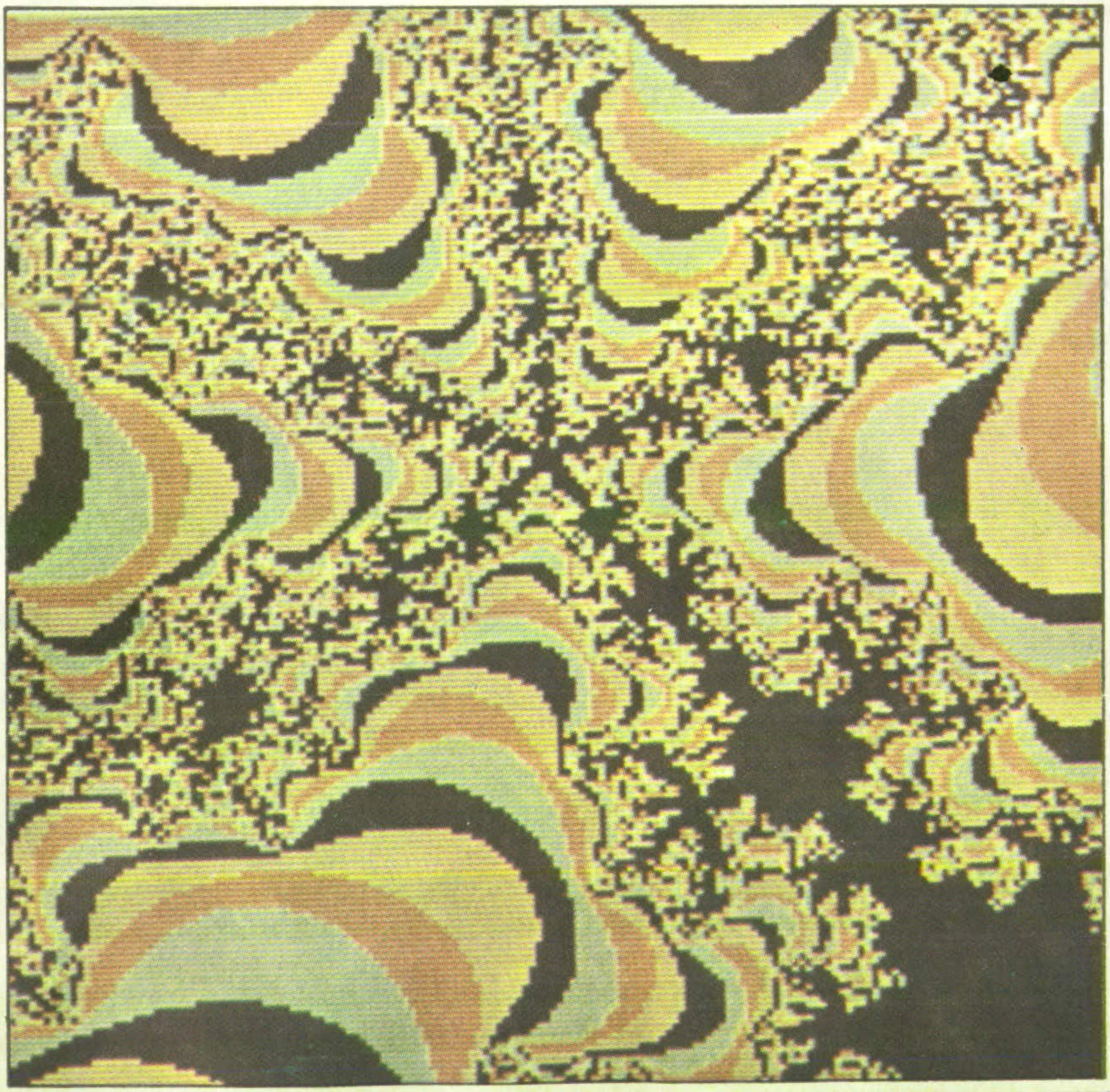
رشد آموزش ریاضی

سال پنجم ـ تابستان ۱۳۶۷ شماره مسلسل ۱۸

بها: ۱۰۰ ریال




29th
INTERNATIONAL
MATHEMATICAL
OLYMPIAD
JULY 9-21
1988
Welcome
Canberra

رشد آموزش ریاضی

سال پنجم ـ تابستان ۱۳۶۷ ـ شماره مسلسل ۱۸

نشریه گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نشانی: خیابان ایرانشهر شمالی ــ ساختمان شمارهٔ ۴ وزارت آموزش و پرورش تلفن ۴ ــ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۵۲)

سردبیر : دکتر علیرضا مدقالچی

مدیر داخلی: سید محمدعلی بصام‌تبار

تولید : واحد مجلات رشد تخصصی

صفحه‌آرا : محمد پریسای

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و آشنایی آنان با شیوه‌های صحیح تدریس ریاضی منتشر می‌شود.

فهرست

توضیح روی جلد: اشیاء شکسته شدهٔ عجیب! بیشتراز یك خط وکمتر از یك سطح

بسم الله الرحمن الرحیم

گزارشی از وضعیت آموزش ریاضی در آموزش و پرورش*

با نگاهی به تاریخ تمدن، به این نکته پی می‌بریم که هیچ تمدن بزرگی در عالم ظهور نکرده، مگر آنکه در ریاضیات قوت داشته است. اگر به تمدن مصر باستان، بین‌النهرین، هند، چین، یونان، اسکندریه، مراجعه کنیم می‌بینیم در همهٔ این تمدنها ریاضیدانان بزرگی ظهور کرده‌اند که چهره‌پرداز ریاضیات جهان در زمان خود بوده‌اند. بعداز ظهور اسلام نیز، می‌بینیم که اوج و اعتلای تمدن اسلامی با اوج قوت ریاضیات درعالم اسلام انطباق دارد.

