ریاضی از سه هزار سال قبل از میلاد تا زمان خیام*، تهران، ۱۳۱۷.

۴) ـــ. *حکیم عمرخیام به عنوان عالم جبر*، نشریهٔ شمارهٔ ۳۸ سلسله انتشارات انجمن آثار ملی، تهران، ۱۳۳۹.

۵) ـــ. ـــ. *تئوری مقدماتی اعداد*، جلد اول، قسمت II، انتشارات دهخدا، تهران، ۱۳۵۵.

6) Boyer, Carl B., A History of Mathematics, New York, John Wiley & Sons, 1968.

معماهای ابوالهول

ترجمهٔ: حسن نصیرنیا

دکتر میتسوماتسو مهندس پرآوازهٔ ژنتیک در جهان، توانسته است برای نخستین بار موجودات زنده دو بعدی تولید کند. البته موجوداتی نه کاملاً، بلکه تقریباً دو بعدی. مخلوقهای او جانداران ذرّه بینی بلور مانندی هستند که در محیطهای کشتِ شبیه به ورقه‌های بسیار بسیار نازک ــ به نازکی یک لایه مولکول ــ پرورش می‌یابند.

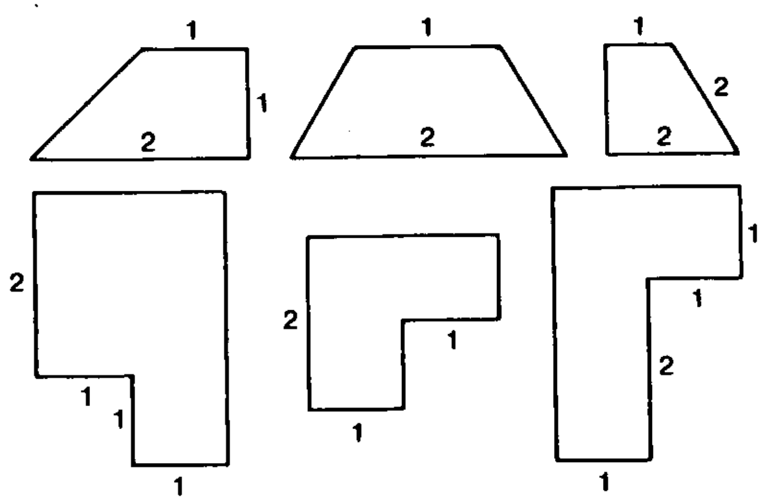
دکتر ماتسو، نام «ریتایل» (rep-tile مرکب از دو واژهٔ rep مخفف replicate به معنی تولید مثل و تکثیر کردن و واژهٔ tile به مفهوم آجر کاشی. از این پس هر کجا نام ریتایل بیاید، به جای آن عبارت «موجود ذرّه‌بینی» را ذکر خواهیم کرد. م.) را بر این جانداران خود نهاده است، به دو دلیل: یکی اینکه آنها براثر تولید مثل تکثیر می‌شوند و دیگر اینکه شکل آنها مانند آجرهای کاشی چند وجهی است. این جانوران آن قدر کوچک‌اند که جز با میکروسکپهای الکترونی قوی دیده نمی‌شوند.

آنها به کمک مُژکهای کناره‌های بدن خود در محیطِ کشتِ مایع ساخته شده، شنا می‌کنند و غذا را از راه «پوست» جذب می‌نمایند. شکل موجود ذّره بینی ماتسو، همگام با رشد و نمو بدن آن تغییر نمی‌کند، بلکه به همان صورت چند وجهی باقی می‌ماند. زمانی که حجم بدن موجود ذّره‌بینی به مرحلهٔ حساس تکثیر رسید، برخلاف یک آمیب، به دو نیم نمی‌شود، بلکه به چهار قسمت هم ارز (چهار موجود ذرّه بینی کوچک مساوی که قابل انطباق بر یکدیگر باشند) تقسیم می‌گردد که هر یک از نظر شکل و قیافه متشابه موجود ذرّه‌بینی مادر است. نوزادهای کوچک از نظر راست یا چپ بودن عیناً به شکل مادر نیستند. به عبارت دیگر شکل یک یا چند تا از موجودات ذره‌بینی نو تکثیر شده مانند تصویر آینه‌ای موجود ذرّه‌بینی مادر است. (توضیح دقیق‌تر اصطلاح راست یا چپ بودن موجودهای ذرّه‌بینی در قسمت پاسخ معماها آمده است. م.)

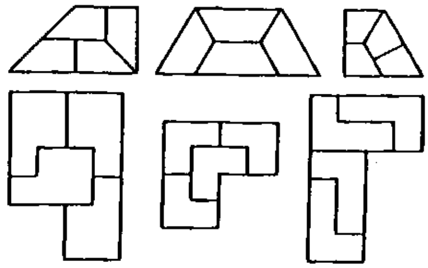
ماتسو، در آغاز کار توانست تنها موجودات ذرّه‌بینی به شکلهای مثلث و مربع به وجود آورد. می‌توان به راحتی ملاحظه کرد که چگونه هر مثلث T قابل تقسیم به چهار مثلث کوچکتر است. مثلثهایی که هم ارز هستند و به مثلث T شباهت دارند و همین طور است در مورد متوازی‌الاضلاعها که می‌توان آنها را به چهار متوازی الاضلاع مشابه کوچکتر تقسیم کرد.

چند ماه بعد، ماتسو موفق شد سه نوع دیگر موجود ذرّه‌بینی تولید کند که هر یک دارای چهار یا شش ضلع بودند. این موجودها را در زیر می‌بینید:

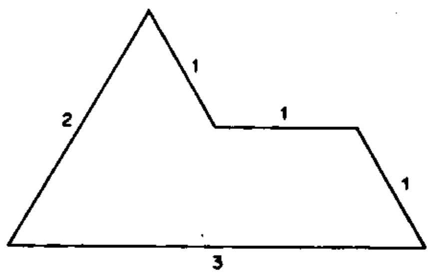
با اندکی دقت می‌توان با کشیدن خطهایی هر یک از شش شکل بالا را به چهار قسمت هم ارز و مشابه با شکل اصلی تقسیم کرد.



شکل زیر نحوهٔ تکثیر موجودهای ذرّه‌بینی چهار و شش ضلعی را نشان می‌دهد:



تقریباً یک سال از تولید نخستین جانوران ذرّه‌بینی گذشت و دکتر ماتسو کوشید در این مدّت موجودهای ذرّه‌بینی پنج ضلعی به وجود آورد، اما موفقیتی در این کار به دست نیاورد. تا اینکه روزی رفیق و همقطار او دکتر بیئتریس مینس، که برای بررسی تکنیکهای انقلابی ماتسو از فیلادلفیا به توکیو آمده بود، توانست موجود ذرّه‌بینی پنج ضلعی (که در شکل دیده می‌شود) به وجود آورد. در حالی که او و دکتر مینس تصویر بزرگ شدهٔ موجود ذرّه‌بینی مورد نظر را روی صفحهٔ میکروسکپ مشاهده می‌کردند، ماتسو با شگفتی فریاد کشید، عالی است، عالی است! نام این موجود ذرّه‌بینی پنج ضلعی را چه بگذاریم؟



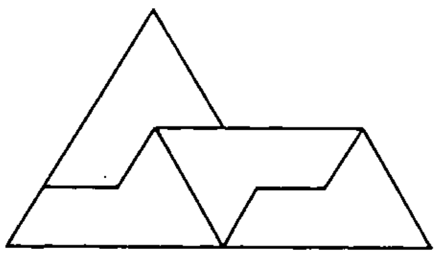
مینس پاسخ داد: چطور است آن را ابوالهول* بنامیم. آن با شکل مقطع مجسمهٔ باستانی مصر، که در نزدیکی هرم بزرگِ اهرام سه گانه است، شباهت دارد. ماتسو گفت: باشد، موافقم، تو راست می‌گویی. جای تاسف است که مجسمهٔ ابوالهول در طی جنگ بزرگ «خاورمیانه» در سال ۲۰۱۹ میلادی نابود شد.

آیا شما می‌توانید این موجود ذرّه‌بینی مرموز را به شکل چهار ابوالهول کوچکتر هم ارز تقسیم کنید؟ اگر موفق به انجام آن نشدید، به پاسخها در همین شماره از مجله رجوع کنید.

*حیوانی و همی که نزد مصریان قدیم مظهر آفتاب محسوب می‌شد و بدن شیر و سرِ انسان داشت. مجسمه ابوالهول، از صخره‌ای تراشیده شده که ۱۷ متر ارتفاع و ۳۹ متر طول دارد. م.

پاسخ معماهای ابوالهول (۱)

در شکل نشان داده شده است که چگونه یک موجود ذرّه‌بینی ابوالهول تکثیر می‌شود. توجه داشته باشید که سیمای ابوالهول ما در متمایل به طرف چپ است و ما آن را ابوالهول چپ می‌خوانیم. از چهار ابوالهول کوچکتر، تنها یکی ابوالهول چپ است و سیمای سه ابوالهول دیگر تقریباً به طرف راست است که آنها را ابوالهولهای راست می‌خوانیم.



یک موجود ذرّه‌بینی درست ۲۴ ساعت پس از زاییده شدن به مرحلهٔ بلوغ می‌رسد، سپس به چهار قسمت تقسیم می‌شود و آنگاه می‌میرد. بیایید فرض کنیم که تکثیر یک دسته موجودات ذرّه‌بینی در ظهر روزِ صفر (مثلاً شنبه) با یک جفت نوزاد (یکی به شکل چپ و دیگری به شکل راست) آغاز می‌شود. در ظهر نخستین روز (یکشنبه) تعداد موجودات ذره‌بینی تولد یافته به ۸ بالغ می‌شود که چهارتای آنها چپ و چهار تای دیگر راست هستند. در ظهر روز دوّم ۳۲ موجود ذره‌بینی خواهیم داشت که نیمی از آنها چپ و نیم دیگر راست خواهند بود. در روز سوّم ۱۲۸ موجود ذرّه‌بینی زاده خواهد شد که باز نیمی از آنها چپ و نیم دیگر از نوع راست خواهند بود. به این ترتیب دیده می‌شود که جمعیت این موجودات ذرّه‌بینی، هر روز چهار برابر می‌شود که همواره نصف آنها چپ و نصف دیگرشان راست هستند.

البته رشد جمعیت موجودات ذرّه‌بینی براثر محدودیت مواد غذایی موجود در محیط کشت به شدّت کُند می‌شود، چه اگر جز این باشد، طولی نمی‌کشد که شمارِ موجودهای ذره‌بینی تولید شده آن قدر عظیم خواهد شد که قشری از آنها سراسر سطح روی زمین را خواهد پوشاند.

آیا اگر تولید و تکثیر این جانوران ذرّه‌بینی در روز صفر با یک موجود ذرّه‌بینی چپ مادر آغاز شود، چه خواهد شد؟ در نخستین روز، یک موجود ذرّه‌بینی چپ و سه موجود ذرّه‌بینی راست به وجود خواهد آمد. در دومین روز، ده نوزاد چپ و شش نوزاد راست خواهیم داشت. دریافتن این نکته که تعداد موجودهای ذرّه‌بینی چپ و راست هرگز برابر نیست، کار چندان مشکلی نخواهد بود. در هر نسل، اکثریت نوع موجودات ذرّه‌بینی (چپ یا راست) نسبت به نسل پیشین تغییر می‌کند (یک نوع موجود ذرّه‌بینی از نوع دیگر بیشتر تولید می‌شود)، اما در عین حال آهنگ رشد یکی از دو نوع موجودهای ذرّه‌بینی، در مقایسه با کل تعداد موجودهای تولید شده، همواره و به طور یکنواخت کندتر می‌شود. (مثلاً تعداد موجودهای ذرّه‌بینی چپ تولید شده در روز ششم نسبت به کل موجودهای ذرّه‌بینی چپ و راست در آن روز به مراتب کمتر از تعداد آنها نسبت به کل موجودهای ذرّه‌بینی چپ در روز دوّم است). این باعث به وجود آمدن برخی مسائل جالب توجه در ترکیبات مقدماتی خواهد شد.

در اینجا با طرح یک مسئلهٔ نسبتاً ساده از شما می‌پرسیم آیا در بعد از ظهر روز هفتم چند موجود ذرّه‌بینی راست و چند موجود ذرّه‌بینی چپ خواهیم داشت؟

پاسخ معماهای ابوالهول (۲)

نمودار زیر نشان می‌دهد که اگر تولید مثل با یک موجود ذره‌بینی چپ در روز صفر آغاز شود، تعداد موجودهای ذرّه‌بینی تکثیر شده در طول هفتهٔ نخست چه مقدار خواهد بود. پاسخ معما در آخرین سطر پایین نمودار نشان داده شده است. در بعد از ظهر هفتمین روز، بر روی هم، ۱۶۳۸۴ موجود ذره‌بینی به وجود خواهد آمد که از آن میان ۸۱۲۶ تا بـه شکل چپ و ۸۲۵۶ تا بـه شکل راست هستند. توجه داشته باشید که کل تعداد موجودهای ذرّه‌بینی همواره برابر است بـا 4^n و تفاوت میان موجودات ذرّه‌بینی چپ و راست $\pm 2^n$ خواهد بود.

تفاوت چپ	کل تعداد تولید شده	موجودهای ذره‌بینی راست	موجودهای ذره‌بینی چپ	n روز
1	1	0	1	0
2	4	3	1	1
4	16	6	10	2
8	64	36	28	3
16	256	120	136	4
32	1024	528	496	5
64	4096	2016	2080	6
128	16384	8256	8128	7

حال بـه طـرح یک مـعمای مشکل‌تـر می‌پردازیم. آیا می‌توانید فرمولی بیابید که تعداد موجودهای ذرّه‌بینی چپ و راست را در روز n نشان دهد؟ پاسخ این معما، که در قسمت پاسخ (۳) آمده است، ما را بـه یک تمایز مهمّ میان آنچه ریاضیدانان آن را فرمولهای بازگشتی و نابازگشتی می‌خوانند، رهنمون می‌شود.

پاسخ معماهای ابوالهول (۳)

فرمول بازگشتی بـرای تـابع n، کـه در آن n می‌تواند اعداد صحیح بگیرد، فرمولی است که به ما می‌گوید چگونه ارزش تابع را بـرای هر n مفروض بیابیم، مشروط بـر آنکه مقادیر اعداد صحیح کمتر از n بر ما روشن باشد. فرمولها یا روشهای بازگشتی را می‌توان بـرای مـحاسبهٔ مقادیر متوالی به کمک دست یا کامپیوتر مورد استفاده قرار داد. در این مورد، می‌توان تعداد موجودات ذرّه‌بینی چپ و راست را با استفاده از روشهای زیـر مـحاسبه کـرد (L = مـوجود ذرّه‌بینی چپ و R = مـوجود ذرّه‌بـینی راست است.)

۱ ــ بـرای بـه دست آوردن مـوجودات ذرّه‌بـینی چپ در روز n، تـعداد مـوجودات ذرّه‌بینی چپ در روز قـبل از آن (n ــ ۱) را بـا سه برابر تـعداد مـوجودات ذرّه‌بـینی راست در روز قبل از آن جمع می‌کنیم. این مفهوم به زبان جبری می‌شود:

$$L(n) = L(n-1) + 3R(n-1)$$

(در اینجا L(i) و R(i) بـه تـرتیب نـمایانگر تعداد موجودات ذرّه‌بینی چپ و راست در i مین روز هستند).

۲ ــ برای به دست آوردن تعداد مـوجودات ذرّه‌بـینی راست در روز n، تـعداد مـوجودات ذرّه‌بینی راست در روز قبل از آن را با سه برابر تعداد موجودات ذرّه‌بینی چپ در روز قبل از آن جمع می‌کنیم. به عبارت جبری داریم:

$$R(n) = R(n-1) + 3L(n-1)$$

فرمول نابازگشتی، فرمولی است که نیازی به دانستن اطلاعات دربارهٔ موارد قـبل نـدارد. تنها کـافی است کـه مـقدار n را در فـرمول بگذاریم، تا پاسخ بـه دست آیـد. در پـاسخهای پیشین گفته شد کـه مـجموع تـعداد مـوجودات ذرّه‌بینی و تفاوت میان شکلهـای چپ و راست 2^n می‌شود. با توجه بـه ایـن نکته بـه آسانـی می‌توان دو فـرمول نـابازگشتی بـرای رشد موجودات ذرّه‌بینی را به دست آورد.

تـعداد مـوجودات ذرّه‌بـینی چپ در n مـین نسل، عبارت است از

$$2^{n-1}[2^n+(-1)^n]$$

تعداد موجودات ذرّه‌بـینی راست در n مـین نسل، می‌شود.

$$2^{n-1}[2^n-(-1)^n]$$

پـروفسور اس. دبلیـو. گـولوم (S.W.GOLOMB) کـه خـاصیت مـوجودات ذرّه‌بینی را کشف کرد، نام موجود ذرّه‌بینی را بر همهٔ پنج ضلعیهایی نهاد کـه مـی‌تـوانند بـه n موجود ذرّه‌بینی عین مـوجود ذرّه‌بـینی اصلی تقسیم شونـد. بـرخی از مـوجودات ذرّه‌بـینی گولوم به دو، بعضی به سه و گروهی بـه پنج یـا بیش از پنج موجود ذرّه‌بینی تـقسیم مـی‌شونـد. موجود ذرّه‌بینی تـنها پـنج‌ضلعی شناخته شده است که قابل تقسیم بر چهار است.

چنانچه شما موجود ذرّه‌بـینی دیگری کشف کردید، لطفاً آن را بـه آگـاهی پـرفسور گـولوم برسانید. برای دریافت اطلاعات بیشتر دربارهٔ نظریه مـوجود ذرّه‌بـینی و بـرخی از مسئله‌های دل‌انگیز حل‌ناشدهٔ مربوط به آن، به کتاب **The Unexpected Hanging and other Mathematical Diversion.**

اثر نگارنده (مارتین گاردنر. م.) مراجعه کنید.

مرجع:

Gardner, Martin. **Riddles of the Sphinx**, The Mathematical Association of America, Sep. 1987

درسهایی از احتمالات و آنالیز ترکیبی (۲)

دکتر محمد قاسم وحیدی

۱-۶- اشتراك، اجتماع، و متمم پیشامدها

حال‌که با نحوهٔ تخصیص احتمال به پیشامدها بر حسب احتمالهای نسبت داده شده به نقاط نمونه‌ای آشنا شده‌ایم (بخش ۱-۴)، می‌خواهیم راجع به چگونگی محاسبهٔ احتمالهای پیشامدها بر حسب احتمالهای سایر پیشامدها بحث کنیم. قبلاً لازم است ببینیم که درمجموعهٔ پیشامدها چه اعمالی وجود دارد و چه رابطه‌ای بین پیشامدها موجود است. برای این‌کار از ابزار نظریهٔ مجموعه‌ها استفاده می‌کنیم و از لحاظ ریاضی جنبهٔ صوری بیشتری به آزمایشهای تصادفی می‌دهیم.

دیده‌ایم که هر پیشامد متناظر با زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است. اگر A و B دو پیشامد باشند، این پیشامدکه «A و B هر دو رخ می‌دهند» با چه زیر مجموعه‌ای متناظر است؟ قبلاً گفته‌ایم که پیشامدی مانند E رخ می‌دهد هرگاه برآمدآزمایش تصادفی عضوی از E باشد. پس برای آنکه هم A و هم B رخ دهند، باید برآمدآزمایش هم در A و هم در B باشد؛ یعنی اگر برآمدآزمایش را با ω نشان دهیم باید داشته باشیم $\omega \in A \cap B$. بنابراین زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای که متناظر با وقوع توأم A و B است عبارت است از اشتراك A و B:

$$A \cap B$$

۱-۶-۱- مثال. آزمایش پرتاب یك سکه سه بار را در نظر می‌گیریم. فضای نمونه‌ای Ω متشکل از ۸ نقطه است:

$\Omega =$ {ش‌ش‌ش، خ‌ش‌ش، ش‌خ‌ش، ش‌ش‌خ، خ‌خ‌ش، خ‌ش‌خ، ش‌خ‌خ، خ‌خ‌خ}

فرض کنید A این پیشامد باشدکه در دومین پرتاب شیر بیاید، B عبارت از این پیشامد باشدکه در اولین پرتاب شیر بیاید، و C عبارت از این پیشامد باشدکه در اولین پرتاب خط بیاید. بنابراین با استفاده از نماد مجموعه‌ها

$A =$ {ش‌ش‌ش، خ‌ش‌ش، ش‌ش‌خ، خ‌ش‌خ}

$B =$ {ش‌ش‌ش، ش‌خ‌ش، ش‌ش‌خ، ش‌خ‌خ} (۱-۶-۱)

$C =$ {خ‌ش‌ش، خ‌خ‌ش، خ‌ش‌خ، خ‌خ‌خ}

این پیشامدکه A و B رخ می‌دهند، به این معنی است که در دومین پرتاب شیرو در اولین پرتاب شیر بیاید (یعنی در دو پرتاب اول شیر بیاید). پس وقوع توأم A و B یعنی وقوع پیشامد

$A \cap B =$ {ش‌ش‌ش، ش‌ش‌خ}

به عنوان مثالی دیگر، پیشامدی که وقوع توأم B و C را نشان می‌دهد، عبارت است از $B \cap C$؛ اما طبق تعاریف (۱-۶-۱)، B و C عضو مشترکی ندارند، یعنی $B \cap C = \varnothing$. به عبارت دیگر B و C نمی‌توانند توأماً رخ دهند. از این جهت، مجموعهٔ تهی، $\varnothing$، متناظر با پیشامد غیر ممکن در رابطه با آزمایش تصادفی بالاست.

در حالت کلی، اگر دو پیشامد A و B نتوانند توأماً رخ دهند (یعنی اگر $A \cap B = \varnothing$)، آنگاه A و B را ناسازگار نامند.

حال این سؤال را مطرح می‌کنیم: چه زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای متناظر با پیشامد «وقوع A یا B» است؟ وقوع A یا B به این معنی است که برآمد ωی فضای نمونه‌ای یا عضو A یا عضو B (یا هردو) است؛ یعنی $\omega \in A$ یا $\omega \in B$. به عبارت دیگر $\omega \in A \cup B$. در نتیجه، زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای که متناظر با وقوع A یا B است، عبارت از اجتماع آنهاست:

$$A \cup B$$

۱-۶-۲- مثال. مثال ۱-۶-۱ بالا را یك بار دیگر در نظر می‌گیریم. این پیشامدکه A یا B رخ دهد، به این معنی است که در پرتاب اول یا در پرتاب دوم شیر بیاید (یعنی حداقل در

یکی از دو پرتاب اول شیر می‌آید). بنابر تعریف A و B در (۱۰۶۰۱) داریم

$$A\cup B=\{\text{خخش},\ \text{شخش},\ \text{خشخ},\ \text{ششخ},\ \text{خشش},\ \text{ششش}\}$$

مطالب بالا در مورد دو مجموعه را می‌توان به بیش از دو مجموعه هم تعمیم داد. مثلاً اگر سه پیشامد A، B، C را داشته باشیم، وقوع توأم پیشامدهای A، B، C به معنی وقوع پیشامد $A\cap B\cap C$، وقوع حداقل یکی از سه پیشامد A، B، C به معنی وقوع پیشامد $A\cup B\cup C$ است وقس‌علیهذا.

سرانجام، اگر پیشامدی مانند A داشته باشیم، می‌خواهیم پیشامد «عدم وقوع A» را معین کنیم. عدم وقوع پیشامد A به معنی این است که برآمد ω ی آزمایش تصادفی عضو A نیست، یعنی $\omega\notin A$. اما این، راه دیگر برای بیان این حکم است که $\omega\in \bar{A}$ ($\bar{A}$، متمم A نسبت به Ω). بنابراین زیرمجموعهٔ فضای نمونه‌ای که متناظر با عدم وقوع A است، صرفاً متمم آن است: $\bar{A}$

۱-۶-۳- مثال. باز هم مثال ۱-۶-۱ پرتاب یك سکه سه بار را در نظر می‌گیریم. پیشامد عدم وقوع A، به معنی این پیشامد است که در پرتاب دوم شیر نیاید (یعنی خط بیاید). بنابر تعریف A در (۱۰۶۰۱) داریم،

$$A=\{\text{خخخ},\ \text{شخخ},\ \text{خخش},\ \text{شخش}\}.$$

به طور خلاصه:

پیشامد	زیر مجموعه Ω
A و B توأما رخ می‌دهند	$A\cap B$
A یا B رخ می‌دهد (وقوع حداقل یکی از دو پیشامد A و B)	$A\cup B$
A رخ نمی‌دهد	$\bar{A}$

۱-۷- احتمال اجتماع دو پیشامد: اصل جمع

در این بخش نحوهٔ محاسبهٔ احتمال وقوع پیشامد $E\cup F$ (E و F دو پیشامدند) را برحسب احتمال وقوع E و احتمال وقوع F نشان می‌دهیم. فرمولی که به دست می‌آوریم، یکی از اصول اساسی در مطالعهٔ احتمال است. برای تشریح مفاهیمی که در اینجا مطرح می‌شوند، مثال زیر را می‌آوریم:

۱-۷-۱- مثال. باز هم مثال ۱-۶-۱ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم A و B دو پیشامدی باشند که در آنجا تعریف شده‌اند، یعنی

$$A=\{\text{خشخ},\ \text{ششخ},\ \text{خشش},\ \text{ششش}\}$$

$$B=\{\text{خخش},\ \text{شخش},\ \text{خشش},\ \text{ششش}\}$$

اگر سکه را سالم فرض کنیم، آنگاه می‌توانیم به هر نقطهٔ فضای نمونه‌ای احتمال ۱/۸ را نسبت دهیم و بنابر (۱۰۲۰۱) داریم

$$P(A)=P(\{\text{ششش}\})+P(\{\text{خشش}\})+P(\{\text{ششخ}\})+P(\{\text{خشخ}\})=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۲},$$

و به همین نحو

$$P(B)=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}.$$

اما

$$P(A\cup B)=P(\{\text{ششخ},\ \text{خخش},\ \text{شخش},\ \text{خشش},\ \text{ششش},\ \text{خشخ}\})=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}.$$

توجه کنید که

$$P(A\cup B)=\frac{۳}{۴}$$

و

$$P(A)+P(B)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱,$$

لذا

$$P(A\cup B)\neq P(A)+P(B)$$

یعنی اینکه احتمال وقوع A یا B برابر احتمال وقوع A به اضافهٔ احتمال وقوع B نیست. مشکل در اینجاست که نقاط «شخش» و «خخش» فضای نمونه‌ای هم به A و هم B تعلق دارند و لذا با افزودن P(A) بر P(B) نقاط نمونه‌ای «شخش» و «خخش» دو بارمنظور شده‌اند. بنابراین برای به دست‌آوردن $P(A\cup B)$ از P(A) و P(B)، P(A) را بر P(B) اضافه می‌کنیم و

$P(\{\text{شخش}\}) + P(\{\text{خخش}\})$ را کسر می‌کنیم. در نتیجه

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-[P(\{\text{شخش}\}) + P(\{\text{خخش}\})]$$
$$=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}-\left[\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}\right]=\frac{۳}{۴},$$

که قبلاً به طور مستقیم به دست آمده بود. توجه کنید که

$A\cap B=\{\text{خخش}, \text{شخش}\}$.

استدلال کلی برای محاسبهٔ $P(E\cup F)$ بر حسب $P(E)$ و $P(F)$ نظیر استدلال بالاست. کافی است $P(E)$ را بر $P(F)$ بیفزاییم و احتمال نقاط نمونه‌ای را که هم در E و هم در F قرار دارند، یعنی $P(E\cap F)$ را کسر کنیم. لذا نشان داده‌ایم که قضیهٔ زیر برقرار است:

۱-۷-۲- قضیه. فرض کنید که E و F دو پیشامد باشند. در این صورت

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F). \quad (۲.۷.۱)$$

حال اگر E و F ناسازگار باشند (یعنی هیچ نقطهٔ فضای نمونه‌ای در آنها مشترک نباشد)، $E\cap F=\varnothing$، و لذا $P(E\cap F)=۰$. بنابراین به عنوان حالت خاص فرمول (۲.۷.۱) داریم:

۱-۷-۳- نتیجه. اگر E و F دو پیشامد ناسازگار باشند (یعنی نتوانند با هم رخ دهند)، آنگاه

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F) \quad (۳.۷.۱)$$

فرمول اخیر، اصل جمع احتمالات است: احتمال اجتماع دو پیشامد ناسازگار برابر با مجموع احتمالهای آنهاست.

رابطهٔ (۳.۷.۱) را می‌توان به سه یا بیش از سه پیشامد دو به دو ناسازگار (تعدادی پیشامد را دو به دو ناسازگار می‌خوانیم هر گاه هر دو پیشامد دلخواه در بین آنها ناسازگار باشند) تعمیم داد. مثلاً اگر E، F، G، سه پیشامد دو به دو ناسازگار باشند، آنگاه

$$P(F\cup F\cup G)=P(E)+P(F)+P(G),$$

وقس علیهذا.

اغلب محاسبهٔ احتمال عدم وقوع پیشامدی مانند E، آسانتر از محاسبهٔ احتمال وقوع خود آن است. با استفاده از رابطهٔ (۳.۷.۱) می‌توان فرمولی به دست آورد که $P(E)$ و $P(\overline{E})$ را به هم مربوط می‌کند. چون E و $\overline{E}$ ناسازگارند، لذا

$$P(E)+P(\overline{E})=P(E\cup\overline{E}).$$

اما $E\cup\overline{E}=\Omega$. لذا طبق فرمول (۲.۲.۱)،

$$P(E\cup\overline{E})=۱$$

و در نتیجه

$$۱=P(E)+P(\overline{E}).$$

بنابراین نتیجه زیر را ثابت کرده‌ایم:

۱-۷-۴- نتیجه. به ازاء هر پیشامد E،

$$P(\overline{E})=۱-P(E)$$

۱-۷-۵- مثال. دو تاس همگن را یك بار می‌ریزیم. می‌خواهیم احتمال این پیشامد را حساب کنیم که مجموع شماره‌ها بیش از دو باشد.

فرض کنید که A_i نشان دهندهٔ این پیشامد باشد که مجموع شماره‌های روی تاسها i است. روشن است که i از ۲ تا ۱۲ تغییر می‌کند (کمترین مجموع از شماره‌های روی دو تاس ۲ و بیشترین مجموع ۱۲ است). اگر پیشامد مطلوب را با E نشان دهیم، داریم

$$A=A_۳\cup A_۴\cup\cdots\cup A_{۱۲}.$$

بدیهی است که پیشامدها دو به دو ناسازگارند و داریم

$$P(\overline{A})=۱-P(A)$$

اما $\overline{A}$ به معنی آن است که مجموع شماره‌ها کوچکتر از یا مساوی ۲ باشد، یعنی

$$\overline{A}=A_۲.$$

در نتیجه

$$P(\overline{A})=۱-P(A_۲)$$
$$=۱-P(\{۱, ۱\})$$
$$=۱-\frac{۱}{۳۶}$$

که در آن $\{۱, ۱\}$ به معنی آن است که تاس اول ۱ و تاس دوم هم ۱ است و به همین قیاس.

۱-۸- احتمال شرطی و اصل ضرب احتمالات

احتمال شرطی، وسیلهٔ بسیار مهمی در نظریهٔ احتمال است. به طور شهودی، احتمال وقوع یك پیشامد با داشتن اطلاعات بیشتر تغییر می‌کند. به همین دلیل مفهوم احتمال شرطی در

وضعیتهای گوناگون پیش می‌آید.

برای روشن کردن مفهوم احتمال شرطی، مثال زیر را درنظر می‌گیریم.

۱-۸-۱- مثال. فرض کنید که تاس همگنی یك بار پرتاب شده است. فضای نمونه‌ای شامل شش نقطه است و می‌توان نوشت،

$$\Omega=\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}.$$

چون تاس همگن است، به هر نقطهٔ فضای نمونه‌ای احتمال ۱/۶ را نسبت می‌دهیم. بخصوص $P(\{۵\})=۱/۶$. حال فرض کنید این اطلاع اضافی را به ما داده باشند که عدد ظاهر شده روی تاس عددی فرد است. احتمال اینکه اینك عدد ۵ برروی تاس ظاهر شود، چقدر است؟ آمدن عدد ۵ اکنون احتمال بیشتری دارد و می‌توان به‌آسانی حدس زد که در این صورت احتمال ۱/۳ است.

از طرف دیگر، فرض کنید به ما گفته باشند که عدد ظاهر شده برروی تاس عددی زوج است. روشن است که این آگاهی، بر احتمال آمدن عدد ۵ اثر می‌گذارد. در واقع با دانستن اینکه عدد ظاهر شده روی تاس عدد زوجی است، آمدن عدد ۵ برروی تاس غیر ممکن است. لذا، به طور شهودی، احتمال «شرطی» آمدن ۵، به شرط اینکه تاس عدد زوجی را نشان می‌دهد، برابر صفر است.

پیش از تعریف احتمال شرطی وقوع یك پیشامد به «شرط» وقوع پیشامدی دیگر، بحثی را ارائه می‌کنیم که انگیزهٔ تعریف احتمال شرطی به صورتی است که در زیر می‌دهیم.

فرض کنید که

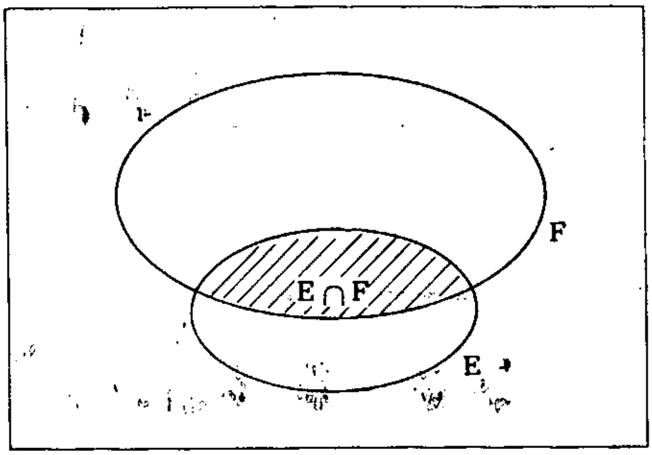
$$\Omega=\{\omega_۱ , \omega_۲ , \dots , \omega_N\}$$

یك فضای نمونه‌ای همشانس باشد، یعنی

$$P(\{\omega_۱\})=P(\{\omega_۲\})=\cdots=P(\{\omega_N\})=\frac{۱}{N}\cdot$$

دو پیشامد E و F را درنظر می‌گیریم و «فرض» می‌کنیم که پیشامد F رخ داده است. قبلاً گفته‌ایم که وقوع یك پیشامد به معنی آن است که برآمد آزمایش عضوی از آن پیشامد است. پس اگر فرض کنیم که پیشامد F رخ داده است، نتیجهٔ آزمایش عضوی از F خواهد بود؛ یعنی اینکه، با داشتن این آگاهی، نتیجهٔ آزمایش فقط می‌تواند عضو F باشد ولا غیر. در نتیجه اگر بدانیم که F رخ داده است، قسمتی از فضای نمونه‌ای، یعنی F، خود به خود کنار گذاشته می‌شود و می‌توان مجموعهٔ E را فضای نمونه‌ای جدیدی دانست. برای محاسبهٔ «احتمال وقوع E به شرط وقوع پیشامد F» که آن را با $P(E|F)$ نشان می‌دهیم، چنین استدلال می‌کنیم:

فضای نمونه‌ای آزمایش (با دانستن اینکه F رخ داده است)، مجموعهٔ F است. برای وقوع E برآمد آزمایش باید عضو E باشد و چون F رخ داده است، برآمد آزمایش باید عضو E و عضو F، یعنی عضو $E\cap F$ باشد. چون فضای نمونه‌ای را همشانس گرفته‌ایم، لذا بنابر تعریف ۱-۵-۱ (در شمارهٔ قبل مجله)،



$$P(E|F)=\frac{|E\cap F|}{|F|} \quad (۱.۸.۱)$$

(فرض می‌کنیم $F\neq\varnothing$). این فرمول، احتمال شرطی وقوع E را به‌شرط وقوع پیشامد F، نسبت به فضای نمونه‌ای جدید F می‌دهد. برای آنکه به فضای نمونه‌ای اصلی بازگردیم، صورت و مخرج طرف راست فرمول (۱.۸.۱) را بر $|\Omega|$ (تعداد اعضای Ω) تقسیم می‌کنیم:

$$P(E|F)=\frac{|E\cap F|/|\Omega|}{|E|/|\Omega|}\cdot$$

اما بنابر تعریف ۱-۵-۱ داریم

$$|E\cap F|/|\Omega|=P(E\cap F)$$

و

$$|E|/|\Omega|=P(E)\cdot$$

پس،

$$P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}, \quad (۲.۸.۱)$$

مشروط براینکه $P(F)\neq ۰$.

توجه کنید که بحث بالا، اثبات فرمول (۲.۸.۱) نیست و

بلکه انگیزه‌ای برای تعریف احتمال شرطی است که در زیر می‌دهیم:

۱-۸-۲- تعریف. فرض کنید که Ω یک فضای نمونه‌ای باشد و E و F دو پیشامد باشند. فرض کنید که $P(F) > ۰$. در این صورت احتمال شرطی E به شرط وقوع (یا به فرض وقوع) F، $P(E|F)$ نشان داده می‌شود و به صورت

$$P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)} \qquad (۳.۸.۱)$$

تعریف می‌شود.

۱-۸-۲- مثال. فرض کنید احتمال تولد دختر و پسر به یک اندازه باشد. خانواده‌ای با دو فرزند را در نظر می‌گیریم. چهار امکان برای جنسیت فرزندان این خانواده وجود دارد و فرض می‌کنیم

$$\Omega=\{\text{پپ}, \text{دپ}, \text{پد}, \text{دد}\},$$

که در آن، مثلاً، «دپ» به معنی «فرزند اول پسر، فرزند دوم دختر» است. بنابر فرض همشانس بودن دختر و پسر (از لحاظ تولد)، می‌توان به هر نقطهٔ فضای نمونه‌ای احتمال ۱/۴ را نسبت داد، یعنی

$$P(\{\text{پپ}\})=P(\{\text{دپ}\})=P(\{\text{پد}\})$$
$$=P(\{\text{دد}\})=\frac{۱}{۴}\cdot$$

به فرض اینکه خانواده‌ای با دو فرزند، دختری داشته باشند، مطلوب است احتمال اینکه هردو فرزند دختر باشند.

فرض کنید A معرف این پیشامد باشد که هردو فرزند دخترند و B معرف این پیشامد باشد که خانواده دختری دارد. در این صورت

$$A=\{\text{دد}\} \quad \text{و} \quad B=\{\text{دپ}, \text{پد}, \text{دد}\}.$$

می‌خواهیم $P(A|B)$ را حساب کنیم. طبق تعریف داریم،

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

اما $A\cap B=\{\text{دد}\}$، لذا

$$P(A|B)=\frac{۱/۴}{۳/۴}=\frac{۱}{۳}\cdot$$

اگر تعریف را به کار نمی‌بردیم، ممکن بود که با شتاب نتیجه بگیریم که جواب مسأله ۱/۲ است. زیرا فرزند دیگر یا پسر است یا دختر. این استدلال درست است، اما باید توجه کنیم که احتمال دو پیشامد اخیر برابر نیستند. دو حالت وجود دارد که در آنها فرزند دیگر پسر است، یعنی {پد} یا {دپ}، و تنها یک حالت وجود دارد که در آن فرزند دیگر دختر است، یعنی {دد}. این مثال نشان می‌دهد که قبل از به‌کار بردن فرمول احتمال کلاسیک (تعریف ۱-۵-۱) باید از همشانس بودن فضای نمونه‌ای اطمینان حاصل کرد.

فرمول احتمال شرطی، یعنی فرمول (۳.۸.۱) را اغلب به صورت

$$P(E\cap F)=P(F)\cdot P(E|F) \qquad (۴.۸.۱)$$

نوشته و آن را اصل ضرب احتمالات می‌نامند. کاربرد احتمال شرطی اغلب در صورت اخیر آن، یعنی اصل ضرب است؛ به عبارت دیگر اگر احتمال وقوع توأم دو پیشامد را بخواهیم، ابتدا احتمال وقوع یکی را پیدا می‌کنیم و آن را در احتمال شرطی وقوع دیگری، به شرط وقوع پیشامد اول، ضرب می‌کنیم.

۱-۸-۴- مثال. در ظرفی ۳ مهرهٔ سیاه و ۵ مهرهٔ سفید وجود دارد. ۲ مهره پشت‌سرهم (و بدون جایگذاری) از این ظرف خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه هردو مهره سفید باشند.

فرض می‌کنیم

A: مهرهٔ اول سفید است

B: مهرهٔ دوم سفید است

باید $P(A\cap B)$ را حساب کنیم. داریم

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)\cdot$$

اما

$$P(A)=\frac{۵}{۸}$$

و روشن است که

$$P(B|A)=\frac{۴}{۷}$$

در نتیجه

$$P(A\cap B)=\frac{۵}{۸}\cdot\frac{۴}{۷}=\frac{۵}{۱۴}\cdot$$

در شمارهٔ آینده به مقدمات آنالیز ترکیبی خواهیم پرداخت.

نگاهی به بعضی مسائل هندسی المپیاد ریاضی از ۱۹۵۹ تا ۱۹۸۵

حسین غیور

در ارتباط بـه مسائل هندسه المپیاد ریاضی از ۱۹۵۹ تا ۱۹۸۵ مطالبی به نظر می‌آید، که وظیفه خود می‌دانم آنها را با دبیران ریاضی که افتخار همکاری با آنها را داشته و دارم در میان بگذارم از این رهگذر دانش‌آموزان کشور ما از آنچه در جهان ریاضیات می‌گذرد مطلع شوند زیرا کـه این مسائل از طرف معلمین و استادان مبرز کشورهای مختلف تهیه و تنظیم شده است. از مطالعه کارهای آنها می‌توان استنباط کرد که در هندسه اقلیدسی کـه بیش از ۲۰ قرن از تألیف آن مـی گذرد، درحدود مقدمات چه نوآوری‌ها و تغییراتی صورت می‌گیرد. این مطالب را در سه قسمت مطرح و مورد بحث قرار می‌دهیم:

I- در مکانهای هندسی کـه قسمت حساسی از هندسه است تعمیمی دیده می‌شود که بسیار جالب است به نظر اکثر کسانی که با هندسه سروکار دارند می‌رسد آنها را با سه مثال مقدماتی و ساده توضیح می‌دهیم:

الف) اولین مکان هندسی مربوط به دایره است به این شرح: مکان هندسی نقطه‌ای را تعیین کنید که فاصلهٔ آن از نقطه معین O به اندازه پاره خطی به طول l است.

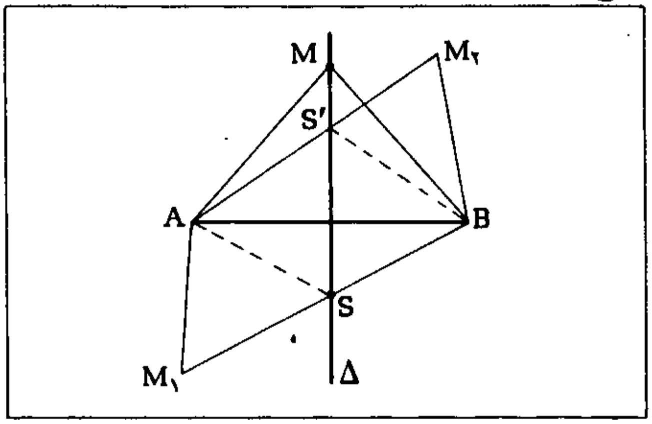
می‌دانیم این مکان دایره‌ای بـه مرکز O و شعاع l است. به این مکان هندسی می‌توان دو مکان هندسی دیگری به صورت زیر ضمیمه کرد.

نقطه معین O در صفحه مفروض است مکان هندسی نقطه M را تعیین کنید که فاصله آن از O مساوی، کـوچکتر یا بزرگتر از l بـاشد. بدیهی است این مسأله سه جواب دارد اولـی دایره‌ای به مرکز O و شعاع l؛ دومی نقاط داخل این دایره (بدون نقطه O)؛ و سومی نقاط خارج دایره در صفحه است.

ب) دو نقطه متمایز A و B در صفحه مفروضند مکان هندسی نقطه M را طوری تعیین کنید کـــه از A و B بـه یك فاصله باشد؛ یـا فاصله آن از A کـوچکتر از فاصله آن از B باشد؛ یـا فاصله آن از A بزرگتر از فاصله آن از B باشد.

درحالت اول که $MA=MB$ مکان خط Δ عمود منصف AB است؛

در حالت $M_1A<M_1B$ مکان یکی از دو نیم صفحه‌ای است کـه خط Δ در صفحه پدید مـی‌آورد و نقطه A در آن واقع شده است؛



$$M_1B=M_1S+SB=M_1S+SA$$

در مثلث AM_1S، $M_1S+SA>M_1A$ و لذا $M_1A<M_1B$ بـه همین ترتیب بـرای حالت سوم ثابت می‌شود $M_2A>M_2B$.

ج) دو خط متقاطع Δ و Δ' درصفحه مفروضند مکان هندسی نقطهٔ M را تعیین کنید که:

۱ــ از Δ و Δ' به یك فاصله باشد؛

۲ــ فاصله M از خط Δ کـوچکتر از فاصله M از خط Δ' باشد؛

۳ــ فاصله M از خط Δ بـزرگتر از فـاصله M از خط Δ' باشد.

مـی‌دانیم در حـالت اول مـکان هندسی دو خط d و d'

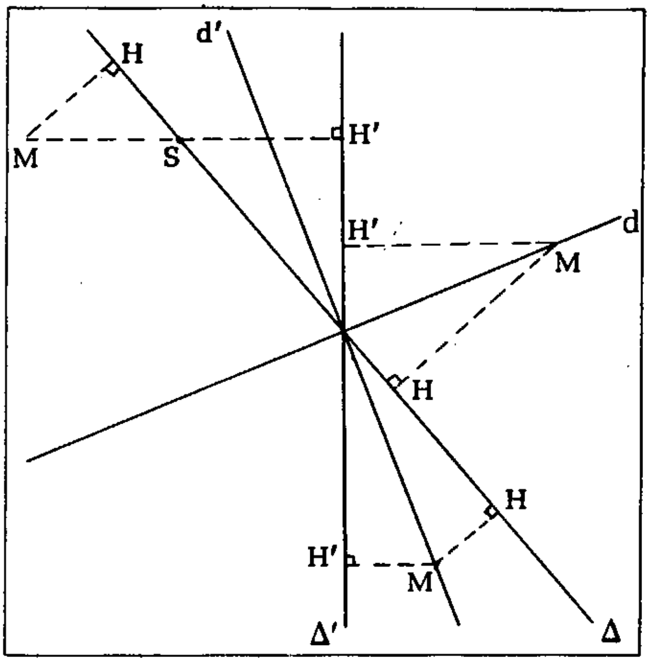
نیمسازهای زوایای دو خط Δ و Δ' است که برهم عمود نیز می‌باشند.

در حالت دوم دو خط d و d' صفحه را به چهار ربع صفحه تقسیم می‌کنند M واقع در یکی از دو ربعی است که Δ داخل آنست.

$$MH' = MS + SH' \quad و \quad MH < MS$$

و لذا $MH < MH'$.

در حالت سوم M داخل یکی از دو ربعی است که Δ' داخل آن است می‌توان تعمیمی را که در این سه مثال ذکر شد



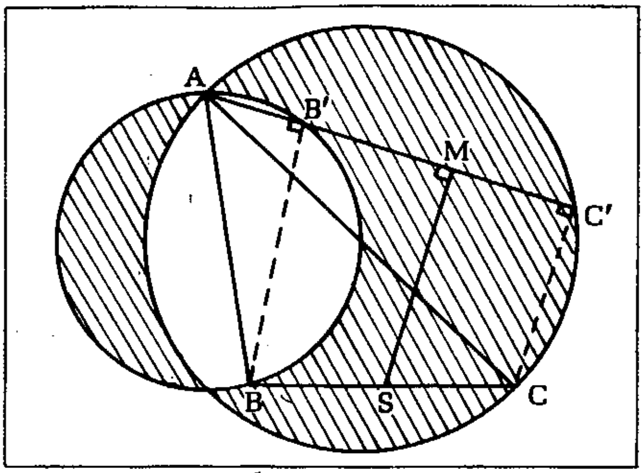
در اکثر مکان‌های هندسی به کار برد. به نظر اینجانب تعمیم مکانهای هندسی با این روش برای یادگیری هندسه بهتر از حل مسائل مشکلی است که به دانش‌آموزان می‌دهیم و خود ناچاریم آن مسائل را از اول تا آخر برای آنها حل کنیم که راه حل آن را به حافظه بسپارند.

اینك چند مسأله هندسه المپیاد را حل می‌کنیم.

(مسأله هندسه ۱۹۶۳).

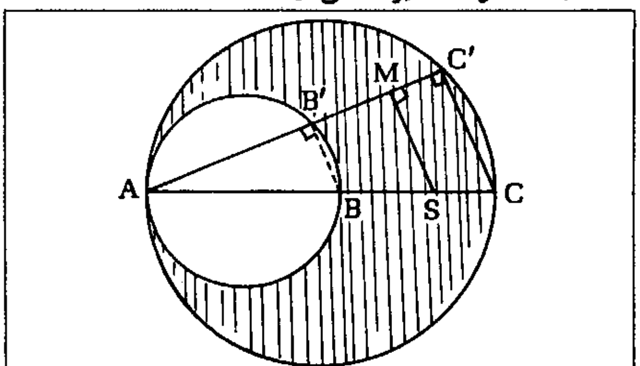
مسأله. نقطه A و پاره خط BC مفروضند، مکان نقطه M را به دست آورید بطوری که M رأس زاویهٔ قائمه‌ای باشد که یك ضلع آن از A می‌گذرد و دیگری پاره خط BC را قطع کند.

حل. دو دایره به قطرهای AB و AC رسم می‌کنیم قسمت هاشور خورده مکان نقطه M است که یك ضلع آن از A گذشته و ضلع دیگر BC را در نقطه S قطع می‌کند.

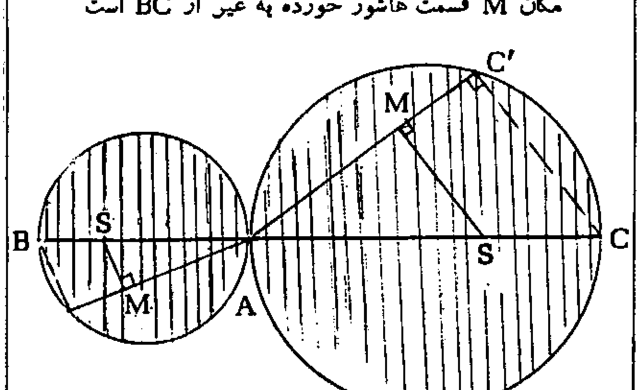


برای اثبات AM را وصل می‌کنیم تا دو دایره را در B' و C' قطع کند و B' را به B و C' را به C وصل می‌کنیم. بطوری که در شکل ملاحظه می‌شود BB' و CC' بر AM عمودند. چون MS بنا به فرض بر AM عمود است MS که موازی با CC' و BB' است BC را در S قطع می‌کند (قضیه تالس). برای هر دو قسمت هاشور خورده حکم صادق است.

در حالت خاصی که نقطه A روی خط BC باشد شکل مسأله به دو صورت زیر در می‌آید:



مکان M قسمت هاشور خورده به غیر از BC است



مکان M قسمت هاشور خورده به غیر از AC و AB است

II- در مسائل المپیاد به مسائلی برخورد می‌کنیم که برای

حل آنها از معادله برداری خط و صفحه استفاده می‌شود به این وسیله می‌توان مسائلی را حل کرد که حل آنها به روش هندسی فوق‌العاده مفصل و مشکل است.

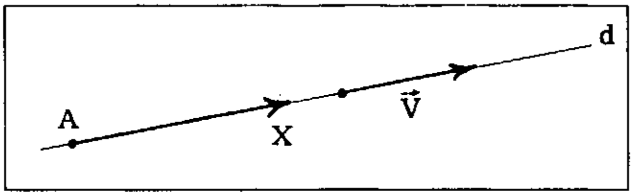
با توجه به اینکه معادله خط و صفحه در هندسه تحلیلی سال چهارم جزء برنامه است یاد دادن معادله برداری خط و صفحه در این کلاس تفاوتی با راه تحلیلی آن ندارد.

معادله برداری خط در صفحه و فضا.

در هندسه تحلیلی برای تعیین معادله خط، مختصات یك نقطه ازخط و پارامترهای هادی آن کفایت می‌کند. با روش برداری بردار مکان یك نقطه از خط و بردار هادی آن را به کار می‌بریم. بردار هادی خط، برداری مخالف صفر در امتداد آن خط است که تصاویر آن روی محورهای مختصات پارامترهای هادی خط می‌باشند.

اگر A بردار مکان نقطه A از خط و V بردار هادی آن باشد. منظور از معادله برداری خط این است که X بردار مکان هر نقطه از خط را از روی A بردار مکان یك نقطه از آن و V بردار هادی آن تعیین کنیم.

شرط لازم و کافی برای آنکه X بردار مکان نقطه‌ای از خط باشد این است که $\frac{AX}{V}=t$ که t عددی حقیقی و دلخواه است.



از تساوی اخیر معادله خط در فضا و صفحه به‌دست می‌آید

$$AX=tV \quad \text{یا} \quad \boxed{X=A+tV}$$

معادله برداری صفحه در فضا.

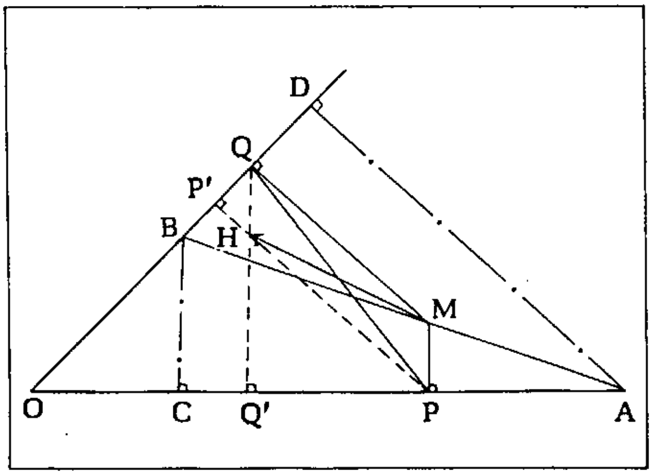
در هندسه تحلیلی خوانده‌ایم که اگر A بردار مکان نقطه‌ای از صفحه P و n بردار عمود بر صفحه و X نقطه دلخواه ازصفحه فرض شود. $n \cdot Ax=0$ (ضرب داخلی دو بردار است) و بعکس از $n \cdot AX=0$ که در آن n بردار عمود بر صفحه و A بردار مکان نقطه‌ای از صفحه است نتیجه می‌شود که X بردار مکان نقطه‌ای از صفحه است.

بنابراین معادله برداری صفحه چنین نوشته می‌شود.

$$n \cdot (X-A)=0$$

(مسأله هندسه، ۱۹۵۶)

مسأله. در مثلث OAB داریم $\widehat{AOB}=\alpha$ ، $\alpha<90^\circ$ از نقطه دلخواه M واقع بر ضلع AB عمود MP را بر OA و عمود MQ را بر OB رسم می‌کنیم و H را محل برخورد ارتفاعهای مثلث OPQ می‌گیریم. مطلوبست مکان هندسی نقطه H وقتی که نقطه M روی پاره خط AB حرکت کند.



حل. از تساویهای

$$\frac{AM}{AB}=\frac{DQ}{DB} \quad \text{و} \quad \frac{AM}{AB}=\frac{AP}{AC}$$

بنا به قضیه تالس و تساوی برداری $MP+MQ=MH$ و فرض $\frac{AM}{AB}=t$ (t عدد حقیقی دلخواه است) داریم:

$$\frac{AM}{AB}=t \Longrightarrow M-A=t(B-A)$$

$$\Longrightarrow M=A(1-t)+tB$$

$$\frac{AP}{AC}=t \Longrightarrow P-A=t(C-A)$$

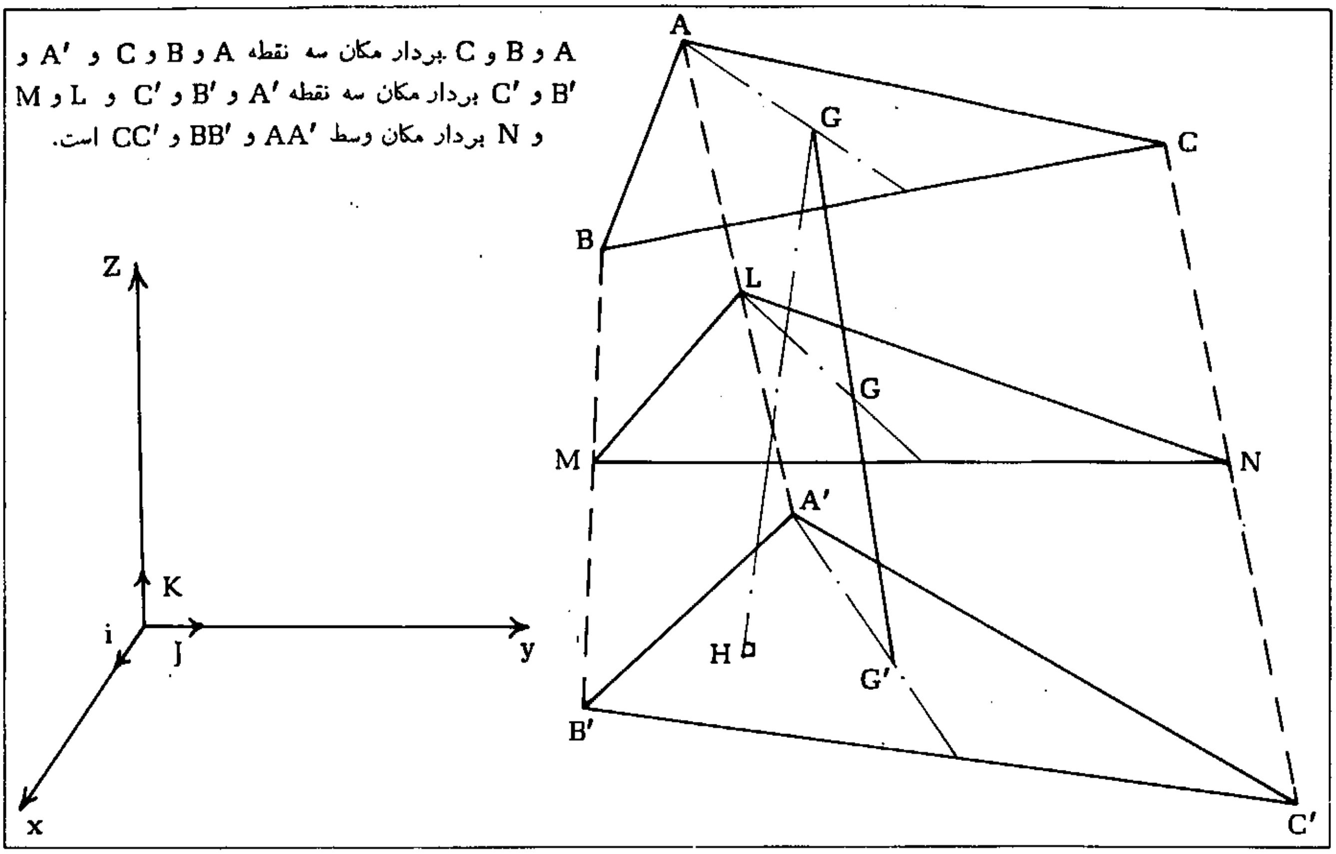
$$\Longrightarrow P=(1-t)A+tC$$

$$\frac{DQ}{DB}=t \Longrightarrow Q-D=t(B-D)$$

$$\Longrightarrow Q=(1-t)D+tB$$

$$MP+MQ=MH \Longrightarrow H=P+Q-M$$

$$H=A(1-t)+tC+D(1-t)$$
$$+tB-A(1-t)-tB$$



$$H-D=t(C-D) \Longrightarrow DH=tDC$$

یعنی مکان H خط DC است.
(مسأله هندسه، ۱۹۶۱.)

مسأله. صفحه P و سه نقطه غیر واقع بر یك خط A و B و C را در یك طرف صفحه مزبور درنظر میگیریم. بطوری که صفحه تشکیل شده از A و B و C با صفحه P موازی نباشد. در صفحه P سه نقطه دلخواه اختیار کنید بطوری که مثلث $A'B'C'$ را بسازند. اگر L و M و N به ترتیب سطحهای AA' و BB' و CC' بوده و G مرکز سطح LMN باشد (حالتهائی را که A' و B' و C' و L و M و N تشکیل مثلث نمی‌دهند را در نظر نمی‌گیریم) مکان نقطه G را هنگامی که A' و B' و C' در صفحه P تغییر می‌کنند به دست آورید.

حل.

$$L=\frac{A+A'}{۲} \text{ و } M=\frac{B+B'}{۲} \text{ و } N=\frac{C+C'}{۲}$$

$$G=\frac{A+B+C}{۳} \text{ و } G'=\frac{A'+B'+C'}{۳}$$

$$G=\frac{L+M+N}{۳} \Longrightarrow$$

$$G=\frac{\frac{A+A'}{۲}+\frac{B+B'}{۲}+\frac{C+C'}{۲}}{۳}$$

$$=\frac{A+B+C}{۶}+\frac{A'+B'+C'}{۶} \Longrightarrow$$

$$G=\frac{۳G+۳G'}{۶}=\frac{G+G'}{۲}$$

تساوی فوق نشان می‌دهد که G وسط GG' است و فاصله G از صفحه P یا x o y نصف فاصله G از صفحه P است یعنی $G=\frac{h}{۲}$ پس مکان هندسی نقطه G مرکز ثقل مثلث MNL صفحه‌ای است به فاصله $\frac{h}{۲}$ از صفحه P که h فاصله G از صفحه P است.

III- توجه به هندسه فضائی و مخصوصاً مسائل آن. در مسائل المپیاد به هندسه فضائی بیش از آنچه اینجانب تصور می‌کردم توجه شده است. در چهاروجهی که ساده‌ترین چندوجهی‌ها است (مانند مثلث در هندسه مسطحه) مسائل جالبی دیده می‌شود که در فرصت مناسب آنها را در مجله مطرح خواهیم کرد.

انتگرالگیری

جواد لالی

امروزه، در حسابان، نظریه انتگرالگیری با دو روش کاملاً متمایز بیان می‌شود. روش اول، بیان‌آن از طریق تابع اولیه است،و آن یافتن تابعی‌است که مشتق‌آن داده شده است. روش دوم، به‌کمك مجموع چند جمله عددی است و مبنای این روش پیدا کردن مجموع یك سری عددی است. روش اول، به انتگرال نامعین؛ و روش دوم به انتگرال معین منجر می‌شود. اگر چه این دو روش به طرق کاملاً متمایز عرضه می‌شوند، اما، عجیب آن است که رابطه بسیار نزدیکی بین آنها وجود دارد، این نزدیکی به‌کمك قضیه‌ای موسوم به «قضیه اساسی حساب انتگرال» مشخص می‌شود.

اینك، دو روش مورد نظر را بررسی می‌کنیم.

انتگرال نامعین

همانطوری‌که قبلاً متذکر شدیم، هدف اصلی دراین روش یافتن تابعی است که مشتق‌آن داده شده است. در حقیقت، محاسبه انتگرال تابع f بر بازهٔ $[a, b]$؛ یعنی، دستیابی به تابعی مانند F است که به ازاء هر x از $[a, b]$ داشته باشیم:

$$F'(x)=f(x)$$

بنابراین، برای پیداکردن چنین تابعی، باید روشی اتخاذ شود که مبتنی برعکس عمل مشتقگیری باشد.

تعریف. فرض‌کنیدکه تابع f بر $[a, b]$ تعریف شده باشد. تابع F را یك تابع اولیه f خوانیم درصورتی‌که به ازاء هر x از $[a, b]$، $F'(x)$ موجود و مساوی $f(x)$ باشد.

از تعریف فوق دو نتیجه مهم حاصل می‌شود؛ یکی اینکه تابع اولیه F بر $[a, b]$ پیوسته است. زیرا، در هر نقطه از بازه مذکور مشتقپذیر است. دیگر اینکه، تابع اولیه منحصر به فرد نیست. اثبات چنین حکمی نیاز به قضیهٔ زیر است:

قضیه ۱. فرض‌کنید f تابعی بربازه $[a, b]$ باشد. در این صورت، شرط لازم و کافی برای اینکه f براین بازهٔ ثابت‌باشدآن است‌که به‌ازای هر x از $[a, b]$، $f'(x)=0$.

برهان. اگر f ثابت باشدآنگاه به ازاء هر x از $[a, b]$، $f'(x)=0$. اینك، عکس قضیه را ثابت می‌کنیم. فرض‌کنید که x_0 نقطه‌ای از بازه $(a, b]$ باشد. بنابر قضیه میانگین‌در مورد مشتق x_1ای از بازه (a, x_0) موجود است‌که

$$f(x_0)-f(a)=(x_0-a)f'(x_1)$$

چون، به ازاء هر x، بالاخص x_1، $f'(x_1)=0$. پس $f(x_0)=f(a)$. یعنی، f بر $[a, b]$ تابعی ثابت است.

حال ثابت می‌کنیم تابع اولیه منحصر به فرد نیست.

قضیه ۲. فرض‌کنید F یك تابع اولیه f باشد. در این صورت، شرط لازم و کافی برای اینکه G یك تابع اولیه f باشدآن است‌که عدد ثابتی مانند C موجود باشد بطوری‌که

$$G(x)=F(x)+C$$

برهان. اثبات یك طرف‌آن بدیهی است. اینك، فرض کنید G یك تابع اولیه f باشد. بنابر تعریف،

$$G'(x)=f(x)=F'(x)$$

یا

$$G'(x)-F'(x)=0$$

از طرفی، بنابر قضیه ۱، عدد ثابتی مانند C موجود است‌که

$$G(x)-F(x)=C$$

یا

$$G(x)=F(x)+C$$

با توجه به قضیه فوق، کلیه توابع اولیه f، به صورت $F+C$ است و این مطلب را بدین صورت می‌نویسند

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

وآن را انتگرال نامعین f می‌نامند.

اینك این سؤال مطرح می‌شودکه توابع تحت چه شرایطی دارای تابع اولیه‌اند. شرط کافی در این زمینه چنین است.

اگر f بر بازه $[a,b]$ پیوسته، صعودی، و یا نزولی باشد آنگاه f دارای یك تابع اولیه است. البته، این شرط لازم نیست؛ یعنی، اگر f دارای تابع اولیه باشد نمی‌توان گفت که $f(x)$ پیوسته، صعودی، و یا نزولی است. بنابراین، اگر f دارای تابع اولیه باشد، طبق قرار داد، عبارت $\int f(x)dx$ را یك تابع اولیه f می‌نامند وکلیه توابع اولیه f به صورت

$$\int f(x)dx+C$$

است.

مثال ۱. تابع $F(x)=\ln x$ بر بازه $(0,\infty)$ پیوسته و مشتق آن $\frac{1}{x}$ است. پس، بر این بازه F یك تابع اولیه $f(x)=\frac{1}{x}$ است؛همچنین تابع$F(x)=(\ln x+\sqrt{x^2+1})$ بر بازه $(-\infty,\infty)$ پیوسته ومشتق‌آن $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ است.

پس،

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$$

مشتق تابع $tg\,x$ بر بازه $\left(\frac{-\pi}{2}\ و\ \frac{\pi}{2}\right)$ برابر $\frac{1}{\cos^2 x}$ است.

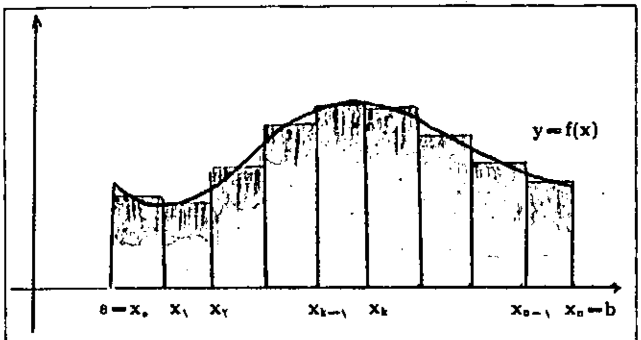
بنابراین،

$$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=tg\,x+C$$

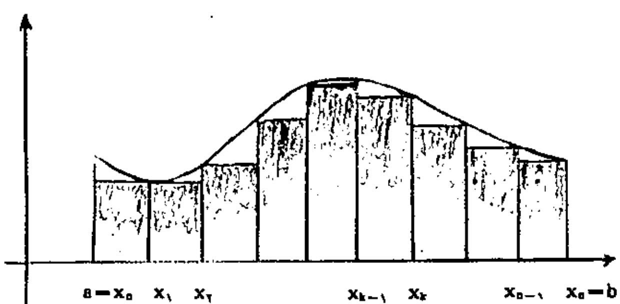
اینك، توجه خود را به سطح زیر یك منحنی معطوف می‌داریم و از این طریق روش دوم نظریه انتگرالگیری را بیان می‌کنیم تا بتوانیم، به‌کمك آن، انتگرال معین را تعریف کنیم.

انتگرال معین

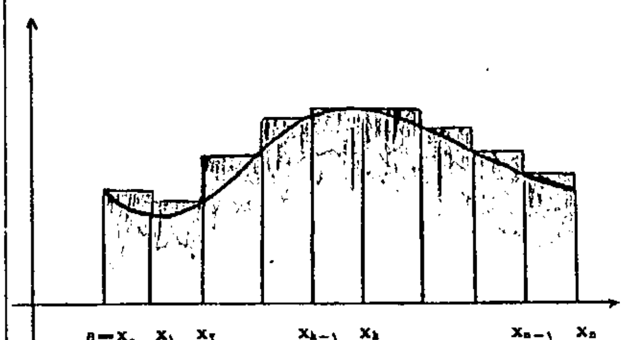
جهت سادگی مطلب، فرض کنید که f بر $[a,b]$ پیوسته باشد، و به ازاء هر x از این بازه، $f(x)\geqslant 0$. فرض کنید می‌خواهیم سطح S، محصور به منحنی $y=f(x)$ و محور xها و خطوط $x=a$ و $x=b$، را محاسبه‌کنیم (شکل ۱). بازه $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. بنابراین فاصله دو تقسیم متوالی برابر است با $\Delta x=\frac{b-a}{n}$. اگر نقاط تقسیم را x_1، x_2، ...، x_{n-1} بنامیم. خواهیم داشت



(شکل ۱)



(شکل ۲)



(شکل ۳)

$$x_0 = a$$
$$x_1 = a+\Delta x$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1} = a+(n-1)\Delta x$$
$$x_n = a+n\Delta x = b$$

مجموعه $P=\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ را یك افراز منظم بازهٔ $[a, b]$ می‌نامند، و هر یك از $[x_{k-1}, x_k]$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ را زیر بازه kام این افراز گویند. حال اگر t_k یك نقطه دلخواهی از زیر بازه kام باشد؛ یعنی، $x_{k-1} \leqslant t_k \leqslant x_k$، دقیقاً n مستطیل حاصل می‌گردد، که قاعده‌آنها Δx وارتفاع‌آن $f(t_k)$ است. هریك ازمساحتهای این مستطیل‌هارا یك واحد سطحی می‌نامند. مجموع مساحتهای این مستطیلها یك مقدار تقریب برای مساحت محصور S است، و حاصل این مقدار چنین است؛

$$(1) \quad S(p, f) = f(t_1)\Delta x + f(t_2)\Delta x + \dots + f(t_n)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x$$

$S(p, f)$ را مجموع ریمان f متناظر با افراز P می‌خوانند. حال اگر t_k مقادیر مختلفی از زیر بازه kام را اختیار کند، مجموع ریمان‌آن، یك مقدار تقریب برای سطح محصوراست. همان‌طوری‌که درشکل ملاحظه می‌کنید، با انتخاب t_k، قسمتی از مساحت سطح محصور جزء هیچیك از مستطیل‌ها نیست، ولی، درمقابل، مستطیل‌ها جزئی ازمساحت خارج سطح محصور را شامل‌اند. بنابراین، با انتخاب مناسبی برای t_kها، می‌توان مجموع ریمان‌را به‌گونه‌ای تشکیل دادکه مقدارآن دقیقاً برابر سطح محصور باشد: اینك، می‌خواهیم یك تقریب نقصانی و اضافی برای سطح محصور S به دست آوریم. چون f بر $[a, b]$ پیوسته است، پس، f بر هر زیر بازه‌آن نیز پیوسته خواهد بود. از طرفی، هرتابع پیوسته بربازه بسته، ماکزیموم و مینیموم خود را اختیار می‌کند. اگر ماکزیموم و مینیموم f را بر زیر بازه $[x_{k-1}, x_k]$، به ترتیب، M_k و m_k بنامیم آنگاه c_k و d_kای از زیر بازه kام موجود است که $M_k=f(c_k)$ و $m_k=f(d_k)$. با انتخاب t_k برابر c_k و d_k، دو مجموع جدیدی به دست می‌آید که‌آنها را «مجموعهای داربوئی» می‌نامند و آنرا با نمادهای ذیل نمایش می‌دهند؛

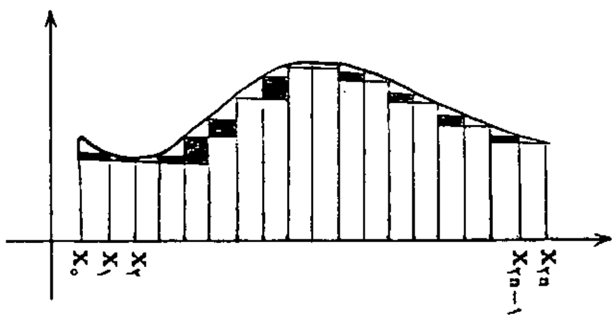
$$(2) \quad U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$$

$$(3) \quad L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} f(d_k)\Delta x$$

مجموعهای فوق را، به ترتیب، مجموع بالایی و مجموع پائینی f متناظر افراز P می‌گویند. اگر به‌شکل (۲) و (۳) مراجعه کنیم‌درمی‌یابیم که مجموع‌بالایی عبارت‌از مجموع مستطیل‌های محیطی؛ و مجموع پائین شامل همه مستطیل‌های محاطی است و حاصل مجموعهای فوق تقریبهای اضافی و نقصانی سطح محصور است و چون، به ازاء هر t_k از زیر بازه kام؛ $f(d_k) \leqslant f(t_k) \leqslant f(c_k)$، پس،

$$(4) \quad L(P, f) \leqslant S(P, f) \leqslant U(P, f).$$

اینك،این موضوع را بررسی می‌کنیم که اگر نقاطی به مجموعه افراز اضافه‌کنیم، تغییراتی که در مجموعهای فوق حاصل می‌گردد چگونه است. جهت بررسی بیشتریکی‌از مجموعهای فوق را؛ مثلاً، مجموع بالایی را، در نظر می‌گیریم. و تعداد نقاط افراز P را افزایش می‌دهیم؛ به عنوان مثال، تعداد نقاط را دو برابر می‌کنیم.



(شکل ۴)

بالنتیجه، تعداد مستطیل‌ها دو برابر می‌شود، طول قاعده این مستطیل‌ها نصف شده و ارتفاع بعضی‌از مستطیل‌ها افزایش می‌یابد. همانطوری‌که در شکل (۴) نشان داده شده است، قسمتهایی از صفحه‌که سیاه شده است، جزئی از سطح محصور به منحنی بوده است، که در «مجموع پائینی» قبلی به حساب نمی‌آمد، درصورتی‌که در افراز جدید، جزء مستطیل‌های محاطی است واین موجب می‌شودکه«مجموع پائینی» افزایش یابد. اگر همین عمل را با مستطیل‌های بالایی انجام می‌دادیم

نتایج مشابهی را به دست می‌آوردیم، با این تفاوت، که مجموع بالایی کاهش می‌یافت. نتیجه مهمی که از این عمل حاصل می‌شود این است که؛ اگر نقاط تقسیم افراز P را زیاد کنیم، «مجموع بالایی» کاهش و «مجموع پائینی» افزایش می‌یابد، و به تدریج این دو مجموع به مساحت زیر منحنی نزدیك می‌شود. اگر f تابعی مناسب باشد؛ یعنی، f پیوسته یا صعودی و یا نزولی(کراندار) باشد، می‌توان ثابت کرد که حد این دو مجموع، وقتی که $n \to \infty$، یکسان و برابر سطح محصور است. و بنابر نامساوی (۴)، $S(P, f)$ نیز، وقتی که $n \to \infty$، به سطح محصور میل می‌کند. عکس آن نیز درست است؛ یعنی، اگر مجموع ریمان f نظیر افراز P، وقتی که $n \to \infty$، به مقدار سطح محصور میل کند آنگاه مجموع بالایی و پائینی به حد یکسانی میل می‌کنند.

تعریف. فرض کنید تابع f بر بازهٔ بسته $[a, b]$ پیوسته و بر این بازه نامنفی باشد. و P افراز منظمی از بازه $[a, b]$ باشد و $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. همچنین، فرض کنید که $f(c_k)$ و $f(d_k)$ بترتیب ماکزیموم و مینیموم f برزیر بازه kام $[x_{k-1}, x_k]$ باشد. دراین صورت، گوییم f بر $[a, b]$ انتگرالپذیراست در صورتی که عددی مانند S موجود باشد که

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x = S$$

و

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(d_k)\Delta x = S$$

عدد S را انتگرال معین f بر بازه $[a, b]$ خوانند وآن را با نماد

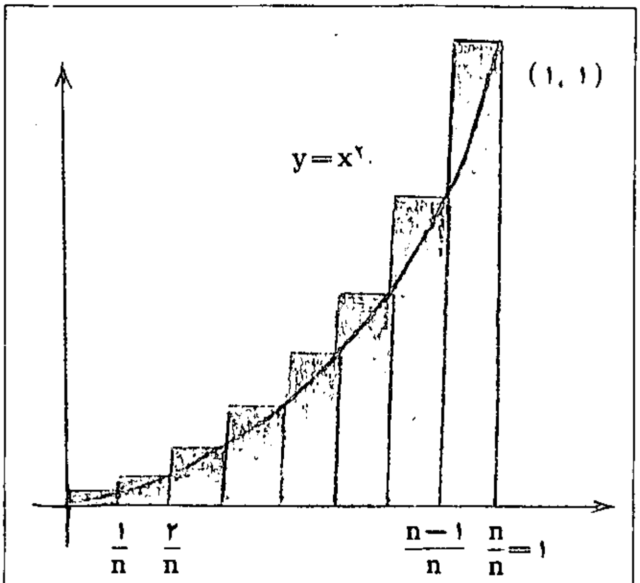
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

نمایش می‌دهند.

تبصره. نماد انتگرال $\int$، شکل تغییر یافته حرف لاتین S است، که این حرف از حروف اول کلمه لاتین SUMMA است، و کلماتی که ازاین کلمه مشتق می‌شود به معنی جمع است. بنابراین، این نماد رابطه نزدیکی را که بین انتگرالگیری و جمع کردن وجود دارد یادآوری می‌کند.

مثال ۲. به‌کمك مجموع بالایی، ثابت کنید

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$



(شکل ۵)

حل. تابع $y = x^2$ بر بازه $[0, 1]$ پیوسته و صعودی است، اگراین بازه را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم، خواهیم داشت،

$$\Delta x = \frac{1}{n}$$

و

$$x_0 = 0 ,\ x_1 = \frac{1}{n} ,\ \dots ,\ x_{n-1} = \frac{n-1}{n} ,\ x_n = 1$$

چون f بر هر زیر بازه $[x_{k-1}, x_k]$ صعودی‌است. بنابراین، ماکزیموم خود را، براین زیر بازه‌ها، درانتهای بازه می‌گیرد. بالنتیجه

$$f(c_k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{k^2}{n^2}$$

از طرفی، مجموع بالایی f متناظر افراز

$$P = \left\{ 0 , \frac{1}{n} , \frac{2}{n} , \dots , \frac{n-1}{n} , 1 \right\}$$

چنین است؛

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}\times\frac{1}{n}=\frac{2}{n^3}\left(1^2+2^2=\cdots+n^2\right)$$

$$=\frac{1}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

حال اگر $n \to \infty$، سمت چپ تساوی فوق به انتگرال معین میل می‌کند و سمت راست آن و عدد $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. بنابراین،

$$\int_0^1 x^2dx=\lim\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\Delta x=\frac{1}{3}$$

یکی از کاربردهای مهم انتگرال محاسبه مقدار بعضی‌از سریهای عددی است که با به کارگیری تعریف انتگرال بسادگی می‌توان مجموع بعضی‌از سریها را به دست‌آورد. مثال ذیل نمونه‌ای از آنست.

مثال ۳. به‌کمك تعریف انتگرال معین، ثابت‌کنید

$$\lim n\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right]=\frac{1}{2}$$

حل. عبارت تحت حد را S_n می‌نامیم. بنابراین،

$$S_n=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\times\frac{1}{n}$$

با نگاهی به عبارت تحت سیگما و دستورهای (۲) و (۳)، در می‌یابیم که؛ $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$ و $f(x)=\frac{1}{x^2}$ و

$$x_1=a+\Delta x=1+\frac{1}{n}$$

$$x_2=a+2\Delta x=1+\frac{2}{n}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n=a+n\Delta x=1+\frac{n}{n}$$

بنابراین $a=1$ و $b=2$. چون f بر بازه $[1, 2]$ پیوسته و نزولی است. بنابراین، مینیموم تابع، بر هر زیر بازه، نقطه انتهایی‌آن است. از اینجا نتیجه می‌شود که S_n همان مجموع پائینی f نظیر افراز

$$P=\left\{1+\frac{1}{n}, 1+\frac{2}{n}, \cdots, 1+\frac{n-1}{n}, 2\right\}$$

است و

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(d_k)\Delta x$$

$$=\int_1^2\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_1^2=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

توجه‌کنید‌که در حل مسأله از این حکم استفاده‌کرده‌ایم؛ که اگر f تابعی پیوسته بر بازه $[a, b]$ باشد، f براین بازه انتگرالپذیر است. اثبات چنین حکمی نیاز به مقدمات بیشتری دارد و علاقمندان می‌توانند درکتاب مرجع [۳]، برهان‌آن را مشاهده‌کنند.

تا به حال، جهت سادگی مطلب، تابع f را پیوسته درنظر گرفتیم و انتگرالپذیری f را تعریف نمودیم. اینك می‌خواهیم انتگرالپذیری را برای تابع دلخواه f تعمیم دهیم.

فرض‌کنید‌که f بر $[a, b]$ تعریف شده باشد و x_0 ، ...، x_n نقاطی از بازه $[a, b]$ باشد‌که در شرط

$$x_0=a<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

صدق‌کند. مجموعه

$$P=\{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$$

را یك افراز از بازه $[a, b]$ خوانند و طول زیر بازه kام را چنین تعریف می‌کنند:

$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}.$$

ازآنجائی‌که هر مجموعه متناهی دارای ماکزیموم است، پس ماکزیموم طول زیر بازه‌ها موجود است وآن را نرم افراز P

می‌نامند و با نماد زیر نمایش می‌دهند

$$\|P\| = \mathrm{Max}\{\Delta x_k \mid 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

فرض کنید که

$$S(P, f) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$$

که $x_{k-1} \leqslant t_k \leqslant x_k$. در این صورت، انتگرالپذیری f بر $[a, b]$ را چنین تعریف می‌کنیم:

تعریف. گوئیم f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر است درصورتی که عددی مانند S موجود باشد بطوری‌که به ازاء هر افراز P و هر t_k،

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = S$$

به عبارت دیگر، تابع f را بر $[a, b]$ انتگرالپذیر خوانیم درصورتی‌که عددی مانند S موجود باشد که

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall P \forall t_k (t_k(t_k \in [x_{k-1}, x_k], \|P\| < \delta \Longrightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k - S\right| < \varepsilon)$$

تا به حال، مثالهایی‌که در رابطه با انتگرالپذیری یك تابع هریك ارائه دادیم. این بازه را به قسمتهای مساوی تقسیم کردیم، با توجه به تعریف جدید انتگرالپذیری، نیازی به تقسیمات مساوی نیست.

مثال ۴. فرض کنید $\beta > 0$، با توجه به تعریف انتگرال، ثابت کنید

$$\int_0^b x^\beta dx = \frac{1}{\beta+1}[b^{\beta+1} - a^{\beta+1}].$$

حل. بازه $[a,b]$ را به n قسمت، به گونه‌ای، تقسیم می‌کنیم که نقاط تقسیم تشکیل یك تصاعد هندسی بدهند. یعنی، اگر $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ قدر نسبت تصاعد هندسی باشد،

$$x_0 = a$$
$$x_1 = aq$$
$$\vdots$$
$$x_n = aq^n = b$$

اینك، t_k را ابتدا زیر بازه $[aq^{k-1}, aq^k]$ اختیار می‌کنیم. بنابراین،

$$\begin{aligned} S(P, f) &= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (aq^{k-1})^\beta (aq^k - aq^{k-1}) \\ &= a^{\beta+1}(q-1)\sum_{k=1}^{n} q^{(\beta+1)(k-1)} \\ &= a^{\beta+1}(q-1) \times \frac{q^{(\beta+1)n} - 1}{q^{\beta+1} - 1} \\ &= a^{\beta+1}(q-1) \times \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\beta+1} - 1}{q^{\beta+1} - 1} \\ &= (b^{\beta+1} - a^{\beta+1}) \frac{q-1}{q^{\beta+1} - 1} \\ &= \frac{b^{\beta+1} - a^{\beta+1}}{q^\beta + q^{\beta-1} + \cdots + q + 1} \end{aligned}$$

چون $\lim_{n\to\infty} q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = 1$، پس، اگر $n \to \infty$ آنگاه $\|P\| \to 0$. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} S(P, f) = \lim_{n\to\infty} \frac{b^{\beta+1} - a^{\beta+1}}{q^\beta + q^{\beta-1} + \cdots + q + 1}$$

$$\int_a^b x^\beta dx = \frac{1}{\beta+1}(b^{\beta+1} - a^{\beta+1})$$

مراجع

[۱] حساب دیفرانسیل و هندسه تحلیلی، تألیف جرج ب. توماس، ترجمه علی‌اکبر جعفریان و ابوالقاسم میامئی.

[۲] حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، تألیف لوئیس لیتهله، ترجمه بهزاد رزافی، کاظمی و ناظمی.

[۳] A first Course in Mathematical Analysis J. C. Burkill.

این کتاب ترجمه شده و درآینده نزدیك به بازار عرضه می‌گردد.

قضیه‌ای در ارتباط با قضیه لیوویل

هاشم سازگار دانشجوی مکانیک دانشگاه مشهد

آقای هاشم سازگار، طی نامه‌ای، قضیه‌ای در ارتباط با قضیه لیوویل طرح و برهانی برای آن ارائه داده بود. برهان ایشان در اختیار همکارمان آقای دکتر آدینه محمد نارنجانی قرار گرفت، ایشان تغییرات جزئی در برهان آن دادندکه ذیلاً این قضیه با برهان آن ارائه می‌گردد. جا داردکه از آقای دکتر نارنجانی که همواره در ویرایش علمی مقالات نظریهٔ اعداد ما را یاری می‌دهند صمیمانه تشکر کنیم.

سردبیر

یکی از قضایای جالب نظریه مقدماتی اعداد قضیه ویلسون است. این قضیه چنین است که اگر r عدد اول دلخواهی باشد آنگاه m ی موجود است که

$$(p-1)!+1=p^m$$

اینك، این سئوال مطرح می‌شودکه آیا طرف راست تساوی فوق را می‌توان به صورت p^m نوشت. به عبارت دیگر، آیا m ی موجود است، که در قضیه ویلسون،

$$(2-1)!+1=2 \quad \text{و}$$

$$(3-1)!+1=3$$

$$(5-1)!+1=5^2 \quad ,$$

صدق کند.

درصورتی‌که p عدد اول بزرگتر از ۵ باشد، چنین حکمی برقرار نیست. لیوویل ریاضیدان فرانسوی که‌کارهای زیادی در نظریه اعداد دارد، در این زمینه، حکمی بدین صورت دارد.

هیچ عدد اول بزرگتر از ۵، مانند p، وجود نداردکه به ازاء عدد طبیعی مانند m،

$$(p-1)!+1=p^m$$

حکم فوق را می‌توان به صورت ذیل نیز بیان کرد:

قضیه لیوویل. اگر p عددی اول و بزرگتر از ۵ باشد آنگاه به ازاء هر عدد طبیعی m،

$$(p-1)!+1 \neq p^m$$

اثبات این قضیه در صفحه ۵۱۶، جلد دوم، تئوری اعداد، تألیف دکتر غلامحسین مصاحب آمده است.

اینك، ما قضیه‌ای مشابه قضیه فوق به صورت ذیل بیان می‌کنیم.

قضیه. اگر $-p+4 < t < p$، که در آن، t عدد فرد تا صفر و p عدد اول بزرگتر از ۲ باشد، آنگاه به ازاء هر عدد طبیعی m،

$$(p+t)!-t^m \neq p^m$$

برهان. ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم. اگر m عدد مرکب وغیراز ۴ باشدآنگاه $m|(m-1)!$.

برهان. فرض‌کنیدکه m مرکب باشد. بدیهی است که اگر $m=4$ آنگاه

$$4\times(m-1)!=3!=6$$

حال اگر m مرکب و غیر از ۴ باشدآنگاه دو عدد طبیعی، مانند a و b، موجود است که

$$m=ab \quad \text{و} \quad 1<a<m \quad \text{و} \quad 1<b<m$$

دو حالت تشخیص می‌دهیم:

حالت اول، $a\neq b$ در این صورت a و b دو عامل متمایز $(m-1)!$ است پس

$$m=ab\,|\,(m-1)!$$

حالت دوم، $a=b$ چون m غیراز ۴ است، پس، $a>2$. بنابراین، $m=a^2>2a$، ازاینجا نتیجه می‌شودکه a و $2a$ دو عامل متمایز $(m-1)!$ است. بالنتیجه،

$$m=a^2\,|\,(m-1)!$$

اینك، به اثبات قضیه می‌پردازیم.

فرض‌کنیدکه حکم قضیه برقرار نباشد؛ یعنی، m ی موجود باشدکه

$$(p+t)!-t^m=p^m \qquad (1)$$

اگر $m=1$، از تساوی فوق نتیجه می‌شودکه

$$(p+t-1)!=1$$

و این با فرض که $p+t>4$ تناقض دارد. فرض کنید $m>1$، از (۱) نتیجه می‌شود که

(۲) $p+t \mid d^m+t^m$

برای m دو حالت رخ می‌دهد.

حالت اول، m زوج باشد. در اینحالت

$$p^m-t^m=[(p+t)-t]^m-t^m$$
$$=(p+t)^m-m(p+t)^{m-1}t$$
$$+\cdots-m(p+t)t^{m-1}$$

از عبارت فوق نتیجه می‌شود که

(۳) $p+t \mid p^m-t^m$

از (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که

(۴) $p+t \mid 2p^m$

p و t نسبت به هم اولند بنابراین، $(p+t,\ p^m)=1$. از اینجا با توجه به (۴)، نتیجه می‌شود $p+t \mid 2$، و این با این فرض که $p+t>4$ تناقض دارد.

حالت دوم k فرد باشد. در چنین حالتی،

$$p^m+t^m=[(p+t)-t]^m+t^m=$$
$$=(p+t)^m-m(p+t)^{m-1}t$$
$$+\cdots+m(p+t)t^{m-1}$$

چون $m>1$، از تساوی فوق نتیجه می‌شود

(۵) $(p+t)^2 \mid p^m+t^m-m(p+t)t^{m-1}$

چون $p+t$ زوج و بزرگتر از ۴ است، بنابر لم،

(۶) $p+t \mid (p+t-1)!$

یا $(p+t)^2 \mid (p+t)!$. از اینجا و (۱) نتیجه می‌شود که

(۷) $(p+t)^2 \mid p^m+t^m$,

و از (۵) و (۷) نتیجه می‌شود که

$$(p+t)^2 \mid m(p+t)t^{m-1}$$

چون

$$(p+t,\ t)=1$$

پس،

$$((p+t)^2,\ t^{m-1})=1$$

بنابراین

$$(p+t)^2 \mid m(p+1)$$

یا

(۸) $p+t \mid m$

چون $m+t$ زوج و m فرد است. پس رابطه (۸) غیرممکن است. با این تناقض حکم ثابت می‌گردد.

مسأله‌ای در مورد «عادکردن»

آقای علیرضا تفنگچی، طی نامه‌ای، این سؤال را مطرح کرده‌اند: مطلوبست تعیین عدد صحیح k بطوری که اگر $a \mid b$، آنگاه $a+k \mid b+k$. پاسخ این سؤال را همکار ارجمند آقای محمد تقی دیبائی عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت معلم به شرح زیر در اختیار مجله قرار دادند. جا دارد که از همکاری صمیمانه ایشان با مجله تشکر نمائیم.

سردبیر

محمد تقی دیبائی

قضیه. فرض کنیم a و b دو عدد صحیح متمایز باشند. در این صورت تعداد اعداد صحیح k که $a+k \mid b+k$ برابر است با دو برابر تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت $a-b$.