دراسلام ریاضیات از لحاظ نظری جایگاه والایی دارد. جهان‌بینی اسلامی نه‌تنها با بینش ریاضی ناسازگاری ندارد بلکه آنرا تأیید می‌کند و به‌آن قوت می‌بخشد. در قرآن آیات مختلفی وجود داردکه صریحاً دال بر آن است که جهان بر حساب مبتنی است و کار جهان حساب وکتاب دارد. از این آیات چنین فهمیده می‌شود که در کار آفرینش عدد و رقم دخیل است و هستی اندازه‌بندی شده است. شاید تعداد این آیات از ۱۵ آیه‌کمتر نباشد و از آن قبیل است آیاتی در آغاز سورهٔ الرحمن که در آنها سخن از این است که شمس وقمر، گردش و حرکتی از روی حساب دارند و آسمان بر اساس توازن برپا شده است. همچنین آیات دیگری که در آنها صحبت از اندازه‌بندی است، مانند این آیه‌که «و ان من شی الاعندنا خزائنه و ماننزله الا بقدر معلوم» (سوره حجر ــ آیه ۲۱) در جهان هیچ نیست مگر آنکه خزانه و گنجینه وجودی آن به دست ماست و ما آن را جز به اندازهٔ معلوم فرو نمی‌فرستیم.

درآغاز سوره «اعلی» نیز می‌خوانیم: «سبح اسم ربك الاعلی الذی خلق فسوی و الذی قدر فهدی» تسبیح و ستایش کن نام بلند پروردگار خویش را، آنکه آفرینش را آفرید و موزون آفرید و آنکه آفرینش را اندازه‌بندی و سپس هدایت کرد.

البته همه هستی در ریاضیات خلاصه نمی‌شود، اما قرآن می‌گوید هستی اندازه و حساب دارد و همین امر پشتوانه محکمی برای ریاضیات در تمدن اسلامی محسوب می‌شود. براساس همین تأیید قرآنی بوده است که مسلمانان توانسته‌اند میراث باستانی ریاضیات را از حوزهٔ فرهنگی قبل‌از اسلام به خوبی دریافت کنند و همین جهان‌بینی اسلامی بوده که زمینه را برای پذیرش این علم آماده کرده است. مسلمین ریاضیات یونانی و رومی‌را ازاسکندریه، ازمدارسی که درمجاورت حوزه‌جغرافیائی ظهور اسلام بود فراگرفتند و علاوه‌برآن سنت ریاضی هند را نیزکسب کردند واین دو را باهم درآمیختند و برای چند صد سال پرچمدار دانش ریاضی در جهان بودند.

مردم‌کشور ما نیز با استعداد سرشار خود سهم قابل توجهی در تاریخ ریاضی داشته‌اند. آخرین کتاب در این زمینه، کتاب «زندگینامه ریاضیدانان دوره اسلامی» است که در آن ۱۶۰ نفر از ریاضی‌دانان مسلمان که عمدتاً ازکشور ما هستند معرفی شده‌اند[1]. این پشتوانه‌نظری و سابقه تاریخی، مایهٔ امیدواری ما برای فعالیتهای آینده است. رابطهٔ اسلام با ریاضی تنها در تأیید نظری خلاصه نمی‌شود بلکه اسلام ازآن نظرکه احکام زندگی نیز هست مستلزم ریاضیات است. ما در بسیاری از احکام اسلامی به وضوح به ریاضیات نیازمندیم. ازآغاز ظهور اسلام، مسلمین به تعیین قبله محتاج بوده‌اند وگسترشی که درپهنهٔ جغرافیا وجود داشته و نیازی‌که دقیقاً به همین دلیل به مثلثات داشته‌اند قطعاً در توجه‌آنان به ریاضیات مؤثر بوده است. من در این زمینه سابقاً بحث مفصلی در شانزدهمین کنفرانس ریاضی داشته‌ام و شاید دراینجا تکرارآن مناسب نباشد، تنها اشاره می‌کنم به‌یك‌نکته ازمرحوم آیت‌الله شعرانی که‌از روحانیون بسیار دانشمند و متواضع و ساده زیست معاصر ما بوده و در خرداد ماه ۵۲ درگذشته‌اند. ایشان‌که استاد دانشگاه تهران بودند در یکی از نوشته‌های خود توضیح می‌دهند که توجه مسلمین به‌مثلثات از اینجا جلب شد که یکی از مسلمانان از پیامبر اکرم (ص) پرسید نماز عصر را در چه ساعتی بگذارم و پیامبر فرمودند چوبی را به‌صورت شاخص برروی زمین نصب‌کن هرگاه اندازهٔ سایه چوب باخود چوب یکی شد، آن وقت، وقت نماز عصر است و این دستور و راهنمایی، تفسیر عملی رابطهٔ $tg45^\circ = 1$ است. ایشان این قاعده را آغاز علم مثلثات در عالم اسلامی می‌دانند.