برهان. فرض کنیم a و b دو عدد صحیح باشند، $a\neq b$، و k عدد صحیحی باشد بطوری که $a+k \mid b+k$. بنابراین، عدد صحیحی چون t وجود دارد بطوری که

$$b+k=(a+k)t$$

چون $a\neq b$، پس $t\neq 1$. لذا می‌توانیم بنویسیم

(۱) $k=\frac{b-at}{t-1}=\frac{b-a}{t-1}-a$

رابطهٔ فوق نشان می‌دهد که برای آنکه k عددی صحیح باشد لازم و کافی است که $t-1 \mid b-a$، یعنی $t-1$ یک مقسوم‌علیه $b-a$ باشد. بنابراین، تعداد اعداد صحیح k که در رابطهٔ (۱) صدق کند برابر است با دو برابر تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت $b-a$ (یا $a-b$).

تذکر.

۱. در قضیهٔ بالا اگر $a=b$، آنگاه برای هر $k\in Z$،

بقیه در صفحه ۳۷

کاربرد نامساویها در تعیین ماکزیمم و می‌نیمم توابع چند متغیره

ابراهیم دارابی

در توابع یك متغیره ماکزیمم و می‌نیمم از راه مشتق‌گیری بسادگی تعیین می‌شود. اما این عمل در توابع چند متغیره چندان ساده نیست. زیرا پس‌از تعیین مشتقات جزیی، حل مسأله به حل دستگاههای چند مجهولی منجر می‌شود که اکثراً ساده نیستند. ازاین‌رو، دراینجا، یکی ازکاربردهای نامساویها را که در تعیین ماکزیمم و می‌نیمم توابع چند متغیره مورد استفاده قرار می‌گیرد، بررسی می‌کنیم. برای این منظور ابتدا، به اختصار، به بعضی‌از خواص مهم نامساویها اشاره می‌کنیم و سپس به تعیین ماکزیمم و می‌نیمم توابع چند متغیره می‌پردازیم.

(۱) اگر $a>b$ و $b>c$ آنگاه $a>c$

(۲) اگر $a>b$ آنگاه، $a+m>b+m$

(۳) اگر $a>b$ آنگاه،

$$\begin{cases} am>bm & \text{اگر } m>0 \\ am<bm & \text{اگر } m<0 \end{cases}$$

(۴) اگر $a>0$، $b>0$، $x>0$ آنگاه $a^x>b^x$

یادآوری می‌کنیم که نامساوی (۴) به ازاء جمیع مقادیر x برقرار است.

ابتدا درستی‌آن را به ازاء $x=m$ که درآن m عدد صحیح و مثبت می‌باشد ثابت می‌کنیم.

$$a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+\cdots+b^{m-1})$$

هر یك از عبارات داخل پرانتز سمت راست مثبت هستند پس $a^m-b^m>0$ و یا $a^m>b^m$.

بالاخره اگر $x=\frac{p}{q}$. درآن صورت،

$$a^x-b^x=a^{\frac{p}{q}}-b^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}-\sqrt[q]{b^p}$$

اما $a^p>b^q$ (ثابت کردیم). بنابراین $\sqrt[q]{a^p}>\sqrt[q]{b^p}$

برای اینکه نامساوی را برای مقادیر اصم x ثابت‌کنیم می‌توانیم x را حد یك دنباله از اعدادگویا درنظر گرفته و سپس حد بگیریم.

(۵) اگر $a>1$ و $x>y>0$ آنگاه، $a^x>a^y$

اگر $0<a<1$ و $x>y$ آنگاه، $a^x<a^y$

اثبات این موضوع ازآنجا ناشی می‌شودکه اگر $\alpha>0$ و $a>1$ آنگاه $a^\alpha>1$ و از فرمول(۴) هم می‌توان آنرا به دست‌آورد.

(۶) اگر $x>y$ و $a>1$ آنگاه، $\log_a x>\log_a y$

اگر $x>y$ و $0<a<1$ آنگاه، $\log_a x<\log_a y$

در اینجا به دو نامساوی مهم اشاره می‌کنیم:

الف) اگر x_1 و x_2 و ... و x_n مقادیرمثبت باشند همواره داریم،

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

که به نامساوی کوشی معروف است. از اثبات آن خودداری می‌کنیم، زیرا در شماره‌های گذشته مجله رشد به‌آن اشاره شده است.

ب) فرض کنیم $x > 0$ و $x \neq 1$ و m گویا باشد.

$$\begin{cases} mx^{m-1}(x-1) > x^m-1 > m(x-1) \\ \text{اگر } m \notin (0,1)\text{،} \\ mx^{m-1}(x-1) < x^m-1 < m(x-1) \\ \text{اگر } 0 < m < 1\text{،} \end{cases}$$

اثبات. ابتدا فرض می‌کنیم $m > 1$ و $m=\frac{p}{q}$.

که درآن $p > q$ و هر دو عدد صحیح و مثبت هستند.

می‌توان ثابت کرد اگر x و p و q مثبت و p و q عدد صحیح باشند درآن صورت

$$\frac{\lambda^p-1}{p} > \frac{\lambda^q-1}{q} \qquad (\lambda \neq 1)$$

با قرار دادن

$$\lambda = x^{\frac{1}{q}} \quad \text{و یا} \quad \lambda^q = x$$

داریم.

$$x^m-1 > m(x-1)$$

با تبدیل x به $\frac{1}{x}$ در این نامساوی خواهیم داشت.

$$\frac{1}{x^m}-1 > m\left(\frac{1}{x}-1\right)$$

از ضرب طرفین نامساوی در $-x^m$ نتیجه می‌شود،

$$x^m-1 < mx^{m-1}(x-1)$$

پس اگر $m > 1$ آنگاه

$$(1) \quad mx^{m-1}(x-1) > x^m-1 > m(x-1)$$

اکنون فرض می‌کنیم $0 < m < 1$ با قرار دادن $\lambda^q = x$ و $m=\frac{q}{p}$ داریم،

$$x^{\frac{1}{m}}-1 > \frac{1}{m}(x-1)$$

با تبدیل x به x^m نتیجه می‌شود،

$$x^m-1 < m(x-1)$$

و با تبدیل x به $\frac{1}{x}$ در نامساوی اخیر و انجام تبدیلات لازم خواهیم داشت،

$$(2) \begin{cases} mx^{m-1}(x-1) < x^m-1 < m(x-1) \\ \text{اگر } 0 < m < 1 \end{cases}$$

اکنون مقادیر منفی m را درنظر می‌گیریم. با قرار دادن $m=-n$ که درآن $n > 0$ و گویا می‌باشد ثابت می‌کنیم

$$x^m-1 > m(x-1)$$

چون $n > 0$ پس $n+1 > 1$ و با استفاده از (1) داریم

$$x^{n+1}-1 < (n+1)x^n(x-1)$$

و از آنجا

$$nx^n(x-1) > x^n-1$$

با تبدیل n به $-m$ نتیجه می‌شود،

$$-mx^{-m}(x-1) > x^{-m}-1$$

با ضرب کردن طرفین نامساوی در $-x^m$ خواهیم داشت،

$$x^m-1 > m(x-1)$$

و با تبدیل x به $\frac{1}{x}$ — نتیجه می‌شود،

$$x^m-1 < mx^{m-1}(x-1)$$

به این ترتیب اگر $0 < m < 1$ آنگاه،

$$mx^{m-1}(x-1) < x^m-1 < m(x-1)$$

و اگر $m \notin (0,1)$ درآن صورت،

$$mx^{m-1}(x-1) > x^m-1 > m(x-1)$$

اکنون به عنوان یك روش چند مسأله اساسی را طرح و سپس حل می‌کنیم.

۱ـ مقدار x را طوری تعیین کنید که عبارت،

$$(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\cdots+(x-x_n)^2$$

می‌نیمم باشد.

حل.

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=p$$

و

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=p'$$

را قرار می‌دهیم. داریم،

$$(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\cdots+(x-x_n)^2$$
$$=nx^2-2px+p'=n\left[x^2-\frac{2p}{n}x+\frac{p'}{n}\right]$$
$$=n\left[\left(x-\frac{p}{n}\right)^2+\frac{p'}{n}-\frac{p^2}{n^2}\right]$$

عبارت بالا وقتی می‌نیمم می‌شودکه $\left(x-\frac{p}{n}\right)^2$ می‌نیمم باشد چون بقیه مقادیر داخل کروشه مقدار ثابتی دارد. اما $\left(x-\frac{p}{n}\right)^2$ نمی‌تواند منفی بشود بنابراین برای اینکه می‌نیمم باشد باید صفر بشود پس،

$$x=\frac{p}{n}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

۲ـ اگر $x_1+x_2+\cdots+x_n=C$ و C مقدار ثابتی باشد به ازاء چه مقادیری از x_1 و x_2 و ... و x_n عبارت،

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

می‌نیمم است؟

حل،

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=S_2$$

پس،

$$(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+\cdots$$
$$+(x_2-x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}-x_n)^2$$
$$=(n-1)S_2-2q$$

که درآن،

$$q=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n$$
$$+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n.$$

علاوه براین،

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2=S_2+2q$$

بنابراین،

$$(n-1)S_2=2q+\sum_{j>i}(x_i-x_j)^2$$

تساوی اخیر نشان می‌دهد S_2 وقتی‌کمترین مقدار را دارا می‌باشدکه

$$\sum_{j>i}(x_i-x_j)^2$$

کمترین مقدار را داشته باشد وکمترین مقدارآن هم برابرصفر است و این وقتی اتفاق می‌افتدکه داشته باشیم،

$$x_1=x_2=\cdots=x_n$$

اما

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=C$$

پس:

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

وقتی می‌نیمم است‌که داشته باشیم

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{C}{n}$$

۳ـ اگر $x_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ و

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=C$$

به ازاء چه مقادیری از x_1 و x_2 و ... و x_n عبارت

$$x_1^\lambda+x_2^\lambda+\cdots+x_n^\lambda$$

کمترین مقدار را دارا می‌باشد (λ عددگویا است).

حل. فرض می‌کنیم λ در فاصله صفر و یك نباشد درآن صورت داریم،

$$\frac{x_1^\lambda+x_2^\lambda+\cdots+x_n^\lambda}{n}\geqslant\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^\lambda$$

حالت تساوی فقط وقتی برقرار است‌که،

$$x_1=x_2=\cdots=x_n$$

چون

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=C$$

پس به ازاء x_1 و x_2 و ... و x_n داریم.

$$x_1^\lambda+x_2^\lambda+\cdots+x_n^\lambda\geqslant n\left(\frac{C}{n}\right)^\lambda$$

ازآنجا دیده می‌شودکمترین مقدار سمت چپ نامساوی برابر $n\left(\frac{C}{n}\right)^\lambda$ می‌باشدکه در ازاء

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{C}{n}$$

به دست می‌آید.

اما اگر $0<\lambda<1$ آنگاه

$$\frac{x_1^\lambda+x_2^\lambda+\cdots+x_n^\lambda}{n}\leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^{\lambda}$$

و بیشترین مقدار عبارت فوق به ازاء

$$x_1=x_2=\cdots=x_n$$

به دست می‌آید.

۴ـ اگر $x_i>0$ $(i=1, 2, \dots, n)$ و

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=C$$

(C مقدار ثابتی است) نشان دهید

$$x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\cdots x_n^{\mu_n}$$

ماکزیمم است اگر،

$$\frac{x_1}{\mu_1}=\frac{x_2}{\mu_2}=\cdots=\frac{x_n}{\mu_n}$$

$$=\frac{C}{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n}$$

که درآن $\mu_i>0$ $(i=1, 2, \dots, n)$ گویا است.

اثبات. ابتدا فرض می‌کنیم μ_i عدد صحیح باشد $(i=1, 2, \dots, n)$ داریم،

$$\sqrt[\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n]{\left(\frac{x_1}{\mu_1}\right)^{\mu_1}\cdot\left(\frac{x_2}{\mu_2}\right)^{\mu_2}\cdots\left(\frac{x_n}{\mu_n}\right)^{\mu_n}}$$

$$=\sqrt[\mu_1+\cdots+\mu_n]{\frac{x_1}{\mu_1}\cdot\frac{x_1}{\mu_1}\cdots\frac{x_1}{\mu_1}\,\frac{x_2}{\mu_2}\cdots\frac{x_2}{\mu_2}\cdots\frac{x_n}{\mu_n}\cdots\frac{x_n}{\mu_n}}$$

$$\leqslant\frac{\mu_1\frac{x_1}{\mu_1}+\mu_2\frac{x_2}{\mu_2}+\cdots+\mu_n\frac{x_n}{\mu_n}}{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n}=\frac{C}{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n}$$

پس،

$$x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\cdots x_n^{\mu_n}\leqslant\left(\frac{C}{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n}\right)^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n}$$

$$\times\mu_1^{\mu_1}\cdot\mu_2^{\mu_2}\cdots\mu_n^{\mu_n}$$

علامت تساوی وقتی برقرار می‌شود که

$$\frac{x_1}{\mu_1}=\frac{x_2}{\mu_2}=\cdots=\frac{x_n}{\mu_n}$$

اکنون فرض می‌کنیم μ_i کسری باشد آن را به صورت $\mu_i=\frac{\lambda_i}{\mu}$ می‌نویسیم که درآن λ_i و μ مقادیر مثبت و صحیح می‌باشند.

چون،

$$x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\cdots x_n^{\mu_n}=\sqrt[\mu]{x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}}$$

بیشترین مقدار حاصلضرب $x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\cdots x_n^{\mu_n}$ وقتی حاصل می‌شود که حاصلضرب $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}$ ماکزیمم بشود که در آن λ_i عدد صحیح می‌باشد. بنابرآنچه که در بالا گفته شد، این حالت وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم،

$$\frac{x_1}{\lambda_1}=\frac{x_2}{\lambda_2}=\cdots=\frac{x_n}{\lambda_n}$$

از تقسیم مخرج کسرها بر μ خواهیم داشت،

$$\frac{x_1}{\mu_1}=\frac{x_2}{\mu_2}=\cdots=\frac{x_n}{\mu_n}$$

در حالت خاص که

$$\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_n$$

باشد مسأله به صورت زیر بیان می‌شود، اگر

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=C$$

(C ثابت و $x_i>0$) حاصلضرب $x_1x_2\cdots x_n$ ماکزیمم خواهد بود اگر

$$x_1=x_2=\cdots=x_n$$

۵ـ اگر $a_i>0$ و $x_i>0$ $(i=1, 2, \dots, n)$ و

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=C$$

ثابت کنید حاصلضرب $x_1x_2\cdots x_n$ وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم،

$$a_1x_1=a_2x_2=\cdots=a_nx_n=\frac{C}{n}$$

حل. داریم،

$$\sqrt[n]{a_1x_1\cdot a_2x_2\cdots a_nx_n}$$

$$\leqslant\frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{n}=\frac{C}{n}$$

ازآنجا نتیجه می‌شود که حاصلضرب $a_1x_1\cdot a_2x_2\cdots a_nx_n$ ماکزیمم است اگر

$$a_1x_1=a_2x_2=\cdots=a_nx_n$$

اما چون

$$a_1x_1\cdot a_2x_2\cdots a_nx_n$$

$$=(a_1a_2\cdots a_n)(x_1x_2\cdots x_n)$$

بنابراین $x_1x_2\cdots x_n$ ماکزیمم خواهد بود اگر

$$a_1x_1=a_2x_2=\cdots=a_nx_n=\frac{C}{n}$$

۶ـ اگر

$$a_1x_1^{\lambda_1}+a_2x_2^{\lambda_2}+\cdots+a_nx_n^{\lambda_n}=C$$

و

$$x_i>0 \text{ و } a_i>0$$

($\lambda_i>0$ و عدد گویا است) ثابت کنید

$$x_1^{\mu_1}\cdot x_2^{\mu_2}\cdots x_n^{\mu_n}$$

ماکزیمم است اگر،

$$\frac{\lambda_1a_1x_1^{\lambda_1}}{\mu_1}=\frac{\lambda_2a_2x_2^{\lambda_2}}{\mu_2}=\cdots=\frac{\lambda_na_nx_n^{\lambda_n}}{\mu_n}$$

حل. $a_ix_i^{\lambda_i}=y_i$ فرض می‌کنیم $(i=1,2,\dots,n)$

پس،

$$x_i=\left(\frac{y_i}{a_i}\right)^{\frac{1}{\lambda_i}}$$

و

$$y_1+y_2+\cdots+y_n=C$$

علاوه‌براین،

$$x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\cdots x_n^{\mu_n}=\left(\frac{y_1}{a_1}\right)^{\frac{\mu_1}{\lambda_1}}\times\left(\frac{y_2}{a_2}\right)^{\frac{\mu_2}{\lambda_2}}\cdots\left(\frac{y_n}{a_n}\right)^{\frac{\mu_n}{\lambda_n}}$$

مسأله منجر می‌شود به اینکه ماکزیمم

$$y_1^{\frac{\mu_1}{\lambda_1}}\cdot y_2^{\frac{\mu_2}{\lambda_2}}\cdots y_n^{\frac{\mu_n}{\lambda_n}}$$

را وقتی که

$$y_1+y_2+\cdots+y_n=C$$

است پیدا کنیم. پس خواهیم داشت،

$$\frac{y_1}{\frac{\mu_1}{\lambda_1}}=\frac{y_2}{\frac{\mu_2}{\lambda_2}}=\cdots=\frac{y_n}{\frac{\mu_n}{\lambda_n}}$$

یعنی اگر

$$a_1x_1^{\lambda_1}+a_2x_2^{\lambda_2}+\cdots+a_nx_n^{\lambda_n}=C$$

$$x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_1}\cdots x_n^{\mu_n}،$$

ماکزیمم است اگر داشته باشیم

$$\frac{\lambda_1a_1x_1^{\lambda_1}}{\mu_1}=\frac{\lambda_2a_2x_2^{\lambda_2}}{\mu_2}=\cdots=\frac{\lambda_na_nx_n^{\lambda_n}}{\mu_n}$$

۷ـ اگر $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}=C$ (C مقدار ثابتی است) نشان دهید

$$a_1x_1^{\mu_1}+a_2x_2^{\mu_2}\cdots+a_nx_n^{\mu_n}$$

می‌نیمم است اگر،

$$\frac{x_1^{\mu_1}}{\frac{\lambda_1}{a_1\mu_1}}=\frac{x_2^{\mu_2}}{\frac{\lambda_2}{a_2\mu_2}}=\cdots=\frac{x_n^{\mu_n}}{\frac{\lambda_n}{a_n\mu_n}}$$

($a_i>0$، $x_i>0$ و λ_i و μ_i مثبت و گویا هستند).

حل.

$$a_1x_1^{\mu_1}=y_1 \text{ و } a_2x_2^{\mu_2}=y_2 \text{ و ... و } a_nx_n^{\mu_n}=y_n$$

را می‌گیریم. پس

$$x_1=\left(\frac{y_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{\mu_1}} \text{ و } x_2=\left(\frac{y_2}{a_2}\right)^{\frac{1}{\mu_2}} \text{ و } \dots$$

$$x_n=\left(\frac{y_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{\mu_n}}$$

مسأله منجر می‌شود به اینکه تحت چه شرایطی

$$y_1+y_2+\cdots+y_n$$

می‌نیمم می‌شود اگر

$$y_1^{\frac{\lambda_1}{\mu_1}}\cdot y_2^{\frac{\lambda_2}{\mu_2}}\cdots y_n^{\frac{\lambda_n}{\mu_n}}=C_1$$

که در آن C_1 مقدار ثابت جدید است. چون $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ و ... و $\frac{\lambda_n}{\mu_n}$ اعداد گویا هستند.

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1}=\frac{\alpha_1}{N} \text{ و } \frac{\lambda_2}{\mu_2}=\frac{\alpha_2}{N} \text{ و ... و } \frac{\lambda_n}{\mu_n}=\frac{\alpha_n}{N}$$ ؛

پس صورت مسأله چنین خواهد بود،

اگـر $y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_n^{\alpha_n} = C_2$ ،(α_i عـدد صحیح و مثبت است) بـا چه شرایطی $y_1+y_2+\cdots+y_n$ می‌نیمم می‌شود.

بالاخره با قرار دادن

$$y_1=\alpha_1 u_1 \text{ و } y_2=\alpha_2 u_2 \text{ و } \cdots \text{ و } y_n=\alpha_n u_n$$

مسأله چنین خواهد بود: با چه شرایطی

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_nu_n$$

می‌نیمم می‌شود اگر،

$$u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}\cdots u_n^{\alpha_n}=C_3$$

اما داریم

$$\frac{\alpha_1u_1+\alpha_2n_2+\cdots+\alpha_nu_n}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} \geqslant \sqrt[\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n]{u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}\cdots u_n^{\alpha_n}} = \sqrt[\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n]{C_3}$$

چون $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_nu_n$ وقتی می‌نیمم است که داشته باشیم

$$u_1=u_2=\cdots=u_n$$

پس اگر $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}=C$ باشد درآن صورت

$$a_1x_1^{\mu_1}+a_2x_2^{\mu_2}+\cdots+a_nx_n^{\mu_n}$$

می‌نیمم است اگر،

$$\frac{x_1^{\mu_1}}{\frac{\lambda_1}{a_1\alpha_1}} = \frac{x_2^{\mu_2}}{\frac{\lambda_2}{a_2\mu_2}} = \cdots = \frac{x_n^{\mu_n}}{\frac{\lambda_n}{a_n\mu_n}}$$

۸ـ به ازاء چه مقادیری از x و y و z و ... و t مجموع

$$x^2+y^2+z^2+\cdots+t^2$$

می‌نیمم می‌شود اگر

$$ax+by+\cdots+Kt=A$$

باشد ($A, K, \ldots, b, a$ مقادیر ثابتی هستند).

حل. با استفاده از فرمول لاگرانژ می‌توان نوشت،

$$(x^2+y^2+z^2+\cdots+t^2)\times$$

$$(a^2+b^2+\cdots+k^2)$$
$$=(ax+by+\cdots+kt)^2$$
$$+(xb-ya)^2+(xc-za)^2+\cdots$$

چـون $a^2+b^2+c^2+\cdots+k^2$ مقدار ثابتی است و $ax+by+\cdots+kt=A$ هم مقدار ثابتی دارد (بنابه فرض) بنابراین $x^2+y^2+z^2+\cdots+t^2$ می‌نیمم خواهد بود اگر مجموع،

$$(xb-ya)^2+(xc-za)^2+\cdots$$

می‌نیمم بـاشد وکمترین مقدار هـریك از پرانتزها صفر است بنابراین

$$xb-ya=0 \text{ و } xc-za=0 \text{ و } \cdots$$

و یا

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\cdots=\frac{t}{k}$$

اگر مقدار مشترك کسرها را λ فرض‌کنیم خواهیم داشت

$$x=a\lambda \text{ و } y=b\lambda \text{ و } z=c\lambda \text{ و } \cdots \text{ و } t=k\lambda$$

با قرار دادن این مقادیر در

$$ax+by+cz+\cdots+kt=A$$

داریم،

$$\lambda=\frac{A}{a^2+b^2+\cdots+k^2}$$

بنابراین بـرای اینکه $x^2+y^2+\cdots+t^2$ کمترین مقدار را داشته باشد باید داشته باشیم،

$$x=\frac{aA}{a^2+b^2+\cdots+k^2}$$

و

$$y=\frac{bA}{a^2+b^2+\cdots+k^2}$$

$$z=\frac{cA}{a^2+b^2+\cdots+k^2}$$

و

$$t=\frac{kA}{a^2+b^2+\cdots+k^2}$$

اکنون چند مثال در ارتباط با فرمولهای بالا حل می‌کنیم.

۱ـ مکعب مستطیلی بـا حجم ماکزیمم در یك بیضوی بـه

معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ محاط کنید.

حل. اگر مرکز بیضوی را منطبق بر مبدأ مختصات و بزرگترین و کوچکترین قطرهای آن را موازی محورهای مختصات فرض کنیم معادله آن

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

می‌شود. فرض می‌کنیم $M(x, y, z)$ مختصات یکی از رئوس مکعب‌مستطیل باشد که درآن z و y و x مثبت در نظر گرفته شده‌اند. حجم مکعب مستطیل $2x\times 2y\times 2z$ یا $8xyz$ می‌شود که باید ماکزیمم کنیم. اگر xyz ماکزیمم باشد $x^2y^2z^2$ و یا $\frac{x^2}{a^2}\times\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ هم ماکزیمم می‌شود (a و b و c مقادیر ثابتی هستند) اما بنا به فرض

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

پس برای اینکه حجم مکعب مستطیل ماکزیمم بشود باید داشته باشیم

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

یا

$$\frac{3x^2}{a^2}=\frac{3y^2}{b^2}=\frac{3z^2}{c^2}=1$$

و ازآنجا

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{و} \quad y=\frac{b}{\sqrt{3}} \quad \text{و} \quad z=\frac{c}{\sqrt{3}}$$

$$v_{max}=\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$$

مثال ۲- اگر x حاده باشد، ماکزیمم

$$y=\frac{3\sin^2x\cos^2x}{2\sin^4x+18\cos^4x}$$

را تعیین کنید.

حل.

$$y=\frac{3}{2tg^2x+18cotg^2x}$$

کافی است مخرج کسر را می‌نیمم کنیم. چون

$$2tg^2x\times 18cotg^2x=36$$

پس برای اینکه مخرج کسر می‌نیمم باشد باید

$$2tg^2x=18cotg^2x$$

یا

$$y_{max}=\frac{1}{4} \quad \text{و} \quad tg\,x=\sqrt{3}$$

مثال ۳- صفحه P به معادله

$$ax+by+cz+d=0$$

مفروض است مختصات نقطه‌ای از صفحه را تعیین کنید که از مبدأ مختصات کمترین فاصله را داشته باشد (مختصات پای عمود از مبدأ مختصات بر صفحه مفروض).

حل. اگر $M_1(x_1, y_1, z_1)$ پای عمود باشد داریم

$$OM_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

و

$$ax_1+by_1+cz_1=-d$$

باید می‌نیمم باشد پس $x_1^2+y_1^2+z_1^2$ باید می‌نیمم بشود با توجه به مسأله (۸) داریم

$$x_1=\frac{-ad}{c^2+b^2+c^2} \quad \text{و} \quad y_1=\frac{-bd}{a^2+b^2+c^2}$$

و

$$z_1=\frac{-cd}{a^2+b^2+c^2}$$

و فاصله می‌نیمم برابر

$$OM_1=\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

خواهد بود که مستقیماً هم می‌توان از فرمول فاصله یك نقطه از یك صفحه به دست آورد.

مرجع

V. A. KRECHMAR, A Problem book in Algebra, Mir Publishers, Moscow, 1978.

تناظرهای یک به یک بین N و توانهای آن

دکتر حسین صدیقی
فرید (محمد) مالک قائنی
اعضاء هیأت علمی دانشسرایعالی یزد

یك مسأله معروف ریاضیات ساختن تناظر یك به یك بین N و توانهای آن است. اثبات وجود چنین تناظرهایی (مثلاً[۲] از طریق قضیهٔ شرودر ـ برنشتاین) چندان مشکل نیست، ولی اغلب اثباتها وجودی هستند و نه سازنده. در بخش اول مقاله یك تناظر یك به یك بین N و N×N را ارائه کرده و دوسوئی بودن آنرا به دو طریق اثبات خواهیم کرد. در بخش دوم مقاله روش ساده‌ای برای ساخت تناظرهای یك بــه یك بین N و توانهای مختلف آن را ارائه خواهیم کرد.

۱) یك تناظر یك به یك بین N و N×N

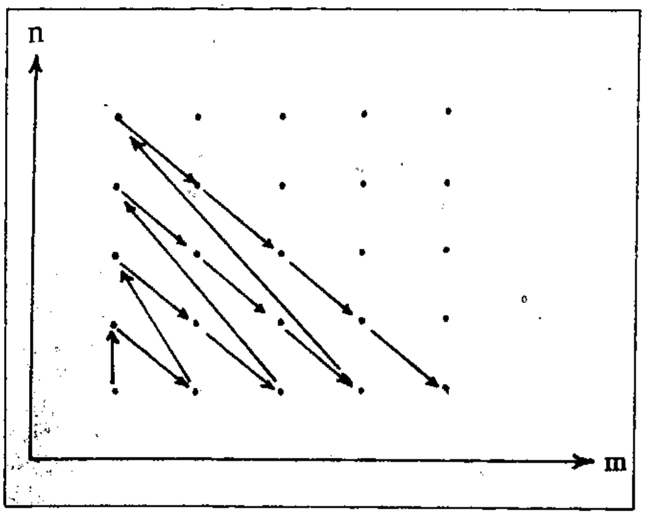
قضیه. تابع $f: N\times N \rightarrow N$ با ضابطهٔ

$$f(m,n)=\sum_{i=1}^{m+n-1} i-n+1 = \frac{(m+n)^2-(m+n)-2(n-1)}{2}$$

یك تناظر یك و یك بین N×N و N است.

پیش از اثبات این قضیه، نکته‌ای را دربارهٔ نحوهٔ شمارش عناصر N×N توسط f بیان می‌کنیم:

نکته: می‌توان نشان داد که نحوهٔ شمارش عناصر N×N توسط f به صورت زیر است:



اکنون به اثبات قضیهٔ فوق از دو راه مختلف می‌پردازیم.

راه اول. ابتدا نشان می‌دهیم که f یك به یك است. در اینمورد ثابت می‌کنیم که:

$$(m,n)\neq(m',n') \Longrightarrow f(m,n) \neq f(m',n')$$

می‌توان نشان داد که موارد زیر تمام حالات $(m,n)\neq(m',n')$ را در برمی‌گیرد:

حالت اول: $m+n=m'+n'$ و $n\neq n'$

$m+n=m'+n'+k$ و $k\in N$ و

$$\begin{cases} n\leqslant n' & \text{حالت دوم:} \\ n'<n<m'+n'+1 & \text{حالت سوم:} \\ n\geqslant m'+n'+1 & \text{حالت چهارم:} \end{cases}$$

پس کافیست هر یك از این حالات را به طور جداگانه بررسی کنیم.

حالت اول. $m+n=m'+n'$ و $n\neq n$

در این حالت داریم،

$$f(m, n)-f(m', n')=$$

$$\frac{(m+n)^2-(m+n)-2(n-1)-(m'+n')^2+(m'+n')+2(n'-1)}{2}$$

$$=\frac{2(n'-n)}{2}=n'-n\neq 0$$

حالت دوم.

$m+n=m'+n'+k$ و $k\in N$ و $n\leqslant n'$

در این حالت داریم:

$$f(m, n)-f(m',n')$$

$$=\frac{k^2+2k(m'+n')-k-2n+2n'}{2}$$

$$=\frac{k^2-k}{2}+k(m'+n')+(n'-n)>0$$

حالت سوم.

$m+n=m'+n'+k$ و $k\in N$

و

$n'<n<m'+n'+1$

در این حالت داریم

$$f(m, n)-f(m', n')$$

$$=\frac{k^2+2k(m'+n')-k-2n+2n'}{2}$$

$$\geqslant\frac{k^2+2(m'+n')-k-2n+2}{2}$$

$$=\frac{k^2-k}{2}+(m'+n'+1-n)>0$$

حالت چهارم.

$m+n=m'+n'+k$ و $k\in N$

و

$n\geqslant m'+n'+1$

فرض می‌کنیم

$n=m'+n'+p$ و $p\in N$

و در نتیجه

$m+n=m'+n'+p+m$ و $k=p+m$

بنابراین در این حالت داریم

$$f(m, n)-f(m', n')$$

$$=\frac{(p+m)^2+2(p+m)(m'+n')-(p+m)-2(m'+n'+p)+2n'}{2}$$

$$=\frac{(p+m)^2-(p+m)}{2}+(p-1)m'+(n'-1)p$$

$$+(mm'+mn')>0$$

و به این ترتیب ثابت می‌شود که f یك به یك است.

حال ثابت می‌کنیم که f پوشاست. برای انجام این کار فرض می‌کنیم $(m, n)\in N\times N$ داده شده باشد و یك $p\in N$ ارائه می‌کنیم بطوریکه $f(m, n)=p$. برای این منظور اگر قرار دهیم

$$l=\max\left\{j\in N\,\middle|\,\sum_{i=1}^{j} i<p\right\}$$

و $m=p-\sum_{i=1}^{l} i$ و $m+n-2=l$، آنگاه $f(m, n)=p$.

پس این تابع پوشا می‌باشد. □

راه حل دوم: برای اثبات قضیه کافیست نشان دهیم که: هر عضو $k\in N$ تصویر یك و تنها یك عضو از $N\times N$ است. بسادگی ثابت می‌شود که تابع f در روابط زیر صدق می‌کند.

(I) $f(1, n+1)=f(n, 1)+1 \quad \forall n\in N$

$$\text{(II)}\quad f(m, n)=f(m-1, n+1)+1$$
$$\forall m>1 \text{ و } \forall n\in N$$

اکنون حکم فوق را با کمك دوزابطهٔ (I) و (II) بالا و استقراء روی k اثبات می‌کنیم:

بدیهی است که $f(1, 1)=1$. حال اگر $(m, n)\neq(1, 1)$ آنگاه:

$$f(m, n)=\frac{(m+n)^2-(m+n)-2(n-1)}{2}$$
$$=\frac{m^2-m}{2}+\frac{n^2-n}{2}$$
$$+(m-1)n+1>1$$

چون همهٔ عوامل حاصلجمع غیر منفی و لااقل یکی از دو عامل $\frac{n^2-n}{2}$ و $\frac{m^2-m}{2}$ مثبت می‌باشد. بنابراین $f^{-1}(\{1\})=\{(1, 1)\}$ و در نتیجه $f^{-1}(\{1\})$ یك مجموعهٔ یکانی است. حال فرض می‌کنیم $f^{-1}(\{k\})$ یك مجموعهٔ یکانی باشد و نشان می‌دهیم که $f^{-1}(\{k+1\})$ نیز یك مجموعهٔ یکانی است. به این منظور فرض می‌کنیم $(m, n)\in f^{-1}(\{k+1\})$ و دو حالت در نظر می‌گیریم

(الف) اگر $m>1$ باشد داریم

$(m, n)\in f^{-1}(\{k+1\})$ اگر و فقط اگر $f(m, n)$
$=k+1$ اگر و فقط اگر $\overset{(II)}{}$ $f(m-1, n+1)=k$
اگر و فقط اگر $(m-1, n+1)\in f^{-1}(\{k\})$

(ب) اگر $m=1$ باشد داریم

$(1, n+1)\in f^{-1}(\{k+1\})$ اگر و فقط اگر
$f(1, n+1)=k+1$ اگر و فقط اگر $\overset{(I)}{}$
$f(n, 1)=k$ اگر و فقط اگر $(n, 1)\in f^{-1}(\{k\})$

و چون فرض کردیم که $f^{-1}(\{k\})$ یکانی است پس در حالت (الف) بنابه فرض استقراء $(m-1, n+1)$ منحصر به فرد است و در نتیجه (m, n) منحصر به فرد است، و در حالت (ب) $(n, 1)$ بنابه فرض استقراء منحصر به فرد است و در نتیجه $(1, n+1)$ منحصر به فرد است. پس در هر صورت $f^{-1}(\{k+1\})$ مجموعه‌ای یکانی است و حکم ثابت شده است. □

بخش ۲) ساختن یك تناظر یك به یك بین N^k و N

در این بخش تناظرهای یك به یك بین N, N^k را به صورت بازگشتی می‌سازیم در بخش ۱ مقاله دیدیم که یك تناظر یك به یك بین N, N^2 موجود است.

این تناظر را f_2 می‌نامیم. حال فرض می‌کنیم تابع

$$f_k: N^k \longrightarrow N, k\geqslant 2$$

یك تناظر یك به یك باشد و تابع

$$g_k: N^{k+1} \longrightarrow N^2 \text{ و } k\geqslant 2$$

را با ضابطهٔ

$$g_k(n_1, \cdots, n_{k+1})=(f_k(n_1, \cdots, n_k), n_{k+1})$$

تعریف می‌کنیم. بدیهی است که f_k یك به یك و پوشا می‌باشد. اکنون تابع

$$f_{k+1}: N^{k+1} \longrightarrow N$$

را به صورت $f_{k+1}=f_2 \circ g_k$ تعریف می‌کنیم. باز هم بدیهی است که f_{k+1} نیز یك به یك و پوشاست.

مرجع

۱) علیرضا جمالی ـ رضا شهریاری، ایجاد یك تناظر ۱ـ۱ بین $N\times N$ و N، رشد آموزش ریاضی، ۴، زمستان ۱۳۶۳

قواعدی ساده دربارهٔ قابلیت تقسیم بر اعداد اول

صحبت‌الله خشنودی - دبیر دبیرستانهای باختران

در این مقاله بـرای تشخیص قابلیت تقسیم بــر اعداد اول قواعدی ساده بیان شده است، در آغاز چند نمونه را بــا ذکر مثال ارائه می‌دهیم سپس یـك قضیه‌ای کلی اثبات کــرده و سرانجام یك نمونه را به صورت تفکیکی ثابت می‌کنیم.

قاعدهٔ ۱. عددی بر هفت قابل قسمت است که اگر دوبرابر رقم یکان آن را از بقیهٔ عدد (عدد بـدون رقم یکان) کم کنیم باقیمانده مضرب هفت باشد. چنانچه در ایـن مـرحله مضرب هفت بودن مشخص نباشد عمل را در مورد عدد حاصل تکرار میکنیم.

مثلاً عدد ۱۲۱۱ بر هفت قابل قسمت است، زیرا

$$121-(2\times 1)=119$$

$$11-(2\times 9)=-7=(-1)\times 7$$

(توضیح: به جای کم کـردن دو برابر رقم یکان از بقیهٔ عدد، می‌توان ۵ برابر رقم یکان را به بقیه افزود و عمل را ادامه داد).

قاعدهٔ ۲. عددی بر ۱۳ قابل قسمت است که اگر ۴ برابر رقم یکان آن را با بقیهٔ عدد جمع کنیم حاصل، مضرب ۱۳ باشد و در صورت مشخص نبودن با هم عمل را ادامه می‌دهیم.

مثلاً عدد ۶۳۷ مضرب ۱۳ است، زیرا

$$63+(4\times 7)=91$$

$$9+(4\times 1)=13$$

(**توضیح:** به جای افزودن ۴ بـرابـر رقم یکان می‌توان ۹ برابر رقم یکان را از بقیه، کـم کرد)

ثابت می‌شود برای هرعدد اول قـاعده‌ای مشخص وجـود دارد و به کمك جدول زیر می‌توان بـه قاعده‌ای مشابه بـرای هر عدد اولا دلخواه دست یافت.

حـــــال فرض‌کنیم p عـدد اول متمایز از ۲ و ۵ باشد می‌خواهیم عددی صحیح مانند x به گونه‌ای به دست‌آوریم که باقیماندهٔ ۱۰x بر p عـدد (۱+) یا (۱−) باشد. برای به دست آوردن چنین xی باید معادلات همنهشتی زیر را حل کنیم.

$$\text{(I)}\qquad 10x\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$$

$$\text{(II)}\qquad 10x\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$$

شرط امکان جواب در این معادلات آن است که (۱۰ , p) [یعنی بزرگترین مقسوم علیه مشترك ۱۰ و p] اعداد ۱ و ۱− را عادکند و چـون p نسبت بـه ۲ و ۵ اول است ایـن شرط همواره برقرار است. اگر p−۱ ، ... ، ۲ ، ۱ یك دستگاه مخفف مانده‌ها به هنگ p «به پیمانه p» باشد x یکی از این اعداد است. (به کتاب تئوری مقدماتی اعداد دکتر مصاحب ۳ . ۴ . ۶ رجوع شود).

بـا قرار دادن هر یك از اعداد فوق در معادلات I , II عدد x حساب می‌شود.

حال قاعده‌ای را بیان می‌کنیم که به‌کمك‌آن بتوانیم قابلیت تقسیم یك عدد را بــر عدد اول p تشخیص دهیم. فرض‌کنید $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 = Aa_1$ عدد صحیح دلخواهی باشد و p یك عدد اول متمایز از ۲ و ۵، بنابرآنچه گذشت عددی صحیح مانند x موجود است، بقسمی‌که $10x=Kp\pm 1$ از طرفی

$$\begin{aligned} x(Aa_1) &= x(10A+a_1)\\ &=(10x)A+xa_1\\ &=(Kp\pm 1)A+xa_1 \end{aligned}$$

$$\text{(III)}\qquad x(Aa_1)=(KpA+xa_1\pm A)$$

چونx و p نسبت به هم اولند پس، Aa_1 بر p قابل قسمت است

p	۱۷	۱۹	۲۳	۲۹	۳۱	۳۷	۴۱	۴۳	۴۷	۵۳	۵۹	...	۱۵۷	...	۱۱۹	...
x_p	۵_-	۲_+	۷_+	۳_+	۳_-	۱۱_-	۴_-	۱۳_+	۱۴_+	۱۶_+	۶_+		۳۲_-		۱۲_+	...

بقیه در صفحه ۴۴

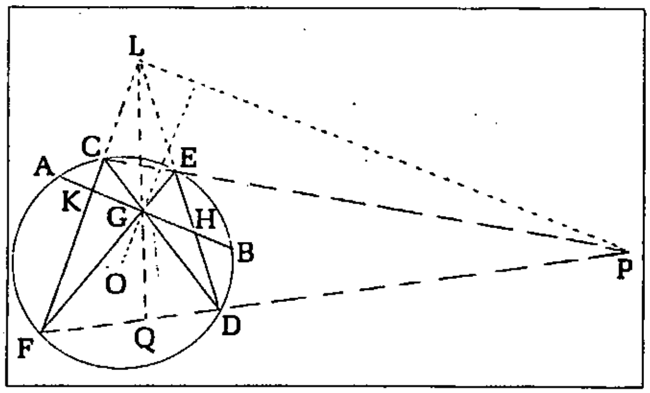
مسأله پروانه

دکتر علیرضا امیرمعز

لئون بنکاف مقاله‌ای به نام مسأله پروانه منتشر کرده است [۱] در این مقاله چندین حل مسأله را با شکلهای دقیق بررسی کرده است. در این یادداشت حلی که از قطب و قطبی نسبت به‌دایره استفاده شده معرفی می‌شود. این مسأله در کتاب هندسه چهارم ریاضی تألیف مرحوم حسین مجذوب در تمرینات مربوط به اشعه توافقی آمده است که آن را با شماره‌اش نقل می‌کنیم ([۳]، ۷۴) در دایره (O) وتر ثابت AB را رسم نموده و از نقطه G وسط وتر AB دو وتر غیر مشخص CGD و EGF را مرور می‌دهیم. ED و CF را وصل می‌کنیم تا AB را به ترتیب در نقاط H و K قطع کند. ثابت کنید $GK=GH$.

حل. اشعه (L, FDQP) توافقی است. زیرا FD قطر چهارضلعی کامل LCGEFD می‌باشد که به وسیله LQ و CE قطع شده است. خط LQ قطبی P نسبت به (O) است. خط PG که نکشیده‌ایم قطبی G نسبت به (O) می‌شود و OG بر LP عمود است. در نتیجه KH به موازات LP بوده و به وسیله سه شعاع دیگر توافقی نصف می‌شود. بدین معنی که

$$GK=GH$$



مراجع

۱ـ لئون بنکاف مسأله پروانه. مجله ماهنامه آمریکا، شماره ۴، ۱۹۸۷.

۲ـ امیرمعز، علیرضا. ملاحظاتی در باره تبدیلات هندسی.

۳ـ هندسه چهارم ریاضی، تألیف مرحوم حسین مجذوب. اکنون در دسترس نیست.

راه‌حل دوم مسأله پروانه

حسین غیور

از نقطه O دو عمود OM و ON را بر وترهای CF و ED فرود می‌آوریم و وترها را نصف می‌کند و GN و GM را وصل می‌کنیم. در چهارضلعی محاطی OMKG و OGHN،

$$G\hat{O}K=G\hat{M}K$$

و

$$G\hat{O}H=G\hat{N}H$$

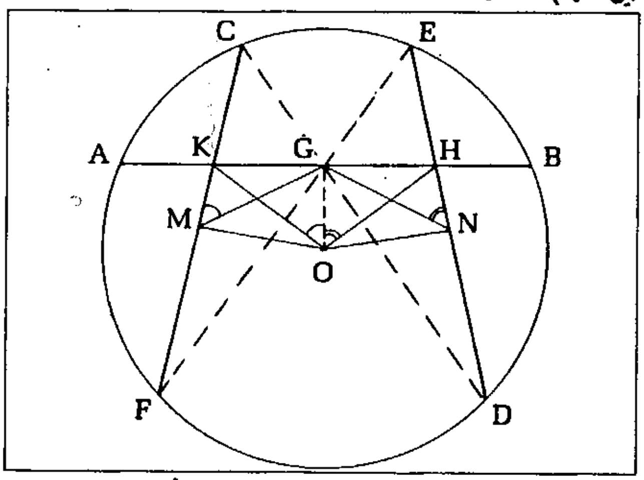
از تشابه دو مثلث GFC و GDE، GM میانه نظیر CF و GN میانه نظیر ED است. بنابراین

$$G\hat{M}C=G\hat{N}E$$

و

$$G\hat{O}K=G\hat{O}H$$

و دو مثلث OGH و OFG به‌حالت ز ض ز (دو زاویه ضلع بین آنها) مساویند.



بطوری که ملاحظه می کنید این راه حل مسأله پروانه، بسیار ساده و طبیعی‌تر از راه حلی است که آقای دکتر علیرضا امیرمعز ارائه داده‌اند در این راه حل از قطب و قطبی که امروزه در دبیرستان تدریس نمی‌شود استفاده شده است و در کتاب هندسه سال چهارم مرحوم حسین مجذوب موجود است. از این موقعیت استفاده می‌کنم، و نظرم این است که کتاب هندسه سال چهارم متوسطه تألیف مرحوم حسین مجذوب به اندازه‌ای جالب و عالی و خالی از هرگونه عیب و نقص است که اگر توسط گروه ریاضی چاپ و بین معلمین توزیع شود (متأسفانه نایاب است) خدمت شایسته‌ای خواهد بود.

یك مسأله از جبر خطی

محمود کاظمی‌یان حکم‌آباد
دانشجوی دانشگاه تربیت معلم

در این مقاله F یك میدان و به ازاء هر عدد طبیعی n، $F_{n\times n}$ مجموعهٔ ماتریسهای $n\times n$ روی F است.

مسأله: فرض‌کنیم $A\in F_{n\times n}$ ماتریسی منفرد باشد می‌خواهیم $0\neq C\in F_{n\times n}$ را چنان بیابیم که

$$AC=CA=0$$

برهان. فرض‌کنیم $A=(\alpha_{ij})$. چون A ماتریس منفرد است، سپس سطرهای آن روی F استقلال خطی ندارند. بنابراین $a_n\in F$ و ... و a_1 یافت می‌شوند که لااقل یکی از آنها مثلاً a_k مخالف صفر است و

$$a_1(\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1n})+a_2(\alpha_{21},\alpha_{22},\cdots,\alpha_{2n})+\cdots+a_n(\alpha_{n1},\alpha_{n2},\cdots,\alpha_{nn})=0$$

لهذا، برای هر $i\leqslant j\leqslant n$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_{ij}=0 \qquad (1)$$

که درآن $a_k\neq 0$.