درکشور خود، ایران علیرغم سابقهٔ درخشانی‌که در ریاضیات داشته‌ایم، در ۲۰۰ سال گذشته، از حکومتهای فاسد آسیبهای فراوان دیده‌ایم و بخصوص در ۵۰ سالهٔ اخیر شاهد افول در همهٔ شئون فرهنگی از جمله در ریاضیات و علوم بوده‌ایم. انقلاب اسلامی استقلال سیاسی را به ما برگردانده است اما استقلال سیاسی برپایه استقلال‌های دیگری استوار است. برای‌حفظ استقلال سیاسی بسیاری از جنبه‌های دیگر را باید تأمین کرد. اگر ملتی از نظر اقتصادی و نظامی استقلال نداشته باشد استقلال‌سیاسی‌آن ملت هم‌در خطر است. استقلال اقتصادی نیز به نوبه خود مربوط به قوت علمی وصنعتی است. در علم و صنعت اصطلاح «استقلال» و «خودکفائی» قدری مسامحه‌آمیز است، ولی سخن از قوت وقدرت صحیح است. اگرکشور ما در علوم پایه قوی نباشد در صنعت قوی نخواهد بود و اگر در صنعت ضعف داشته باشد در اقتصاد و در دفاع ازکشور ضعیف خواهد بود و ضعف این دو به ضعف در استقلال سیاسی منجر خواهد شد، اما قوت درعلوم پایه مستلزم قوت در ریاضیات است. ریاضیات زبان علوم پایه است. محال است‌که ما در فیزیك یا شیمی و یا زمین‌شناسی رشدقابل توجهی داشته باشیم و در ریاضی ضعیف باشیم. امروز توجه به ریاضیات برای ما یك وظیفهٔ اسلامی وانقلابی ویك وظیفهٔ ملی است و به همین جهت است‌که اقدام جهاد دانشگاهی در تشکیل یك سمینار برای‌آموزش ریاضی کاملاً قابل فهم است

* این‌مقاله‌متن‌سخنرانی‌برادردکترغلامعلی حداد عادل معاون وزیر و رئیس سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی است‌که در اولین‌سمینارآموزش ریاضی در دانشکده‌علوم دانشگاه تهران ایراد شده است.

۱ـ زندگینامه ریاضیدانان دوره اسلامی، تألیف ابولقاسم قربانی، از انتشارات مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۶.

و معنی دارد. امروز اهتمام به آموزش ریاضی درکشور ما یك امر جهادی است ودر راستای همان منجاهدتهایی قرار دارد که رزمندگان ما در جبهه‌ها می‌کنند و همان اندازه سخت است و همان مقدار انگیزهٔ مقدس طلب می‌کند. وضع آموزش ریاضی در حال‌حاضر خوب نیست و باید همه کسانی که مسئولند و آگاهند درد را بشناسند و بشناسانند. بنده به حکم اینکه در هفت، هشت سال گذشته مقیم و مجاور آموزش و پرورش بوده‌ام گزارشی از آموزش ریاضیات تقدیم می‌کنم. البته از وضع آموزش ریاضی‌در دانشگاهها اطلاع کافی ودقیقی ندارم امادرآموزش‌وپرورش تا حدودی می‌دانیم که مسائل و مشکلات چیست.

اجازهٔ بدهید مطلب را از افت‌کمی دانش‌آموزان ریاضی در دهه پنجاه آغاز کنیم. آن طورکه کارشناسان به بنده گفته‌اند درسال ۵۴ در صد دانش‌آموزان رشته ریاضی در نظام قدیم ۲۹٪ بوده اما بعدازآنکه موج نظام جدید به دبیرستان می‌رسد و تعیین رشته براساس این نظام جدیدآغاز می‌شود افت‌کمی به سرعت آغاز می‌شود به‌طوری که این ۲۹٪ پس‌از ۲ سال یعنی مقارن با پیروزی انقلاب با یك شیب خطرناك وتندبه ۱۲٪ می‌رسداین کاهش طبعاً بعداز انقلاب هم ادامه پیدا می‌کند منتها قدری تعدیل شده است، ولی به همان اندازه تأسف‌انگیز، به طوری که درسال تحصیلی ۶۱ـ۶۰ این رقم به‌چیزی در حدود ۷٪ و شایدکمتر می‌رسد. ما در سال ۶۴ـ۶۳ شاهد بودیم که درکل‌کشور مجموع کسانی که در امتحان نهایی سال چهارم رشته ریاضی شرکت‌کرده بودند در حدود ۱۰۰۰۰ نفر بوده و این رقم حتی همان زمان از ظرفیت همه مؤسسات و مراکز آموزش عالی که به دیپلمه ریاضی احتیاج داشتند بیشتر نبود. من فعلاً وارد تحلیل علل این افت نمی‌شوم اگر وقتی داشتیم ممکن است در همین صحبت به‌این مسأله برگردم. به هرحال، این‌آمار برای ما تکان دهنده بود.

مادریك دور باطلی گرفتار آمده بودیم. و هنوز هم کم‌وبیش گرفتاریم، دور باطلی که با آن مواجه بودیم این بود. می‌خواستیم ریاضیات را درآموزش و پرورش گسترش بدهیم این امر مستلزم معلم ریاضی بیشتر و بهتر بود (ما تشخیص داده بودیم علل اعراض دانش‌آموزان از رشته ریاضی ضعف ریاضیات آنها در دورهٔ راهنمایی است و شاهد بودیم که رشته ریاضی در بسیاری از شهرها نه به علت کمبود دبیر بلکه به‌علت‌کمبود دانش‌آموز رشته ریاضی تعطیل می‌شود. البته همه‌جا این طور نبود ولی در موارد بسیاری این گونه بود به عنوان نمونه، قم، شهری که از نظر فرهنگی واز نظر سابقه‌آموزش و ـ پرورش‌جدید سابقه‌ای بیش‌ازچند ده‌سال و شاید نزدیك به‌صد سال داشته باشد، ما در همین قم نزدیك تهران‌که همیشه دبیران ریاضی متعددی داشته‌ایم شاهد بودیم که به علت نبودن دانش‌آموز مثلاً سه‌کلاس ریاضی به دوکلاس و دوکلاس ریاضی به یك‌کلاس مبدل شده بود) بوضوح می‌دیدیم که معلمان دوره راهنمایی ما نوعاً متبحردر آموزش ریاضی نیستند. برای تربیت معلم احتیاج به‌دیپلمه ریاضی داشتیم، اما دیپلمه ریاضی نداشتیم. یعنی آن ۱۰۰۰۰ نفری که آموزش‌وپرورش به عنوان دیپلمه ریاضی تربیت می‌کرد سراغ خودآموزش و پرورش نمی‌آمدند. درست مثل قلبی که بخواهد به همه بدن خون برساند اما به عضلات خودش خون نرسد. ما به چنین وضعی دچار بوده‌ایم وهستیم. برای‌اینکه یك عدد و رقمی در این محفل ریاضی به دست داده باشم عرض می‌کنم که ما در سالهای اخیرآمادگی داشته‌ایم و داریم که سالانه ۱۰۰۰ نفر دیپلم ریاضی برای دورهٔ راهنمایی تربیت‌کنیم. موجب تأسف خواهد بود وقتی بدانیدکه مثلاً دو سال پیش در حدود ۱۰۰ نفر در همه مراکز تربیت‌معلم راهنمایی کل کشور ثبت‌نام کردند. ابتدا ۱۸۰ نفر ثبت‌نام کردند و این قبل‌از اعلام نتایج دانشگاهها بود، که قطعاً عده‌ای از این ۱۸۰ نفر پس‌ازقبولی در دانشگاهها انصراف از تحصیل داده‌اند و قطعاً عده‌ای ازآنها بعداز یك سال تحصیل در مراکز ما مجدداً کنکور داده‌ و در دانشگاه قبول شده‌اند. صد نفر برای یك‌کشور ۵۰ میلیونی و برای ۲۴ استان یعنی به طور متوسط برای هر استان ۴ نفر و برای استانی مثل تهران حداکثر ۱۰ نفر و این یعنی هیچ! می‌بینید که چگونه خشك شدن رودخانهٔ رشته ریاضی اولین تشنه کامی را که از پا درآورد خود آموزش و پرورش بود تا بعد نوبت دانشگاهها برسد.

لازم بود به صور مختلف اقدام‌کنیم. بنده قصد ندارم تجزیه و تحلیل دقیقی از علل‌وعوامل این وضعیت اسف بار به‌دست بدهم، اما اجمالاً عرض می‌کنم که این نظام به اصطلاح جدید ـ نظامی که حالا صحبت از این است که خودش هم قدیمی

است ـ این نظام پنج سال ابتدایی و سه سال راهنمایی و چهار سال دبیرستان در این افت مؤثر بوده است. شاید یك علت این بوده که معلم ریاضی خوب برای دورهٔ راهنمایی آماده نکردند. اما نباید همه مشکل ریاضیات پیش دانشگاهی را در دورهٔ راهنمایی متمرکز دانست معلوم نیست وضع ابتدایی بهتر باشد. در ابتدایی مشکل ما این است که تقریباً دیپلمه ریاضی نداریم که معلم ابتدایی بشود. شاید مثلاً ۱٪ دیپلمه‌هایی که داوطلب آموزگاری هستند دیپلمه ریاضی باشند. اگر بخواهیم تفسیر بدبینانه‌ای از این آمار به دست بدهیم باید بگوئیم که همه کسانی که نتوانسته‌اند به رشته ریاضی بروند، ریاضی تدریس می‌کنند. به این صورت خشت اول کج نهاده می‌شود و ریاضی با همه زیبایی و جاذبه‌ای که می‌تواند داشته باشد متأسفانه به صورت غول خطرناکی برای دانش‌آموزان ما جلوه می‌کند.

در وزارت آموزش و پرورش تقریباً از همان اوایل بعداز پیروزی انقلاب توجهی دقیق به تألیف کتابهای جدید دبستانی پیدا شد. فرصت تعطیلی دانشگاهها به سبب انقلاب فرهنگی به این کار کمك کرد و با زحمت بسیار کتابهای ابتدایی از نو برنامه ریزی و تألیف شد؛ کاری بزرگ بود. بسیاری از استادان دانشگاهها و معلمان در این کار سهیم بودند و زحمت کشیدند. پنج کتاب نسبتاً مطلوب تألیف شد و برای آنها راهنمای تدریس نیز نوشته شد و در حدود ۳۰۰۰۰۰ نفر معلم برای تدریس این کتابها دوره آموزش ضمن خدمت دیدند و ما پس‌ازآن شاهد بودیم که دانش‌آموزان ابتدایی به کتاب ریاضی دلبستگی پیدا کردند. از نظر تصویر، بیان و نوع نگارش و طرح مفاهیم، کتابهای ریاضی ابتدایی، برای دانش ـ آموزان دلنشین شده‌اند. اما مشکل معلم علیرغم کوششهای ما برای تشکیل کلاسهای ضمن خدمت به صورت کامل حل نشد. کار تألیف کتابهای ابتدایی برای دوره راهنمایی هم ادامه پیدا کرد. در دوره راهنمایی سه کتاب جدید، تألیف شد که بعضی‌ازآنها روش تدریس هم‌دارد. و برای آنها هم کلاسهای ضمن خدمت در سراسر کشور تشکیل شده است. اکنون در این چند سال بعداز انقلاب، برنامه ـ ریزی و تألیف کتابهای جدید ریاضی را برای هشت سال ابتدایی و راهنمایی به پایان برده‌ایم و در حال حاضر در صدد ارزشیابی این برنامه هستیم. به موازات این اقدام و به طور همزمان با کمك استادان ریاضی به‌صورت جدی به‌بررسی علل افت ریاضی پرداختیم. معلوم شد علل متعدی در کار است. ما سعی کردیم بعضی کارهای ممکن‌را شروع کنیم. بعضی اقدامات کوتاه‌مدت فوری را که در سودمندی آنها تردید نداشتیم آغاز کردیم. اول اینکه در همه گردهمایی‌های مدیران کل و رؤسای مناطق آموزش و پرورش و حتی مدیران مدارس این زنگ خطر را به صدا درآوردیم و همه دست اندرکاران و تصمیم گیران آموزش و پرورش‌را ازعاقبت خطرناك ضعف رشته ریاضی با خبر کردیم و این هشدار البته همچنان ادامه دارد و سالی نیست که در چندین مجمع عمومی مسئولان آموزش و پرورش، توجه آنها را به تقویت رشته ریاضی جلب نکنیم.