همین طور، چون ستون‌های ماتریس A مستقل خطی نیست، $b_n\in F$ و ... و b_1 ی موجودند که حداقل یکی از آنها، مثلاً b_l، مخالف صفر است و

$$b_1(\alpha_{11},\cdots,\alpha_{n1})+b_2(\alpha_{12},\alpha_{22},\cdots,\alpha_{n2})+\cdots+b_n(\alpha_{1n},\alpha_{2n},\cdots,\alpha_{nn})=0$$

پس، برای هر $1\leqslant i\leqslant n$،

$$\sum_{j=1}^{n} b_j\alpha_{ij}=0 \qquad (2)$$

که درآن $b_l\neq 0$.

حال، به ازاه هر j و i $(1\leqslant i,j\leqslant n)$، $\gamma_{ij}=a_jb_i$ تعریف می‌کنیم و فرض می‌کنیم $C=(\gamma_{ij})$. داریم

$$\gamma_{lk}=a_kb_l\neq 0$$

لهذا $C\neq 0$. فرض می‌کنیم

$$CA=(\beta_{ij}) \quad \text{و} \quad AC=(\delta_{ij})$$

در این صورت به ازاء هر j و i $(1\leqslant i,j\leqslant n)$،

$$\delta_{ij}=\sum_{r=1}^{n}\alpha_{ir}\gamma_{rj}=\sum_{r=1}^{n}\alpha_{ir}(a_jb_r)=a_j\sum_{r=1}^{n}b_r\alpha_{ir}\overset{\text{طبق}(2)}{=}a_j(0)=0$$

و

$$\beta_{ij}=\sum_{r=1}^{n}\gamma_{ir}\alpha_{rj}=\sum_{r=1}^{n}(a_rb_i)\alpha_{rj}=b_i\sum_{r=1}^{n}a_r\alpha_{rj}\overset{\text{طبق}(1)}{=}b_i(0)=0$$

بنابراین

$$AC=0=CA$$

و حکم برقرار است.

بقیه از صفحهٔ ۴۲

اگر و فقط اگر $x(Aa_1)$ بر p قابل قسمت باشد و از (III) نتیجه می‌شود که $x(Aa_1)$ بر p قابل قسمت است اگر و فقط اگر $xa_1\pm A$ بر p قابل قسمت باشد. در نتیجه، قضیه مهم ذیل نتیجه می گردد.

قضیه. فرض‌کنید که p عدد اول متمایز از ۲ و ۵ بوده و x عددی صحیح باشد بطوری‌که $10x=Kp\pm 1$ در این صورت عدد صحیح $a_na_{n-1}\cdots a_2a_1=Aa_1$ بر p قابل قسمت است اگر و فقط اگر $xa_1\pm A$ بر p قابل قسمت باشد.

در پایان یکی از قواعد را جداگانه اثبات می‌کنیم.

ثابت کنید اگر دو برابر رقم یکان عددی را با بقیهٔ آن عدد جمع‌کنیم و حاصل، مضرب ۱۹ باشد آن عدد نیز مضرب ۱۹ است.

$$x=\overbrace{a_na_{n-1}\cdots a_1}^{A}a=10A+a=Aa$$

$$2a+A\equiv 0(\text{xod}\,19)$$

$$2a+20A-19A\equiv 0(\text{mod}\,19)$$

$$2(a+10A)\equiv 0(\text{mod}\,19)$$

$$(2,19)=1 \Longrightarrow a+10A\equiv 0(\text{mod}\,19)$$

$$\Longrightarrow 10A+a=19K$$

محاسبهٔ یک حد و کاربرد آن

غلامرضا کریم‌پور

عضو هیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه مازندران

گشتاور مرتبه xام را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$M_x=\sqrt[x]{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^x}{N}} \quad (x\in R,\ x_i\in R,\ x_i>n)$$

۱) درحالتی‌که $x=1$ گشتاور مرتبه اول، و مفهوم آن میانگین N دادهٔ x_1، x_2، ...، x_N آماری است.

$$M_1=\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

۲) اگر $x=-1$ گشتاور مرتبه منهای‌یکم و مفهوم‌آن میانگین توافقی x_1، x_2، ...، x_N داده‌آماری است.

$$M_{-1}=\left[\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^{-1}}{N}\right]^{-1}$$

$$=\left[\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_N}}{N}\right]^{-1}$$

$$=\frac{N}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_N}}$$

۳) اگر $x=0$ گشتاور مرتبه صفرام به صورت مبهم

$$M_0=\sqrt[0]{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}}=1^{\infty}$$

در می‌آید. برای رفع ابهام باید حد زیر را محاسبه کنیم

$$\lim_{x\to 0+} M_x=\lim_{x\to 0+}\sqrt[x]{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^x}{N}}$$

ابتدا از M_x لگاریتم می‌گیریم و سپس از دستور هوپیتال برای رفع ابهام استفاده می‌کنیم:

$$\ln M_x=\frac{1}{x}\ln\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^x}{x}=\frac{\ln\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^x}{x}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0+}\ln M_x=\lim_{x\to 0+}\frac{\left(\ln\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^x}{x}\right)'}{1}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{A'_n}{\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^x}{x}\right)}$$

که

$$A_x=\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^x}{N}$$

$$(A_x)'=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^x\ln x_i$$

پس

$$\lim_{x\to 0+}\ln M_x=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^x\ln x_i}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^x}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{N}\ln x_i}{\sum_{i=1}^{N} 1}=\frac{\ln\prod_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

بنا به پیوستگی تابع لگاریتم، حد لگاریتم برابر است با لگاریتم حد، یعنی

$$\ln\lim_{x\to 0+} M_x=\ln\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i}$$

یعنی

$$\lim_{x\to 0+} M_x=\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i}$$

بقیه در صفحه ۴۷

پیشگفتار

بقیه از صفحهٔ ۳

نظریات خوانندگان و اظهار نظر آنها در مورد کلیه مسائل مربوط به آموزش ریاضی، مسائل مربوط به دبیران ریاضی، افت، تربیت نیروی انسانی لازم برای آموزش و پرورش، مسائل مربوط به دوره‌های دبیری ریاضی، دوره‌های پیش دانشگاهی، ورود سهمیه‌های مختلف به دوره‌های دبیری، بررسی کیفیّت دوره‌های دبیری، عدم توازن کلاسهای ریاضی، ایجاد دوره‌های دبیری با گرایشهای مختلف، ارتباط دروس دوره‌های دبیری با پیشرفتهای دانش ریاضی و صنعت و تکنولوژی و پیشرفتهای جدید ریاضی و ریاضی کاربردی، مسائل مختلف دبیران و بررسی و ارائه نظریات آنها در مورد این نوع مسائل.

به هر حال ما مسائل متنوعی در موارد فوق‌الذکر داریم. ما درمرحله بازسازی هستیم. آموزش و پرورش باید متحول گردد و آموزش ریاضی نیز همین‌طور. چه افرادی و با چه نوع صلاحیّت و مدارکی باید وارد دوره‌های دانشگاهی و دبیری شوند و به چه طریقی انتخاب گردند؟ آیا حداقل دارا بودن شرائط علمی لازم ضروری است؟ چه نوع آموزشهای ریاضی برای دبیران ریاضی ضروری است؟ آیا آموزش یک رشته ریاضی با گرایش تربیتی تکافوی نیازهای آموزش و پرورش ما را خواهد کرد؟ آیا وقت آن نرسیده است که به بررسی عمیق در این مسأله بپردازیم و شرائطی را فراهم کنیم که نیروهای کارآمد و با صلاحیت عمومی و علمی بهتر وارد رشته‌های دبیری شوند؟ آیا وقت آن نرسیده است که یک بازنگری به برنامه‌های ریاضی دوره‌های کارشناسی دبیری ریاضی داشته باشیم و امکان ایجاد دوره‌های دبیری با گرایشهای مختلف را بررسی کنیم؟

بدون شک در این راستا رسالت سنگینی بر دوش وزارت آموزش و پرورش و دانشگاه تربیت معلّم است. گرچه در حال حاضر اغلب دانشگاههای کشور دارای دوره‌های دبیری ریاضی هستند ولی وظیفه و رسالت دانشگاه تربیت معلم سنگینتر است واقعیت تلخ این است که مواد اولیه مناسب جذب دوره‌های دبیری نمی‌شوند. ناگفته نماند که مسئولین وزارت آموزش و پرورش نهایت سعی خود را جهت اعتلای آموزش و فرهنگ و پرورش به کار می‌برند و در واقع روح تازه‌ای دمیده شده است و کوششهای زیادی برای بهبود وضع علمی دبیران مبذول می‌گردد. اما باید دیدها وسیعتر شود تا مسائل بهتر بررسی شوند. جهان امروزی شدیداً بر آمار و اطلاعات و کامپیوتر متکی است. مثلاً دبیران ما باید آمار و احتمال بدانند باید آنالیز عددی یاد بگیرند، بتوانند با رایانه‌ها کار کنند و آموخته‌های ریاضی خود را به کار گیرند. خوشبختانه شورای تألیف کتب ریاضی دورهٔ متوسطه تشکیل شده است تا ادامه کار تألیف کتابها را به عهده گیرد. کتابهای ابتدائی با محتوای مطلوبی نوشته شد و به دنبال آن کتابهای راهنمایی تألیف شد، حال نوبت تألیف کتابهای دبیرستانی است. بی‌شک رسالت سنگینی بر عهده این شورا است. گرچه بعضی از سرفصلهای لازم در شورای قبلی تدوین شده است ولی نیاز به بازبینی دقیق داریم. امکان تألیف کتب جدید (به ویژه در زمینه‌های کاربردی) باید دقیقاً مورد بحث و مداقه قرار گیرد و امکان آموزش و بازآموزی دبیران مورد مطالعه قرار گیرد. خوشبختانه ترکیب این شورا بسیار قوی است و متشکل از زبده‌ترین اعضاء هیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلّم و سایر دانشگاهها و دبیران ریاضی و کارشناسان گروه ریاضی دفتر تحقیقات است. امید است که مسائل در این شورا با دید و بینش کافی مورد بحث و بررسی قرار گیرد تا کتابها بدون تشتت و با جامعیّت کامل و ضمن رعایت اهداف آموزش ریاضی در جهان، متناسب با اهداف جامعه انقلابی ما و با کیفیت مطلوب و در مناسبترین زمان ممکن تدوین گردد.

آخرین سخن که در واقع حسن ختام این کلام است، خبر مربوط به تشکیل سمینارها و کنفرانسهای علمی برای دبیران ریاضی است. این حرکت جدید توسط دفاتر آموزش ضمن خدمت استانها و پشتیبانی وزیر محترم آموزش و پرورش شروع شده است و بحق حرکتی در خور ستایش است که نه تنها موجب اعتلای علمی است بلکه باعث اعتلاء اجتماعی نیز می‌باشد. امید است که دفاتر آموزش ضمن خدمت هر چه بیشتر این فعالیّت خود را گسترش دهند تا به همهٔ استانها تسری یابد و دوره‌های بازآموزی کوتاه مدت برای دبیران را مدّ نظر قرار دهند و حتی دبیران نمونه خود را برای مشارکت در کنفرانسهای بین‌المللی، برای کسب تجارب بیشتر و آشنا ساختن با آموزش ریاضی در جهان، اعزام دارند. به امید روزی که آموزش و پرورش ما جایگاه بحق خود را در جامعه بدست آورد.

سردبیر

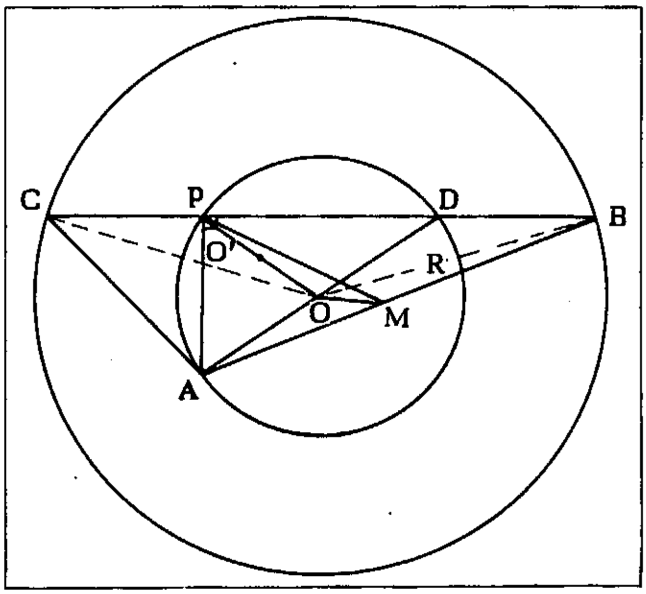
$$S=2[4r^2\cos^2\theta+2(R^2-r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)+R^2-r^2]=6R^2+2r^2$$

این مجموع مقداری ثابت است و بنابراین بـه θ بستگی ندارد. برای قسمت‌دوم، از A خطی موازی BC رسم‌می‌کنیم تـا دایرهٔ بزرگ را در نقاط B' و C' قطع‌کند، این نقاط رأسهائی‌ازمستطیلهای $BPAB'$ و $CPAC'$ هستند. U وسط قطر AB، PB' نیزمی‌باشد و $\overrightarrow{PU}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PB'}$

به‌طریق مشابه $\overrightarrow{PV}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PC'}$ (V وسط AC است)

چون B' و C' همان دایره (R و O) را توصیف می‌کنند پس U وV برتصویردایره (OوR) تحت تجانس $H(P$ و $\frac{1}{2})$ قرار دارند

راه حل دوم (از: محمود نصیری) AD را رسم می‌کنیم با توجه به‌قضیه‌اول میانه‌ها درمثلثهای ABD و ADC داریم:



$$AB^2+AC^2+BC^2=AB^2+AC^2+(DC+DB)^2=(AB^2+DB^2)+(AC^2+DC^2)+2DC\cdot DB=2R^2+\frac{4r^2}{2}+2R^2+\frac{4r^2}{2}+2(R^2-r^2)=6R^2+2r^2.$$

برای قسمت‌دوم اگر M وسط AB باشد $PM=\frac{AB}{2}$، و در مثلث OAB، OM میانـه و در نتیجه

$$OM^2=\frac{R^2+r^2}{2}-\frac{AB^2}{4}$$ لذا

$MO^2+MP^2=\frac{R^2+r^2}{2}$ و مقداری ثابت است و چون O و P نیز ثابتند پس مکان M دایره‌ای به مرکز O' وسط OP و شعاع $\frac{R}{2}$ است زیرا $MO'=\frac{R}{2}$.

۲- فرض‌کنید n عدد صحیح مثبت، و B یك مجموعه و $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ زیرمجموعه‌های B باشند بطوری‌که داشته باشیم:

الف) هریك از A_i ها دقیقاً دارای $2n$ عضو است؛

ب) برای‌هر i، j $(1\leqslant i<j\leqslant 2n+1)$ $A_i\cap A_j$ شامل دقیقاً یك عضو است؛

ج) هرعضو B حداقل به دوتا از A_iها تعلق دارد.

می‌خواهیم به هریك‌از اعضاء B یکی‌از دوعددصفر یا یك را نسبت‌دهیم بطوری‌که به هریك‌از A_iها دقیقاً n صفر نسبت داده شود، $(1\leqslant i\leqslant 2n+1)$، تعیین‌کنیدکـه به ازاء چه مقداری از n این‌کار ممکن‌است؟

$$T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

راه حل(طراح). ثابت می‌کنیم که‌این‌نسبت‌دادن فقط وفقط وقتی ممکن است‌که n زوج باشد.

۱. ابتدا نشان می‌دهیم که شرایط (الف) تا (ج) صورت قویتری‌از شرط (ج) را ایجاب می‌کند، یعنی:

(*ج) هرعضو B **دقیقاً** به دو تا از A_iها تعلق‌دارد

ابتدا توجه می‌کنیم که

$$(*)\quad A_j=\bigcup_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{2n+1}(A_i\cap A_j)\quad j=1,\dots,2n+1.$$

$\subseteq$ بدیهی است، و عکس‌آن نیز از (ج) به‌دست می‌آید.

ثانیاً، فـرض کتیم (*ج) برقرار نباشد (فرض خلف)، مثلاً $\alpha\in A_1\cap A_2\cap A_3$ آنگاه، بنابه شرط (ب)، $(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_3)$ وهر $(A_1\cap A_i)$، $i>3$، فقط شامل یك عضو هستند.

بنابراین بنابه (*)، A_1 شامل‌حداکثر $2n-1$ عضواست که متناقض باشرط (الف) است.

۲. نشان می‌دهیم که اگرصفرها ویك‌هارا بتوان‌مطابق‌فرض به‌عضوهای B نسبت‌داد n بایدزوج‌باشد یك‌جدول $2n\times 2n$

29th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD JULY 9-21

IMO 1988 Canberra

به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر $i \neq j$ درسطر iام و ستون jام عددی را که به‌عضو (منحصر به فرد) $Ai \cap Aj$ نسبت داده‌شده ، می‌گذاریم. اگر $i = j$ عددی را که به عضو (منحصر به‌فـرد) $Ai \cap A_{۲n+۱}$ نسبت داده شده می‌گذاریم طبق‌فرض مسأله و (*ج) هرسطرشامل n تاصفراست وبنابراین تمام‌جدول شامل $۲n^۲$ تا صفر است کـه عددی زوج است.

چون جدول نسبت به قطراصلی متقارن‌است تعداد زوجی‌از صفروجود دارندکه‌خارج‌قطراصلی‌هستند.

بنابراین تعدادزوجی ازصفرها روی قطراصلی هستند.

اما اعداد روی قطر اصلی ، اعدادی هستندکه به‌عضوهای $A_{۲n+۱}$ نسبت‌داده شده‌اند و بنابراین n تا ازآنها صفراست و درنتیجه n زوج است.

۳. بالاخره نشان‌می‌دهیم‌که اگر n زوج باشد آنگاه نسبت دادن‌صفرها و ۱ تا به‌صورت موردنظر، ممکن‌است.

فرض‌کنیم T جدولی باشدکه‌به‌صورت زیرتعریف‌شده‌است

$$T = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

و به ازاء $n = ۲K$ ، فرض کنیم U جدول $۲n \times ۲n$ باشد که به‌صورت‌زیر تعریف‌شده است.

$$U = \begin{pmatrix} T & T & \cdots & T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T & T & \cdots & T \end{pmatrix}$$

K مرتبه

آنگاه U طبق‌آنچه‌در (۲) به عمل‌آمد منسوب‌کردن‌موردنظر را به‌دست می‌دهد

۳. تابع f با شرایطزیرروی مجموعه‌اعدادصحیح و مثبت تعریف شده است :

$$f(۱) = ۱ \quad \text{و} \quad f(۳) = ۳$$

و برای هر $n \geqslant ۱$ داریم:

$$f(۲n) = f(n)$$

$$f(۴n+۱) = ۲f(۲n+۱) - f(n)$$

$$f(۴n+۳) = ۳f(۲n+۱) - ۲f(n)$$

تعداد اعدادصحیح ومثبت n راکه درشرایط زیرصدق‌می‌کنند تعیین‌کنید:

$$۱ \leqslant n \leqslant ۱۹۸۸ \quad \text{و} \quad f(n) = n$$

راه حل (طراح). درمی‌یابیم

n: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ...

f(n): ۱ ۱ ۳ ۱ ۵ ۳ ۷ ۱ ۹ ۵ ۱۳ ۳ ۱۱ ۷ ۱۵ ۱ ۱۷ ...

به‌نظر می‌رسدکه $f(۲^K) = ۱$ ، $f(۲^K - ۱) = ۲^K - ۱$ ، $f(۲^K + ۱) = ۲^K + ۱$ که حدس‌زده می‌شودکه ارتباطی بسا بسط در مبنای ۲ داشته باشد. سریعاً پی‌می‌بریم‌که f(n) برابر است باعددی‌که ازمقلوب (برگردان) ارقام عدد n دربسط به مبنای۲ به‌دست می‌آید. (ازهر تعداد صفراولیه‌که نتیجه‌می‌شود صرف‌نظر می‌کنیم)

اثبات به استقراء است. چون $f(۲n) = f(n)$ ، فقط لازم است اعداد فردرا موردبررسی قرار دهیم

اگر n به فرم $۴m+۱ = \sum_{j=۰}^{K} \varepsilon_j ۲^j$ ، $\varepsilon_۰ = ۱$ و $\varepsilon_۱ = ۰$

آنگاه $m = \sum_{j=۲}^{n} \varepsilon_j ۲^{j-۲}$ ، و $۲m+۱ = ۱ + \sum_{j=۱}^{K} \varepsilon_j ۲^{K-j}$

بنابراین به استقراء داریم.

$$f(۲m+۱) = ۲^{K-۱} + \sum_{j=۲}^{K} \varepsilon_j ۲^{K-۱-(j-۱)} =$$

$$= ۲^{K-۱} + \sum_{j=۲}^{K} \varepsilon_j ۲^{K-j}$$

و

$$f(m) = \sum_{i=۲}^{K} \varepsilon_j ۲^{K-j}$$

بازی با اعداد

بابك طلایی

آقای بابك طلایی، دانش‌آموز سال چهارم، از مشهد، تحت عنوان «بازی با اعداد» مطلبی ارسال داشته‌اندکه به صورت ذیل تنظیم شده است.

این بازی بین دو نفر انجام می‌گیرد. نفر اولی به دومی می‌گوید:

عدد سه رقمی را برروی کاغذ بنویسید،
همان عدد را کنارآن نوشته تا یك عدد شش رقمی شود،
سپس عدد را، به ترتیب، بر اعداد ۷، ۱۱، ۱۳ تقسیم کنید،
نتیجه حاصل همان عدد اولی است.
رمز کار در چیست؟

رمز کار؛ وقتی‌که عدد سه رقمی را درکنارآن نوشتیم، در حقیقت، آن عدد را در ۱۰۰۱ ضرب کرده‌ایم. زیرا،

$$abcabc = ۱۰۰۰ \times abc + abc$$
$$= ۱۰۰۱ \times abc$$

حال اگرعدد حاصل را بر ۷، ۱۱، ۱۳ تقسیم‌کنیم عمل عکس را انجام داده به عدد اولی می‌رسیم.

●

بقیه از صفحهٔ ۳۱

$a+k \mid b+k$ ،

۲. در برهان بالا شرط $a \mid b$ بلااستفاده است و حل فوق مساله را در حالت‌کلی‌تری پاسخ می‌دهد.

مثال. فرض کنید $a=۶$ و $b=۱۲$. در این صورت، با توجه به روند برهان فوق، داریم

$$t-۱ \mid ۶ \Rightarrow t-۱ = \pm ۱ \text{ یا } \pm ۲ \text{ یا } \pm ۳ \text{ یا } \pm ۶$$

بنابراین، اعداد ذیل برای k بدست می‌آید:

$$k = \frac{۱۲-۶}{t-۱} - ۶ = ۰ \text{ یا } -۱۲ \text{ یا } -۳ \text{ یا } -۹$$
$$\text{یا } -۴ \text{ یا } -۸ \text{ یا } -۵ \text{ یا } -۷.$$

مثال فوق نشان می‌دهدکه عدد صحیح مثبت k وجود ندارد که

$$۶+k \mid ۱۲+k$$

معرفی مجلات بین‌المللی ریاضی

МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ
5·87
СЕНТЯБРЬ — ОКТЯБРЬ

ابراهیم دارابی

«ریاضیات در مدرسه»

مجله‌ای است علمی ـ آموزشی که از طرف آکادمی علوم پداگوژی اتحاد جماهیر شوروی و کمیته دولتی اتحاد جماهیر شوروی تحت نظر وزارت آموزش و پرورش، هر دو ماه یکبار، در شهر مسکو چاپ و بفروش می‌رسد. تیراژ مجله در حدود ۴۷۰/۰۰۰/ و قیمت آن ۴۵ کوپك می‌باشد.

در نشر مجله علاوه‌بر سردبیر و معاون، ۳۸ نفر در هیأت‌تحریریه با مجله همکاری دارند که ۱۷ نفر از آنان از جمهوری‌های مختلف هستند.

آدرس اداره نشر مجله چنین است،

Адрес издательства:
107847, Москва, ГСП, Б-05,

●

بقیه از صفحهٔ ۴۵

که نشان می‌دهد

$$M_۰ = \sqrt[N]{\prod_{i=۱}^{N} x_i}$$

یعنی گشتاور مرتبه صفرام N دادهٔ $x_۱$، $x_۲$، ...، x_N برابر است با واسطهٔ هندسی N داده.

درحالت $N=۲$ نتایج فوق به صورت زیر نوشته می‌شود

$$M_۱ = \frac{x_۱ + x_۲}{۲}$$

$$M_{-۱} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۲}\right)}$$

$$M_۰ = \sqrt{x_۱ x_۲}$$

یعنی واسطه هندسی بین دو عدد، خود واسطهٔ هندسی بین واسطه حسابی و توافقی‌آن دو عدد، است یعنی

$$M_۱ M_{-۱} = M_۰^۲$$

29th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
JULY 9-21
IMO 1988 Canberra

حل مسائل بیست و نهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی کنبرا، استرالیا

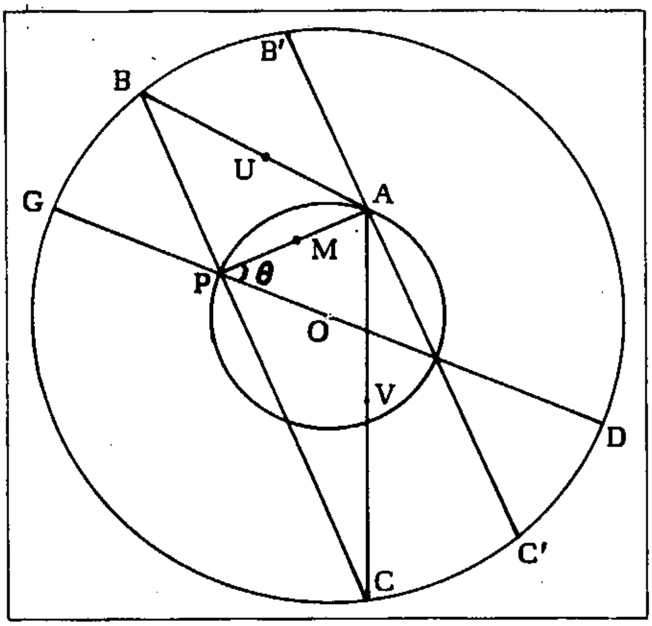
تهیه و تنظیم از : محمود نصیری

۱ـ دو دایره متحدالمرکز به شعاعهای R و r ($R>r$) در صفحه را درنظر بگیرید فرض کنید P نقطه‌ای ثابت روی دایره کوچك و B نقطه متغیری روی دایره بزرگ باشد. پاره‌خط BP دایرهٔ بزرگ را دوباره در C قطع می‌کند. از P عمودی بر BP رسم کنید تا دایره کوچك را در A قطع کند (اگر این عمود بر دایره کوچك در P مماس باشد آنگاه $A=P$)

الف) تمام مقادیرممکن $AB^2+BC^2+CA^2$ را زمانی که B روی دایره بزرگ تغییر نماید، تعیین کنید.

ب) مکان‌هندسی نقطه وسط پاره‌خط AB را به دست آورید

راه حل اول (طراح). فرض می‌کنیم $\angle OPA=\theta$ ، GD قطری‌است که از P می‌گذرد که M وسط PA و N وسط BC می‌باشد.



مجموع

$$(1)\ S=BC^2+CA^2+AB^2=(BP+PC)^2+$$
$$+PC^2+PA^2+BP^2+PA^2$$
$$=2(PA^2+PB^2+PC^2+BP\cdot PC)$$
$$PA=2r\cos\theta$$
$$BP=BN-PN=\sqrt{R^2-r^2\cos^2\theta}-r\sin\theta$$
$$PC=PN+NC=PN+BN=\sqrt{R^2-r^2\cos^2\theta}$$
$$+r\sin\theta$$
$$BP\cdot PC=GP\cdot PD=R^2-r^2$$

با جایگذاری این مقادیردر رابطه (۱) به دست می‌آید

مثلث ABC باضلع BC است).

از (۶) و (۷) به‌دست می‌آوریم.

$$AK=\frac{C(2p-a-c)}{a}=\frac{bc}{a} \qquad (8)$$ و

$$E_1=\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{2}\right)^2$$

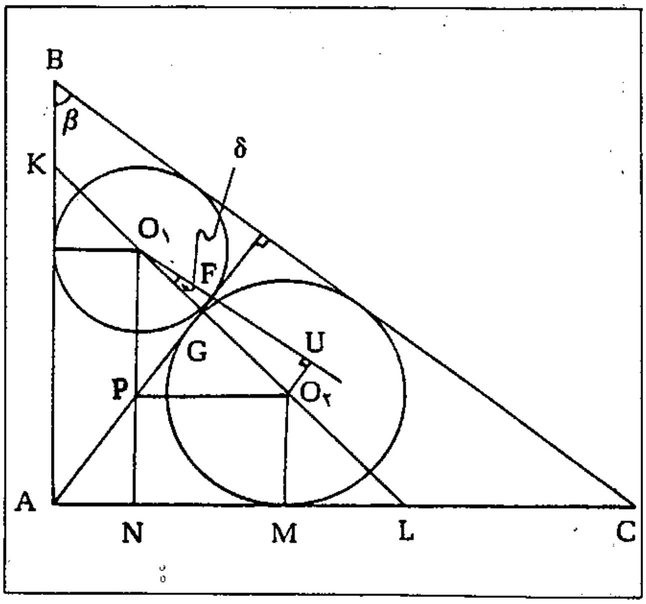
از (۱) و (۸) داریم، $\frac{E}{E_1}=\frac{a^2}{bc}$ و می‌خواهیم ثابت کنیم $\frac{a^2}{bc}\geqslant 2$، اما $a^2=b^2+c^2$ و $b^2+c^2\geqslant 2bc$ و لذا $a^2\geqslant 2bc$ و ثابت است.

درزیر چهارراه حل دیگرمسأله (۵) آمده است که همگی آنهارا باشکل(۲) توضیح‌می‌دهیم که توسط طراحان ارائه‌شده است. علاوه براین دوراه حل دیگرهم ارائه می‌شود.

الف (طراح). فرض می کنیم:

$AB=c$ ، $AC=b$ ، $BC=a$ و $AD=h$

دایره‌های محاطی داخلی‌مثلثهای ABD وADC را به C_1 و C_2 نشان می‌دهیم فرض‌کنیم O_1 و O_2 به‌ترتیب مرکزهای C_1 و C_2 باشند. شکل (۲)



نقاط تلاقی C_1 را با AB وAD به‌ترتیب E وF می‌نامیم ونقاط تلاقی دایره C_2 را با AD و AC به ترتیب G و M می‌نامیم.

از O_1 عمود، O_1N را بر AC واز O_2 عمود O_2P را بر NO_1 رسم می کنیم آنگاه

$$O_1N=EA=AF=h-r$$

$$O_1P=O_1N-PN=O_1N-O_2M=h-r-R$$

$$O_2P=MN=AM-AN=AG-r=h-R-r$$

(r شعاع دایره C_1 و R شعاع دایره C_2 است.)

بنابراین $PO_1=PO_2$ ودرنتیجه $\angle O_1O_2P=45^\circ$ واز اینجا نتیجه می گیریم که:

$\angle O_2LM=45^\circ$ ولذا $ML=O_2M=R$

درنتیجه :

$$AL=AM+ML=AG+R=h-R+R=h$$

به‌طریق مشابه $AK=h$ وبنابراین

$$\frac{S}{T}=\frac{ah}{h^2}=\frac{a}{h}=\frac{a^2}{ah}=\frac{a^2}{bc}=\frac{b^2+c^2}{bc}\geqslant 2$$

ب (طراح). دستگاه مختصات هندسی را به کار می بریم. فرض می کنیم A مبداء مختصات و AB محور OY و AC محور OX باشد.

سپس‌مانند قبل مختصات O_1، $(r,h-r)$ ومختصات O_2، $(h-R, R)$ است. بنابراین معادله خط KL به‌صورت زیر است.

$$y-R=\frac{R-(h-r)}{h-R-r}(x-h+R)$$

اگر $y=0$ فرض‌کنیم داریم :

$$-R=-(AL-h+R)$$

و بنابراین $AL=h$ وبه‌طریق مشابه $AK=h$ وبقیه مانند روش (۱) است.

ج (طراح). فرض می‌کنیم O_1U موازی BC و O_2U عمود بر O_1U باشد.وزاویه O_2O_1U را به δ وزاویه ABC را به β نشان می‌دهیم آنگاه

$$\operatorname{tg}\delta=\frac{O_2U}{O_1U}=\frac{R-r}{R+r}$$

چون $\triangle ABD\sim\triangle ADC$، داریم $\frac{R}{r}=\frac{b}{C}$

بنابراین $\operatorname{tg}\delta=\frac{b-c}{b+c}$. لذا

$$\operatorname{tg}\angle NO_1O_2=\operatorname{tg}(\angle NO_1U-\delta)=\operatorname{tg}(\beta-\delta)=$$

29th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD JULY 9-21

IMO 1988 Canberra

$$\frac{tg\beta - tg\,\delta}{1+tg\beta \cdot tg\delta} = \frac{\frac{b}{c} - \frac{b-c}{b+c}}{1+\frac{b(b-c)}{c(b+c)}} =$$

$$\frac{b^2+bc-bc+c^2}{bc+c^2+b^2-bc} = 1$$

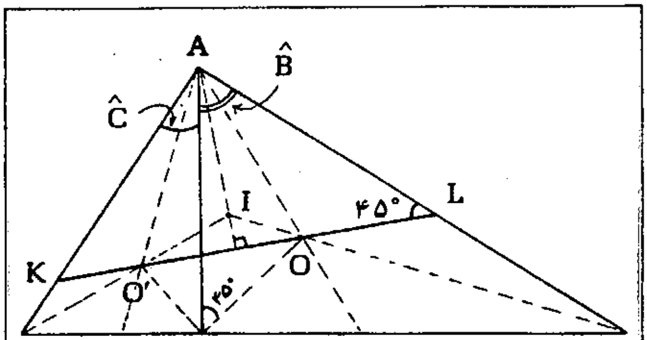
درنتیجه $\angle NO_1O_2 = 45^\circ$. بقیه مانند روش اول‌است.

د (طراح).

$$tg < PAN = \frac{R}{r} = \frac{b}{c} = tg\,\beta = tg\angle DAC$$

بنابراین نقطه P روی AD قرار دارد. چون AO_2 نیمساز $\angle DAC$ و $O_2P \| AC$ داریم $O_2P = AP$. به طور مشابه $O_1P = AP$. لذا $O_1P = O_2P$ بقیه مانند روش اول است.

ه (محمود نصیری)



مثلثهای ANC و AN'B متساوی‌الساقین‌می‌باشند

$$A'_1 = \hat{C} + \frac{\hat{B}}{2} \text{ و } \hat{N}_1 = \hat{B} + \frac{\hat{C}}{2}$$

پس OC نیمساز رأس‌ارتفاع نیز می‌باشد یعنی $CI \perp AN$ به‌همین ترتیب $BI \perp AN'$ پس AI نیمساز زاویه قائمه بر oo' عمود است یعنی AI هم‌ارتفاع وهم‌نیمساز رأس A از مثلث AKL است در نتیجه این مثلث متساوی‌الساقین است.

از طرف دیگر $AK = AL$ $\triangle AOD = \triangle AOL$

پس $AK = AL = AD = h_a$

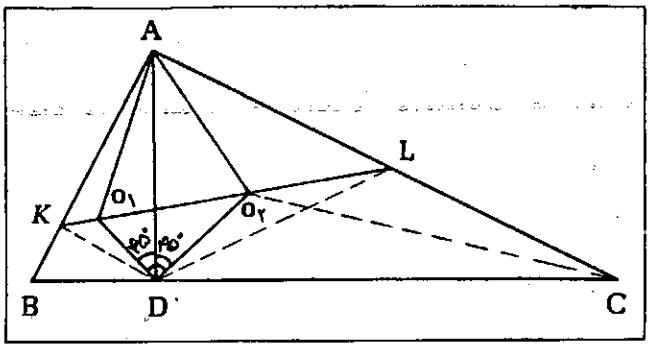
لذا

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AKL}} = \frac{AD \cdot BC}{AK \cdot AL} = \frac{BC}{h_a} = \frac{2m_a}{h_a} \geqslant 2 \Longrightarrow$$

$$S_{ABC} \geqslant 2S_{AKL}$$

درهرمثلث قائم‌الزاویه $m_a \geqslant h_a$ (m_a میانه واردبروتراست)

و. راه حل دیگری‌ازمسئله ۵ که‌توسط تعدادی‌ازخوانندگان ارسال گردیده است.



$$\triangle AO_1D \sim \triangle DO_2C \Longrightarrow \frac{DO_1}{DO_2} = \frac{AD}{DC} = tgC = \frac{AB}{AC}$$

از $\frac{DO_1}{DO_2} = \frac{AB}{AC}$ نتیجه می‌گیریم که دو مثلث DO_1O_2 و ABC متشابهند و لذا $\angle DO_2O_1 = \angle C$

و $\angle DO_2L = 180 - \angle C$

بنابراین $\angle O_2LC = 135^\circ$

پس $\angle ALK = 45^\circ$

ومثلث AKL متساوی‌الساقین است.

۶. فرض‌کنید a و b اعدادی صحیح و مثبت باشند. به‌طوری که عدد $(ab+1)$، a^2+b^2 را عادکند. نشان دهیدکه $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ مربع‌کامل است.

راه حل اول: (طراح). فرض می‌کنیم $\frac{a^2+b^2}{ab+1} = q \in N$ که در این صورت $a^2+b^2 = qab+q$ چون رابطه فوق نسبت‌به a و b متقارن است، فرض می‌کنیم $a \leqslant b$.

آنگاه $qa - a < b \leqslant qa$

در نتیجه

$$2f(2m+1)-f(m)=2^K+2\sum_{j=2}^{K}\varepsilon_j 2^{K-j}-\sum_{j=2}^{K}\varepsilon_j 2^{K-j}=2^K+\sum_{j=2}^{K}\varepsilon_j 2^{K-j}=\sum_{j=0}^{K}\varepsilon_j 2^{K-j}$$

اگر n به‌شکل، $4m+3=\sum_{j=0}^{K}\varepsilon_j 2^j$ ، $\varepsilon_0=1$ ، $\varepsilon_1=1$

باشد آنگاه $m=\sum_{j=2}^{K}\varepsilon_j 2^{j-2}$ و

$$2m+1=1+\sum_{j=2}^{K}\varepsilon_j 2^{j-1}$$

مانند قبل نتیجه می گیریم.

$$3f(2m+1)-2f(m)=2^K+2^{K-1}+\sum_{j=2}^{K}\varepsilon_j 2^{K-j}$$

نظیر محاسبات قبلی‌حاصل برابر $\sum_{j=0}^{K}\varepsilon_j 2^{K-j}$ است

و این گمان ما را تصدیق می کند.

بنابراین باید تعداد اعدادصحیح n را که $1\leqslant n\leqslant 1988$ و دارای خاصیت (Palindromic) در بسط به مبنای ۲ می‌باشندپیدا کنیم (منظورازاعداد (Palindromic)اعدادی هستندکه اگر ارقام آنها را از آخر به‌اول بنویسیم برابرخود عدد باشد مانند ۱۰۱ یا ۱۲۱)

اکنون تعداد اعداد $2m$ رقمی باخواص‌فوق درمبنای۲ برابر 2^{m-1} است که برابر همان تعداد اعداد $(2m-1)$ رقمی با خواص فوق است داریم $2^{10}<1988<2^{11}=2048$ و تعداد اعداد با خواص فوق‌که کوچکتراز ۲۰۴۸ است برابر است با :

$$1+1+2+2+4+4+8+8+16+16+32=94$$

اگر عدد ۱۹۸۸ را به مبنای ۲ حساب کنیم.

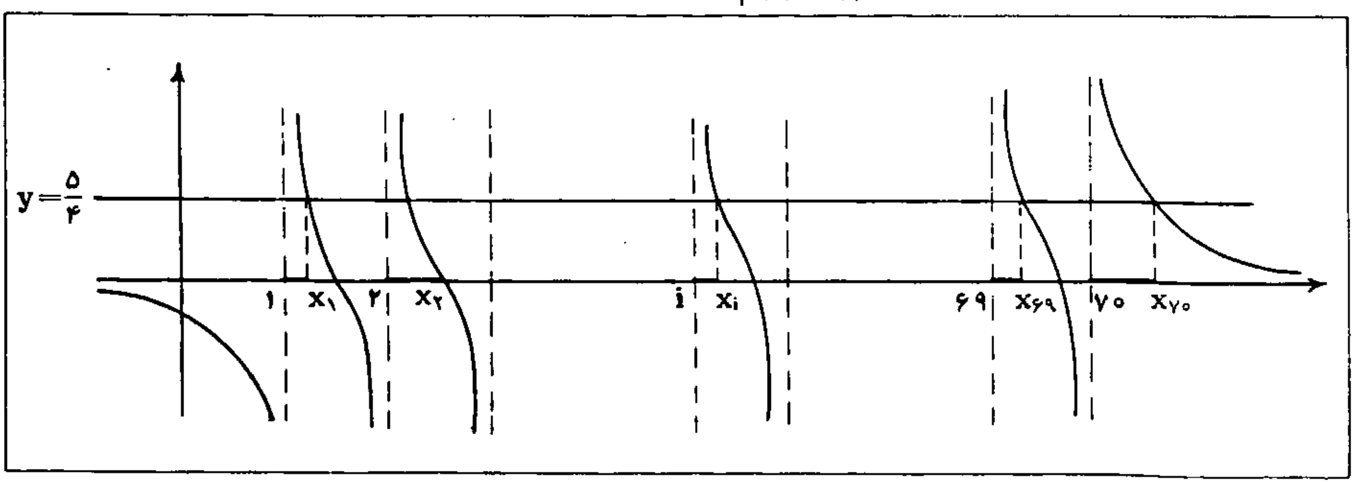
$$1988=(11111000100)_2$$

و فقط دوعدد یازده‌رقمی Palindromes متجاوزاز۱۹۸۸ وجود دارد پس‌تعداد اعداد موردنظر ۹۲ است.

۴ـ مجموعهٔ اعدادحقیقی x را که در نامساوی $\sum_{n=1}^{70}\frac{K}{x-K}\geqslant\frac{5}{4}$ صدق می‌کنند، درنظر بگیرید نشان دهید که این مجموعه اجتماع تعدادی بازه‌های مجزا ازهم تشکیل‌شده است‌که مجموع طول‌این بازه‌ها برابر با ۱۹۸۸ است.

راه حل (طراح). اگر اجتماع این بازه‌ها را S بنامیم و تابع با ضابطه $f(x)=\sum_{K=1}^{70}\frac{K}{x-K}$ را در نظربگیریم، این تابع در $R-\{1, 2, \dots, 70\}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و $f'(x)=\sum_{K=1}^{70}\frac{-K}{(x-K)^2}<0$ بنابراین تابع در هریك از فاصله‌های $(-\infty, 1)$ و $(1, 2)$ و ... و $(70, +\infty)$ اکیداً نزولی است. حال‌اگر نمودار تابع را باخط $y=\frac{5}{4}$ قطع‌دهیم، ۷۰ نقطه‌تقاطع‌داریم که‌آنهارا x_i $(i=1, 2, \dots, 70)$ می‌نامیم لذا مجموعه x هـای صدق در نامساوی در ۷۰ بازهٔ مجزای $(i, x_i]$، $(i=1, 2, \dots, 70)$ و $i<x_i<i+1$ قراردارند لذا $S=\bigcup_{i=1}^{70}(i, x_i]$ و مجموع‌طول‌این‌بازه‌ها یعنی $|S|$ برابراست با

$$|S|=\sum_{i=1}^{70}(x_i-i)=\sum_{i=1}^{70}x_i-\sum_{i=1}^{70}i=\sum_{i=1}^{70}x_i-35\times 71$$



29th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD JULY 9-21

IMO 1988 Canberra

اکنون برای محاسبه $\sum_{i=1}^{70} x_i$ گوئیم x_i ریشه معادله $\sum_{K=1}^{70}\frac{K}{x-K}=\frac{5}{4}$ است که این معادله ۷۰ریشه دارد و $\sum_{i=1}^{70}x_i$ مجموع ریشه‌های آن است. این معادله به صورت

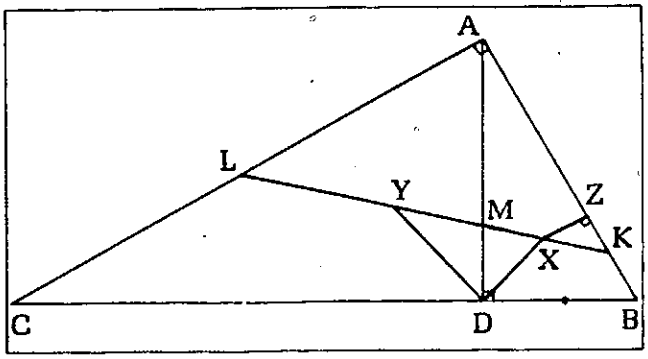
$$5\prod_{i=1}^{70}(x-i)-4\sum_{K=1}^{70}K\prod_{i\neq K}^{70}(x-i)=0$$

است که مجموع ریشه‌های آن برابر است با

$\sum_{i=1}^{70} i+\frac{4}{5}\sum_{K=1}^{70}K$ که برابر ۷۱ × ۶۳ است و لذا:

$$|S|=\sum_{i=1}^{70} x_i-35\times 71=63\times 71-35\times 71=$$
$$28\times 71=1988$$

۵ـ مثلث قائم‌الزاویه ABC را که در رأس A قائمه‌است درنظر بگیرید فرض کنید D پای ارتفاع مرسوم از A باشد. مرکز دایره‌های محاطی مثلثهای ABD و ACD را به‌هم وصل کنید تا اضلاع AB و AC به‌ترتیب در K و L قطع کند مساحت مثلثهای ABC و AKL را به ترتیب S و T می‌نامیم. ثابت کنید $S\geqslant 2T$.



راه حل (طراح). فرض‌کنیم X و Y مرکزهای دایره‌های محاطی‌داخلی مثلثهای ABD و ADC باشند و r و r_1 و r_2 به‌ترتیب شعاعهای دایره‌های محاطی‌مثلثهای ABC و ABD و ADC و p را نصف محیط مثلث ABC فرض می‌کنیم آنگاه

E مساحت مثلث BAC است $E=rp=\frac{bc}{2}$ (۱)

دومثلث ABD و CBA متشابهند، و نسبت اضلاع متناظر برابر $\frac{c}{a}$ است بنابراین

(۲) $r_1=\frac{rc}{a}$

و به‌طور مشابه

(۳) $r_2=\frac{rb}{a}$

فرض‌کنیم XY ، AD را در M قطع کند آنگاه

$\angle XDM=45^\circ$

بنابراین

(۴) $DX=r_1\sqrt{2}=\sqrt{2}\,\frac{rc}{a}$

و به‌طور مشابه

(۵) $DY=\sqrt{2}\,\frac{rb}{a}$

پس DX د DY برهم عمودند.