از سوی دیگر نسبت به استخدام دبیر ریاضی و توزیع عادلانه دبیر ریاضی در سطح کشور البته در حدی که دانشگاهها به‌ما معلم ریاضی تحویل می‌دادند توجه پیدا شد. کارهای تشویق‌آمیز دیگری را نیز شروع کردیم که یکی ازآنها مسابقه ریاضی برای دانش‌آموزان سراسر کشور بود. ازپنج سال پیش‌همزمان باکنفرانس سالانه انجمن ریاضی مسابقه ریاضی دانش‌آموزی برگزار کردیم. دراین مسیر پا به پای انجمن ریاضی بودیم واز محبت و مساعدت استادان ریاضی در انجمن همواره سپاسگزاریم. امسال پنجمین دورهٔ مسابقات ریاضی دانش‌آموزی را در کشور آغاز کردیم. تبلیغ و تشویقی که به مناسب این مسابقه در سطح دبیرستانها صورت گرفت در تقویت رشته ریاضی مؤثر بود. درکنار این فعالیت اقدام به انتشار مجله رشد آموزش ریاضی کردیم که اولین مجله از خانواده کثیرالاولاد «رشد» بود. این مجله به‌زودی‌چهارمین سال‌انتشار خود را به پایان می‌رساند و بد نیست بدانید که تیراژآن ۱۵۰۰۰ است. رشد آموزش ریاضی مورد استقبال دبیران و استادان دانشگاه و دانش‌آموزان رشته ریاضی قرارگرفت و در جلب توجه به ریاضی مؤثر بود. ما سعی کردیم راهی را که آقای مصحفی در مجله یکان پیموده بودند با استفاده از تجربه خوب آن مرد خدمتگزار به نحو بهتری ادامه بدهیم. علاوه‌براین‌سعی کردیم با مجامع بین‌المللی وفعالیتهای جهانی‌در زمینهٔ آموزش‌ریاضی ارتباط برقرارکنیم. چهار سال پیش ما ۹ نفررا به‌کنفرانس جهانی آموزش‌ریاضی

در استرالیا فرستادیم و علاوه بر آن در طول ۴ سال گذشته چندین نوبت کارشناسان ریاضی را به کنفرانس‌های متعددی در هلند و انگلستان وجاهای دیگر اعزام کرده‌ایم. در کنفرانس‌های سالانه داخلی نیز شرکت داشته‌ایم و از رهگذر شرکت در همین مجامع بین‌المللی بود که توانستیم در سال گذشته در بیست‌وهشتمین المپیاد جهانی ریاضی برای بار اول شرکت کنیم. تیم ۶ نفره دانش‌آموزان که آنها را از طریق مسابقات داخلی انتخاب کرده بودیم با بیم وامید عازم کوبا شدند ونتیجه‌ای که همراه آوردند بیش از انتظار ما بود. این اولین بار بود که ایران در این مسابقات شرکت می‌کرد و در همین نخستین بار بین ۴۱ کشور بیست‌وششم شد. آقای دکتر نجفی وزیر اسبق فرهنگ وآموزش عالی که خود استاد ریاضی هستند و سرپرستی تیم ایران را بر عهده داشتند خاطراتی تعریف می‌کردند که نقل یکی از آنها برای ایجاد یک تنوع مختصر بد نیست. می‌گفتند رئیس تیم نروژ قبل از شروع مسابقات ما را نصیحت می‌کرد که خوب بود شما در سال اول به عنوان ناظر شرکت می‌کردید. ممکن است بچه‌های شما همه صفر بگیرند و روحیه شرکت کنندگان بعدی تان ضعیف شود. ایشان گفتند: بنده گفتم حالا که دیر شده و ما آمده‌ایم و قرار است شرکت کنیم، ببینیم چه می‌شود. وقتی امتحان برگزار شد و نتایج اعلام شد جمهوری اسلامی ایران بیست‌وششم ونروژ بیست‌وهفتم شد! رئیس تیم نروژ خیلی تعجب کرده بود. در میان کشورهایی که ما پشت‌سر گذاشتیم نامهایی از قبیل نروژ، ایتالیا، لهستان، فنلاند و امثال آن که از سالها پیش در این مسابقات شرکت می‌کردند دیده می‌شود. از ۶ مسئله مشکلی که در سطح دنیا انتخاب شده بود ودر این مسابقات به دانش‌آموزان داده بودند دانش‌آموزان ما در مجموع ۴۶ مسئله را درست حل کرده بودند، درحالی که یک هفته هم بیشتر اردوی آمادگی ندیده بودند. این نتیجه ما را دلگرم کرد و امیدوار ساخت که افق روشن وزمینه هموار است. به دنبال این برنامه، مصمم شدیم مسابقات دوره پنجم را با نظم و دقت بیشتری برگزار کنیم. خوشبختانه استادان با ما مساعدت دارند. یک کمیته ۱۰ نفری تشکیل شده که درخصوص مسابقات ریاضی دانش‌آموزی تصمیم می‌گیرد و در آن آقای دکتر زارع از دانشگاه تهران، آقای دکتر رجالی از دانشگاه اصفهان، آقای دکتر کرم‌زاده از دانشگاه شهید چمران اهواز، آقای دکتر نجفی از دانشگاه صنعتی شریف وآقای دکتر مدقالچی از دانشگاه تربیت معلم عضویت دارند بقیه اعضاء کارشناسان و مسئولین سازمان و همچنین دبیران ریاضی هستند. مسابقات مقدماتی استانها را روز ۱۲ بهمن در سطح کشور اجرا کردیم. قابل توجه اینکه در حدود ۲۵۰۰ دانش‌آموز در این مسابقه مقدماتی شرکت کردند. شرایط شرکت برای دانش‌آموزان سال چهارم این بود که معدل ریاضی ۳ سال قبلی آنها نباید کمتر از ۱۷ باشد. کمیته تصویب کرد که از امسال دانش‌آموزان ریاضی سال سوم که معدل ریاضی آنها از ۱۹ کمتر نباشد می‌توانند در این مسابقات شرکت کنند و تعداد قابل توجهی از دانش‌آموزان سال سوم شرکت کرده بودند. در حوزه‌های امتحانی تهران در حدود ۱۳۰۰ یا ۱۴۰۰ نفر شرکت کرده بودند. و از بعضی از مدرسه‌ها تعداد دانش‌آموزان سال سوم بیش از تعداد دانش‌آموزان سال چهارم بود. هدف ما آن است که دانش‌آموزان زبده سال سوم را شناسایی کنیم با آنان ارتباط برقرار کنیم. مسابقات نهایی در رشت برگزار می‌شود و ما آماده‌ایم با تجربه‌ای که از سال گذشته اندوخته‌ایم انشاءالله در تابستان در بیست‌ونهمین المپیاد ریاضی در استرالیا شرکت کنیم.

این مسابقات و مجله رشد آموزش ریاضی و هشدارهای مکرر به مسئولان و اقدامات دیگری که در حد مقدور صورت گرفت سبب شد که منحنی در صد دانش‌آموزان ریاضی سیر صعودی پیدا کند. آخرین آمار این رشته را می‌خوانم. این آمار مربوط به مهرماه سال تحصیلی ۶۶–۶۷ است. در رشته ریاضی وفیزیک دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان که رشته ریاضی را انتخاب کرده‌اند ۱۳/۳۴٪ کل دانش‌آموزان را تشکیل می‌دهند و می‌توانیم بگوئیم که از نظر نسبت تقریباً دو برابر و از نظر قدرمطلق بیش از ۲ برابر شده است. در واقع رشته ریاضی به سمت تعدیل می‌رود. البته همّ ما این بوده که این رشد کمی آماس گونه و پفکی نباشد. ما امیدواریم این مشکل در آموزش و پرورش به همین ترتیب رفع شود. در پایان به بعضی از مسایل موجود که ما اکنون در دستور کار خود داریم اشاره می‌کنیم. یکی از مسایل، برنامه‌ریزی جدید برای دورهٔ متوسطه است، برای دوره متوسطه برنامه ریزی هنوز به سرانجامی

بقیه در صفحه ۵۱

رشد تفکر ریاضی

چکیده. در قسمتهای قبل مراحل تفکر ریاضی را مورد بحث وبررسی قرار دادیم. در این قسمت ابتدا اشاره‌ای مختصر به مراحل تشکیل مفهوم در ذهن خواهیم کرد. پس‌از آن با توجه به مراحل رشد تفکر بـه ذکر مثالهایی از تشکیل مفاهیم خواهیم پرداخت. از آنجا کـه ضعف دانش‌آموزان در یادگیری ریاضیات و به کارگیری آن ناشی از عدم شناخت مفاهیم ریاضی است، سعی شده است تـا مفاهیمی انتخاب شوند کـــه گرچه ظاهراً از نظر آموزشی مشکلتر هستند، از نظر بنیادی از جمله اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی به‌شمار می‌آیند. ضمناً ذکر این مثالها را باید به عنوان روشی برای تدریس این گونه مفاهیم به حساب آورد.

دکتر محمدحسن بیژن‌زاده

تشکیل مفهوم در ذهن. ریاضیات بیش‌ازهرعلمی با مفاهیم سروکار دارد: مفهوم حد، مفهوم اتصال، مفهوم عدد و علیهذا. تجربیات روانشناسی کـودکان در سنین پایین، نشان می‌دهدکـه تشکیل مفهوم‌هرشیٔ در ذهن بچه‌ها حالت تدریجی دارد. یعنی اینگونه نیست که مثلاً مفهوم صندلی حادثاً در ذهن یك بچه‌که تجربه‌ای از صندلی ندارد ایجاد شود. بلکه کثرت تجربیات بچه‌ها باانواعی‌ازصندلی‌ها است که باعث ایجاد مفهوم‌صندلی و لذا شناخت ذهنی‌آن می‌شود. وقتی مفهوم یك شئی در ذهن تشکیل می‌شود در واقع آن مفهوم خصوصیات مشترك مثالهای بسیاری‌ازآن شیٔ را در بر داردکه به‌صورت مجرد وانتزاعی درآمده وبا بیان واژه‌آن مفهوم، این خصوصیات مشترك تداعی می‌گردد. مفهوم صندلی مستقل ازجنس و یا رنگ یك صندلی خـاص است؛ صفات مشترك دسته اشیایی است‌کـه بـه عنوان صندلی (نمونه‌های مفهوم)شناخته شده‌اند. برای تشکیل مفهوم در ذهن متعلم(دانش‌آموز، دانشجو و یا یك فرد عادی) گذران دو مـرحله لازم و ضروری است‌کـه ذیلاً بـه اجمال به‌آنها می‌پردازیم:

مرحله طبقه‌بندی[1]. بچه‌هاضمن تجربه با اشیاء سعی دارند که اشیایی را کـه صفات مشترکـی دارند در یك طبقه قـرار دهند. مدادهـای مختلف را یکجا جمع می‌کنند یا آنکه همه ماشینهای اسباب‌بازی را سعی می‌کنندکنار هم قرار دهند. در واقع‌آنها سعی می‌کنند مجموعه اشیاء مورد دسترس را به‌زیر مجموعه‌هـایی افرازکنندکـه اشیاء هـر زیر مجموعه در یك خصوصیت مشترك باشند. هر یك از این زیر مجموعه‌ها را یك طبقه می‌نامیم. این عمل لازمه شناخت هر مفهوم است. ممکن است این عمل طبقه‌بندی در ذهن انجام شود.

مرحله تجرید[2]. مـرحله دوم تشکیل مفهوم تجریـد است. متعلمین ضمن این مرحله خصوصیت مشترك طبقه‌ای از اشیاء را ازآن اشیاء منتزع کـرده و باآشنایی بـا واژه قرار دادی‌آن، مفهوم مربوطه را فرا می‌گیرند. تنوع تجربیات در زندگـی روزمره و زندگی تحصیلی و گفتگو بـا بچه‌هـا جهت افزایش دامنه واژه‌هـای‌آنان نقش اساسی درگسترش شناخت اشیاء و تشکیل مفاهیم مربوطه در ذهن‌آنها دارد. ملاحظه می‌کنیم کـه تجرید، خاص ریاضیات نیست بلکه مفهوم هر شیٔ چیزی جز تشکیل مفهوم مجردآن در ذهن‌آدمی بـه روالی‌کـه گفته شد نمی‌باشد. آنچه‌که مهم است ما در علوم ریاضی بیش‌از سایر علوم با تجرید و مفاهیم مجرد سروکار داریم.

بدین‌لحاظ ملاحظه می‌کنیم‌که تشکیل مفاهیم در ذهن بچه‌ها عموماً حـالتی تدریجی و تکاملی دارد. بچه‌هـا قبل‌از دبستان یك مفهوم از عدد دارندکه با مفهوم عددکه در پایان ابتدایی فرا می‌گیرند متفاوت است‌ولی این مفهوم شکل تکامل یافته‌ای از مفهوم قبلی است و مسلماً مفهومی از عددکه یك دانشجو در ذهن دارد بـا مفهوم عددکـه بچه‌های اوایل دوران راهنمایی دارند فرق می‌کند. همچنین مفهومی از عددکـه یك منطق‌دان در ذهن دارد با تعریفی‌کـه دانشجویان از عدد دارند تفاوت دارد. ولی همهٔ اینها به هم مرتبط بوده و هریك ازشکل تکامل

یافته‌ای از مفهوم مجرد قبلی است. سایر مفاهیم ریاضی نیز وصفی مشابه دارند. حتی کسانی که اصلاً تحصیلات رسمی از ریاضیات ندارند غالباً از مفاهیم ریاضی چون عدد، فضا وحتی مفاهیم توپولوژیك مطلع هستند. وظیفه مؤسسات آموزشی ابتدایی (منزل، آمادگی و دبستان) آن است که با برنامه ریزی منظم و متناسب با مراحل رشد تفکر بچه‌ها زیربنای فراگیری مفاهیم اساسی ریاضی را در ذهن بچه‌ها به وجود آورد تا در مراحل بعدی با استفاده از این، به عنوان یك پیشنیاز، بهتر بتوانند این مفاهیم را تکمیل کرده و به مطالعات عمیقتر دست یابند، اینکه فی‌المثل ما در دبیرستان مفهوم حد را با نماد و عبارت منطقی ولی به گونه‌ای ابتدا به ساکن معرفی بکنیم کار نادرستی است و نتیجه مطلوب عایدمان نمی‌شود زیرا که حاصل چنین آموزشی این می‌شود که دانش‌آموزان ازعهدهٔ حل مسایل ماشینی برآمده ولی در درك ریاضیات وکاربردآن که مستلزم تسلط بر مفاهیم ریاضی است بسیار عاجزباشند. نتایج پروژه‌های تحقیقاتی و برنامه ریزیهایی که به عنوان دوره‌های بازآموزی معلمین انجام شده است همه نشانگر آن است که در بسیاری از موارد، حتی پیچیده‌ترین مفاهیم ریاضی‌را می‌توانیم به‌دانش‌آموزان دبستانی و یا راهنمایی معرفی بکنیم.

در قسمت‌های آتی به‌عنوان نمونه، چندین مثال از فرآیند[۳] تشکیل مفاهیم در ذهن دانش‌آموزان‌ارائه می‌کنیم. این مثالها می‌توانند به عنوان الگوهایی برای روش تدریس این مفاهیم به‌شمار آید. لذا یك‌بار دیگر برنامه ریزی آموزشی موسوم به حلزونی[۴] مورد تأکید قرار می‌گیرد. بدین گونه که پس‌ازطی هردور مجدداً مفهوم قبلی متکامل‌تر شده و رشد وکمال می‌یابد وآموزش حالتی پیوستار داشته و لذا دانش‌آموز اطمینان و اعتماد بیشتری به مفاهیم فراگرفته شده می‌نماید.