از (۴) و (۵) نتیجه می‌گیریم

$\left(\frac{DX}{DY}=\frac{c}{b}\right)\ \triangle XDY\sim\triangle ABC$

بنابراین

$\angle DXL=\angle CBA$ و $\angle DYK=\angle BCA$

درچهارضلعی DYKB ،

$\angle YDB=135^\circ$ و $\angle DYK+\angle KBD=90^\circ$

در نتیجه

$\angle BKY=135^\circ$

بنابراین مثلث AKL قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

فرض‌کنیم Z پای‌عمودی باشد‌که از X بر AB رسم شده است، آنگاه

(۶) $XZ=r_1=ZK=\frac{rc}{a}=\frac{(p-a)c}{a}$

(زیرا درهرمثلث قائم‌الزاویه $s=p(p-a)$ و $r=\frac{s}{p}$ لذا $r=p-a$) اگراعمال مشابه را درمثلث‌های ABC و ABD انجام دهیم (۷) $AZ=\frac{(p-c)c}{a}$ به دست می‌آید.

($p-c$ فاصلهٔ رأس C تا نقطه تماس دایره محاطی داخلی

الف) اثبات نامساوی سمت چپ :

$$qab<qab+q=a^2+b^2\leqslant ab+b^2$$

پس $qab<ab+b^2$ یعنی $qa-a<b$

ب. اثبات نامساوی سمت راست.

فرض می‌کنیم $b>qa$. دراین‌صورت $b=qa+c$، $c\in N$

بنابراین

$$a^2+b^2=qab+q \Rightarrow a^2+(qa+c)^2= qa(qa+c)+q \Rightarrow a^2+q^2a^2+2qac+c^2= q^2a^2+qac+q \Rightarrow a^2+qac+c^2=q \Rightarrow q\leqslant qac<a^2+qac+a^2= q \Rightarrow q<q$$

که یك تناقض است. بنابراین $b\leqslant qa$.

از $qa-a<b\leqslant qa$ نتیجه می‌گیریم که $b=qa-r$ که $0\leqslant r<a$ و $r\in N_0$ از $a^2+b^2=qab+q$ نتیجه می‌گیریم.

$$a^2+(qa-r)^2=qa(qa-r)+q \Rightarrow a^2+q^2a^2-2qar+r^2=q^2a^2-qar+q \Rightarrow a^2+r^2=qar+q \Rightarrow a^2+r^2=q(ar+1) \Rightarrow \frac{a^2+r^2}{ar+1}=q$$

بنابراین اگر زوج (a,b) دررابطه $\frac{a^2+b^2}{ab+1}=q$ صدق کنند آنگاه زوج (r,a) در رابطه $\frac{r^2+a^2}{ra+1}=q$ صدق می‌کنند.

اما داریم $0\leqslant r<a\leqslant b$ بنابراین اولین مؤلفه (r,a) کوچکتر است از اولین مؤلفهٔ (a,b).

چون هیچ دنباله نامتناهی اکیداً نزولی از اعداد صحیح مثبت وجود ندارد ما زوج‌های با مؤلفه‌های اول کوچکتر به‌دست می‌آوریم تااینکه $r=0$.

از $\frac{a^2+r^2}{ar+1}=q$ و $r=0$ به‌دست می‌آید $q=a^2$.

بنابراین q مربع کامل است.

تبصره: به‌عنوان‌مثال (۲,۸) یکی از زوج‌های (a,b) است که وجود دارد.

راه حل دیگری برای اثبات دوم.

فرض می‌کنیم نامساوی $b\leqslant qa$ ثابت شده است.

فرض کنیم $a=a_1$ و $b=b_1$ جوابی از معادله $\frac{a^2+b^2}{ab+1}=q$ باشد.

حالت ۱. اگر $a_1=b_1$ آنگاه $\frac{2a_1^2}{a_1^2+1}=q$. چون

$$2(a_1^2+1)-2a_1^2=2$$

بزرگترین مقسوم علیه مشترك $2a_1^2$ و (a_1^2+1) مقسوم علیه ۲ می‌باشد بنابراین برابر ۲ یا ۱ است. اگر برابر ۲ باشد آنگاه واضح است که $2|a_1^2+1$ و $a_1=1$ (چون $a_1\neq 0$) وآنگاه باید $b_1=1$.

درحالت دیگر $a_1^2+1|1$ وآنگاه $a_1=0$ که خلاف مفروضات مسأله است. بنابراین درحالتی‌که $a_1=b_1$، داریم $a_1=b_1=1$. پس $q=1$ یك مربع‌کامل است.

حالت ۲. $a_1\neq b_1$ دراین حالت فرض می‌کنیم‌که $a_1<b_1$.

(a_1,b_1) جوابی ازمعادله (۱) $b^2-qab+a^2-q=0$ است.

اگردرآن به‌جای a عدد a_1 را قراردهیم.

$$b^2-qa_1b+a_1^2-q=0 \qquad (۲)$$

ما می‌دانیم‌که b_1 یکی از ریشه‌های معادله (۲) است. فرض کنیم b_2 ریشه دوم معادله (۲) باشد، آنگاه

$$b_1+b_2=qa_1 \quad (۳) \quad و \quad b_1b_2=a_1^2-q \quad (۴)$$

مشخص است که b_2 یك‌عدد صحیح است. چون

$$b_1>a_1>0$$

از (۴) داریم $b_2<a_1$. چون $b_1\leqslant qa_1$ ، از (۳) داریم $b_2\geqslant 0$. اگر $b_2=0$ ، از (۴) داریم $a_1^2-q=0$، $q=a_1^2$ یك مربع‌کامل است ونتیجه مطلوب حاصل است.

اگر $b_2>0$ ، جواب جدیدی برای (۱) داریم، آن را (b_2 و a_1) می‌نامیم‌که $b_2<a_1$. همان بحث بالا را تکرار می‌کنیم جواب زوج (b_2 و a_2) برای (۱) به‌دست می‌آید‌که $0\leqslant a_2<b_2$

اگر $a_2=0$ آنگاه q یك مربع‌کامل است، واگر $a_2>0$ می‌توانیم این بحث را ادامه دهیم و جوابهای جدید دیگری پیداکنیم‌که مؤلفه‌های اول‌آنها اکیداً نزولی‌است.

بنابراین بعداز تعداد متناهی ازاین‌مراحل‌جواب (b_i و 0)

29th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD JULY 9-21

IMO 1988 Canberra

$b_0 > 0$ را به دست می‌آوریم که از آن نتیجه می‌گیریم q یك مربع کامل است.

تبصره: $a=t$ و $b=t^3$ و $q=t^2$ که درآن t یك عدد صحیح مثبت است یك دسته بدیهی نامتناهی ازجوابها است،
با نظری مجدد به‌بحث فوق جوابهای بیشتری را می‌توان نتیجه گرفت. مانند $a=t^3$ ، $b=a^5-a$. درواقع اگر قراردهیم $a_1=a$ ، $b_1=a^3$ و $q=a^2$ آنگاه $a_{i+1}=b_i$ و $b_{i+1}=qb_i-a_i$ ، $i=1,2,3,\dots$ دسته جوابهای نامتناهی مطلوبی را مشخص می‌کنند. برای مثال، (۲,۸) و، (۸,۳۰)، (۳۰,۱۱۲)، (۱۱۲,۴۱۸)، ...

راه حل دیگر از آقای دکتر امیدعلی کرم‌زاده

فرض کنیم $a^2+b^2=q(1+ab)$ باید نشان دهیم q مربع کامل است.

به‌ازای $b=1$ واضح است که $q=1$. معادله

$$a^2-qba+b^2-q=0$$

را برحسب a درنظرمی‌گیریم، $\triangle$ آن باید مربع کامل باشد

$$\triangle=q^2b^2+4q-4b^2=K^2$$

برای $q=2$ و $q=3$ آشکار است که $\triangle$ مربع کامل نیست. فرض می‌کنیم که $q\geqslant 4$ حال با استقراء روی b عمل می‌کنیم. بدین صورت که نشان می‌دهیم وقتی $\triangle$ مربع کامل باشد آنگاه q نیز مربع کامل است. به‌ازاء $b=1$ و $b=2$ آشکار است که $q=1$ و $q=4$. فرض کنیم که هرگاه به‌ازاء هر c که $c<b$ ، $\triangle=q^2c^2+4q-4b^2=L^2$ آنگاه q مربع کامل باشد. وقتی که

$$\triangle=q_2b^2+4q-4b^2=K^2 \quad \text{و} \quad b>2$$

ثابت می‌کنیم که q مربع کامل است.

ادعا می‌کنیم که $q\leqslant b^2$ زیرا اگر $q>b^2$ آنگاه $K>qb$

و $(K-qb)(K+qb)=4p-4b^2$

اما $K+pb>2qb>2q$

پس $(K-qb)(K+qb)>4q$

که غیرممکن است. باتوجه به $q\leqslant b^2$ داریم $K<qb$

در نتیجه $q^2b^2+4q-4b^2=(qb-t)^2$

با تقسیم طرفین تساوی به b^2 خواهیم داشت

$$q^2+\frac{4q}{b^2}-4=\left(q-\frac{t}{b}\right)^2$$

چون $\frac{4q}{b^2}-4<-4$

باید $\frac{t}{b}<1$ از تساوی

$$q^2b^2+4q-4b^2=(qb-t)^2$$

نتیجه می‌گیریم که $4q-4b^2=t^2-2qbt$

پس باید $t=2L$ درنتیجه $q-b^2=L^2-qbL$

یا $b^2q-Lb+L^2-q=0$

$\triangle$ این معادله نیز باید مربع کامل باشد.

$$\triangle=q^2L^2+4q-4L^2=m^2$$

وباتوجه به $L<b$ وفرض استقراء نتیجه می‌گیریم که q مربع کامل است.

درخاتمه اسامی افرادی که راه حلهائی ازمسائل المپیاد را فرستاده‌اند ذکرمی‌کنیم ازکلیه این عزیزان تشکرمی‌کنیم.

حمید رضا فنائی ـ دانشجو ـ تهران، سید محمد باقر سید رضازاد دلالی ـ دانشجو ـ تبریز، علیرضا بیگدلی ـ دانشجو ـ قم علی رجائی ، آرش یزدانبخش، فرامرز صابری ، کوروش لوکلی، عرفان صفر، امیرحسین ابدال، کریمی دانش آموزان دبیرستان علامه حلی تهران

مصطفی رحمانی دانش‌آموز از تهران

شهریار مختاری دانش‌آموز چهارم ریاضی از مشهد

حل مسائل شماره ۱۷

تنظیم از: دکترحسین ذاکری

۱ـ ثابت کنیدکه به‌ازاء هرعدد طبیعی n کسر $\frac{21n+4}{14n+3}$ تحویل‌ناپذیر است. آیا به ازاء عدد طبیعی n کسر $\frac{3\times 7^n+21n+4}{2\times 7^n+14n+3}$ تحویل‌ناپذیر است؟ چرا؟

برهان. فرض کنید که d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك صورت ومخرج کسر باشد. چون $3(14n+3)-2(21n+4)=1$ پس $d=1$. کسردومی با تبدیل $n+7^{n-1}$ حاصل شده‌است، و لذا تحویل‌ناپذیرمی‌باشد.

۲ـ معادله $\cos^n x-\sin^n x=1$ را،که در آن n عددطبیعی است، حل کنید.

حل. درصورتی که $n=1$، داریم

$$\cos^n x-\sin^n x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=1$$

درنتیجه ۰ و $\frac{\pi}{4}$ جوابهای معادله درفاصله $[-\pi, \pi]$ می‌باشد

اینك فرض کنیم که $n>1$ وجوابهای معادله را برحسب زوج یا فرد بودن n در دوحالت به‌دست می‌آوریم:

حالت‌اول $n=2m$: دراین‌صورت

$$1\leqslant \sin^n x+1=\cos^n x\leqslant 1$$

و لذا $\sin^n x=0$. که از آنجا جوابهای ۰ و π در فاصلهٔ $[-\pi, \pi]$ حاصل می‌شود.

حالت دوم $n=2m+1$. دراین‌صورت

$$\begin{aligned}1&=\cos^n x-\sin^n x\\ &=\cos^{2m+1}(-x)+\sin^{2m+1}(-x)\\ &\leqslant|\cos^{2m+1}(-x)|+|\sin^{2m+1}(-x)|=\\ &\cos^2 x\,|\cos^{2m-1}(-x)|+\sin^2 x\,|\sin^{2m-1}(-x)|\\ &\leqslant \cos^2 x+\sin^2 x\\ &=1\end{aligned}$$

در نتیجه $\cos(-x)$ و $\sin(-x)$ نامنفی بوده و $|\cos x|=1$ یا $|\sin x|=1$. بنابراین $\sin(-x)=1$ یا $\cos(-x)=1$ لذا $x=2K\pi-\frac{\pi}{2}$ یا $x=2K\pi$.

۳ـ فرض می‌کنیم a_1 و . . . و a_n اعداد حقیقی ثابت، x یك متغیرحقیقی است و

$$f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{1}{2}\cos(a_n+x)+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n+x)$$

و $f(x_1)=f(x_2)=0$ باشد. ثابت کنید که عدد صحیحی مانند m هست که $x_2-x_1=m\pi$

برهان. با به‌کار بردن فرمول

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

داریم

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{K=1}^{n}\frac{1}{2^{K-1}}\cos(a_K+x)\\ &=\sum_{K=1}^{n}\frac{1}{2^{K-1}}(\cos a_K\cos x-\sin a_K\sin x)\\ &=\left(\sum_{K=1}^{n}\frac{1}{2^{K-1}}\cos a_K\right)\cos x-\\ &\left(\sum_{K=1}^{n}\frac{1}{2^{K-1}}\sin a_K\right)\sin x\\ &=A\cos x-B\sin x\end{aligned}$$

که در آن

$$A=\sum_{K=1}^{n}\frac{\cos a_K}{2^{K-1}} \quad و \quad B=\sum_{K=1}^{n}\frac{\sin a_K}{2^{K-1}}$$

چون

$$f(-a_1)=1+\frac{1}{2}\cos(a_2-a_1)+\frac{1}{4}\cos(a_3-a_1)+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n-a_1)$$
$$\geq 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\dots-\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}>0$$

پس، A و B تواماً صفر نیستند. با توجه به‌فرض مسأله داریم

$$f(x_1)=A\cos x_1-B\sin x_1=0$$
$$f(x_2)=A\cos x_2-B\sin x_2=0$$

حال، اگر $A\neq 0$، آنگاه $\cot x_1=\cot x_2=B/A$ و درنتیجه $x_2-x_1=m\pi$. درصورتی‌که $A=0$، آنگاه $B\neq 0$ و $\sin x_2=\sin x_1=0$ که ازآنجا حاصل می‌شود $x_2-x_1=m\pi$.

۴ـ فرض کنیم P_1 و ... و P_n اعداد اول متمایز باشند. ثابت کنید که $\log P_1$ و ... و $\log P_n$ روی میدان اعداد گویا مستقل خطی است.

برهان. کافی است نشان دهیم که اگر C_1 و ... و C_n اعداد صحیح باشند بطوری که

$$(*)\quad C_1\log P_1+\dots+C_n\log P_n=0$$

آنگاه $C_1=\dots=C_n=0$.

فرض کنیم به‌ازاء اعداد صحیح C_1 و ... و C_n تساوی (*) برقرار باشد. دراین‌صورت $P_1^{C_1}\cdots P_n^{C_n}=1$. بدون‌آنکه خللی به‌کلیت استدلال وارد شود می‌توان فرض کرد که

C_1 و ... و $C_i\geq 0$ و C_{i+1} و ... و $C_n\leq 0$

دراین صورت

$$P_1^{C_1}\cdots P_i^{C_i}=P_{i+1}^{-C_{i+1}}\cdots C_n^{-C_n}،$$

که ازآنجا، باتوجه به‌منحصر به‌فرد بودن تجزیه به‌عوامل اول، نتیجه می‌شود که $C_1=\dots=C_n=0$.

۵ـ فرض کنیم $P_1(x)=x^2-2$ و به‌ازاء هر j، اگر $j\geq 2$، آنگاه $P_j(x)=P_1(P_{j-1}(x))$. نشان دهید که ریشه‌های معادلهٔ $P_n(x)=x$ همگی حقیقی ومتمایزند.

برهان. تابع x با ضابطهٔ تعریف $x(t)=2\cos t$ فاصلهٔ $[0 \text{ و } \pi]$ را به‌فاصلهٔ $[2 \text{ و } -2]$ می‌نگارد. داریم

$$P_1(x(t))=P_1(2\cos t)=4\cos^2 t-2=2\cos 2t$$
$$P_2(x(t))=P_1(P_1(x(t)))=P_1(2\cos 2t)=2\cos 4t$$
$$\cdots$$
$$P_n(x(t))=2\cos(2^n t)$$

در نتیجه، با تغییر متغیر $x=x(t)$ معادله $P_n(x)=x$ به معادلهٔ $2\cos 2^n t=2\cos t$ تبدیل می‌گردد. که از آنجا $2^n t=\pm t+2K\pi$ که درآن $K=0$ و ۱ و ... .

به‌عبارت دیگر،

$$t=\frac{2K\pi}{2^n-1} \quad و \quad t=\frac{2K\pi}{2^n+1}$$

از تساوی $t=\frac{2K\pi}{2^n-1}$، 2^{n-1} مقدار متمایز با قرار دادن $K=0$ و ... و $2^{n-1}-1$ برای $\cos t$ به‌دست‌می‌آید.

هم‌چنین، از تساوی $t=\frac{2k\pi}{2^n+1}$ با قراردادن $k=0$ و ۱ و ... و 2^{n-1}، 2^{n-1} مقدارمتمایز برای $\cos t$ حاصل می‌شود. در نتیجه، $2\times 2^{n-1}=2^n$ مقدار متمایز برای $x=2\cos t$ موجود است که درمعادلهٔ $P_n(x)=x$ صدق می‌کند.

۶ـ فرض می‌کنیم

$$a=2\sqrt{1}+2\sqrt{3}+2\sqrt{5}+2\sqrt{7}+2\sqrt{9}$$
$$b=2\sqrt{2}+2\sqrt{4}+2\sqrt{6}+2\sqrt{8}+\sqrt{10}$$

کدامیك از دوعدد a و b بزرگتراست.

برهان. به‌آسانی می‌توان دید که به‌ازاء هرعدد طبیعی n،

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

اینك با قراردادن ۹ و ۷ و ۵ و ۳ و $n=1$ درنامساوی فوق وجمع طرفین نتیجه می‌شود که $b<a$.

۷ـ حداکثر در چند نقطهٔ صحیح و متمایز سه‌جمله‌ای $y=ax^2+bx+c$، که درآن $a>100$، می‌تواند مقادیر نامنفی نابیشتر از ۵۰ داشته باشد

برهان. ثابت می‌کنیم که حداکثر در دونقطهٔ صحیح و متمایز

حکم برقرار است. فرض کنیم سه نقطهٔ صحیح موجود باشد که در شرایط مسأله صدق کند (فرض خلف) در این‌صورت دوتا از آنها ومثلاً x_2 و x_1، در یک طرف $x_0 = -\frac{b}{2a}$ قرار می‌گیرند. بدون آنکه خللی به کلیت استدلال وارد شود، می‌توان فرض کرد که $x_2 > x_1$ و $x_1 \geqslant \frac{-b}{2a}$.

در این‌صورت

$$x_1+\frac{b}{2a}\geqslant 0 \quad \text{و} \quad x_2+\frac{b}{2a}\geqslant 1$$

لذا

$$100\geqslant y(x_2)-y(x_1)=a(x_2-x_1)\times$$

$$\left(x_2+x_1+\frac{b}{a}\right)>100\left(x_2+x_1+\frac{b}{a}\right)\geqslant 100$$

بنابراین $y(x_2)-y(x_1)=0$ و این‌متناقض با فرض مسأله است. درنتیجه حداکثر در دونقطه صحیح ومتمایز حکم برقرار است.

۸ــ در روی صفحه‌ای n خط رسم شده است. فرض‌کنیم هیچ دوتا از آنها با هم موازی نیست و هیچ سه تا از یک نقطه نمی‌گذرند. ثابت‌کنید که این صفحه به $\frac{1}{2}\left(n^2+n+2\right)$ ناحیه تقسیم شده است.

برهان. فرض کنیم n خط مفروض صادق در شرایط مسأله، صفحه را به $F(n)$ ناحیه تقسیم‌کند. به‌استقرا نشان‌می‌دهیم که $F(n)=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ بدیهی است که حکم به ازای $n=2$ برقرار است. فرض کنیم $k\geqslant 2$ عددی طبیعی باشد و حکم به‌ازای $n=k$ برقرار باشد. اینک حکم را به‌ازای $n=k+1$ ثابت می‌کنیم. با توجه بفرض استقرا k خط اول صفحه را به $F(k)=\frac{1}{2}\left(k^2+k+2\right)$ ناحیه‌تقسیم‌می‌کند.

$k+1$ امین‌خط با k خط اول در k نقطه مشترك است. پس، این k نقطهٔ بدست آمده $k+1$ امین‌خط را به $k+1$ قسمت تقسیم می‌کند. لذا، به $F(k)$ قسمت قبلی $k+1$ ناحیه افزوده می‌شود پس‌می‌توان نوشت

$$F(k+1)=F(k)+k+1$$

$$=\frac{1}{2}((k+1)^2+(k+1)+2)$$

اینك حکم به‌استقراء‌نتیجه می‌شود.

۹ــ فرض‌کنیم R یك حلقه، I و J و K ایده‌آلهای R بوده و $I\subseteq J\cup K$. ثابت‌کنیدکه $I\subseteq K$ یا $I\subseteq J$.

برهان. فرض کنیم $I\not\subseteq K$ و $I\not\subseteq J$. در این صورت $a\,,\,b\in I$ موجوداند که $a\notin K$ و $b\notin J$ (در نتیجه $a\in J$ و $b\in K$ زیرا $a\,,\,b\in I\subseteq J\cup K$) چون $a\,,\,b\in I$ و I ایده‌آل است، پس $a+b\in I$ درنتیجه $a+b\in J$ یا $a+b\in K$ لذا

$a=a+b-b\in K$ یا $b=a+b-a\in J$

واین با نحوهٔ انتخاب a و b تناقض دارد. بنابراین $I\subseteq K$ یا $I\subseteq J$.

۱۰ــ فرض‌کنیم A و B دوعضو یك گروه باشند به‌قسمی‌که $ABA=BA^2B$، $A^3=1$، وبه‌ازاء nای $B^{2n-1}=1$ (۱ عضوفضای گروه است) ثابت‌کنید $B=1$

برهان. $ABA=BA^2B$ نتیجه‌می‌دهد‌که $ABAB^{-1}=BA^2$ کــه از آنجا $BAB^{-1}=A^2BA^2$ بنابراین،

$$(BAB^{-1})(BAB^{-1})(BAB^{-1})=$$

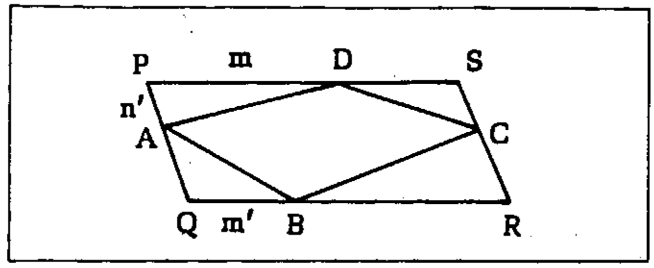
$$(A^2BA^2)(A^2BA^2)(A^2BA^2)$$

درنتیجه

$$1=A^2B(ABA)BA^2=A^2B(BA^2B)BA^2$$
$$=A^2B^2A^2B^2A^2$$

لذا $B^{-2}=AB^2A^{-1}$. که ازآنجا بابتوان n رساندن‌طرفین خواهیم‌داشت $B^{-2n}=AB^{2n}A^{-1}$. لهذا $B^{-1}=ABA^{-1}$، زیــرا $B^{2n}=B$، در نتیجــه $A(BA^2B)=1$ بنابــرایــن $A(ABA)=1$ کهٔ ازآنجا $B=1$ حاصل می‌شود.

۱۱ــ (المپیاد مسکو ۱۹۷۳) روی هریك از اضلاع متوازی‌الاضلاع $PQRS$ نقطه‌ای اختیارمی‌کنیم به‌طوری‌که مساحت چهارضلعی حاصل نصف مساحت متوازی‌الاضلاع باشد. ثابت کنید حداقل یکــی ازاقطار این چهار ضلع موازی با یکی از اضلاع متوازی‌الاضلاع است.



برهان. PS و PQ را به a و B و PD و QB را به m و m′ و SC و PA را به n و n′ نشان می‌دهیم.
مجموع مساحتهای چهارمثلث حاصل را مساوی نصف مساحت متوازی‌الاضلاع قرار می‌دهیم

$$\frac{1}{2}mn'\sin P+\frac{1}{2}(a-m)n\sin S+\frac{1}{2}(b-n)\times$$

$$(a-m')\sin R+\frac{1}{2}m'(b-n')\sin Q=\frac{1}{2}ObmP$$

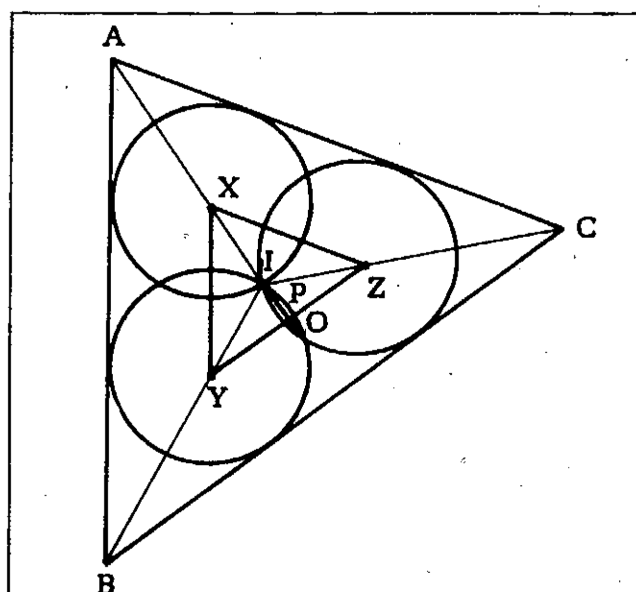
این‌تساوی پس ازاختصار به‌صورت ذیل درمی‌آید

$$(m-m')(n-n')=0$$

پس $m=m'$ یا $n=n'$

۱۲ـ (المپیاد بین‌المللی ۱۹۸۱)سه دایرهٔ متساوی به‌مراکز x و y و z و شعاع r در نقطهٔ P متقاطعند و هریك بر دو ضلع مثلث ABC مماسند ثابت‌کنید مراکز دوایر محیطی و محاطی مثلث P بریك استقامتند.

برهان. فاصلهٔ x و y و z بترتیب از اضلاع زاویه‌های A و B و C مساوی r است . در نتیجه اضلاع دو مثلث با هم



موازیست ونیمساز زوایای A و B و C بترتیب زوایای x و y و z را نصف می‌کند و در نقطه I متقاربند و I مرکز دایره محاطی دو مثلث است. از توازی اضلاع دومثلث تساوی ذیل حاصل می‌شود

$$\frac{\overline{IX}}{\overline{IA}}=\frac{\overline{IY}}{\overline{IB}}=\frac{\overline{IZ}}{\overline{IC}}=K$$

درتجانس به‌مرکز I ونسبت K $(H_{I,K})$ مثلث ABC مجانس مثلث XYZ است و در نتیجه دایره محیطـی مثلث ABC به مرکز O مجانس دایرهٔ محیطی مثلث xyz به‌مرکز P است و O و P و I بریك استقامتند

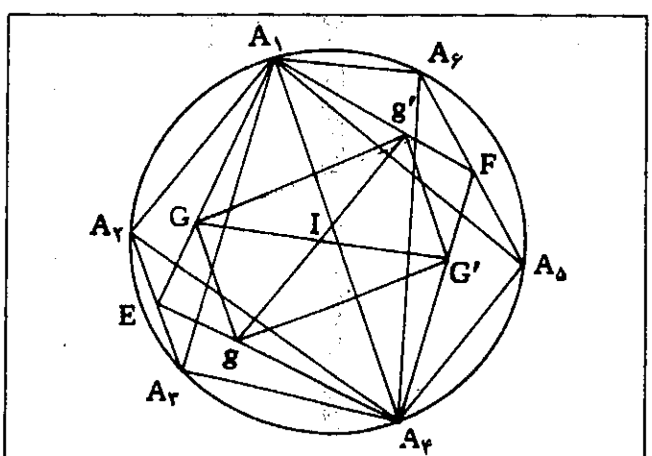
تبصره . اگر R و π شعاع دایره محیطی‌ومحاطی مثلث ABC دوتساوی دیگر را ثابت‌کنید

۱) $K=\frac{\overline{IP}}{\overline{IO}}=\frac{r}{R}=\frac{\pi-r}{r}$

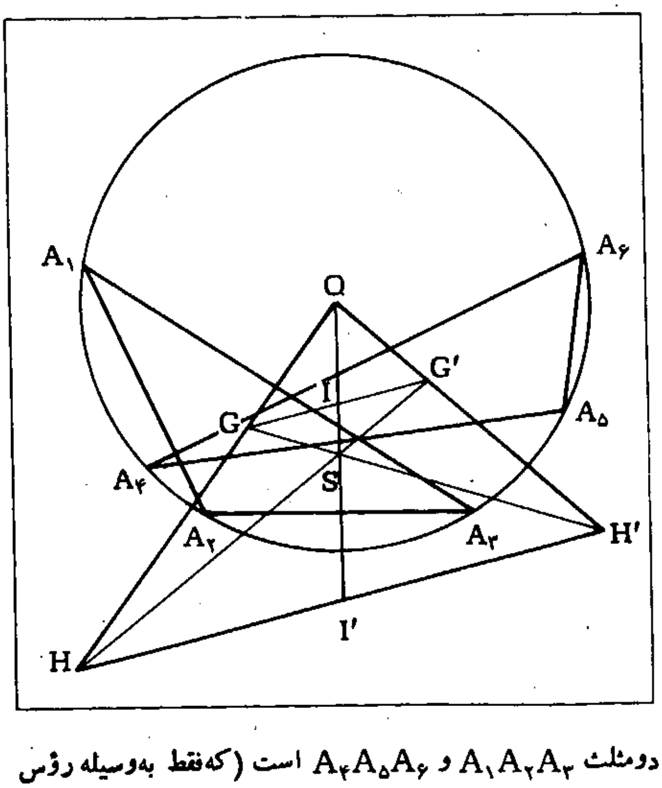
۲) $\frac{1}{R}+\frac{1}{\pi}=\frac{1}{r}$

۱۳ـ (المپیاد مجارستان ۱۹۸۱) شش‌نقطهٔ متمایز روی‌دایره‌ای مفروضند محل تلاقی ارتفاعهای تشکیل شده از هر سه نقطه از این‌نقاط را به‌محل تلاقی‌میانه‌های مثلث حادث ازسه نقطهٔدیگر وصل می‌کنیم. ثابت‌کنید ۲۰ قطعه خط حاصل ازاین عمل در یك نقطه متقاربند.

برهان. با روش هندسی. ابتدا ثابت می‌کنیم پاره‌خطهایی که مرکزهای میانه‌ای هر دو مثلث به راسهای شش نقطهٔ مفروض را به‌هم وصل می‌کنند یك وسط مشترك دارند . آنگاه به‌کمك خط اولر که شرح آن بعد خواهد آمد مسأله را ثابت می‌کنیم.



در شکل ۳ شش نقطه را به o_1 و o_2 . . . o_6 نشان می‌دهیم و G و G' مرکزهای میانه‌ای دو مثلث $A_1A_2A_3$ و $A_4A_5A_6$ را به‌هم وصل می‌کنیم و وسط آن را I می‌نامیم و ثابت می‌کنیم که I نقطهٔ ثابتی است. اگر دو مثلث دیگر از شش نقطه $A_4A_2A_3$ و $A_1A_5A_6$ را با مرکزهای میانه‌ای g و g' در نظر بگیریم به‌طوری که مشاهده می‌شود هر یك از این دو مثلث با دو مثلث دیگر در یك ضلع مشترك کند. اگر E و F وسطهای دو ضلع مشترك A_2A_3 و A_5A_6 باشد در مثلثهای EA_1A_4 و FA_1A_4 دو پاره‌خط Gg و G'g' موازی با A_1A_4 و مساوی یك سوم آنست. در نتیجه Gg G'g' متوازی‌الاضلاع است و نقطه I که وسط GG' فرض شده وسط g g' نیز می‌باشد. و به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که در هر دو مثلث به رأس‌های شش نقطهٔ مفروض I وسط پاره‌خطی است که مرکزهای میانه‌ای را به‌هم وصل می‌کند این برهان نشان می‌دهد که اگر شش نقطه روی دایره‌هم نباشد حکم صادق است در شکل (۴) G و G' مرکز میانه‌ای



دو مثلث $A_1A_2A_3$ و $A_4A_5A_6$ است (که فقط به‌وسیله رؤس بدون رسم شکل مشخص شده‌اند) با استفاده از خط اولر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلثها را به G و G' وصل کرده و OG و OG' را تا H و H' امتداد می‌دهیم به‌طوری که:

$$\overline{OH}=3\overline{OG} \qquad \overline{OH'}=3\overline{OG'}$$

پس

از تساوی $\frac{\overline{OG'}}{\overline{OH}}=\frac{\overline{OG'}}{\overline{OH'}}=\frac{1}{3}$ نتیجه می‌گیریم:

$$GG' \parallel HH'$$

از خطهایی که از O و S می‌گذرند و GG' و HH' را قطع می‌کنند عطف به قضیهٔ اشعه دو تساوی ذیل حاصل است

$$(1) \quad \frac{\overline{OG}}{\overline{OH}}=\frac{\overline{OI}}{\overline{OI'}}=\frac{\overline{OG'}}{\overline{HO'}}=\frac{\overline{IG}}{\overline{I'H}}=\frac{\overline{IG'}}{\overline{IH'}}=\frac{1}{3}$$

$$(2) \quad \frac{\overline{SG}}{\overline{SH'}}=\frac{\overline{SI}}{\overline{SI'}}=\frac{\overline{SG'}}{\overline{SH}}=\frac{\overline{IG}}{\overline{I'H'}}=\frac{\overline{IG'}}{\overline{I'H}}=-\frac{1}{3}$$

از مقایسه تساویهای (۱) و (۲) این نتیجه حاصل می‌شود

(الف) $IG=IG'$ و $I'H=I'H'$

(ب) تقسیم $(OSII')$ توافقی است یعنی

$$\frac{\overline{OI}}{\overline{OI'}}=-\frac{\overline{SI}}{\overline{SI'}}=\frac{1}{3} \qquad \overline{SO}=-\overline{SI'}$$

(ج) $$\frac{\overline{OI}}{\overline{OS}}=\frac{2}{3}\Longrightarrow \overline{OS}=\frac{3}{2}\overline{OI}$$

تساوی $\overline{OS}=\frac{3}{2}\overline{BI}$ با درنظر گرفتن اینکه I نقطه ثابتی است نشان می‌دهد نقطه S ثابت است. یعنی تمام پاره خطهای نظیر GH' و GH از نقطه ثابت S می‌گذرند و یکدیگر را به نسبت $-\frac{1}{3}$ قطع می‌کنند (تساوی ۲)

برهان دیگر باروش برداری. چون این قضیه طوری که در روش هندسه ملاحظه شد نیاز به خط اولر دارد ابتدا با ذکر مقدمه‌های قضیهٔ خط اولر را ثابت می‌کنیم.

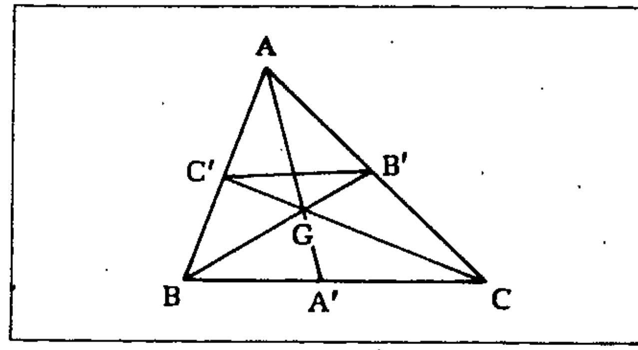
(الف) قضیه میانه‌ها درمثلث ــ هردو میانهٔ مثلث یکدیگر را به نسبت یك و دو از طرف ضلع تقسیم می‌کنند.

از تعریف میانه نتیجه می‌گیریم

$$\overrightarrow{AB'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \text{ و } \overrightarrow{AC'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{C'B'}=\overrightarrow{AB'}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$$

$$(1) \quad C'B'=\frac{1}{2}BC$$



تساوی (۱) نشان می‌دهد که $C'B'$ با BC موازی است در نتیجه میانه‌های CC' و BB' یکدیگر را در G قطع می‌کنند.
تساوی ذیل را به‌مبداء G می‌نویسیم

از (۲) $\overrightarrow{GB'}-\overrightarrow{GC'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB})$

داریم $\overrightarrow{GB'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{FC''}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$

چون راستای دومیانهٔ دوخط متقاطعند باید دوطرف تساوی(۲) صفر باشد.

$$\overrightarrow{GB'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}=0$$

$$\overrightarrow{GC'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}=0$$

یعنی میانه یکدیگر را در G به‌نسبت ۱ و ۲ تقسیم می‌کنند. چون میانه رأس A هریك از دومیانهٔ دیگر را به‌نسبت ۱ و ۲ تقسیم می‌کند باید از G بگذرد. یعنی سه‌میانه مثلث‌متقاربند.

ب) G مرکز میانه‌ای مثلث ABC در تساوی زیر صدق می‌کند.

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$$

درمثلث GBC

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=(\overrightarrow{A'B}-\overrightarrow{A'G})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AG})=$$

$$-2\overrightarrow{A'G}\Longrightarrow\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA}=0$$

ج) در مثلث ABC ، G مرکز میانه‌ای و O نقطه دلخواهی است.

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

دوطرف سه‌تساوی برداری

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB} \text{ و } \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC} \text{ و }$$

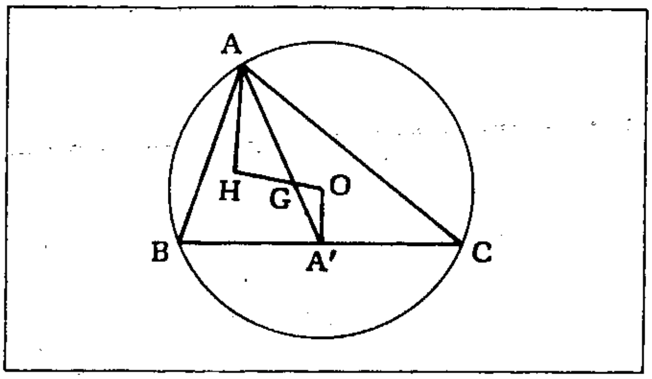
$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}$$

را باهم جمع می‌کنیم.

د) قضیهٔ خط اولر: درمثلث ABC اگر O مرکز دایرهٔ محیطی و G مرکز میانه و H مرکز ارتفاعی باشد.

$$\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$$

برهان. O را به G وصل کرده وآن را ازمثلث G تانقطهٔ H



امتداد می‌دهیم به‌طوری‌که $\overrightarrow{OH}$ دوبرابر $\overrightarrow{OG}$ بشود از دو تساوی $\overrightarrow{GH}=2\overrightarrow{OG}$ و $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GA'}$ نتیجه می‌گیریم

$$\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GA'}+2\overrightarrow{OG}\Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{HA}=2\overrightarrow{A'O}$$

این تساوی نشان می‌دهد که HA با OA' موازی است و در نتیجه HA بر BC عمود است چون دربارهٔ میانه یکی از دو ضلع دیگر این عمل تکرار شود ثابت می‌شودکه H مرکز ارتفاعی مثلث است.

تساوی $\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GO}$ چون به‌مبداء O نوشته‌شود.

$$\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OG}=2\overrightarrow{OG}\Longrightarrow\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$$

برهان. مسأله ۳ به‌روش برداری
درشکل ۴ دومثلث $A_1A_2A_3$ و $A_4A_5A_6$ را به ترتیب با مرکزهای میانه‌ای و ارتفاعی G و H و G' و H' درنظر می‌گیریم به موجب خط اولر

$$\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG} \text{ و } \overrightarrow{OH'}=3\overrightarrow{OG'}$$

است. ازاین دوتساوی برداری نتیجه می‌گیریم

$$(۱)\quad \overrightarrow{OH'}-\overrightarrow{OH}=3(\overrightarrow{OG'}-\overrightarrow{OG})\Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{HH'}=3\overrightarrow{OG'}$$

تساوی (۱) نشان می‌دهدکه $\overrightarrow{HH'}$ و GG' با هم موازیند و درنتیجه GH' و HG' یکدیگر را در نقطهٔ S قطع می‌کنند. تساوی (۱) نسبت به‌مبداء S چنین نوشته می‌شود:

از $\quad \overrightarrow{SH'}-\overrightarrow{SH}=3(\overrightarrow{SG'}-\overrightarrow{SG})$

داریم $\quad (۲)\quad \overrightarrow{SH'}+3\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{SH}+3\overrightarrow{SG'}$

درتساوی برداری (۲) دوطرف دو بردار مساوی صفرند زیرا اگرچنین نباشد چون راستای آنها دوخط متقاطع است با مساوی بودن‌آنها سازگارنیست.

داریم:

$$\overrightarrow{SH}+3\overrightarrow{SG'}=0\ ;\ \overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OS}+3\overrightarrow{OG'}-3\overrightarrow{OS}=0$$

پس $\quad (۳)\quad 4OS=3\overrightarrow{OG}+3\overrightarrow{OG'}$

درمثلثهای $A_1A_2A_3$ و $A_4A_5A_6$

$$\overrightarrow{OG'}=\frac{\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{OA_6}}{3}$$

و

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}}{3}$$

از تساوی (۳) ودوتساوی اخیرنتیجه می‌شود:

$$(۴)\quad \overrightarrow{OS}=\frac{1}{4}\sum_1^6\overrightarrow{OA_i}$$

تساوی (۴) نشان می‌دهدکه S نقطهٔ ثابتی است وقضیه ثابت است.

نتیجه مهم. اگر I وسط $\overrightarrow{CG'}$ و I' وسط HH' باشد.

$$(۵)\quad \overrightarrow{OI}=\frac{\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OH'}}{2}\ ،\ \overrightarrow{OI}=\frac{1}{6}\sum_1^6\overrightarrow{OA_i}$$

$$(۶)\quad \overrightarrow{OI'}=\frac{\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OG'}}{2}=\frac{3\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG'}}{2}$$

$$\overrightarrow{OI'}=\frac{1}{2}\sum_1^6\overrightarrow{OA_i}$$

ازمقایسه تساویهای (۴) و (۵) و (۶) نتیجه می‌شود

O و S و I و I'

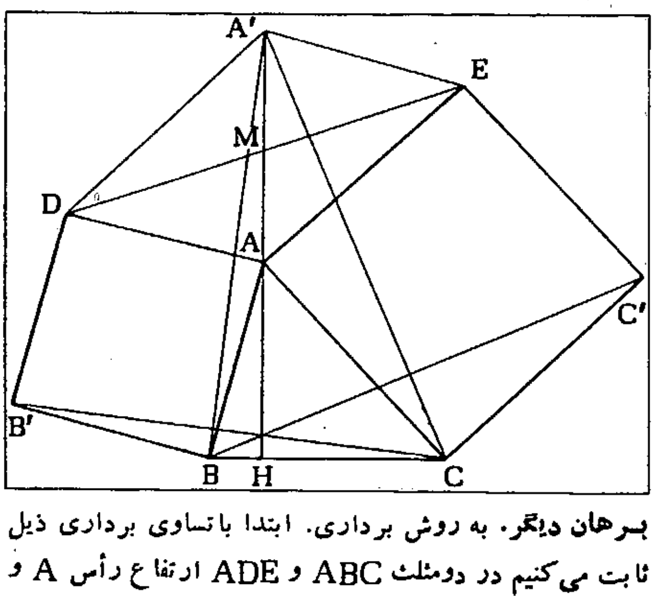
بریك خط راست واقعند.

۱۴- درمثلث ABC روی دوضلع AB و AC دو مربع $ABB'D$ و $ACC'E$ را درخارج مثلث رسم می‌کنیم. ثابت کنید BC' و CB' درنقطه‌ای روی ارتفاع AH از مثلث ABC یکدیگررا قطع می‌کنند.

برهان. از E و D دوخط موازی با AD و AE رسم می‌کنیم. درمتوازی‌الاضلاع حاصل $AEA'D$ قطر AA' دو مثلث‌متساوی‌با ABC پدیدمی‌آورد (مثلث $EA'A$ و $DA'A$ مساوی مثلث ABC اند). از تساوی این دو مثلث نتیجه می‌گیریم :

$$\hat{A}_1+\hat{A}_2+\hat{A}_3=180^\circ \quad و \quad E\hat{A}A'=C$$

و A و A' و H بریك استقامتند. از وصل A' به C و B به‌سادگی‌ثابت می‌شود دومثلث $A'AC$ و BCC' باهم‌مساویند وهمینطور دومثلث $A'BA$ و CBB' به‌حالت دوضلع وزاویهٔ بین دوضلع باهم مساویند. در نتیجه BC' عمود بر CA' و CB' عمود بر BA' است و در مثلث $A'BC$ سه ارتفاع متقاربند.



برهان دیگر. به روش برداری. ابتدا باتساوی برداری ذیل ثابت می‌کنیم در دومثلث ABC و ADE ارتفاع رأس A و میانه نظیررأس A بریك امتداد واقعند طول اضلاع مثلث C را طبق معمول به A و B و C نشان می‌دهیم.

$$\vec{AA'}\cdot\vec{BB}=(\vec{AE}+\vec{AD})(\vec{AC}-\vec{AB})\Longrightarrow$$

$$\vec{AA'}\cdot\vec{BC}=\vec{AE}\cdot\vec{AC}-\vec{AE}\cdot\vec{AB}+\vec{AD}\cdot\vec{AC}-\vec{AD}\cdot\vec{AB}\Longrightarrow$$

$$\vec{AA'}\cdot\vec{BC}=b\cdot b\cos 90-cb\cos(90+\hat{A})+bc\cos(90+A)-c\cdot c\cos 90^{\circ}$$

$$\vec{AA'}\cdot\vec{BC}=0$$

تساوی برداری فوق نشان می‌دهدچون AA' بر BC وطول‌های مخالف صفر دارند، زاویهٔ بین آنها قائمه است.

$$\vec{BC'}\cdot\vec{AC'}=(\vec{BC}+\vec{CC'})(\vec{CA}+\vec{AA'})$$

$$\vec{BC'}\cdot\vec{CA'}=\vec{BC}\cdot\vec{CA}+\vec{CC}\cdot\vec{AA'}+\vec{CC'}\cdot\vec{CA}+\vec{CC'}\cdot\vec{AA'}$$

$$\vec{BC'}\cdot\vec{CA'}=-ab\cos C+0+0+\vec{CC'}\cdot\vec{AE}+\vec{CC'}\cdot\vec{AD}$$

$$\vec{BC'}\cdot\vec{CA'}=0$$

به‌این ترتیب ثابت می‌شود

$$\vec{CB'}\cdot\vec{BA'}=0$$

چون درمثلث $A'BC$، BC' و CB' و AA' امتداد ارتفاع نظیرسه رأس B و C و A' است. سه‌ارتفاع مثلث متقاربند.

یادآوری: با روش برداری به‌کمک برداری بسادگی ثابت می‌شودکه سه ارتفاع متقاربند. (درمثلث ABC دو ارتفاع BB' و CC' را رسم می‌کنیم تا در O متقاطع شوند

$$\vec{OC}\cdot\vec{AB} \quad \text{و} \quad \vec{OB}\cdot\vec{AC}$$

هردو صفرند.

ازاین رابطه معلوم می‌شود $\vec{OA}\cdot\vec{BC}$ نیز صفراست.

$$\vec{OA}\cdot\vec{BC}=\vec{OA}(\vec{OC}-\vec{OB})$$

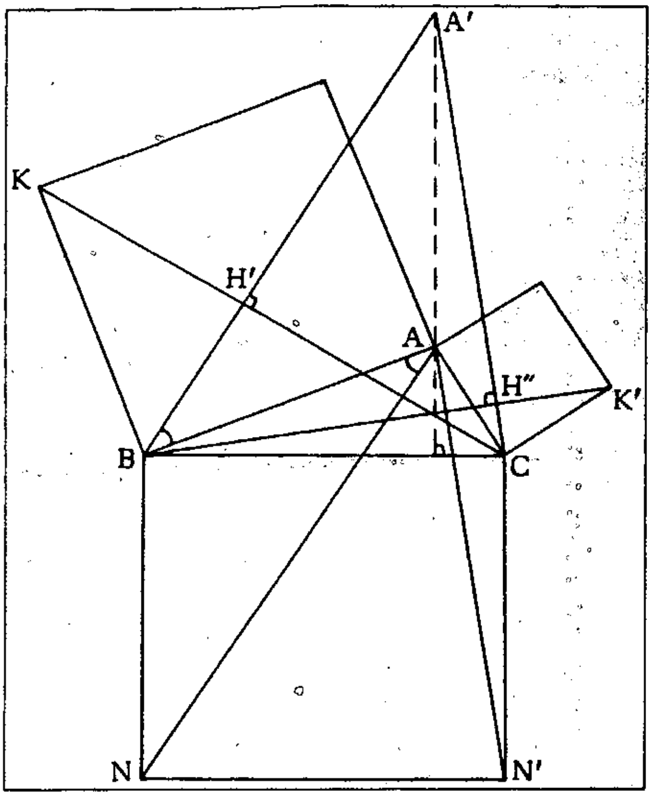
$$\vec{OA}\cdot\vec{BC}=\vec{OA}\cdot\vec{OC}-\vec{OA}\cdot\vec{AB}=0$$

یعنی OA بر BC عمود است.)

(حل اول مسئله ۱۴ ازآقای غیور است)

راه حل سوم.

حل ازآقای حسین تقی‌لو، دبیر دبیرستانهای خدابنده زنجان



حل ۰ مربع $BCN'N$ را روی ضلع BC می‌سازیم و از A پاره خط AA' را موازی‌ومساوی BN رسم می‌کنیم درنتیجه چهار ضلعی $AA'BN$ متوازی‌الاضلاع و لذا

$$A\hat{B}A'=B\hat{A}N$$

حال اگرمثلث ABN را در جهت عقربه‌های ساعت به اندازه 90° دوران دهیم برروی مثلث BKC منطبق می‌شود در نتیجه $KC\perp AN$ ولذا موازی AN یعنی $A'B$ نیز عمود بر KC است، بنابراین CH' ارتفاع مثلث $A'BC$ است به همین ترتیب ثابت می‌شود BH'' نیز یك ارتفاع‌مثلث $A'BC$ است پس ارتفاع سوم یعنی $A'H$ نیز از تلاقی BK' و KC می‌گذرد.

۱۵− به‌چندطریق می‌توان ۴۰ عددکتاب دو بدو متمایزرا بین سه‌نفر تقسیم کرد به‌طوری که به‌هر نفرحداقل یك‌کتاب برسد؟

برهان. اگرعدهٔ اعضای مجموعهٔ A را با $|A|$ نشان دهیم، می‌دانیم‌که برای سه پیشامد A_1، A_2، A_3

$$|A_1\cup A_2\cup A_3|=|A_1|+|A_2|+|A_3|$$

$$-|A_۱\cap A_۲|-|A_۱\cap A_۳|-|A_۲\cap A_۳|$$
$$+|A_۱\cap A_۲\cap A_۳|$$

حال به‌ازاء $i=۱,۲,۳$ چنین تعریف می‌کنیم:

$A_i=$ مجموعهٔ راههای تقسیم کتابها به‌طوری که به نفر iام هیچ کتابی نرسد. روشن‌است که $\overline{A_i}$ (متمم A_i) به‌این‌معنی است که حداقل یك کتاب به‌نفر iام برسد ودراین‌مسأله،محاسبهٔ

$$|\overline{A_۱}\cap\overline{A_۲}\cap\overline{A_۳}|$$

مورد سؤال است. اما

$$|\overline{A_۱}\cap\overline{A_۲}\cap\overline{A_۳}|$$
$$=\text{کلیه راههای تقسیم کتابها}-|\overline{A_۱\cap A_۲\cap A_۳}|$$
$$=\text{کلیه راههای تقسیم کتابها}-|A_۱\cup A_۲\cup A_۳|$$
$$=۳^{۴۰}-|A_۱|-|A_۲|-|A_۳|-|A_۱\cap A_۲|$$
$$-|A_۱\cap A_۳|-|A_۲\cap A_۳|$$
$$+|A_۱\cap A_۲\cap A_۳|$$
$$=۳^{۴۰}-۲^{۴۰}-۲^{۴۰}-۲^{۴۰}-۱^{۴۰}-۱^{۴۰}-۱^{۴۰}+۰$$
$$=۳^{۴۰}-۳\times ۲^{۴۰}-۳$$

درمحاسبات بالا از اصل ضرب درشمارشها استفاده شده‌است. (مثلاً درمحاسبهٔ $|A_۱|$ گوئیم که کتابها باید طوری بین سه‌نفر تقسیم شود که به نفراول کتابی نرسد وطبق اصل ضرب تعداد راههای انجام این‌کار $۲^{۴۰}=۲\times۲\times\dots\times۲\times۲$ است.)

۱۶ــ اگر معادلهٔ

$$ax^n+a_۱x^{n-۱}+\dots+a_{n-۱}x=۰$$

دارای یك ریشهٔ مثبت $x_۰$ باشد، ثابت کنید معادلهٔ

$$nax^{n-۱}+(n-۱)a_۱x^{n-۲}+\dots+a_{n-۱}=۰$$

دارای یك ریشهٔ مثبت کوچکتر از $x_۰$ می‌باشد.

برهان. طرف چپ معادلهٔ اول را $f(x)$ می‌گیریم. در این صورت طرف چپ‌معادلهٔ دوم $f'(x)$ می‌شود. تابع f درفاصلهٔ $[۰,x_۰]$ درشرایط قضیهٔ میانگین‌صدق می‌کند. بنابراین

$$۰<x_۱<x_۰$$

هست که
$$f(x_۰)-f(۰)=(x_۰-۰)f'(x_۱)$$

با توجه به‌فرض داریم
$$f(x_۰)=f(۰)=۰$$

بنابراین
$$x_۰f'(x_۱)=۰$$

لذا
$$f'(x_۱)=۰$$

واثبات پایان می‌یابد.

۱۷ــ آیا اعدادی مانند a و b و c موجودند به‌قسمی که‌داشته باشیم :

$$(*)\sqrt{a-۱}+\sqrt{b-۱}+\sqrt{c-۱}>\sqrt{c(ab+۱)}$$

برهان. نامساوی‌کوشی را در مورد بردارهای

$$\overrightarrow{U}=(\sqrt{x-۱}\ ,\ ۱)\ \text{و}\ \overrightarrow{V}=(۱\ ,\ \sqrt{y-۱})$$

بکار می‌بریم. داریم

$$\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{V}=\sqrt{x-۱}+\sqrt{y-۱}\ \text{و}\ |\overrightarrow{u}|=$$
$$\sqrt{x}\ \text{و}\ |\overrightarrow{v}|=\sqrt{y}$$

چون
$$\sqrt{x-۱}+\sqrt{y-۱}\leqslant\sqrt{xy}$$

پس
$$\sqrt{a-۱}+\sqrt{b-۱}+\sqrt{c-۱}\leqslant\sqrt{ab}+\sqrt{c-۱}\leqslant$$
$$\sqrt{c(ab+۱)}$$

بنابراین اعداد a و b و c وجود ندارند که در * صدق کنند.

۱۸ــ به‌ازای چه مقادیرطبیعی n، تساوی زیر برقرار است

$$\sqrt[n]{۱۷\sqrt{۵}+۳۸}+\sqrt[n]{۱۷\sqrt{۵}-۳۸}=\sqrt{۲۰}$$

برهان. فرض کنیم
$$a=\sqrt[n]{۱۷\sqrt{۵}+۳۸}$$

دراین صورت
$$a+\frac{۱}{a}=\sqrt{۲۰}$$

لذا
$$a=\sqrt{۵}+۲$$

چون
$$(\sqrt{۵}+۲)^۳=۱۷\sqrt{۵}+۳۸$$

پس
$$n=۳$$

۱۹ــ نشان دهید تابعی مانند g که از R به R پیوسته واکیداً نزولی می‌باشد وجود دارد بطوری‌که

$$(a>۰\ \text{و}\ a\neq۱)\ ،\ g(g(x))=ax+b$$

اما چنین تابعی وجود ندارد که در شرط

$c\neq 0$ ، $g(g(x))=x+c$

صدق کند.

حل. به‌آسانی مشخص می‌شود که تابع g با ضابطه

$$g(x)=-\sqrt{a}\,x+\frac{b}{1-\sqrt{a}}$$

درشرط مسأله صدق می‌کند.

برای قسمت دوم فرض‌کنیم چنین تابعی باشد که در شرط $g(g(x))=x+c$ و $c\neq 0$ صدق‌کند چون g پیوسته و اکیداً نزولی وبادامنهٔ R است، پس خط $y=x$ را درنقطه‌ای قطع می‌کند و بنابراین نقطه ثابتی به‌طول p دارد یعنی $g(p)=p$. درنتیجه $p+c=g(g(p))=p$ و این ممکن نیست.

۲۰ـ فرض‌کنیم f و g دوتابع باشندکه‌دارای‌مشتق‌دوم پیوسته برفاصله $[0,1]$ می‌باشند. $K_f(x)$ را در نقطه $(x\ ,\ f(x))$ به‌صورت

$$K_f(x)=f''(x)[1+(f'(x))^2]^{-\frac{3}{2}}$$

تعریف می‌کنیم. به‌همین ترتیب $K_g(x)$ تعریف می‌شود. فرض‌کنیم $f(0)=g(0)=0$ و $f'(0)=g'(0)=0$ و به ازاء هر x از $[0,1]$ ، $K_g(x)\geqslant K_f(x)$. ثابت کنید به‌ازاء هر x از $[0,1]$ ، $g(x)\geqslant f(x)$.

حل. داریم:

$$K_f(x)=\frac{d}{dx}\sin \operatorname{Arc\,tg} f'(x)$$

بنابراین برای هر u از $[0,1]$ داریم:

$$\sin \operatorname{Arc\,tg} f'(u)=\int_0^u K_f(t)dt\leqslant\int_0^u K_g(t)\,dt$$
$$=\sin \operatorname{Arc\,tg} g'(u)$$

اما چون $\sin(\operatorname{Arc\,tg} x)$ صعودی است پس

$$g'(u)\geqslant f'(u)$$

درنتیجه به‌ازاء هر x از $[0,1]$

$$f(x)=\int_0^x f'(u)du\leqslant\int_0^x g'(u)du=g(x)$$

ششمین دوره مسابقات ریاضی‌استانی دانش‌آموزان کشور همزمان با دهمین سالگرد پیروزی انقلاب اسلامی تاریخ برگزاری مرحله اول ۱۴ر۱۱ر۱۳۶۷

> مبارزه علمی برای جوانان زنده‌کردن روح جستجو و کشف واقعیتها و حقیقتهاست.
>
> «امام خمینی»

الف ـ سئوالات صبح

۱ـ اگر α ریشه معادله $x^3+x^2-2x-1=0$ باشد آنگاه دو ریشه‌دیگر معادله‌را برحسب کثیرالجمله‌ای‌باضرایب گویا برحسب α بدست‌آورید.

۲ـ در مثلث غیرمشخص ABC که هرسه‌زاویه‌آن‌حاده هستند ارتفاعات CF ، BD ، AD را امتداد می‌دهیم تادایره‌محیطی مثلث را به ترتیب در Q ، P و R قطع‌کنند. اگر h طول بزرگترین ارتفاع و s طول کوچکترین سه‌پاره‌خط BQ،AP و CR باشند ثابت‌کنید.

$$\frac{h}{s}>\frac{1367}{1989}$$

۳ـ دوتابع حقیقی f و g بر R را وابسته گوئیم هرگاه تابع

حقیقی دو سوئی h (یك به یك و پوششی) باشد بطوری که $hof=goh$ (o ترکیب توابع است)

الف- نشان دهید اگر f با g وابسته و g با φ وابسته باشند آنگاه f با φ نیز وابسته‌اند.

ب- مطلوبست تعیین شرط لازم وکافی برحسب a و b برای اینکه دوتابع $f(x)=x^2$ و $g(x)=x^2-ax+b$ وابسته باشند.

ب - سئوالات بعدازظهر

۴- معادله سیاله زیر را حل کنید (m ، n ، p و q ارقام هستند)

$$(m-9)^2(m!)+(n-8)^2(n!)+50(p!)+$$
$$+49(q!)=\sqrt{\overline{mnpq}}$$

۵- فرض‌کنید تابع f بر [a و b] $(0<a<b)$ تعریف‌شده ودر رابطه $|f(x)-f(y)|<|x-y|$ صدق می‌کند و داریم $f(a)=f(b)=0$ ثابت کنید

$$f(x)-f(y)|<\frac{a+b}{2}$$

۶- در متوازی‌الاضلاع ABCD که $AC>BD$ است از راس C عمودهای CE و CF را به ترتیب بر AB و AD رسم می‌کنیم ثابت کنید

$$AB\cdot AE+AD\cdot AF=AC^2$$

حل مساله ۱)

می‌دانیم $P(x)=x^3+x^2-2x-1=0$ ریشهٔ گویا ندارد پس $P(x)$ روی اعداد گویا تجزیه نمی‌شود . یعنی α ریشه کثیرالجمله دیگری از درجهٔ کمتر از ۳ نمی‌تواند باشد و $P(x)$ تنها کثیرالجملهٔ درجهٔ سوم تحویلناپذیر روی اعداد گویا است که $P(\alpha)=0$. حال کثیرالجملهٔ

$$P(x-1)=x^3-2x^2-x+1$$

را درنظر می‌گیریم ریشه‌های $P(x-1)=0$ عبارتند از $\alpha+1$ ، $\beta+1$ و $\gamma+1$. که α و β و γ ریشه‌های $P(x)=0$ می‌باشند.

اما ، $\beta\cdot\gamma=\frac{1}{\alpha}$ و $(\beta+1)(\gamma+1)=\frac{-1}{\alpha+1}$

پس ،

$$\beta+\gamma=(\beta+1)(\gamma+1)-\beta\gamma-1=\frac{-1}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha}-1$$

یعنی

$$\begin{cases}\beta+\gamma=\dfrac{-\alpha^2-3\alpha-1}{\alpha(\alpha+1)}\\ \beta\cdot\gamma=\dfrac{2}{\alpha}\end{cases}$$

در نتیجه ، $\beta=\frac{-1}{\alpha+1}$ ، $\gamma=\frac{-(\alpha+1)}{\alpha}$.

حال قرار میدهیم

$$\beta=-\frac{1}{\alpha+1}=A\alpha^2+B\alpha+C$$

ضرائب A ، B ، و C راتعیین می‌کنیم، خواهیم‌داشت

$$A\alpha^3+(A+B)\alpha^2+(B+C)\alpha+C+1=0$$

داریم $\alpha^3=1+2\alpha-\alpha^2$

با قراردادن آن‌در رابطه اخیر بدست می‌آوریم:

$$B\alpha^2+(B+C+2A)\alpha+(A+C+1)=0$$

$$\begin{cases}B=0\\ B+C+2A=0 \implies A=1 \text{ و } C=-2\\ A+C+1=0\end{cases}$$

بنابراین $\beta=\alpha^2+0\times\alpha-2=\alpha^2-2$

و چون $\alpha+\beta+\gamma=-1$ ،

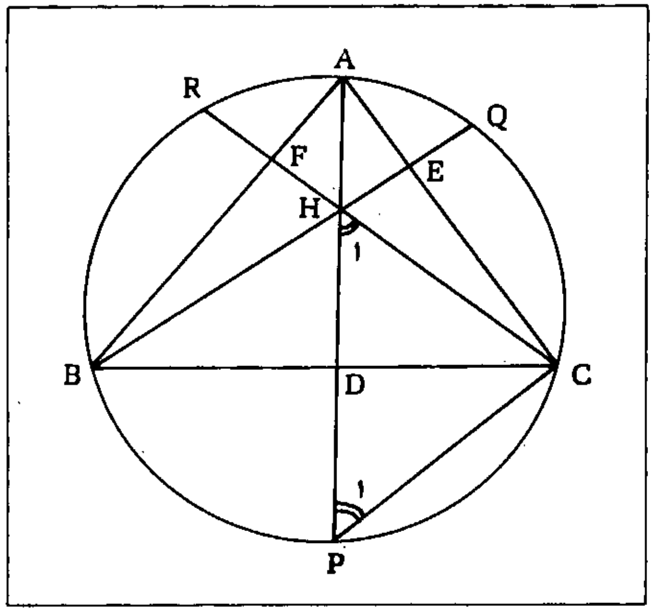
در نتیجه $\gamma=-1-\alpha-\alpha^2+2=-\alpha^2-\alpha+1$

حل مساله ۲)

می‌دانیم که قرینه محل تلاقی سه‌ارتفاع نسبت به اضلاع روی دایرهٔ محیطی است. پس

در نتیجه $\frac{AP}{AD}=1+\frac{DP}{AD}=1+\frac{HD}{AD}$

$$\frac{AP}{AD}+\frac{BQ}{BE}+\frac{CR}{CF}=3+\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{FC}$$



اما:

$$\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{FC}=\frac{S_{BHC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{AHC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{AHB}}{S_{ABC}}=1$$

پس

$$\frac{AP}{AD}+\frac{BQ}{BE}+\frac{CR}{CF}=4$$

و باتوجه به نامساوی

$(x\,,\,y\,,\,z\geqslant 0)\ \frac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz}$ داریم

$$\frac{AP}{AD}\times\frac{BQ}{BE}\times\frac{CR}{CF}\leqslant\frac{64}{27}$$

پس،

$$\frac{s^3}{h^3}\leqslant\frac{64}{27}\implies\frac{h}{s}\geqslant\frac{3}{4}>\frac{1367}{1989}$$

حل مساله ۳) توجه می‌کنیم که f با g وابسته‌اند هرگاه

$$f=h^{-1}\circ g\circ h$$

پس اگر $y=\Psi^{-1}\varphi\Psi$ (h و ψ دوسوئی‌اند) آنگاه

$$f=h^{-1}(\Psi^{-1}\varphi\Psi)h=(\Psi h)^{-1}\varphi(\Psi h)$$

و Ψh نیز دوسوئی است پس φ و f نیز وابسته‌اند.

برای قسمت (ب) از تساوی $h(f(x))=g(h(x))$ داریم

$$(1)\quad h(x^2)=h(x)^2-ah(x)+b$$

اگر x را به $-x$ تبدیل کنیم خواهیم‌داشت

$$(2)\quad h(x^2)=h(-x)^2-ah(-x)+b$$

دوتساوی (۱) و (۲) را از هم کم کنیم خواهیم داشت

$$(h(x)-g(-x))(h(x)+h(-x)-a)=0$$

چون h یک‌به‌یک است پس برای هر $x\neq 0$

$h(x)-h(-x)\neq 0$ ،

بنابراین برای هر x ، $h(x)+h(-x)-a=0$. چون h تابعی پوشاست پس x_0ی موجود است بطوریکه

$$h(x_0)=\frac{a}{2}\quad\text{و در نتیجه}\quad h(-x_0)=\frac{a}{2}$$

و چون h تابعی یک‌به‌یک است پس $x_0=0$ یعنی

$h(0)=\frac{a}{2}$. حال در تساوی

$$h(x^2)=h(x)^2-ah(x)+b$$

بجای x صفر گذاشته خواهیم‌داشت

$$\frac{a}{2}=\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}+b$$

یعنی

$$\boxed{a^2+2a=4b}$$

این شرط کافی است زیرا توجه می‌کنیم که برای تابع دوسوئی

$$h(x)=x+\frac{a}{2}$$

خواهیم داشت: $h\circ f=g\circ h$

حل مساله ۴) می‌دانیم $\overline{mnpq}\leqslant 99$ بنابراین

$$(m-9)^2(m!)+(n-8)^2(n!)+50(p!)+$$
$$+49(q!)\leqslant 99$$

حداقل مقدار !p و !q یک می‌باشد پس کمترین مقدار

$۵۰(p!)+۴۹(q!)$ ، ۹۹ می‌باشد بنابراین

$$(m-۹)^۲m!+(n-۸)^۲(n!)=۰$$

$$(m-۹)^۲m!=۰ \Longrightarrow \boxed{m=۹}$$

$$(n-۸)^۲(n!)=۰ \Longrightarrow \boxed{n=۸}$$

و

$$* \quad ۵۰(p!)+۴۹(q!) \leqslant ۹۹$$

از این نامساوی نتیجه می‌شود: $p!=۱$ و $q!=۱$ پس

$$\begin{cases}p=۰\\p=۱\end{cases} \quad و \quad \begin{cases}q=۰\\q=۱\end{cases}$$

تنها جواب $\boxed{p=۰}$ و $\boxed{q=۱}$ در رابطهٔ * صدق می‌کند

بنابراین $\overline{mnpq}=(۹۹)^۲=۹۸۰۱$

حل مساله۵) اگر $x=y$ حکم واضح‌است. اگر x دلخواه و a یا $y=b$ داریم

$$\begin{cases}|f(x)-f(a)|<|x-a|=x-a<x\\|f(x)-f(b)|<|x-b|=b-x\end{cases}$$

پس $|f(x)|<\frac{b}{۲}<\frac{a+b}{۲}$

$$|f(x)-f(b)|<\frac{a+b}{۲}$$

و $|f(x)-f(a)|<\frac{a+b}{۲}$

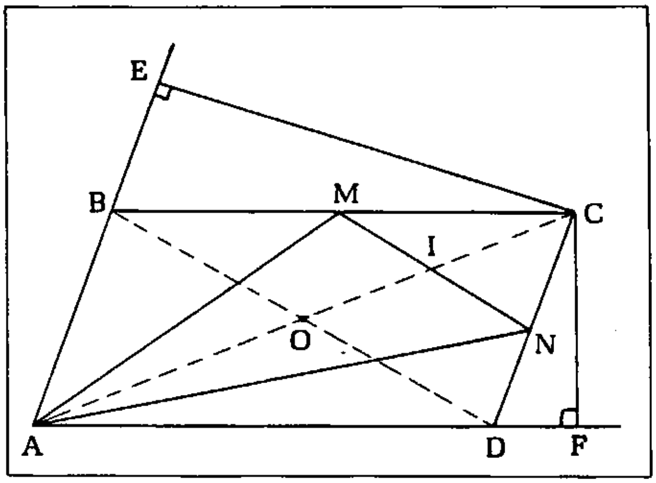
اگر $(a و b) \in x$ و y ، کافی است فرض کنیم $|x-y|>\frac{a+b}{۲}$ ، داریم

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\leqslant |f(x)|+|f(y)|\\ &< x+b-y\\ &=b-(x-y)\end{aligned}$$

می‌توان فرض کرد $x<y$ ، پس

$$|f(x)-f(y)|<b-\frac{a+b}{۲}=\frac{b-a}{۲}<\frac{b+a}{۲}$$

حل مساله ۶)



در دایره‌ای به قطر BC (که مرکزش M است) داریم:

$$P_{A|(M)}=\overline{AB}\cdot\overline{AE}=AM^۲-\frac{BC^۲}{۴}$$

در دایره‌ای به‌قطر CD (که مرکزش N است) داریم:

$$P_{A|(N)}=\overline{AD}\cdot\overline{AF}=AN^۲-\frac{CD^۲}{۴}$$

طرفین روابط بالا را جمع می‌کنیم.

$$AB\cdot AE+AD\cdot AF=(AM^۲+AN^۲)-\frac{۱}{۴}(BC^۲+CD^۲)$$

$$=\frac{۱}{۲}MN^۲+۲AI^۲-\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۲}BD^۲+۲CD^۲)$$

$$=\frac{۱}{۲}(\frac{BD}{۲})^۲+۲(\frac{۳}{۴}AC)^۲-\frac{۱}{۸}BD^۲-\frac{۱}{۲}(\frac{AC}{۲})^۲$$

$$=\frac{۱}{۸}BD^۲+\frac{۱۸}{۱۶}AC^۲-\frac{۱}{۸}BD^۲-\frac{۱}{۸}AC^۲$$

$$=\frac{۹}{۸}AC^۲-\frac{۱}{۸}AC^۲$$

پس:

$$AB\cdot AE+AD\cdot AF=AC^۲$$

عناوین جُنگ ریاضی (شمارهٔ ۲)

سؤالات ریاضیات گروه آزمایشی فنی و مهندسی سال ۶۷

۱- اگر $b < 0 < a$ و $|a| > |b|$ آنگاه حاصل عبارت $|a+b|+|b|+|a|$ برابر کدام است؟

۱) $-2b$ ۲) $-2a$ ۳) $2a$ ۴) $2b$

۲- فرض کنیم

$$A_n=\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{2}{n},\ x\in R\right\} \text{ و } n\in N$$

در این صورت، $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ برابر کدام است؟

۱) $]0, 1]$ ۲) $]0, 1[$

۳) $]0, 2]$ ۴) $[0, 2[$

۳- فرض کنیم a و b مختلف‌العلامه باشند و $a < b$. دراین صورت، کدام نامساوی همواره برقرار است؟

۱) $a^2 < b^2$ ۲) $a^3 < b^3$

۳) $b^2 < a^2$ ۴) $b^3 < a^3$

۴- فرض کنیم A، B، C و D چهارنقطه روی یك محور واقع هستند. در این صورت، $\dfrac{\overline{AC}+\overline{CB}}{\overline{AD}+\overline{DB}}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

۵- به ازاء چه مقدار m دو خط

$$2x+5my=4$$

و

$$mx+2(m^2+1)y=3m+2$$

برهم منطبق هستند؟

۱) $m=-2$ ۲) $m=2$

۳) $m=1$ ۴) $m=-1$

۶- کدام یك از معادلات

(الف) $2\sqrt{3x-6}+\sqrt{x^2-2x}=0$

(ب) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}=0$

(ج) $2+\sqrt{x-4}=0$

دارای ریشه حقیقی است؟

۱) الف ۲) ب ۳) الف و ب ۴) ج

۷- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2-4x+5}{(x-1)(x^2+1)}\geqslant 0$ کدام است؟

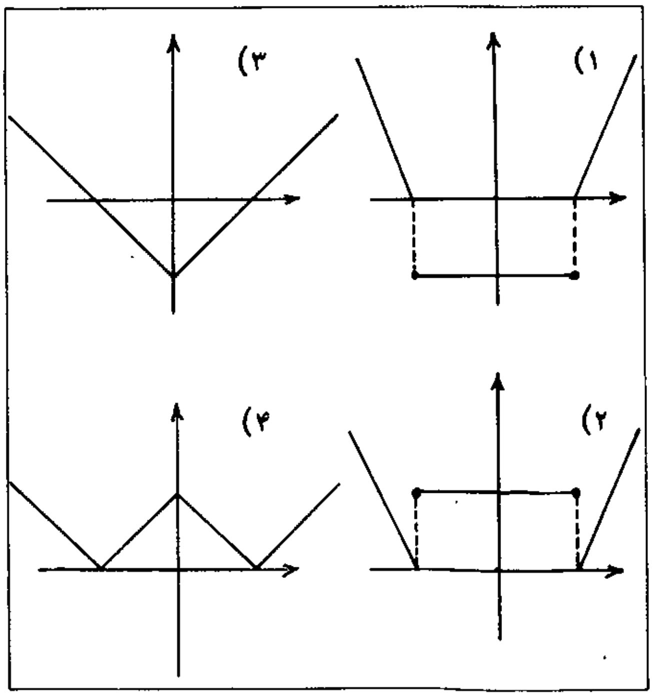
۱) $\{x|\ x\leqslant 1\}$ ۲) $\{x|\ x<1\}$

۳) $\{x|\ x\geqslant 1\}$ ۴) $\{x|\ x>1\}$

۸- اگر به ازاء هر x که $|x-1|<\delta$ آنگاه $\left|\frac{2x^2+x}{x}-3\right|<\frac{1}{5}$. در این صورت مقدار δ کدام است؟

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{2}{5}$

۹- منحنی نمایش تابع $f(x)=||x|-2|$ کدام است؟



۱۰- مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع

$$f(x)=\begin{cases}-\sqrt{x^2-16} & |x|\leqslant 4\\ x-4 & |x|>4\end{cases}$$

کدام است؟

۱) $\{-4\}$ ۲) $\{4\}$ ۳) $\{-4, 4\}$ ۴) $\varnothing$

۱۱- فرض کنیم $A=\{a, b, c\}$ و رابطه R در A چنین تعریف شود:

$R=\{(a, a)$ و (a, b) و (b, b) و $(b, c)\}$

چه زوجی به R اضافه شود تا R دارای خاصیت بازتابی باشد؟

۱) (b, a) ۲) (c, b)

۳) (c, a) ۴) (c, c)

۱۲- در رشته $t_1=5$ و به ازاء $n\geqslant 1$، $t_{n+1}=4t_n$، جمله nام آن کدام است؟

۱) $n+4$ ۲) $3n+2$

۴) $5\times 4^{n-1}$ ۴) $5\times 4^{2n-2}$

۱۳- کسر متعارفی مولد بسط دهگانی ۰/۱۴۴۴۰۰۰ کدام است؟

۱) $\frac{14}{99}$ ۲) $\frac{14}{33}$ ۳) $\frac{13}{90}$ ۴) $\frac{49}{30}$

۱۴- جواب معادله

$$\log(x+4)=\frac{1}{2}\log(2x+11)$$

کدام است؟

۱) -5 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 5

۱۵- $\lim_{x\to 1}([x]-1)[x]$ حد کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 0 ۴) 1

۱۶- حد عبارت $\frac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-9}$، وقتی که $x\to 3$، برابر

کدام است؟

۱) ۰ ‏ ۲) ۱ ‏ ۳) $\frac{1}{9}$ ‏ ۴) $\frac{1}{18}$

۱۷- فرض کنیم به ازاء هر x،

$$1+x+2x^2-x^3=3+a(x-2)+b(x-2)^2-(x-2)^3$$

در این صورت $a+b$ برابر کدام است؟

۱) -7 ‏ ۲) -5 ‏ ۳) 5 ‏ ۴) 7

۱۸- فرض کنیم

$$g(x)=x-\frac{1}{x} \quad \text{و} \quad f(g(x))=x^2+\frac{1}{x^2}-4$$

در این صورت، $f(x)$ کدام است؟

۱) x^2-4 ‏ ۲) x^2-2

۳) x^2 ‏ ۴) x^2+2

۱۹- دوره تناوب تابع $f(x)=2x-[2x]$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ‏ ۲) ۱ ‏ ۳) $\frac{3}{2}$ ‏ ۴) ۲

۲۰- تابع $f(x)=|x-1|+\frac{1}{x}$ دارای چند مجانب است؟

۱) ۳ ‏ ۲) ۱ ‏ ۲) ۲ ‏ ۴) مجانب ندارد

۲۱- حاصل عبارت $\sqrt[3]{(-x)^3}+\sqrt{x^2}+\sqrt{(-2)^2}$، وقتی که $x>0$، کدام است؟

۱) $-2x-2$ ‏ ۲) -2

۳) $2x+2$ ‏ ۴) 2

۲۲- وارون تابع $f(x)=2x+14$ کدام است؟

۱) $g(x)=-\frac{1}{2}x-7$

۲) $g(x)=-\frac{1}{2}x+7$

۳) $g(x)=\frac{1}{2}x-7$

۴) $g(x)=\frac{1}{2}x+7$

۲۳- با استفاده از جبر کلیدی، ساده شده عبارت

$$[abc+a'c+b'c]\cdot c'$$

کدام است؟

۱) ۰ ‏ ۲) ۱ ‏ ۳) a ‏ ۴) b

۲۴- مساحت نمودار رابطه

$$S=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2 \ \text{و}\ 0\leqslant y\leqslant x-[x]\}$$

در صفحه، برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ‏ ۲) ۱ ‏ ۳) $\frac{3}{2}$ ‏ ۴) ۲

۲۵- عمل * را در اعداد حقیقی نا صفر $(R-\{0\})$ چنین تعریف می‌کنیم:

$$a*b=\frac{a+b}{ab}$$

عضو خنثی این عمل کدام است؟

۱) ۰ ‏ ۲) $\frac{1}{2}$ ‏ ۳) ۱ ‏ ۴) ندارد

۲۶- فرض کنیم W زیر مجموعه غیر تهی از فضای برداری V باشد، در این صورت، شرط اینکه W زیر فضای V باشد کدام است؟

۱) W تنها نسبت به جمع برداری بسته باشد.

۲) W تنها نسبت به ضرب اسکالر بسته باشد.

۳) W نسبت به جمع برداری بسته و هر عضو نا صفر آن وارون داشته باشد.

۴) W نسبت به جمع برداری و ضرب اسکالر بسته باشد.

۲۷- فرض کنیم Q مجموعه اعداد گویا باشد. در این صورت، معنی گزاره سوری مقابل کدام است؟

$$\forall x\forall y\exists z((x,y\in Q,\ z\in R-Q,\ x<y)\Rightarrow x<z<y)$$

۱) بین هر دو عدد گنگ عدد گویایی موجود است.

۲) بین هر دو عدد گویا عدد گنگی موجود است.

۳) عدد گنگی موجود است که بین هر دو عدد گویاست.

۴) عدد گویایی موجود است که بین هردو عدد گنگ است.

۲۸- فرض کنیم P یک عدد فرد اول x و y دو عدد طبیعی باشند به طوری که $P+y^2=x^2$. در این صورت، $x+y$ برابر کدام است؟

۱) $P-1$ ۲) P ۳) 1 ۴) $P+1$

۲۹- اگر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح a و b را، به ترتیب، با نماد (a, b) و $[a, b]$ نمایش دهیم، آنگاه حاصل $[(a^2, a)$ و $(a, b)]$ کدام است؟

۱) $|a|$ ۲) a ۳) b ۴) $|b|$

۳۰- نقطه $(6, -1)$، تحت ماتریس A به نقطه $(-6, 1)$ تبدیل شده است، در این صورت ماتریس تبدیل A کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۳۱- ریشه‌های مشخصه ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ و ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ و ۰ و ۱

۲) ۰ و $\frac{3}{4}$ و ۱ ۴) $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ و ۱

۳۲- وارون ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}$

۳۳- فرض کنیم A یک ماتریس متعامد باشد. $(A^{-1})'$ برابر کدام است؟

۱) A ۲) A^{-1} ۳) A' ۴) I

۳۴- حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin x - \sin 3x}{(1+\cos x)}\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۳۵- مساحت ناحیه محصور بین منحنی‌های به معادلات

$y=x^2$ و $y=-x^2+4x$

چقدر است؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) $\frac{11}{2}$

۳۶- هرگاه $u(x)=\int_{-x}^{x} \cos t\,dt$، $u'(x)$ کدام است؟

۱) $-\sin x$ ۲) $-\cos x$

۳) $2\sin x$ ۴) $2\cos x$

۳۷- هرگاه $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}$ مقدار $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) e ۳) $1+e$ ۴) ∞

۳۸- اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، کدامیک از روابط زیر همواره صحیح است؟

۱) $P(A\cup B)=P(A)\cdot P(B)$

۲) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

۳) $P(A\cap B)=P(A)+P(B)$

۴) $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

۳۹- میانه داده‌های آماری مقابل کدام است؟

۴۰ و ۳۵ و ۵۸ و ۴۱ و ۱۱ و ۱۷

۱) ۴۱ ۲) ۳۷/۵ ۳) ۵۸ ۴) ۴۹/۵

۴۰- کدامیك از تعاریف زیر تعریف صحیحی از ضریب تغییرات می‌باشد؟

۱) جذر واریانس.

۲) خارج قسمت انحراف معیار به میانگین.

۳) خارج قسمت واریانس به میانگین.

۴) فاصله بزرگترین عنصر از کوچکترین عنصر.

۴۱- به ازاء چه مقدار m معادله

$$x^3 - 3x + (1-m) = 0$$

دارای ریشه مضاعف مثبت است؟

۱) $m = -1$ ۲) $m = 0$

۳) $m = 1$ ۴) $m = 2$

۴۲- برد تابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{[x]} & x < 0 \\ 0 & x \geqslant 0 \end{cases}$ کدام است؟

۱) $]-\infty, 0]$ ۲) $[0, 1]$

۳) $[0, 1[$ ۴) $[0, \infty[$

۴۳- اگر A و B دو پیشامد مستقل و

$$P(A) = \frac{2}{3} \quad \text{و} \quad P(B) = \frac{1}{4}$$

باشد $P(A \cup B)$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{12}$ ۲) $\frac{11}{12}$ ۳) $\frac{2}{12}$ ۴) $\frac{5}{12}$

۴۴- از هر رأس n ضلعی چند قطر مرور می‌کند؟

۱) $n-4$ قطر ۲) $n-3$ قطر

۳) $n-2$ قطر ۴) $n-1$ قطر

۴۵- مجموعه نقاطی که در دستگاه مختصات قطبی با معادله $\theta = \frac{\pi}{4}$ مشخص می‌شود، در دستگاه مختصات قائم با چه ضابطه‌ای مشخص می‌گردد؟

۱) $y = -x$ ۲) $y = x$ و $x > 0$

۳) $2y = -\sqrt{2}x$ ۴) $2y = \sqrt{2}x$

۴۶- کدام یك از گزاره‌های ذیل تنها یك صفحه در فضا را مشخص می‌کند؟

۱) دو خط موازی.

۲) دو خط متنافر.

۳) سه نقطه واقع بر یك خط راست.

۴) یك خط و یك نقطه واقع بر روی آن خط.

۴۷- کدام یك از توابع مثلثاتی بر بازه $[\pi, 2\pi]$ صعودی است؟

۱) $y = \sin x$ ۲) $y = \cos x$

۳) $y = \operatorname{tg} x$ ۴) $y = \operatorname{cotg} x$

۴۸- اگر O روی دایره‌ای به مرکز C و AB قطری از آن باشد به طوری‌که OA، OB، OC سه شعاع متوالی یك دستگاه توافقی باشد آنگاه شعاع چهارم آن چه خطی است؟

۱) خطی که از مرکز دایره می‌گذرد.

۲) خطی که همواره مماس بر دایره است.

۳) خطی عمود بر AB است.

۳) خطی موازی AB است.

۴۹- نقاط M و N و P وسطهای سه ضلع مثلث ABC را بهم وصل می‌کنیم. اگر پیرامون مثلث MNP برابر ۶ باشد آنگاه پیرامون مثلث ABC کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۵۰- حاصل عبارت $\frac{1}{2\sin a}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$ برابر کدام است؟

۱) $\sin a$ ۲) $\sin b$ ۳) $\cos a$ ۴) $\cos b$

۵۱- حاصل عبارت $\cos\left(\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$ کدام است؟

۱) $-\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $-\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۵۲- حاصل عبارت $\operatorname{Arccotg} x + \operatorname{Arccotg}(-x)$ برابر

کدام است؟

۱) $-\pi$ ۲) 0 ۳) $\pi/2$ ۴) π

۵۳- اگر $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \cos 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x \leqslant 1$ آنگاه تغییرات x کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

۳) $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4}$ ۴) $\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4}$

۵۴- معادله $\cos 4x \cos x + \sin 4x \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ در فاصله $[0, \pi]$، چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۵۵- اگر معادله $2\sin^2 x - \cos^2 x - 2k \sin x \cos x = -4$ دارای جواب باشد، آنگاه حدود تغییرات k کدام است؟

۱) $|k| \leqslant 3\sqrt{2}$ ۲) $|k| \leqslant 2$

۳) $|k| \geqslant 2$ ۴) $|k| > 3\sqrt{2}$

۵۶- در دستگاه $\begin{cases} \cos(x-y)+\cos(x+y)=\frac{2}{3} \\ tgx+tgy=3 \end{cases}$، حاصل عبارت $x+y$ برابر کدام است؟

۱) $2K\pi$ ۲) $K\pi+\pi/2$

۳) $2K\pi+\pi/2$ ۴) $(2K+1)\pi$

۵۷- درمثلث ABC، دوارتفاع AH و BH' را رسم کرده‌ایم، در این صورت، نسبت $\frac{AH}{BH'}$ برابر کدام است؟

۱) AC/BC ۲) $(AC)^2/(BC)^2$

۳) BC/AC ۴) $(BC)^2/(AC)^2$

۵۸- اگر d_a نیمساز زاویه درونی مثلث قائم‌الزاویه $\left(A=\frac{\pi}{2}\right)$ باشد، آنگاه $\frac{(b+c)d_a}{bc}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

۵۹- معادله صفحه‌ائی که از نقطه $(1, 0, 3)$ می‌گذرد و بر $V(1, 3, 2)$ عمود است، کدام است؟

۱) $x+3y+2z=4$ ۲) $x+3y+2z=7$

۳) $2x+2y-4z=4$

۴) $2x+2y-4z=7$

۶۰- نمایش هندسی معادله $4x^2-y^2+2y=1$ کدام است؟

۱) بیضی ۲) دایره

۳) دو خط راست ۴) یك نقطه

۶۱- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازه دو پاره خطی که ارتفاع وارد بروتر جدا می‌کند، به ترتیب، ۶/۴ و ۳/۶ است. در این صورت، مجموع دو ضلع مجاور به زاویه قائمه کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۶۲- در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(A=90)$، حاصل عبارت $c^2+a^2\sin(B-C)$ برابر کدام است؟

۱) $b-c$ ۲) $b+c$ ۳) b^2 ۴) c^2

۶۳- اگر در مثلثی $b+c=2a$ آنگاه حاصل $tg\,\frac{B}{2}\,tg\,\frac{C}{2}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۶۴- دو نقطه A و B که در دو طرف یك درخت، و در امتداد پای یك درخت، قرار دارند زاویه فرازآنها به ترتیب α و β است. در این صورت ارتفاع درخت برحسب α، β و AB کدام است؟

۱) $AB(tg\alpha+tg\beta)$ ۲) $AB(cotg\alpha+cotg\beta)$

۳) $AB/(tg\alpha+tg\beta)$ ۴) $AB/(cotg\alpha+cotg\beta)$

۶۵- با حروف کلمه جمهوری به چند طریق می‌توان کلمات ۳ حرفی بدون تکرار حروف ساخت که حرف اول آنها حرف نقطه‌دار نباشد؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۷۲۰

سؤالات ریاضیات گروه آزمایشی علوم تجربی سال ۶۷

۱- اگر $A\cap B=A-B$ آنگاه A برابر کدام گزینه است؟

۱) B ۲) B' ۳) M ۴) $\varnothing$

۲- اگر ارزش گزاره $\sim q\wedge(p\Rightarrow q)$ درست باشد، آنگاه ارزش کدام گزاره همواره درست است؟

۱) p ۲) q

۳) $\sim p\vee q$ ۴) $\sim p\wedge q$

۳- در دستگاه $\begin{cases}\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۴}\\ x+y+z=۱۸\end{cases}$، مقدار x چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۴- حاصل عبارت $\frac{x^۳+y^۳+z^۳-۳xyz}{(x-y)^۲+(y-z)^۲+(z-x)^۲}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}(x+y+z)$

۲) $-(x+y+z)$

۳) $\frac{۱}{۲}(x+y+z)$

۴) $(x+y+z)$

۵- اگر $a^۲+b^۲+c^۲+۳=۲(a+b+c)$ آنگاه مقدار c چقدر است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶- فرض کنیم سه عدد مثبت، $\frac{۱}{a}$، $\frac{۱}{b}$، $\frac{۱}{c}$، به ترتیب، سه جمله متوالی یك تصاعد هندسی باشند. در مورد $\log a$، $\log b$، $\log c$ چه حکمی می‌توان کرد؟

۱) سه جمله متوالی یك تصاعد حسابی است.

۲) سه جمله متوالی یك تصاعد هندسی است.

۳) $\log a$ واسطه حسابی بین $\log b$ و $\log c$ است.

۴) $\log a$ واسطه هندسی بین $\log b$ و $\log c$ است.

۷- مجموعه $A=\{x|x\in R,\ \sqrt{x^۲}+x=۰\}$ با کدام یك از مجموعه‌های ذیل هم‌ارز است؟

۱) $\{x|x\in R,\ x^۳=x\}$

۲) $\{x|x\in R,\ x^۲=x\}$

۳) $\{x|x\in R,\ x^۲\leqslant ۰\}$

۴) $\{x|x\in R,\ x\leqslant ۰\}$

۸- حد عبارت $\frac{۴x-\sqrt{۲x+۱}}{x+\sqrt{x^۲+۲}}$، وقتی که $x\to+\infty$، کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ∞

۹- حد تابع $f(x)=x\sin\frac{۱}{\sqrt{x}}+\frac{\sin x}{x^۲+۳x}$ را، وقتی که $x\to ۰^+$، کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۱۰- معادله درجه دومی که ریشه‌های آن، به ترتیب، ۵ واحد بیشتر از قرینه ریشه‌های معادله $mx^۲-۲x+۱=۰$ باشد، کدام است؟

۱) $mx^۲-۲(۱+۴m)x+۱۱=۰$

۲) $mx^۲-۲(۱+۵m)x+۲۵m+۱۱=۰$

۳) $mx^۲+۲(۱+۴m)x-۹=۰$

۴) $mx^۲+۲(۱-۵m)x+۲۵m-۹=۰$

۱۱- معادله $۴x^۴+x^۳-۳x^۲-x-۱=۰$ چند ریشه گویا دارد؟

۱) ۰ ‏ ۲) ۱ ‏ ۳) ۲ ‏ ۴) ۴

۱۲- فرض کنیم که

$A(۲, ۰)$ و $B(-۲, ۰)$ و $C=(۲\sin\alpha, ۳\cos\alpha)$

سه رأس یك مثلث باشند، با تغییر رأس C، مکان هندسی محل برخورد سه میانه مثلث چه شکلی است؟

۱) بیضی ‏ ۲) دایره

۳) سهمی ‏ ۴) هذلولی

۱۳- دامنه تابع $f(x)=\log_x(x^۲-۱)$ کدام است؟

۱) $x>۱$ یا $x<-۱$ ‏ ۲) $x\geqslant ۱$

۳) $|x|<۱$ ‏ ۴) $x>۱$

۱۴- فرض کنیم که

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x}(\sqrt[۳]{x+۸}-۲) & x\neq ۰\\ a & x=۰\end{cases}$$

اگر f در نقطه صفر پیوسته باشد، آنگاه مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ‏ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ‏ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ‏ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۵- فرض کنید که

$$f(x)=(x-a)(۲x-a)\cdots(nx-a)$$

در این صورت، $f'(a)$ کدام است؟

۱) $(n-۱)!a^n$ ‏ ۲) $(n-۱)!a^{n-۱}$

۳) $n!a^n$ ‏ ۴) $n!a^{n-۱}$

۱۶- معادله بیضی که مرکز آن $C(-۲, ۳)$، محور کانونی آن موازی محور xها، طول قطر بزرگ آن ۱۰ و فاصله کانونی آن ۸ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{(x+۲)^۲}{۲۵}+\frac{(y-۳)^۲}{۹}=۱$

۲) $\frac{(x+۲)^۲}{۲۵}+\frac{(y-۳)^۲}{۹}=۱$

۳) $\frac{(x+۲)^۲}{۲۵}+\frac{(y-۳)^۲}{۱۶}=۱$

۴) $\frac{(x+۲)^۲}{۹}+\frac{(y-۳)^۲}{۱۶}=۱$

۱۷- معادله دایره‌ای که مرکزش $C(۰, ۱)$ و بر دایره به معادله $x^۲+y^۲-۴x-۶y-۳=۰$ مماس باشد، کدام است؟

۱) $x^۲+y^۲-۲y-۱۱+۸\sqrt{۲}=۰$

۲) $x^۲+y^۲-۲y-۲۳+۱۶\sqrt{۲}=۰$

۳) $x^۲+y^۲+۲y+۱۱+۸\sqrt{۲}=۰$

۴) $x^۲+y^۲+۲y+۲۳+۱۶\sqrt{۲}=۰$

۱۸- مختصات کانون سهمی $y^۲-۲y-۲x-۳=۰$ کدام است؟

۱) $(-۲, ۱)$ ‏ ۲) $\left(-\frac{۳}{۲}, ۱\right)$

۲) $\left(\frac{۳}{۲}, ۱\right)$ ‏ ۴) $(۳, ۱)$

۱۹- مجموعه جوابهای نامعادله

$$(x^۲+\sqrt{۲}x+۲)(x^۲-۴)\leqslant ۰$$

کدام است؟

۱) $[-۲, ۲]$

۲) $[-\sqrt{۲}, \sqrt{۲}]$

۳) $]-\infty, -۲]\cup[۲, \infty[$

۴) $]-\infty, -\sqrt{۲}]\cup[\sqrt{۲}, \infty[$

۲۰- حاصل

$$\log_n\frac{۲}{۱}+\log_n\frac{۳}{۲}+\cdots+\log_n\left(\frac{n}{n-۱}\right)$$

کدام است؟

۱) ۰ ‏ ۲) ۱

۳) $n\log_n ۲$ ‏ ۴) $\left(\frac{n+۱}{n}\right)\log_n ۲$

۲۱- دوره تناوب تابع $\cot g۲x-\cos^۲ ۲x$ کدام است؟

۱) π ‏ ۲) ۲π ‏ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ‏ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

۲۲- مساحت سطح محصور بین منحنی به معادله

$y=۳x^۲+۶x+۳$

محور xها و خطوط $x=0$ و $x=\alpha$، $(\alpha > 0)$ برابر ۲۶ است، مقدار α کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۳- انتگرال تابع $3\cos x\sqrt{\sin x} - 4\sqrt[3]{x}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\cos^3 x} - 3x^{\frac{4}{3}} + C$

۲) $2\sqrt{\cos^3 x} - 3x^{\frac{4}{3}} + C$

۳) $\sqrt{\sin^3 x} - \frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} + C$

۴) $2\sqrt{\sin^3 x} - 3x^{\frac{4}{3}} + C$

۲۴- نزدیکترین نقطه منحنی $x^2 - y^2 = 1$ به نقطه $P(2, 0)$ کدام است؟

۱) $(-\sqrt{2}, 1)$ ۲) $(-1, 0)$

۳) $(1, 0)$ ۴) $(\sqrt{2}, 1)$

۲۵- حاصل عبارت

$$(\cos x - \sin x)(\cos 2x - \sin 2x) + \sin 3x$$

کدام است؟

۱) $\cos x$ ۲) $\cos^2 x$

۳) $\sin x$ ۴) $\sin^2 x$

۲۶- مقدار عبارت $\frac{\cos 20 + \sqrt{3}\sin 20}{\cos 40}$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۷- اگر $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}$ آنگاه بیشترین مقدار $\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) -1 ۳) ۱ ۴) $+\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۸- معادله $\mathrm{Arc}\cos(1-2t^2) = 2\mathrm{Arc}\sin t^2$ دارای چند جواب است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۹- بازاء چه مقدار α معادله $\sqrt{2}\sin x - \cos x = tg\alpha$ دارای جواب است؟

۱) $\left[\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ ۲) $\left[\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$

۳) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ ۴) $\left[\frac{-2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$

۳۰- اگر $\frac{f(x)}{\cos x} + \frac{f(-x)}{\sin x} = 2$، آنگاه $f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ برابر کدام است؟

۱) $-\sqrt{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۳۱- اگر در مثلث ABC،

$$\frac{\sin A}{a} = -\frac{\cos(A+C)}{b} \quad \text{و} \quad \hat{C} = 50^\circ$$

آنگاه زاویه A کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) 55° ۳) 65° ۴) ۷۰

۳۲- فرض کنیم C نقطه متغیری از دایره به شعاع R و AB وتر ثابتی از آن به فاصله $\frac{R}{2}$ از مرکز دایره باشد. اگر مساحت مثلث ABC ماکزیمم باشد، آنگاه زاویه B کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۳۳- اگر نسبت مساحتهای دو مثلث متشابه به K^2 باشد، آنگاه نسبت محیطهای آنها کدام است؟

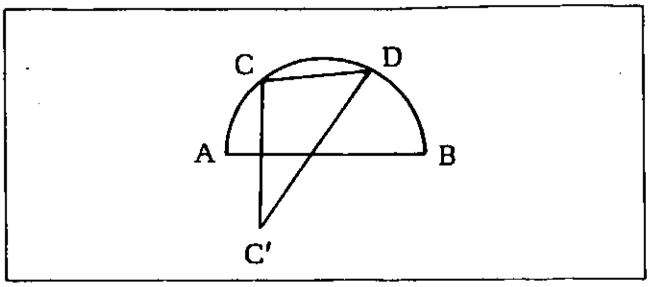
۱) $\frac{K}{2}$ ۲) K ۳) $K+2$ ۴) $2K$

۳۴- دایره $C(O, R)$ و نقطه P بر صفحه دایره و در برون آن مفروضند، درصورتیکه فاصله دورترین نقطه دایره به نقطه P برابر ۱۶ و اندازه مماسی که از P بر دایره رسم شود ۱۲ باشد، قطر دایرهٔ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۳۵- وتر CD به طول ثابت l برروی نیم دایره‌ای به قطر AB $(l < 2R)$، در جهت حرکت عقربه ساعت

می‌لغزد. اگر C' قرینه نقطه C نسبت به قطر AB باشد.
آنگاه زاویه $\widehat{CC'D}$ چه وضعی دارد؟ (مطابق شکل)،



۱) وضعیت مشخصی ندارد.

۲) همواره افزایش می‌یابد.

۳) همواره کاهش می‌یابد.

۴) همواره ثابت است.

۳۶- اگر a و b دو بردار نا صفر باشند، آنگاه زاویه بین دو بردار $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ و $(|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) حاده ۳) قائمه ۴) منفرجه

۳۷- تصاویر دو خط متنافر بر صفحه‌ای که موازی عمود مشترک آنها است، نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱) برهم عمودند. ۲) برهم منطبق‌اند.

۳) متقاطع‌اند. ۴) موازی‌اند.

۳۸- در کره‌ای به شعاع R اگر مساحت عرقچین $3\pi R^2$ باشد، آنگاه شعاع قاعده عرقچین کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}R$ ۳) $\frac{1}{3}R$ ۴) $\frac{1}{2}R$

۳۹- معادله یك مجانب هذلولی به معادله

$$\frac{(x-1)^2}{36}-\frac{y^2}{81}=1$$

کدام است؟

۱) $3x-2y+3=0$

۲) $2x-3y-1=0$

۳) $3x+2y-3=0$

۴) $2x-3y+3=0$

۴۰- به ازاء چه مقدار m منحنی به معادله $y=\frac{2x-3}{mx-1}$ دارای مجانب $y=-2$ است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

یادداشتی برمسألهٔ ۲ ازمسائل مسابقه دانشجوئی ریاضی‌کشورمندرج درمجله رشد ریاضی شماره ۱۸

درشماره قبل صفحهٔ ۳۰ مسأله ۲ حلی ساده به شکل زیر دارد و درصورت مسأله نیز نیازی به فرض مشخصهٔ ۲ نیست.

حل ساده: در تساوی $y\neq 1$ و $xy^2=xy$ کافیست بـه جـای x قرار دهیم $(x+1)$ پس $(x+1)y^2=(x+1)y$ یعنی $y\neq 1$ و $y^2=y$ پس مانند حلقه بول R جابجائی است.

فرستنده: دکتر کرمزاده

پاسخ آزمون ریاضی گروه آزمایشی علوم تجربی سال ۶۷

محمود نصیری

با توجه به اینکه همه ساله کنکور دانشگاهها هر سال به صورت تست چهارگزینه‌ای انجام می‌شود، بر آن شدیم تا به تحلیلی ازاین سؤالات دست بزنیم. هدف ما در اینجا بررسی درستی یا نادرستی روش تستی نیست.

با پذیرش اینکه به‌علت کثرت داوطلبان ورود به دانشگاهها راهی جز برگزاری آزمون ورودی به صورت تستی فعلاً مقدور نیست،طبیعی‌است که این سؤالات باید طوری طرح شوندکه انتخاب اصلح انجام شود، وکسانی‌که شایستگی‌کافی دارند به دانشگاهها راه یابند. همچنین این سؤالات باید چنان باشند که صورت‌کلیشه‌ای نداشته باشند، تاعده‌ای صرفاً با آموختن برخی فنون یا شگردهای پاسخ به تستها و بدون درك واقعی مطالب درسی، نتوانند موفقتر ازکسانی باشندکه مطالب درسی را فهمیده‌اند.

تستها نباید حالت حفظی داشته باشند، بلکه باید چنان‌باشند که دانش‌آموز با حل‌آنها به جواب صحیح برسد وگزینه‌ها نیز به‌گونه‌ای باشندکه تا حل کامل تست، نتوان‌آن را مشخص کرد. باید تا حد امکان سعی شودکه با امتحان‌کردن جوابها تعیین گزینه درست امکان‌پذیر نباشد. به طور نمونه تستهای شمارهٔ ۱۲ و ۱۴ و ۶ و ۶۵ ... آزمون ریاضی گروه فنی و مهندسی و ۱۳ گروه تجربی از این ویژگی برخوردار نیستند.

یك نمونه دیگر تست شمارهٔ ۲ گروه فنی و مهندسی است‌که به‌آسانی مشخص می‌شودکه عدد ۲ به این مجموعه تعلق دارد و بین‌گزینه‌ها فقط (۳) است‌که شامل ۲ می‌باشد. طراح می‌توانست حداقل‌گزینه دیگری را نیز شامل ۲ می‌داد تا به آسانی جواب مشخص نشود، زیرا این روش حل‌از نظر مفهوم ریاضی بدآموزی و نامطلوب است. کیفیت تست بسیار مهم است، زیرا اگر تست دارای‌کیفیت مناسبی باشد بهتر می‌توان دانش‌آموزان مستعد را انتخاب‌کرد چون این‌آزمون یك مسابقه می‌باشد ساده یا مشکل بودن برای همه یکسان است. اگر تستها خیلی ساده یا خیلی سخت باشند انتخاب مشکل خواهد بود. وقتی تست‌دارای مفهوم خوبی‌باشد دانش‌آموزان مجبور به تعمق در مطالب درسی می‌شوند. مثلاً به تست زیر توجه می‌کنیم:

اگر به ازاء هر x،

$$f(x)=|3\sin x+4\cos x|$$

آنگاه بزرگترین مقدار f کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

راه حل‌کلی تست چنین است: طرفین این عبارت را بر ۵ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{f(x)}{5}=\left|\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x\right|$$

اگر

$$\sin\alpha=\frac{4}{5}$$

فرض‌کنیم،

$$\cos\alpha=\pm\frac{3}{4}$$

آنگاه

$$\frac{f(x)}{5}=|\sin\alpha\cos x\pm\cos\alpha\sin x|=$$
$$=|\sin(\alpha\pm x)|$$

و چون $|\sin(\alpha\pm x)|\leqslant 1$ در نتیجه $\frac{f(x)}{5}\leqslant 1$ یا $f(x)\leqslant 5$ وگزینه (۲) صحیح است حال اگر مسأله بالا را در حالت‌کلی حل‌کنیم در عبارت

$$A=a\sin x+b\cos x+c$$

ماکزیمم برابر $c+\sqrt{a^2+b^2}$ و مینیمم برابر $c-\sqrt{a^2+b^2}$ است. پس اگر دانش‌آموزی این فرمول را بداند (دانش‌آموزانی‌که درکلاس‌کنکور شرکت می‌کنند معمولاً می‌دانند) خیلی سریع جواب تست را پیدا می‌کند. پس حتی اگر دانش‌آموزی خیلی مستعد باشد ولی این فرمول را نداند، وقت زیادی را از دست می‌دهد. وبدتر ازآن، نمونه این تست در سال ۶۶ درکنکور تجربی نیز تکرار شده است.

در اینجا لازم است‌که متذکر شویم‌که در سؤالات‌کنکور تست تکراری نیز بسیار دیده می‌شود چند نمونه ذکر می‌کنیم: تستهای شمارهٔ ۳۸ و ۴۳، ۶۰ و ۱۹ گروه فنی و مهندسی در

اغلب سالها تکرار شده‌اند.

این نکته را نیز نباید از نظر دور داشت که در بین سؤالات، تستهای جالب نیز زیاد وجود دارد که امیدواریم تعداد آنها بیشتر بشود.

مطلب دیگری که از اهمیت زیادی برخوردار است متناسب بودن تعداد تستها با محتوای مطالب درسی در دروس مختلف ریاضی است که در سالهای اخیر به خوبی رعایت نمی‌شود. مثلاً به هندسه، چندان توجهی نمی‌شود، و تستهای مطرح شده در این درس از کیفیت چندان مطلوبی برخوردار نیستند. به طور مثال از ریاضیات جدید سال سوم ۷ تست مطرح شده درحالی که از هندسه آن فقط یك تست مطرح شده است. و اگر از نظر محتوا هم مقایسه کنیم، اگر هندسه سال سوم محتوای بیشتری نداشته باشد کمتر هم نیست. اگر به سؤالات هندسه گروه فنی و مهندسی و تجربی توجه کنیم، در رشته ریاضی با آن همه مطالب هندسه ۱۰ تست مطرح شده است درحالی که در گروه تجربی که حتی $\frac{1}{3}$ آن مطالب را نیز دربر ندارد ۷ تست هندسه آمده است. جالبتر آنکه تستهای هندسه گروه تجربی مشکلتر و پر محتواتر از هندسه گروه فنی و مهندسی است.

این بی توجهی به هندسه در کنکور باعث شده که دانش‌آموزان در دبیرستان نیز به این درس اهمیت چندانی ندهند.

در خاتمه با تشکر از همه دست اندکاران و طراحان تستها که به حق زحمت زیادی می‌کشند و مسئولیت خطیری را به عهده دارند توجه آنها را به نکات فوق جلب کرده و امیدواریم آنها را مدنظر داشته باشند.

اکنون به حل تستها می‌پردازیم و اکثر تستها را با روشهای مختلف حل کرده‌ایم. ممکن است بعضی راه‌حلهای ما مطلوب نباشد.

●

۱-(۴) چون $A\cap B$ و $A\cap B'$ دو مجموعه جدا ازهم هستند پس وقتی مساویند که هر دو تهی باشند.

$$A\cap B=A\cap B' \Longrightarrow A=\varnothing$$

۲-(۳) باید $\sim q$ و $p\Rightarrow q$ درست باشند پس q نادرست و p نیز نادرست می‌باشد لذا $\sim p\vee q$ درست است.

۳-(۲)

روش اول.

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k \Longrightarrow$$

$x=2k$ و $y=3k$ و $z=4k$

پس $9k=18$، یعنی $k=2$ و $x=4$.

روش دوم.

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=\frac{x+y+z}{9}=\frac{18}{9}=2 \Longrightarrow x=4$$

۴-(۳)

روش اول. با استفاده از اتحاد

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$$

اگر مخرج کسر را ساده کنیم به پرانتز دوم اتحاد بالا می‌رسیم که به سادگی جواب به دست می‌آید.

روش دوم. می‌توان اتحاد بالا را به صورت زیر نیز تبدیل کرد:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$$

که با توجه به آن جواب بسادگی مشخص می‌شود.

روش سوم. صورت شامل x^3 و مخرج شامل $2x^2$ است اگر برهم تقسیم کنیم خارج قسمت $\frac{1}{2}x$ است که گزینه (۳) فقط شامل $\frac{1}{2}x$ می‌باشد.

روش چهارم. اگر در کسر قرار دهیم $x=y=1$ و $z=0$ حاصل کسر مساوی ۱ می‌شود. و به ازاء همین مقادیر گزینه (۳) نیز مساوی ۱ می‌شود.

۵-(۲) عبارت به صورت

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=0$$

تجزیه می‌شود که در نتیجه $a=b=c=1$

۶-(۱)

$$\frac{1}{b^2}=\frac{1}{ac} \Longrightarrow b^2=ac$$

$$\Longrightarrow 2\log b=\log a+\log c$$

۷-(۴) $|x|+x=0 \Longrightarrow |x|=-x$

$$\Longrightarrow x\leqslant 0$$

۸-(۲) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x}{x+|x|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x}=2$

۹-(۲) چون

$\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$

به ازاء هر $x>0$ محدود است پس

$$\lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

همچنین وقتی $x\to 0$، x^2+3x هم‌ارز $3x$ است لذا،

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^2+3x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$$

و در نتیجه حد برابر $\frac{1}{3}$ است.

۱۰-(۴) $y=-x+5 \Rightarrow x=5-y$

$$\Rightarrow m(5-y)^2-2(5-y)+1=0$$

$$\Rightarrow my^2+2(1-5m)x+25m-9=0$$

y را به x تبدیل می‌کنیم گزینه (۴) به دست می‌آید.

۱۱-(۳) یک روش که معمولاً در معادلات انجام می‌دهیم امتحان کردن ± 1 در معادله است که اگر در این معادله امتحان کنیم هر دو جواب بوده و سپس از تقسیم عبارت بر x^2-1 خارج قسمت $4x^2+x+1$ است که ریشه ندارد.

روش دوم. به این صورت است که اگر معادله

$$ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k=0$$

دارای ریشه گویای $\frac{p}{q}$ باشد آنگاه a بر q و p بر k قابل قسمت است $(q|a,\ p|k)$ که در این صورت ریشه‌ها می‌توانند ± 1 یا $\pm\frac{1}{2}$ یا $\pm\frac{1}{4}$ باشند که با توجه به قانون علامات دکارت و امتحان کردن ± 1 قابل قبول است در هر صورت هدف از طرح این تست کمی نامشخص است.

۱۲-(۱) معادلات پارامتری بیضی

$$\begin{cases} x=\dfrac{2-2+2\sin\alpha}{3} \\ y=\dfrac{3\cos\alpha}{3}\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3}\sin\alpha \\ y=\cos\alpha\end{cases}$$

یا

معادله ضمنی بیضی

$$\begin{cases} \dfrac{9x^2}{4}=\sin^2\alpha \\ y^2=\cos^2\alpha\end{cases} \Longrightarrow \frac{9x^2}{4}+y^2=1$$

۱۳-(۴) در لگاریتم مبنا همواره بزرگتر از صفر است پس فقط گزینه (۴) درست است اما این روش چندان مفید نیست باید گزینه‌ها طوری داده می‌شد که تست به طور کامل حل شود.

$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ 1\neq x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x|>1 \\ 1\neq x>0\end{cases} \Rightarrow x>1$$

۱۴-(۱)

روش اول. با استفاده از قانون هوپیتال داریم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}=\lim\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+8)^2}}}{1}=\frac{1}{12}$$

برای آنکه تابع در $x=0$ پیوسته باشد باید حد تابع با مقدار تابع در صفر برابر شود. پس باید

$$f(0)=a=\frac{1}{12}$$

روش دوم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt[3]{x+8}-2)(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4)}{x(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4)}=\frac{1}{12}$$

$$=f(0)=a$$

که روش طولانی‌تری است.

۱۵-(۲)

روش اول. با توجه به تعریف مشتق در نقطه a و $f(a)=0$ داریم.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}(2x-a)(3x-a)\cdots(nx-a)$$

$$=a\cdot ۲a\cdots(n-۱)a=(n-۱)!\,a^{n-۱}$$

حاصلضرب $۱\times۲\times۳\times\cdots\times n$ را به $n!$ نشان می‌دهیم و n فاکتوریل می‌نامیم.

روش دوم. اگر از تابع مشتق بگیریم در تمام عبارتها عامل $x-a$ وجود دارد. بغیر از مشتق عبارت $x-a$ در بقیه بصورت $(۲x-a)(۳x-a)\cdots(nx-a)$ می‌باشد. و لذا

$$f'(a)=a\cdot ۲a\cdots(n-۱)a=(n-۱)!\,a^{n-۱}$$

۱۶- (۱) $a=۵$ و $c=۴$ در نتیجه $b=۳$ پس جواب یا (۱) است یا (۲) اما $(۳,۲-)$ مرکز بیضی است لذا گزینه (۱) درست است.

۱۷- (۲) مرکز دایره مفروض $c'(۲,۳)$، در نتیجه

$$cc'=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}$$ خط المرکزین

و چون شعاع c' برابر ۴ است و دو دایره مماسند

لذا،

$$R'_{۱}=۴\pm ۲\sqrt{۲}$$

$$x^۲+(y-۱)^۲=(۴\pm ۲\sqrt{۲})^۲\Rightarrow$$

$$x^۲+y^۲-۲y-۲۳+۱۶\sqrt{۲}=۰$$

این دو دایره مماس خارج نمی‌توانند باشند زیرا مرکز c داخل c' است.

۱۸- (۲)

$$(y-۱)^۲=۲(x+۲)\Leftarrow\begin{cases}S(-۲,\ ۱)\\ P=۱\end{cases}$$

و

$$F\left(\alpha+\frac{P}{۲},\ \beta\right)=F\left(-\frac{۳}{۲},\ ۱\right)$$

۱۹- (۱) $x^۲+\sqrt{۲}x+۲>۰$ (ریشه ندارد و $a>۰$) پس $-۲\leqslant x\leqslant ۲$.

۲۰- (۲)

$$\log_n\frac{۲}{۱}\times\frac{۳}{۲}\times\cdots\times\frac{n}{n-۱}=\log_n^n=۱$$

۲۱- (۳) دورهٔ تناوب $\cot ۲x$ برابر $\frac{\pi}{۲}$ و از $\cos^۲ ۲x$ برابر $\frac{\pi}{۲}$ است در نتیجه کوچکترین دوره تناوب تابع نیز برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.

۲۲- (۳)

$$S=\left|\int_۰^\alpha ۳(x+۱)^۲dx\right|=۲۶\Rightarrow$$

$$\left|(\alpha+۱)^۳\right|_۰^\alpha=۲۶\Rightarrow$$

$$(\alpha+۱)^۳-۱=۲۶\Rightarrow\alpha=۲$$

۲۳- (۴)

$$y=۳\cos x(\sin x)^{\frac{۱}{۲}}-۴x^{\frac{۱}{۳}}$$

پس

$$y=۲(\sin x)^{\frac{۳}{۲}}-۳x^{\frac{۴}{۳}}+c$$

$$=۲\sqrt{\sin^۳x}-۳x^{\frac{۴}{۳}}+c$$

۲۴- (۳)

روش اول. فرض کنیم آن نقطه $M(x,y)$ باشد

$$S(x)=PM=\sqrt{(x-۲)^۲+y^۲}$$

$$=\sqrt{(x-۲)^۲+x^۲-۱}=\sqrt{۲x^۲-۴x+۳}$$

$$=\sqrt{۲(x-۱)^۲+۱}$$

و این عبارت وقتی مینیمم است که $x-۱=۰$ و در نتیجه $x=۱$، و بنابراین $y=۰$.

روش دوم. با استفاده از مشتق.

$$S(x)=\sqrt{۲x^۲-۴x+۳}\Rightarrow$$

$$S'(x)=\frac{۴x-۴}{۲\sqrt{۲x^۲-۴x+۳}}\quad و\quad S'(x)=۰\Rightarrow$$

$$x=۱\Rightarrow y=۰$$

روش سوم. هر نقطه روی محور کانونی هذلولی درنظر بگیریم نزدیکترین نقطه هذلولی به آن، رأس کانونی است که با آن نقطه در یکطرف مرکز هذلولی قرار دارد و چون $(۱,۰)$ رأس کانونی است که با P در یك طرف مرکز است پس گزینه (۳) صحیح است.

۲۵- (۱)

روش اول. از فرمول

$$\sin x-\cos x=\sqrt{۲}\sin\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)$$

استفاده می‌کنیم.

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin 3x$$

$$=-\left(\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)-\cos x\right)+\sin 3x$$

$$=-\sin 3x+\cos x+\sin 3x=\cos x$$

روش دوم. دو پرانتز را درهم ضرب می‌کنیم.

$$(\cos x\cos 2x+\sin x\sin 2x)$$
$$-(\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x)$$
$$+\sin 3x=\cos(x-2x)$$
$$-\sin 3x+\sin 3x=\cos x$$

روش سوم. اگر $x=\pi$ قرار دهیم حاصل عبارت -1 و فقط در گزینه (۱) است که حاصل برابر -1 است.

۲۶-(۳)

$$\frac{\cos 20+\frac{\sin 60}{\cos 60}\sin 20}{\sin 40}=$$

$$\frac{\cos(60-20)}{\sin 60\sin 40}=\frac{1}{\cos 60^\circ}=2$$

۲۷-(۱)

روش اول.

$$\begin{cases}\frac{3\pi}{4}\leqslant\frac{x}{2}\leqslant\frac{5\pi}{6}\\ \cos\frac{x}{2}<0\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|}$$

$$=-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$$

چون $\frac{x}{2}$ در ربع دوم و $\sin\frac{x}{2}$ مثبت است پس $-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$ وقتی ماکزیمم است، که $\sin\frac{x}{2}$ مینیمم باشد و کمترین آن $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$ است پس مقدار ماکزیمم عبارت $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ است. زیرا تابع $-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$ در این فاصله صعودی است.

روش دوم. چون x در ربع چهارم است پس عبارت همواره منفی است در نتیجه جواب (۱) یا (۲) است اگر $x=\frac{3\pi}{2}$ قرار دهیم حاصل -1 و اگر $\frac{5\pi}{3}$ قرار دهیم $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ است که چون $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ بزرگتر از -1 است پس جواب $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ است.

۲۸-(۴) اگر $2\,\mathrm{Arcsin}\,t^2=x$ فرض کنیم، $t^2=\sin\frac{x}{2}$ و $0\leqslant\frac{x}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$ و $\cos x=1-2t^2$ از طرفی داریم

$$\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$$

و در نتیجه

$$1-2t^2=1-2t^4\Rightarrow$$

$$t^4-t^2=0\Rightarrow t=0\ \text{و}\ \pm1$$

۲۹-(۲) برای آن‌که معادله کلاسیک نوع اول

$$a\sin x+b\cos x=c$$

دارای جواب باشد باید $a^2+b^2-c^2\geqslant 0$ در نتیجه $2+1-tg^2\alpha\geqslant 0$ یا $tg^2\alpha\leqslant 3$ و در این صورت، $-\sqrt{3}\leqslant tg\alpha\leqslant\sqrt{3}$ که داریم.

$$2k\pi+\frac{2\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant 2k\pi+\frac{4\pi}{3}$$

یا

$$2k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{3}$$

با توجه به گزینه (۱) و گزینه (۲) هر دو درست می‌باشند که منظور گزینه (۲) است.

۳۰-(۳)

$$x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{f\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\Longrightarrow$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

۳۱-(۳)

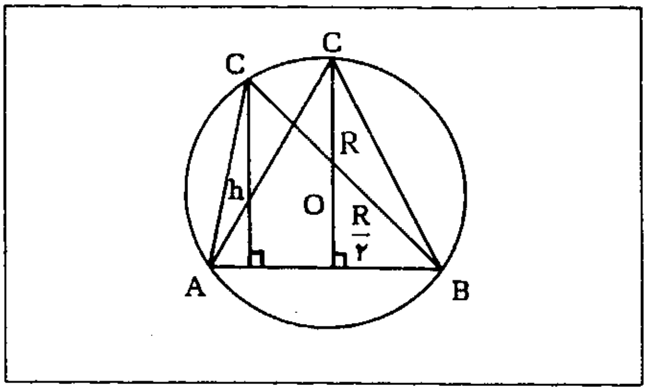
$$\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{-\cos(\pi-B)}{\sin B}\Longrightarrow$$

$$\cos A \sin B - \sin A \cos B = ۰ \Rightarrow$$
$$\sin(A-B) = ۰$$
$$A - B = ۰ \Rightarrow A = B$$

و

$$A + B = ۱۳۰^\circ \Rightarrow A = B = ۶۵^\circ$$

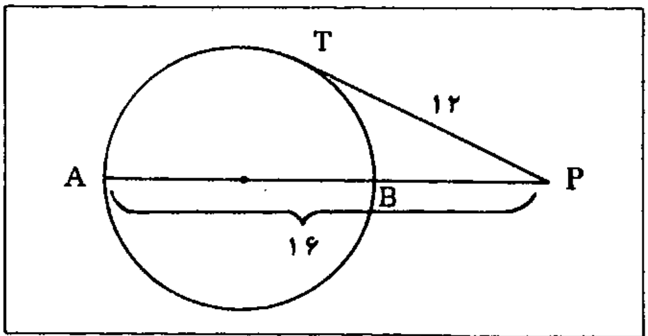
۳۲-(۳) $S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AB \cdot h$ چون قاعده ثابت است. مساحت وقتی ماکزیمم است که h ماکزیمم باشد، و مشخص است که h وقتی ماکزیمم است که از مرکز دایره گذشته باشد و لذا مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد ($AC = BC$) و چون O محل تلاقی سه میانه بر مرکز دایره منطبق شده پس مثلث متساوی‌الاضلاع است و $B = \frac{\pi}{۳}$.



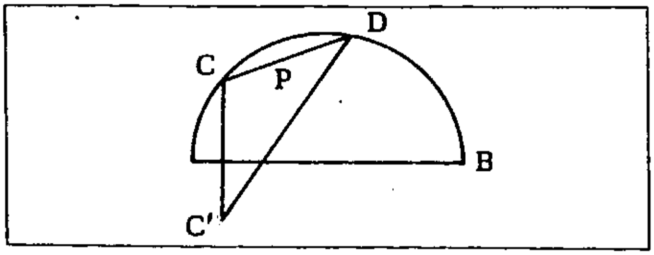
۳۳-(۲) در هر دو مثلث متشابه نسبت محیطها برابر نسبت تشابه و نسبت مساحتها مجذور نسبت تشابه است.

۳۴-(۳)

$$PA \cdot PB = PT^۲ \Rightarrow PB = \frac{۱۲ \times ۱۲}{۱۶} = ۹$$
$$\Rightarrow AB = ۱۶ - ۹ = ۷$$



۳۵-(۴) قرینه C نسبت به قطر یعنی C' روی دایره است و چون طول وتر CD ثابت است پس اندازهٔ کمان CD نیز ثابت و زاویه $\widehat{CC'D}$ که محاطی مقابل $\widehat{CD}$ است نیز ثابت می‌باشد.



۳۶-(۱)

$$\vec{v} = |\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}$$

و

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}|\vec{b}| + \vec{b}|\vec{a}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{\vec{v}}{m} \Rightarrow$$
$$\vec{v} = m\vec{u} \Rightarrow \vec{v} \parallel \vec{u} \Rightarrow (\vec{v}, \vec{u}) = ۰$$

چون $m > ۰$ لذا دو بردار V و U هم جهت نیز می‌باشند لذا زاویه بین صفر است.

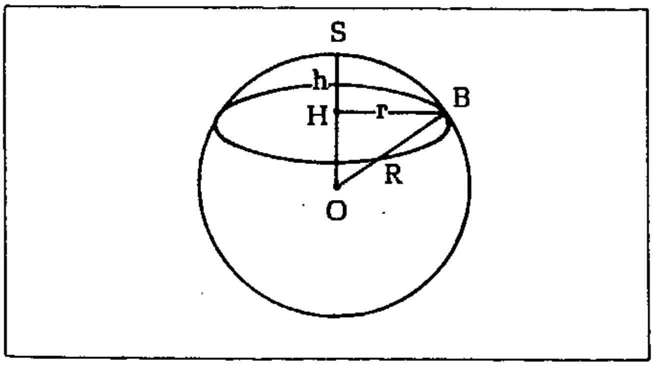
۳۷-(۴) چون تصاویر دو خط بر تصویر عمود مشترک عمودند، لذا موازیند.

۳۸-(۱)

$$S = ۲\pi Rh = ۳\pi R^۲ \Rightarrow$$
$$h = \frac{۳}{۲} R \Rightarrow OH = \frac{R}{۲}$$

و

$$r^۲ = R^۲ - \frac{R^۲}{۴} = \frac{۳R^۲}{۴} \Rightarrow r = \frac{R\sqrt{۳}}{۲}$$



۳۹-(۳)

$$\frac{x-۱}{۶} \pm \frac{y}{۹} = ۰ \Rightarrow ۳x - ۳ \pm ۲y = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x + ۲y - ۳ = ۰ \\ ۳x - ۲y - ۳ = ۰ \end{cases}$$

۴۰-(۱) $y = -۲$ و $y = \frac{۲}{m} \Rightarrow m = -۱$

پاسخ آزمون ریاضی گروه علوم ریاضی و فنی سال ۶۷

محمود نصیری

۱-(۳) $a>0$ و $b<0 \Rightarrow |a|=a$ و

$|b|=-b$

چون $|a|>|b|$ و a مثبت و b منفی است پس $a+b>0$ لذا.

$$|a+b|+|b|+|a|=a+b-b+a=2a$$

۲-(۳) **(روش اول)** چون $n\in N$ پس اگر $n=1$ انتخاب کنیم $A_1=[1,2]$ که با توجه به جوابها فقط جواب (۳) است که شامل ۲ نیز می‌باشد.

(روش دوم)

$$\bigcup_{m=1}^{n} A_m=\left[\frac{1}{n},2\right] \Rightarrow \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m=(0,2]$$

۳-(۲) هرگاه دو طرف یك نامساوی به توان فرد برسد جهت تعبیر نمی‌کند.

۴-(۳) $$\frac{\overline{AC}+\overline{CB}}{\overline{AD}+\overline{DB}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}}=1$$

۵-(۱) برای آنکه دو خط به معادلات

$$ax+by+c=0$$

و

$$a'x+b'y+c'=0$$

برهم منطبق باشند باید

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

پس

$$\frac{2}{m}=\frac{5m}{2(m^2+1)}=\frac{4}{3m+2}$$

که $m=-2$ به دست می‌آید. و به ازاء این مقدار m دستگاه سازگار است.

۶-(۱) معادلات به صورت $\sqrt{g(x)}+\sqrt{f(x)}=0$ وقتی دارای جوابندکه این جوابها اشتراك جوابهای

$$g(x)=0 \quad \text{و} \quad f(x)=0$$

باشند پس می‌توان جوابهای یکی را پیدا کرده در دیگری امتحان کنیم. فقط معادله (الف) است که دارای چنین خاصیتی است. $x=2$ جواب $3x-6=0$ است که در رادیکال دوم نیز صدق می‌کند.

۷-(۴) زیرا $x^2-4x+5>0$ و $x^2+1>0$ هیچیك ریشه ندارند وعلامت، موافق علامت ضریب x^2 است که مثبت است پس باید $x-1>0$ که جواب $x>1$ به دست می‌آید.

۸-(۱)

$$|2x+1-3|<\frac{1}{5} \quad \text{یا} \quad 2|x-1|<\frac{1}{5}$$

پس

$$|x-1|<\frac{1}{10}$$

۹-(۴)

روش اول. چون $f(x)\geqslant 0$ پس جواب یا (۲) یا (۴) است و چون تابع با ضابطه $f(x)=||x|-2|$ همواره پیوسته است پس جواب (۲) قابل قبول نیست و در نتیجه (۴) درست است.

روش دوم. نمودار تابع $y=|x|$، مشخص است. اگر نمودار آن را به اندازه ۲ واحد به موازات محور yها به پائین انتقال دهیم $y=|x|-2$ به دست می‌آید. حال اگر قرینه آن قسمت را که زیر محور xها می‌باشد نسبت به محور xها پیدا کنیم نمودار $f(x)$ به دست می‌آید. راه حل دیگر تست امتحان کردن اعدادی مناسب یا برداشتن قدرمطلقها و تبدیل آن به تابع چند ضابطه می‌باشد که کمی طولانی است

۱۰-(۱) دامنه تابع به صورت

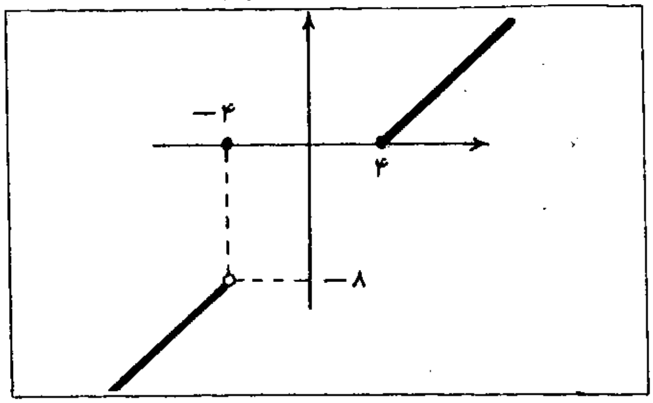
$$D_f=(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$$

است با توجه به قضایای پیوستگی نتیجه می‌گیریم که تابع در فاصله $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$ پیوسته است. در $x=4$ دارای پیوستگی از راست می‌باشد اما در $x=-4$

پیوستگی از چپ ندارد زیـــــرا حد چپ تابع بـرابـر −۸ و $f(-۴)=۰$. در نتیجه تابع در فاصله

$$(-\infty, -۴) \cup [۴, +\infty)$$

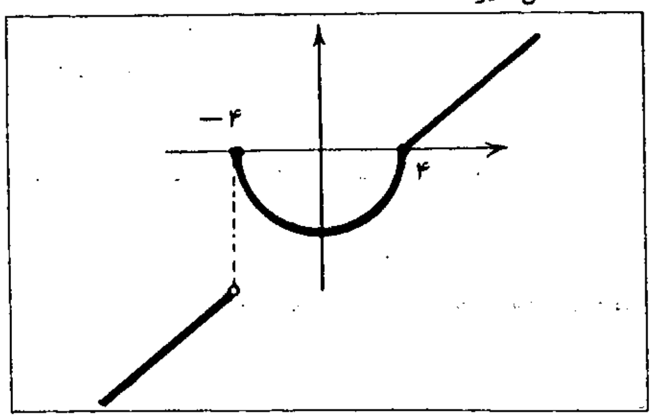
پیوسته و لذا در فـاصله $[-۴, ۴)$ ناپیوسته است. در تست مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع خواسته شده است امـا ذکر نگردیده که مجموعه نقاط ناپیوستگی در R یا در دامنه تابع. اگر منظور در R باشدکه جواب $[-۴, ۴)$ است و اگـر منظور در دامنه‌اش باشدکـه جواب (۱) درست است. شاید



هم در تست اشتباه چاپی رخ داده است و ضابطه تابع

$$f(x)=\begin{cases} -\sqrt{۱۶-x^۲} & |x|\leqslant ۴\\ x-۴ & |x|>۴\end{cases}$$

باشدکه در این صورت دامنه تابع R مجموعه اعداد حقیقی است و در نقطه −۴ تـابع ناپیوسته است و لـذا در این صورت بـاز جواب (۱) صحیح است نمودار تـابع در این حالت شکل زیر است.



۱۱-(۴)

۱۲-(۳)

روش اول.

$$\frac{t_۲}{t_۱}=۴ \text{ و } \frac{t_۳}{t_۲}=۴ \text{ و } \cdots \frac{t_n}{t_{n-۱}}=۴$$

اگر این نسبتها را درهم ضرب کنیم خواهیم داشت.

$$\frac{t_n}{t_۱}=۴^{n-۱} \Longrightarrow t_n=t_۱\times ۴^{n-۱}=۵\times ۴^{n-۱}$$

روش دوم. $t_۱=۵$ و اگـر $n=۱$ قرار دهیم $t_۲=۲۰$ که فقط در جواب (۳) است که اگر $n=۲$ قرار دهیم جمله دوم ۲۰ به دست می‌آید.

۱۳-(۳) روش کلی حل تست به‌کمک تصاعد هندسی نزولی است.

$$۰/۱۴۴۴۰۰۰=\frac{۱}{۱۰}+۴\left(\frac{۱}{۱۰^۲}+\frac{۱}{۱۰^۳}+\cdots\right)$$

$$=\frac{۱}{۱۰}+۴\times\frac{\frac{۱}{۱۰۰}}{۱-\frac{۱}{۱۰}}$$

$$=\frac{۱}{۱۰}+\frac{۴}{۹۰}=\frac{۱۳}{۹۰}$$

روش دوم. درصورت‌کسر جـزء غیرگـردش و یك دور گردش را نوشته جزء غیرگـردش را ازآن‌کـم می‌کنیم و در مخرج به تعداد ارقام‌گـردش ۹ و به تعداد ارقام غیرگـردش صفر می‌گذاریم لذا.

$$۰/۱\bar{۴}=\frac{۱۴-۱}{۹۰}=\frac{۱۳}{۹۰}$$

۱۴-(۲)

$$\log(x+۴)^۲=\log(۲x+۱۱)\Longrightarrow$$

$$x^۲+۶x+۵=۰ \Longrightarrow x=-۱ \text{ و } x=-۵$$

که جواب $x=-۵$ قابل قبول نیست.

روش دیگر حل این‌تست امتحان‌کردن جوابها است‌که شاید نظر طراح نیز همین‌بوده است زیـــرا جواب درست در همان گزینه‌های ابتدائی گذاشته شده و فقط یك دسته جواب گذاشته شده است. حتی جواب اول یعنی −۵ به سادگـی رد مـی‌شود زیـرا باید $x>-۴$ باشد.

۱۵-(۳) $\lim_{x\to ۱^+}([x]-۱)=۰$ و $[x]$ در یك همسایگی ۱ محدود است پس $\lim_{x\to۱^+}([x]-۱)[x]=۰$ همچنین $\lim_{x\to۱^-}[x]=۰$ و $([x]-۱)$ در یـك همسایگی ۱ محدود است پس $\lim_{x\to۱^-}([x]-۱)[x]=۰$ در نتیجه حد برابر صفر است.

۱۶- (۴) از قانون هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}}{2x} = \frac{1}{18}$$

۱۷- (۱) چون بـه ازاء هر x برقرار است $x=3$ قرار می‌دهیم، $a+b=-7$ به دست می‌آید.

روش دوم. می‌توان دو عدد دلخواه نیز به جای x گذاشته و a و b را از یك دستگاه پیدا کرد.

۱۸- (۲)

$$f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-2$$

$$\Longrightarrow f(x)=x^2-2$$

$x-\frac{1}{x}$ را به x تبدیل می‌کنیم.

۱۹- (۱) دورهٔ تناوب تابع با ضابطه

$f(x)=nx-[nx]$

برابر $T=\frac{1}{n}$ است.

۲۰- (۱) مجانب قائم $x=0$

مجانبهای مایل $y=x-1$ و $y=1-x$ یا $y=|x-1|$

۲۱- (۴)

$$\sqrt[3]{(-x)^3}+|x|+2=-x+x+2=2$$

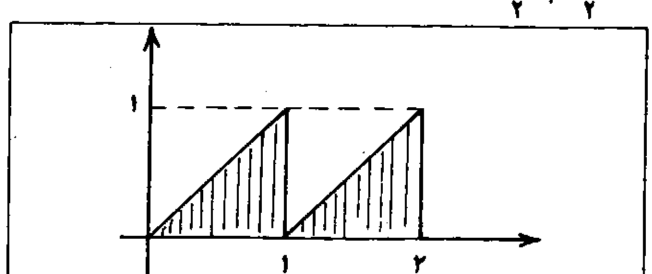
۲۲- (۳)

$$x=\frac{1}{2}y-7 \Longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-7$$

۲۳- (۱)

$$[(ab+a'+b')c]\cdot c'=(ab+a'+b')cc'=0$$

۲۴- (۲) ناحیه فوق مجموع مساحت دو مثلث قائم‌الزاویه بـه ضلعهای زاویه قائمه یك‌ویك است و لـذا مساحت برابر $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ است.



۲۵- (۴) بنا به تعریف عضو خنثی، باید عددی مانند $e \neq 0$ وجود داشته باشد که به‌ازاء هر $a \neq 0$، $a*e=e*a=a$

$$a*e=a \Longrightarrow \frac{a+e}{ac}=a \Longrightarrow e(a^2-1)=a$$

کـه جواب مستقل و منحصربفردی برای e به دست نمی‌آید یا به طریق دیگـر چون به ازاء هر a، باید رابطه فوق برقرار باشد پس باید به‌ازاء $a=1$ نیز برقرار باشد که لازم می‌آید $1=0$ که یك تناقض است.

۲۶- (۴) مطلب کتاب درسی است.

۲۷- (۲)

۲۸- (۲) $p=(x+y)(x-y)$ طرف اول p عـددی اول است پس باید طرف دوم نیز اول باشد و این وقتی ممکن است کـه یکی از عاملهای طرف دوم یك و دیگـری برابر p باشد و بـه ناچار باید $x+y$ برابر p باشد زیرا x و y طبیعی و $x+y$ نمی‌تواند برابر یك باشد.

۲۹- (۱)

$$(a^2, a)=|a| \quad \text{و} \quad (a, b)\,|\,|a| \Longrightarrow$$

$$[\,|a|, (a, b)]=|a|$$

۳۰- (۱) چـون نقطه $(-6, 1)$ قـرینه نقطه $(6, -1)$ نسبت بـه مبدأ است پس A مـاتریس تقارن نسبت بـه مبدأ می‌باشد، از روش کلی و با امتحان کـردن نیز مـی‌توان A را پیدا کرد.

۳۱- (۴) زیرا ماتریس بالا مثلثی است و ریشه‌هـای مشخصه آرایه‌های روی قطر اصلی هستند.

۳۲- (۳)

روش اول. وارون مـاتریس پـائین مثلثی، مـاتریسی پائین مثلثی است (درصورت وجـود) پس فقط ۲ و ۳ مـی‌تـوانند جواب بـاشند و چـون (۲) وارون پذیر نیست (دترمینان آن صفر است) پس گزینه (۳) صحیح است.

روش دوم. اگـر $b=0$ قرار دهیم مـاتریس به‌ماتریس واحد تبدیل مـی‌شود کـه وارون آن نیز واحد است و فقط در (۳) است که اگر $b=0$ قراردهیم برابر ماتریس واحد است.

۳۳- (۱)

$$A \text{ متعامد} \Longrightarrow A^{-1}=A'$$

$$\Longrightarrow (A^{-1})'=(A')'=A$$

۳۴-(۴)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(3\sin x - 3\sin x + 4\sin^3 x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}\,dx$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(1-\cos x)\,dx$$

$$= \Big[2(1-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 - 0 = 2$$

۳۵-(۲)

$$-x^2 + 4x = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

و

$$S = \left| \int_0^2 (2x^2 - 4x)\,dx \right|$$

$$= \left| \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 \right|_0^2 = \frac{8}{3}$$

۳۶-(۴)

روش اول.

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow g'(x) = f(x)$$

$$u(x) = \int_{-x}^0 \cos t\,dt + \int_0^x \cos t\,dt$$

$$= 2\int_0^x \cos t\,dt \Rightarrow u'(x) = 2\cos x$$

روش دوم. اگر $f(x) = F'(x)$ آنگاه،

$$u(x) = \int_{-x}^x f(x)\,dx = F(x) - F(-x)$$

و

$$F'(x) = \cos x \Rightarrow$$

$$u'(x) = F'(x) - (-1)F'(-x)$$
$$= \cos x + \cos(-x) = 2\cos x$$

۳۷-(۲) اولاً. دانش‌آموزی‌که با عدد e (جزو برنامهٔ دبیرستان نیست) آشنائی داشته باشد بدون فرض مفروض جواب صحیح را پیدا می‌کند.

اما اگر بخواهیم به روش ساده‌تری از مفروض تست را حل کنیم.

فرض می‌کنیم $-x = t$ دراین اگر $x \to +\infty$ آنگاه $t \to -\infty$ لذا.

$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \underset{t\to-\infty}{\text{حد}} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-t}$$

$$= \underset{t\to-\infty}{\text{حد}} \frac{1}{\left(t + \frac{1}{t}\right)^t} = \frac{1}{e}$$

بنابراین

$$\underset{t\to-\infty}{\text{حد}} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

یا

$$\underset{x\to-\infty}{\text{حد}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

یعنی اگر بخواهیم با مفروض مسأله را حل کنیم نتیجه می‌گیریم که این حد وقتی $x \to -\infty$ برابر e است. درحالتی‌که در تست مزبور وقتی $x \to +\infty$ هدف است. فرض کنیم منظور طراح از ∞ همان $\pm\infty$ باشد در این صورت بهتر بود در حکم ذکر می‌شد $x \to \mp\infty$، البته با روش پیچیده‌تری که به ذهن کمتر دانش‌آموزی می‌رسد می‌توان مستقیماً از این فرض جواب تست را مشخص کرد. حتی اگر $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\left(\frac{x+1}{x}\right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{e} \times 1} = e$$

۳۸-(۴)

۳۹-(۲) ابتدا داده‌ها را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم

۱۱ ۱۷ ۳۵ ۴۰ ۴۱ ۵۸

$$\text{میانه}=\frac{35+40}{2}=37/5$$

۴۰-(۲) $V=\frac{S}{x}$

۴۱-(۱)

روش اول. اگر معادله $f(x)=0$ دارای ریشه مضاعف باشد این ریشه در مشتق اول f نیز صدق می‌کند

$$f'(x)=3x^2-3 \text{ ،} f'(x)=0 \Longrightarrow x=\pm 1$$

و

$$\begin{cases} x=1 \Longrightarrow m=-1 \\ x=-1 \Longrightarrow m=3 \end{cases}$$

وچون ریشه مضاعف باید مثبت باشد درنتیجه $1-m>0$ یا $m<1$ و لذا جواب $m=3$ قابل‌قبول نیست.

روش دوم. برای آنکه معادله

$$x^3+px+q=0$$

ریشه مضاعف مثبت داشته باشد باید $4p^3+27q^2=0$ و $q>0$ که در نتیجه.

$$\begin{cases} -4\times 27+27(1-m)^2=0 \\ 1-m>0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} m=-1 \text{ و } m=3 \\ m<1 \end{cases} \Longrightarrow m=-1$$

۴۲-(۲)

روش اول. $[x]\leqslant x<[x]+1$ و $x<0$ درنتیجه $1+\frac{1}{[x]}<\frac{x}{[x]}\leqslant 1$ و چون $x=-1$ نیز می‌تواند باشد پس $0<\frac{x}{[x]}\leqslant 1$ و به‌ازاء هر $x>0$، $f(x)=0$ در نتیجه $R_f=[0,1]$.

روش دوم. اگر x را صحیح و منفی درنظر بگیریم $\frac{x}{[x]}=1$ و لذا گزینه‌های (۱) و (۳) صحیح نیستند.

چون $x\geqslant[x]$ و $x<0$ پس $\frac{x}{[x]}\leqslant 1$ و در

نتیجه گزینه (۲) صحیح است.

۴۳-(۱)

$$\begin{aligned} P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \\ &=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B) \\ &=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{9}{12} \end{aligned}$$

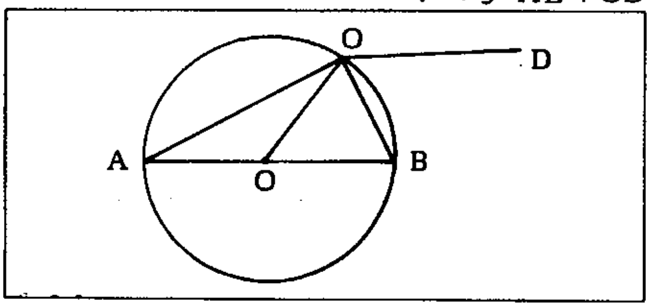
۴۴-(۲) از یك رأس با دو رأس مجاورآن قطر بـه دست نمی‌آید و لذا از یك رأس اگر به $n-3$ رأس دیگر وصل کنیم $n-3$ قطر رسم می‌شود.

۴۵-(۲) $\theta=\frac{\pi}{4}$ نیم خطی است‌که از قطب‌گذشته با محور قطبی زاویه $45°$ مـی‌سازد پس در دستگـاه مختصات قائم ضریب زاویه‌آن $m=1$ و از مبدأ نیز می‌گذرد پس $y=x$ و $x>0$.

۴۶-(۱) درگـزینه (۱) باید ذکـر شود دو خط موازی و متمایز.

۴۷-(۲) زیرا تابع cos در فاصله $[\pi, 2\pi]$ از -1 تـا $+1$ به طور یکنواخت تغییر می‌کند.

۴۸-(۴) چـون $AC=CB$ پس بـاید شعاع چهـارم یعنی OD با AB موازی باشد.



۴۹-(۴) هـر ضلع MNP نصف هـر ضلع ABC و لذا محیط ABC دو برابر محیط MNP است.

۵۰-(۴) $\frac{1}{2\sin a}[2\sin a\cos b]=\cos b$

۵۱-(۲) $\cos(\text{Arcsin}\, x)=\sqrt{1-x^2} \Longrightarrow$

$$\cos\left(\text{Arcsin}\left(-\frac{4}{5}\right)\right)=\frac{3}{5}$$

۵۲-(۴) $\text{Arccotg}\, x+\pi-\text{Arccotg}\, x=\pi$

۵۳-(۱) $\cos 3x\cos 2x+\sin 3x\sin 2x$

$$=\cos(3x-2x)=\cos x$$

و

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant \cos x\leqslant 1 \Longrightarrow$$

$$2K\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2K\pi+\frac{\pi}{4}$$

که با توجه به‌گزینه‌ها، گزینه (۱) صحیح است.

۵۴- (۲)

روش اول.

$$\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Longrightarrow x=\frac{2K\pi}{3}\pm\frac{\pi}{18}$$

$$\left\{\frac{\pi}{18},\ \frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{18},\ \frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{18}\right\}$$

روش دوم. معادله $\cos x=a$ در فاصله $[0,\pi]$ یك جواب دارد پس معادله $\cos 3x=b$ در این فاصله ۳ جواب دارد.

۵۵- (۴) کلاسیك نوع سوم است، طرفین را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم.

$$2tg^2x-1-2Ktgx=-4tg^2x-4 \Longrightarrow$$

$$6tg^2x-2Ktgx+3=0$$

$$\Delta'\geqslant 0 \Rightarrow K^2-18\geqslant 0 \Rightarrow |K|\geqslant 3\sqrt{2}$$

۵۶- (۳)

$$\begin{cases}\cos x\cos y=\dfrac{1}{3}\\[2ex] \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=3\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\sin(x+y)=1 \Rightarrow x+y=2K\pi+\frac{\pi}{2}$$

۵۷- (۱) $A\hat{H}C\sim B\hat{H'}C \Rightarrow \dfrac{AH}{BH'}=\dfrac{AC}{BC}$

۵۸- (۳) در هر مثلث قائم‌الزاویه داریم.

$$\frac{(b+c)d_a}{bc}=\sqrt{2} \quad \text{پس} \quad \frac{\sqrt{2}}{d_a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

۵۹- (۲)

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0 \Longrightarrow$$

$$1(x-1)+3(y-0)+2(z-3)=0 \Longrightarrow$$

$$x+3y+2z=7$$

۶۰- (۳)

$$4x^2-(y-1)^2=0 \Longrightarrow$$

$$(2x-y+1)(2x+y-1)=0 \Longrightarrow$$

$$\begin{cases}2x-y+1=0\\ 2x+y-1=0\end{cases}$$

بهتر بود در جوابها هذلولی نیز گذاشته می‌شد. زیرا به فرم فوق یا هذلولی است یا دو خط راست و چون هذلولی در جوابها نیست پس دو خط راست جواب است شاید هدف طراح نیزهمین بوده است اگراین چنین باشد این هدف خوبی از نظر آموزش ریاضی نیست.

۶۱- (۳) $a=10$ ، $b^2=10\times 6/4 \Longrightarrow$

$b=8$ و $c=6$ و $b+c=14$

۶۲- (۳) $c^2+a^2(\sin^2B-\cos^2B)$

$$=c^2+a^2\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{c^2}{a^2}\right)=b^2$$

۶۳- (۱)

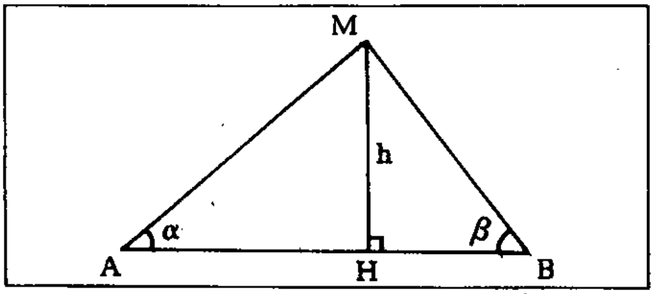
$$tg\,\frac{B}{2}\,tg\,\frac{c}{2}=\frac{p-a}{p}=\frac{b+c-a}{b+c+a}=\frac{3a}{5a}=\frac{3}{5}$$

۶۴- (۴)

$BH=h\cot g\beta$ و $AH=h\cot g\alpha$

$$AB=h(\cot g\alpha+\cot g\beta) \Longrightarrow$$

$$h=AB/(\cot g\alpha+\cot g\beta)$$



۶۵- هیچکدام، چون طرف اول نقطه‌دار نباید باشد پس «ج» و «ی» در اول نمی‌توانند واقع شوند، بنابراین حرف اول به ۴ طریق و دوم به ۵ طریق و سوم به ۴ طریق انتخاب می‌شوندکه بنابه اصل ضرب برابر ۸۰ = ۴ × ۵ × ۴ است.

حال فرض‌کنیم «ی» را بدون نقطه درنظر بگیریم در این صورت با روش بالا جواب ۱۰۰ = ۵ × ۵ × ۴ می‌باشدکه جواب (۱) درست است.

با این ابهام، گزینه‌های داده شده نامناسب می‌باشند زیرا اگر تمام‌کلمات سه حرفی بدون تکرار از این ۶ حرف را بنویسیم ۱۲۰ = ۶ × ۵ × ۴ است‌که با توجه به جوابها فقط (۱) درست است و سه جواب دیگر رد می‌شود و این از نظرآموزش چندان مفید نیست.

۱- عبارت

$$A=\frac{a-b}{1+ab}+\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ac}$$

را به حاصلضرب عوامل تجزیه کنید.
(فرستنده: مهرداد جلالیان - دانش‌آموز مشهد).

۲- به ازاء چه مقادیر صحیح a و b حاصلضرب دو ریشه معادلهٔ

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

برابر ۳ است.

مسائل شمارهٔ ۱۹ و ۲۰

تنظیم از: محمود نصیری

۳- تابع f با ضابطهٔ

$$f(x)=\begin{cases} x^2\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right| & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$$

تعریف شده است.

الف) a را چنان تعیین کنید که تابع در نقطه $x=0$ پیوسته باشد؛

ب) مشتق راست و چپ f را در نقطه $x=0$ ($f'_+(0)$ و $f'_-(0)$) پیدا کنید.

ج) $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$ را (درصورت وجود) پیدا کنید.

۴- مطلوبست تعیین همهٔ چند جمله‌ای‌های f بر R که در رابطه زیر صدق می‌کنند،

$$f(x)=xf'\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \qquad (x\in R)$$

۵- حد زیر را محاسبه‌کنید.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x}\,dx$$

۶- معادله سیاله زیر را در مجموعه اعداد اول حل کنید. ([ ] جزء صحیح است)

$$[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{x^2-1}]=y$$

۷- ۹ عدد حقیقی متمایز مفروضند. نشان دهید حداقل دو عدد x، y از این ۹ عدد وجود دارند بطوری‌که در رابطه زیر صدق می‌کنند.

$$0<\frac{x-y}{1+xy}<\sqrt{2}-1$$

(راهنمائی: از اصل حجره‌ها استفاده‌کنید این اصل چنین است: اصل حجره‌ها (اصل دیریکله). فرض‌کنیم m و n دو عدد طبیعی باشند، و $m<n$ در این صورت، اگر n شی را در m حجره قرار دهیم ـ به هر طریقی این کار صورت گیرد، و اعم از اینکه حجره‌ای خالی بماند یا نه حداقل یکی ازآن حجره‌ها حاوی دوشیی یا بیشتر ازآن اشیاء خواهد بود).

۸- اگر تابع f بر $[0, a]$ دارای مشتق دوم و به ازاء هر x از این بازه $f''(x)<0$ (تحدب به سمت پائین) و $f(0)=0$ ثابت‌کنید به ازاء هر x، $0<x<a$ و هر m، $0<m<1$، داریم $mf(x)<f(mx)$.

۹- نمودار تابع اکیداً صعودی f را که در ربع اول بوده و از مبدأ نیز می‌گذرد تا نقطه $P(x, f(x))$ یك‌بار حول محور yها و بار دیگر حول محور xها دوران می‌دهیم. اگر حجم حاصل از دوران سطح بین نمودار تابع و محور yها و خط افقی مار بر P، n برابر حجم حاصل از دوران سطح بین نمودار تابع و محور xها و خط عمودی مار بر P

باشد، معادله f را بیابید.

۱۰- فرض‌کنیم p و q دوعدد اول دلخواه باشندکه‌اختلاف آنها برابر ۲ است (اعداد اول دو قلو). ثابت‌کنید از تقسیم $p^۲+q^۲$ بر ۷۲ خـارج قسمت مربع کامل و باقیمانده ۲ به دست می‌آید.

۱۱- تمام اعداد صحیح مثبت و زوج n را چنان پیدا کنید که به ازاء هر عدد صحیح b که

$$(b, n)=۱ \quad \text{و} \quad ۱< b< n$$

معادله

$$(b-۱)x\equiv \frac{n}{۲}\ (\mathrm{mod}\, n)$$

جواب داشته باشد.

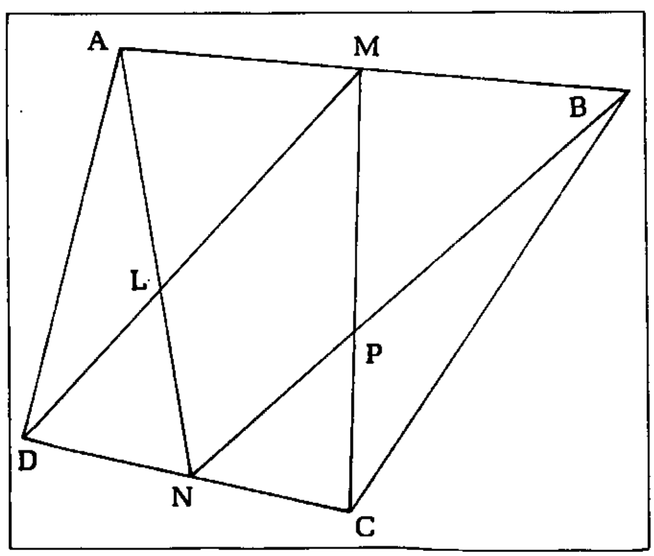
۱۲- مجموعه غیر تهی S از اعداد صحیح و مثبت را منتها خطی گوئیم درصورتی‌که اعداد صحیح N و k وجود داشته باشند بطوری‌کـه به ازاء هر $n>N$ ،$n\in S$ اگر و فقط اگر $k|n$.

نشان دهید هر مجموعه غیر تهی از اعداد صحیح مثبت کـه نسبت به عمل جمع بسته باشد منتها خطی است.

۱۳- در چهـار ضلعی محدب ABCD نقطه M وسط AB را بـه دو رأس C و D و نقطه N وسط CD را به دو رأس A و B وصل مـی‌کنیم تلاقی NB و MC را P و تلاقـی MD و AN را L می‌نامیم ثابت‌کنید

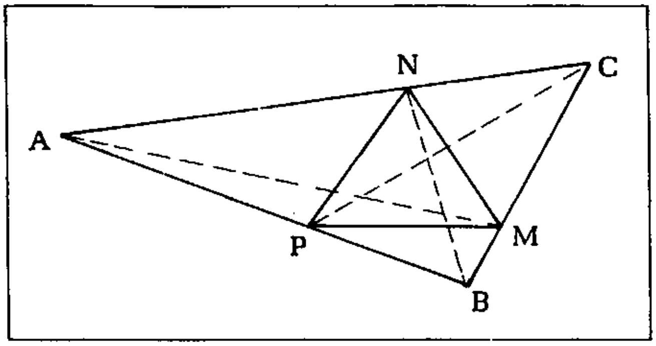
$$S_{ALD}+S_{BPC}=S_{MPNL}$$

(فرستنده: حسین محمدی ـ احمدآباد اردکان).



۱۴- مثلث متساوی‌الاضلاع MNP در مثلث ABC محاط است، بطوری‌کـه M روی BC و N روی AB و P روی AB قرار دارد ثابت‌کنید.

$$AM+BN+PC< AB+AC+BC$$



۱۵- از مثلث ABC میانـه AM و نیمساز AD و زاویه A معلومند مثلث را رسم‌کنید.

۱۶- صفحه P به معادله

$$x+y+z-۳=۰$$

و دو نقطه $A(۲, ۲, ۲)$ و $B(۵, ۴, ۳)$ مفروضند روی صفحه P نقطه‌ای تعیین‌کنیدکه:

الف) مجموع فواصلش از A و B مینیمم باشد؛

ب) تفاضل فواصلش از A و B ماکزیمم باشد.

۱۷- اگـر A و B دو ماتریس متعامد بـاشندکـه در شرط $|A|+|B|=۰$ صدق‌کنند، ثابت‌کنید

$$|A+B|=۰$$

۱۸- نشان دهید وارون یك ماتریس بالا مثلثی، ماتریسی بالا مثلثی است.

۱۹- فرض‌کنید w یك برداریکه در صفحه و T تبدیلی در صفحه باشد بطوری‌که به هر بردار در صفحه تصویر آن بردار روی w را نظیرکند.

الف) نشان دهید مقادیر ویژه T عبارتند از صفر و یك؛

ب) بردارهای ویژه این تبدیل را بیابید.

(مسائل ۱۸ و ۱۹ توسط‌آقـای حسین سید مـوسوی دبیر دبیرستانهای تهران ارسال شده است).

۲۰- احتمال بـــه دست‌آوردن حداقل یك «۶» در پرتاب شش مکعب (تـاس) بیشتر است یـا احتمال بـه دست‌آوردن حداقل دو «۶» در پرتاب دوازدهٔ مکعب (تاس)؟

نامه‌ها

برادر جمشیدی - دبیر - اندیمشك

از اینکه پیشنهادکمك مالی برای ادامه کار مجله کرده‌اید تشکر می‌نمائیم. خوشبختانه درحال حاضر نیازی به‌کمك مالی نیست. امید است که‌دفتر نمایندگی مجله در دزفول یا اندیمشك دایر شود. از ارسال حل مسأله مسابقه استانی و بعضی‌از مسائل شماره ۱۶ تشکر می‌کنیم.

برادر سید جلال موسوی - دانشجو - تهران

با عرض سلام متقابل بدین وسیله مسأله ارسالی شما در اختیار خوانندگان قرار می‌گیرد:

«مطلوب است محاسبهٔ کسینوس $3n^\circ$ درصورتی که $0 < n < 30^\circ$ $(n \in N)$».

برادر علی ثابتیان - دانشجو - شیراز

با عرض سلام وآرزوی موفقیت، از ارسال مقالات شما تشکر می‌کنیم. امیدواریم که موفق باشید.

برادر مجیدرضا ناصح - دیپلمه - مشهد

سری توافقی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگر ا است یعنی مقدارآن بینهایت است و نیز $\lim_{n \to \infty} \ln n = \infty$ ولی ثابت می‌شودکه

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right)$$

موجود و مقدار تقریبی‌آن ۵۰۵۷۷۲۰۰۰ است‌که به ثابت اویلر معروف است و هنوز معلوم نیست‌که‌آن عددگویا است یا اصم. تابع اولیه تابع قابل محاسبه نیست.

برادر محمدرضا مختارپور - دیپلمه - تبریز

از ارسال حل چند مسأله تشکر می‌نمائیم. امید داریم‌که موفق باشید.

برادر اسماعیل بابکی - دبیر - مینودشت

با عرض سلام متقابل وآرزوی موفقیت از ارسال حل مسأله شماره ۱۹ رشد شماره ۱۶ تشکر می‌نمائیم امیدواریم که بیش‌از پیش با ما همکاری نمائید.

خواهر مژگان رضاخانلو - دانش‌آموز - تهران

از لطف و محبت شما نسبت به مجله تشکر می‌نمائیم. امیدواریم‌که موفق باشید.

برادر محمدتقی رحیمی - دانش‌آموز - خمینی‌شهر اصفهان

با عرض سلام متقابل برای تهیه مجله نشر ریاضی می‌توانید با آدرس: «دفتر مجله نشر ریاضی، شماره ۸۵ خیابان پارك خیابان دکتر بهشتی، تهران ۱۵۱۳۴» مکاتبه‌کنید.

آدرس سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی همان‌آدرس مجله رشد ریاضی است. برای‌آبونمان شدن مجله ماهنامه‌آمریکا باید مستقیماً با دفترآن مجله مکاتبه نمائید.

برادر فرهاد فرجی - دانشجو - تهران

برای اطلاع دقیق در مورد اعداد تام بـه‌کتاب «تئوری

مقدمـاتی اعداد، تألیف غلامحسین مصاحب، جلد دوم، قسمت اول صفحه ۵۲۸» مراجعه کنید.

برادرآدم نقی‌پور - دانشجو - تبریز

ضمن تشکر از ارسال مقاله‌ای در مورد مفاهیمی از حلقه‌ها و ایده‌آلها، قسمت عمده این مقاله با مقاله «مفاهیمی ازحلقه‌ها و ایده‌آلها، دکترحسین ذاکری، رشد شماره ۱۲»یکسان است.

برادر کمال زارعی - دانشجو - تهران

در مورد هندسه‌های نااقلیدسی می‌توانید به مقالهٔ «اصول در هندسه، دکتر مگرویچ تومانیان، رشدآموزش ریاضی ۴ و ۵-۶» مـراجعه‌کنید. برای پاسخ بـه سؤال دوم شما روش برهان خلف بهترین برهان این مسأله است. در مـورد سؤال سوم شمـا اینکه «در بسط $(1+tga)^n$ جملات بـا توانهای خود را درصورت و جملات بـا توانهای زوج را در مخرج با علامت یك در میان مثبت و منفی قرار می‌دهیم تا $tg\,na$ به دست آید» برهـان این روش بـــه طور کامل در این شماره تحت‌عنوان چند رابطه مثلثاتی چاپ شده است.

برادر فرشاد عسلی - دانشجو - کرمان

متأسفانه رابطهٔ $\sin^m x+\cos^n x<1$ مسلماً درست نیست زیرا این رابطه به ازاء مثلاً $x=0$ درست نیست و مسلماً به ازاء بینهایت مقدار x هم درست نیست.

برادر محمدعلیپور اسکندانی - دانشجو - تبریز

نخست از ابراز لطف شما نسبت بـه مجله تشکر مـی‌کنیم. از اینکه شماره‌های اولیه مجله در بازارسیاه به ده برابر قیمت خریدوفروش می‌شود بسیار متأسفیم. خوشبختانه اولین خبرنامه باشگاه ریاضی منتشر شده است . در مورد انجمن‌ریاضی می‌توانید با سردبیر که یکی از اعضاء شورای اجرایی انجمن ریاضی است مـکاتبه‌کنید. از ارسال حـل مسائل شماره ۱۸ صمیمانه تشکرمی‌نمائیم امیدواریم که بیش‌ازپیش با ما همکاری کنید.

برادر مجید ابراهیمی - دانشجو - تهران

در مورد سؤال اول مـی‌توانید به‌کتاب «مقدمه‌ای برتاریخ ریاضیات،ترجمه دکتر محمدقاسم وحیدی از انتشارات مرکز نشر دانشگاهی» مراجعه‌کنید. در مورد سؤال دوم، منظورتان از تـوجیه پذیری ضرب مشخص نیست، در ریاضیات مفاهیم اولیه تعریف مـی‌شوند و اصول (مفاهیم اولیه) باید بـا قضایا سازگـار باشند. در مـورد مفهوم زمان می‌توانید بـه‌کتاب «فلسفه علم، تـرجمه یوسف عقیقی، انتشارات نیلوفر» مراجعه کنید.

برادر علی خانی‌گزان‌بند - دانشجو - تبریز

متأسفانه از برهـان شما در مـورد اثبات قضیه فرما چیزی دستگیر ما نشد.

برادر لطیف پورشامی - دانشجو - تبریز

از ارسال چند مسأله تشکر می‌کنیم ولی یادآوری می‌کنیم که برای درج مسائل باید مراجع مسائل ذکر شود. در مورد سطح مسأله، بـا توجه بـه اینکه از طرف وزارت‌آموزش و پـرورش منتشر می‌شود بیشتر در سطح دبیرستان است. و از این‌رو از درج مسائلی درموردآنالیزرودین و بارتل‌وآپوستل معذوریم.

خواهر متین مهربار - رشت

ضمن تشکـر از ابراز لطف شما نسبت به مجله، در مـورد پاسخ سؤال شما تذکر می‌دهیم که منظور مثلاً از صورت مبهم $0\times\infty$ این است که: اگر

$$\lim_{x\to a} g(x)=\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a} f(x)=0$$

آنگاه $f\circ g$ در همسایگـی a صورت مبهم $0\times\infty$ را دارد ولـی بعداز رفع ابهام اعداد مختلفی برای صورتهای متفاوت $0\times\infty$ به دست می‌آید. از این‌رو $0\times\infty$ را نمی‌توان به عنوان عددی تعریف کـــرد و همچنین است $\infty-\infty$، 0^0، $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$ و غیره.

برادر حمیدرضا فنایی - دانشجو - آزادشهر

از ارسال حل مسائل شماره ۱۷ صمیمانه تشکـر می‌نمائیم امیدواریم که موفق باشید و بیش‌ازپیش با ما همکاوی نمائید. انتگرالهای $\int e^{x^2}dx$ و $\int e^{-x^2}dx$ از نوع بیضوی هستند و نمی‌توان آنها را محاسبه‌کـــرد. و فقط می‌توان انتگـــرال معین $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ را محاسبه‌کرد.

برادر حمیدرضا معصومی - دانش‌آموز - قم

متأسفانه شماره‌های قبلی نایاب است. از ارسال یك مسأله

با حل تشکر می‌کنیم.

برادر غلامرضا کریم‌پور ـ عضو هیأت علمی ـ دانشگاه مازندران

از ارسال حل یکی از مسائل مسابقه دانشجویی تشکر می‌کنیم. درصورت امکان مسأله مربوط به خود را به صورت یك مقاله تنظیم کرده و ارسال فرمائید.

برادر کامبیز اخلاقی ـ دیپلمه ـ تهران

در مورد تحت مماس و تحت قائم می‌توانید به‌کتابهای هندسه تحلیلی مثلاً کتاب «هندسه تحلیلی تألیف **حسین و محسن غیور** مراجعه کنید».

برادر نادر علی‌پورفاینه ـ دانش‌آموز ـ تهران

جواب سؤال شما منوط به این است‌که اصول هیلبرت را دقیقاً یاد بگیرید در این مورد می‌توانید به مقالهٔ «اصول‌هندسه ۱ و ۲»، دکتر مگرویچ تومانیان، رشد شماره ۴ و ۶ـ۵» مراجعه کنید.

برادر مجید امیریان ـ دانش‌آموز ـ اصفهان

از ارسال حل‌چند مسأله تشکرمی‌کنیم. متأسفانه شماره‌های اولیه فعلاً نایاب است. ضمناً شرکت درمسابقه دانش‌آموزی صرفاً برای دانش‌آموزان کلاس سوم و چهارم ریاضی فیزیك است.

برادر محمدرضا سبحانی ـ دانشجوی رشته شیمی ـ شیراز

متأسفانه ادعای شما را می‌توان با ارائه $k=219$ ردکرد امید است‌که دروس شیمی خود را به دقت ادامه دهید.

خواهر مهین فنایی ـ آزادشهر مازندران

بهتر است در مورد سؤال خود با مجله اطلاعات هفتگی مکاتبه کنید.

برادر ابوطالب گلباغی ـ دانش‌آموز ـ رشت

با عرض سلام متقابل و تشکر از ابراز لطف و محبت شما نسبت به مجله، شما درقسمت (ج) فرض کرده‌اید که $x^{a^{a^{a}}}=y$ و نتیجه گرفته‌اید که $x^{a^{a^{a^{10}}}}=y^{10}$ که این‌نتیجه‌گیری نادرست است. توجه داشته باشید که $(x^{a})^{a}=x^{a^{2}}$.

برادران کوروش کریمی، مرتضی الهیاری ـ دانشجویان دانشگاه مشهد

مسأله ۲ در شماره ۸ رشد حل شده است. در واقع نشان داده‌ایم که $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ موجود نیست زیرا اگر

$$\lim_{n\to\infty}\sin n=l$$

داریم

$$\sin(n+1)-\sin(n-1)=2\sin 1\cos n$$

یعنی $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=0$ پس $\lim\limits_{n\to\infty}\sin 2n=0$ پس $l=0$ که متناقض با رابطهٔ $\sin^{2}n+\cos^{2}n=1$ است.

برادر محمود رضایی ـ دیپلمه ـ دماوند

از ارسال یکی‌از مسائل المپیادآمریکا وکانادا (شماره ۱۵) تشکر می‌کنیم.

برادر علیرضا حسنی ـ دانش‌آموز ـ کنگاور

ضمن تشکر و قدردانی از نامهٔ مفصل شما در مورد وضعیت رشتهٔ ریاضی امیدواریم‌که همواره موفق و مؤید باشید.

برادر مهران رنجبر ـ تهران

اظهارنظر در مورد یافته‌های شما فقط بعداز دریافت و بررسی‌آنها امکانپذیر است.

برادر حسن خاتونی ـ دوم تجربی ـ تهران

ادعا کرده‌اید‌که در هر مثلث مجموع دو ضلع از یك ضلع بیشتر نیست‌که مسلماً نادرست است از تقسیم طرفین یك رابطه بر صفر ثابت‌کرده‌اید که «۲ = ۱»!!

برادر منوچهر تکریمی ـ دانش‌آموز ـ ارومیه

قضیه ارسالی شما، در واقع، یك مسأله معمولی هندسه است. از ارسال حل مسائل ۱، ۳، ۸ و ۱۸ شماره ۱۷ تشکر می‌کنیم. موفق باشید.

برادر علی نجف‌آبادی ـ دبیر ـ تهران

از ارسال یك مسأله هندسه تشکر می‌نمائیم. امید است‌که بیش‌ازپیش با ما همکاری‌کنید.

برادر رضا پورعظیم ـ تبریز

مسأله هندسه شما در شماره‌آینده درج خواهد شد. مطلب

دومی که بیان کرده‌اید درست است ولی می‌توانید با ضرب عبارت در $sin\frac{\alpha}{2}$ مقدارآن را پیدا کنید.

برادر محمدشهاب احمدی ـ دانش‌آموز ـ تهران

برای محاسبه مشتق تابعی که در یك نقطه با یك ضابطه و در نقاط دیگر با ضابطهٔ دیگری تعریف شده است باید از تعریف مشتق استفاده کرد.

برادر ... ـ تهران

از مسائل جالبی که فرستاده‌اید تشکر می‌کنیم، امیدواریم درآتیه مطالب خود را با ذکر نام خود ارسال دارید.

برادر محمدرضا فرهادی ـ دانش‌آموز ـ قم

از اظهار محبت شما نسبت به مجله تشکر می‌کنیم.

برادر ناصر محمدی‌جلالی ـ مشهد

از ارسال حل مسأله هندسه مسابقه تشکر می‌کنیم. مطالبی که سؤال کرده‌اید در شماره‌های ۱ تا ۴ وجود دارد که نایاب هستند.

برادر محمد حسین‌آبادی، گرگان ـ برادر محمدجابربران، دانش‌آموز ـ تبریز ، برادر محمدباقر سید رضا زاده‌لالی، دانشجو ـ تهران

هیأت تحریریه مجله نهایت تشکر و قدردانی خود را از شما به خاطر ارسال تعدادی زیادی از راه‌حل صحیح مسائل شماره ۱۷ اعلام می‌دارد. بویژه، راه‌حل مسأله ۳ بسیارجالب بود.

برادر علی جاویدمهر ـ دبیر ـ ساوه

از ارسال راه‌حلهای جالب مسائلی از شماره ۱۷ صمیمانه تشکر می‌نمائیم، امیدواریم که موفق باشید. سلام شما به‌آقای دکتر ذاکری ابلاغ گردید.

ذیلاً اسامی عزیزانی را که راه‌حلی از مسائل شماره ۱۶ یا ۱۷ را برای ما فرستاده‌اند، ضمن تشکر ازآنها، درج می‌کنیم:

برادر کاظم قنبری، دانشجو، تبریز، ۴ و ۱۷ (شماره ۱۶) و ۱۶ و ۱۷ (شماره ۱۷).

برادرآرش اسلامی،دانش‌آموز، رشت، ۱۲ و ۱۹ (شماره ۱۶) و ۱۱ (شماره ۱۷).

برادر علیرضا بیگدلی، دانشجو، تهران، ۴ و ۸، ۱۱، ۱۴ (شماره ۱۷).

برادر امیدآثار، تهران، ۱(شماره ۱۷) راه‌حل جالبی بود.

برادر پیروز زرین‌خط، دانش‌آموز، اصفهان، ۱۱ (شماره ۱۷).

برادر محمد رهبر، دانشجو، تهران، ۲، ۳، ۶، ۱۱، ۱۷ (شماره ۱۷).

برادرکیوان پژوتن، تهران، ۱، ۱۸ (شماره ۱۷).

برادر صدرالدین ابوترابی، تهران، ۳، ۴، ۱۰، ۱۱، ۱۵ (شماره ۱۷).

برادر مسعود عوضی، دانش‌آموز، برازجان، ۲، ۱۱، ۱۲ (شماره ۱۶)، ۲، ۱، ۱۲ (شماره ۱۷).

برادر فرشاد اسکندربیاتی تهران، ۱۴ (شماره ۱۷).

خواهر زهرا اطلس‌باف، تهران، حل چند مسأله از شماره ۱۶.

برادر سید علی جذبی، دانش‌آموز، شیراز، مسأله ۳ المپیاد داخلی.

برادر مجید افشار رضوی، دانش‌آموز، مشهد، مسائلی از شماره ۱۶.

برادر حسین کریمی، دانشجو، تهران، مسائلی ازشماره ۱۶.

برادر مصطفی رحمانی، دانش‌آموز، تهران، مسائلی از شماره ۱۶.

برادر مصطفی کاظمیان، دانش‌آموز، مشهد، مسائلی از شماره ۱۶.

برادر عباس سلیمانیان، دانشجو، ساری، مسائلی از شماره ۱۶.

برادر سید احمد صبیحی، دانشجو، اصفهان، مسائلی از شماره ۱۶.

برادر بهمن هنری،دانش‌آموز،تهران،مسائلی ازشماره ۱۶.

اسامی عزیزانی که مسائلی برای حل فرستاده‌اند بدین وسیله ازآنها تشکر می‌کنیم

برادران مجید صادقی،کیوان حسین جان‌زاده، بابك عیوضی کیوان پژوتن از تهران.

ضمناً عده‌ای از خوانندگان راه‌حلهایی برای بعضی‌از مسائل شماره ۱۶ یا ۱۷ فرستاده‌اند که به علت ناقص بودن راه‌حلهای آنها از ذکر نامشان معذوریم. امیدواریم که در مکاتبات بعدی دقت بیشتری در حل مسائل بنمایند.

اخبار ریاضی

* شورای برنامه‌ریزی دورهٔ متوسطه جهت تدوین اهداف، برنامه‌ها و تألیف کتب ریاضی دورهٔ متوسطه با حضور اساتید برجسته ریاضی، دبیران با تجربه ریاضی و کارشناسان گروه ریاضی دفتر تحقیقات اولین جلسه خود را در دفتر وزیر محترم آموزش و پرورش با شرکت ریاست محترم سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی و مدیر کل محترم دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی درسی و تألیف تشکیل داد. این جلسات بطور مستمر دو هفته یکبار در دفتر ریاست محترم سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی و با حضور اعضای شورا تشکیل می گردد.

* کنفرانس ریاضی در برخی از مراکز استانها: خوزستان، اصفهان، کرمان و یزد با شرکت اساتید ریاضی دانشگاه (از جمله دانشگاه تربیت معلم و اساتید خود دانشگاه شهر مربوطه) و دبیران ریاضی استان و کارشناسان دفتر تحقیقات بشرح تاریخهای ذیل برای بهبود سطح کیفی دانش ریاضی دبیران ریاضی و بررسی آموزش ریاضی استان تشکیل گردید:

۲۴ و ۲۵ آذرماه کنفرانس دو روزه در اهواز.
۱۵ دیماه در یزد.
۲۹ و ۳۰ دیماه در کرمان
اواسط دیماه در اصفهان.

* اولین نشریه ویژه مسابقات ریاضی دانش آموزی کشور در دیماه ۶۷ با نام **ریاضیدان جوان** برای آشنائی دانش - آموزان با مسائل المپیاد ریاضی و آمادگی برای مسابقات دانش آموزی کشور منتشر شد.

* اولین مرحله ششمین دوره مسابقات ریاضی دانش آموزی کشور در مراکز استانها همزمان با دههٔ مبارکهٔ فجر در چهاردهم بهمن‌ماه برگزار گردید که اسامی بیش از ۱۰۰ نفر اول توسط سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی از طریق جراید کثیرالانتشار اعلام می‌شود. مسابقات مرحلهٔ نهائی همزمان با بیستمین کنفرانس ریاضی کشور که از ۷ الی ۱۵ فروردین‌ماه ۶۸ در دانشگاه تهران برگزار می گردد انجام می گیرد.

* چهارمین شمارهٔ پیک ریاضی، نشریه دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان و دومین شماره جنگ ریاضی نشریه جهاد دانشگاهی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران و سومین شمارهٔ نشر ریاضی نشریهٔ مرکز نشر دانشگاهی منتشر شد.

* آقایان علی‌اصغر خانبان و پژمان پورشیرازی و آریان مولائیان به ترتیب از رشته الکترونیک و مکانیک جامدات و الکترونیک از دانشگاه صنعتی شریف به رشتهٔ ریاضی تغییر رشته دادند.

آقای خانبان ردهٔ سوم المپیاد کوبا (۱۹۸۷) و آقای پورشیرازی جزء شش نفر اعزامی به کوبا و آقای مولائیان جزء ۳۰ نفر برتر مسابقات دانش‌آموزی کشور در سال ۱۳۶۵ بوده‌اند. ضمناً آقای خانبان از رشتهٔ **پزشکی** به رشته الکترونیک و آنگاه به **ریاضی** تغییر رشته داده‌اند. هیأت تحریریه مجله رشد ریاضی، گروه ریاضی دفتر تحقیقات و دفتر تحقیقات برای این برادران آرزوی موفقیت و سرافرازی می‌نماید.

عناوین پیک ریاضی
(شماره ۴ جلد ۲)

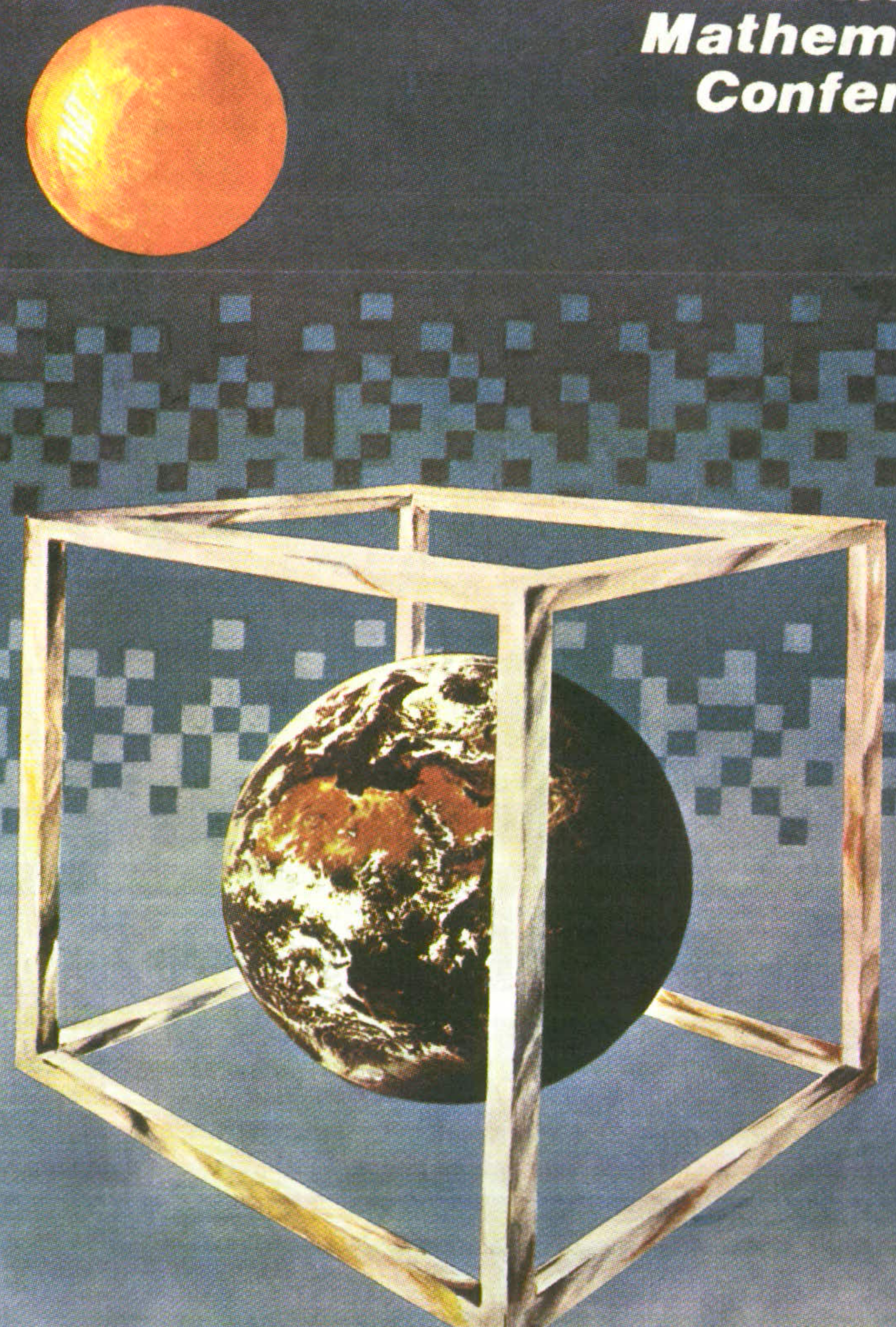
Contents

Roshd, Magazine of Mathematical Education, Vol V No.19,20 Autumn & Winter 1988, 89 Mathematics Section, 274 BLDG - No. 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave., Tehran - Iran.

A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.

بیستمین کنفرانس ریاضی کشور

20th Annual Iranian Mathematics Conference



March 27_30, 1989 University of Tehran Department of Mathematics

۷ تا ۱۰ فروردین ۱۳۶۸ دانشگاه تهران گروه ریاضی