۱. مفهوم حد (روش تدریس)

پیشنیاز ۱. به عنوان پیشنیازی برای‌آموزش مفهوم حد می‌توانیم با مفهوم بینهایت شروع بکنیم. با طرح سؤالاتی نظیر سؤالات ذیل به دانش‌آموزان ابتدایی (کلاس دوم به بالا) دانش‌آموزان را با مفهوم بینهایت آشنا می‌کنیم یا حداقل زمینه‌آشنایی آنها را فراهم می‌کنیم. البته لزومی ندارد که همه بچه‌ها پاسخ درست به اینگونه سؤالات بدهند. آنچه که ممکن است این است که بعضی از پاسخها بحث انگیز بوده وکلاس را به یك بحث علمی مشغول می‌دارند و این زمینه بسیار مناسبی برای شناخت بینهایت و مفهوم حد در مراحل بعدی است.

اما سؤالاتی که مربوط به بینهایت می‌شود و مناسب کلاس دوم ابتدایی یا کمی بالاتر ازآن باشد بدینقرارند:

(آ) فکر می‌کنید چند عدد وجود دارد؟

(ب) بزرگترین عددکدام است؟

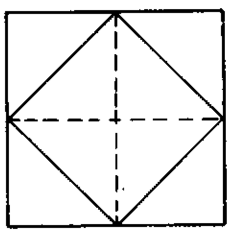
(ج) کوچکترین عددکدام است؟

(د) چه تعداد عدد بین ۰ و ۱ می‌شناسید؟

(ه) چندکسر مختلف وجود دارد؟

پیشنیاز ۲.

تجربه (دوم یا سوم راهنمایی). از دانش آموزان می‌خواهیم که مربعی به طول یك واحد (مثلاً ده سانتی‌متر یا یك دسی‌متر) رسم بکنند. سپس وسط اضلاع مجاور را به هم وصل کنید تا مربع دیگری پدیدآید. مساحت مربع به دست آمده را حساب‌کنند. (نصف مساحت مربع قبلی و با استفاده از خط‌چینها و نه محاسبه وتر مثلث قائم‌الزاویه). شکل ۱.



شکل ۱

پس مساحت مربع اول برابر ۱ واحد سطح و مساحت مربع دوم $\frac{۱}{۲}$ واحد سطح است.

عمل را با مربع جدید عیناً تکرار و مساحت مربع به‌دست آمده را حساب کنید (مساحت مربع قبلی یعنی $\frac{۱}{۴}$). عمل را هر چندبار که می‌توانید تکرار کنید و مساحت مربع‌های به دست‌آمده را حساب کنید:

۱ = مساحت مربع اول

$\frac{۱}{۲}$ = مساحت مربع دوم

$\frac{۱}{۴}$ = مساحت مربع سوم

$\frac{۱}{۸}$ = مساحت مربع چهارم

$\vdots$

$\frac{۱}{۲^۹}$ = مساحت مربع دهم

دانش‌آموزان با توجه به این الگوریتم و بدون نیاز به رسم اشکال که تدریجاً ناممکن می‌شود می‌توانند مساحت هر مربع را محاسبه کنند. از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که نتیجه تجربیات خود را بیان کنند: با تکرار این عمل مساحت مربعهای به دست آمده از هر عدد که بخواهیم کوچکتر می‌شود. ومی‌دانیم این همان مفهوم حداست که دانش‌آموزان به گونه‌ای نیمه تجربی در این مورد، با آن آشنا می‌شوند.

آموزش مفهوم حد در دوره نظری. با یادآوری مفهوم حد از کلاس سوم راهنمایی با مثالهایی شبیه آنچه که گفته شد، توجه دانش‌آموزان را به ساختار منطقی این مفهوم معطوف می‌داریم؟ در مورد مثال مربعها، اینکه مساحت مربعها از هر عدد که بخواهیم کوچکتر می‌شوند مشروط برآنکه عمل را به قدر کافی ادامه دهیم (به طور عملی یا ذهنی). با استفاده از نمادگذاری ریاضی اگر مساحت مربع nام را به S_n نشان دهیم، آنگاه چنانکه دیدیم $S_n=\frac{1}{2^{n-1}}$. حال اگر بخواهیم مثلاً $S_n<\frac{1}{100}$ بشود باید ببینیم n چقدر باشد تا:

$$(1) \quad \frac{1}{2^{n-1}}<\frac{1}{100}$$

گوییم به جای آنکه $\frac{1}{2^{n-1}}$ ها را از $\frac{1}{100}$ کوچکتر کنیم می‌توانیم آنها را از $\frac{1}{2^7}$ کوچکتر بکنیم. لذا کافی است نامساوی:

$$(2) \quad \frac{1}{2^{n-1}}<\frac{1}{2^7}$$

را حل بکنیم. یعنی $7<n-1$ و یا اگر $n>8$ باشد نامساوی (۲) و به طریق اولی (۱) برقرار است. یعنی از مرتبه هشتم به بعد مساحت همهٔ مربعها از $\frac{1}{100}$ کوچکترند.

پس از اینکه دانش‌آموزان با مثالهایی از این قبیل و با اعدادی مانند $\frac{1}{1000}$ ، $\frac{1}{10^6}$ به جای $\frac{1}{100}$ و به عنوان نمونه‌هایی از اعداد کوچك دلخواه الگوریتم فوق را تکرار کردند می‌توانیم این خصوصیت را به شکل منطقی و با استفاده از نمادهای سوری بیان کنیم: «مقادیر S_nها (مساحت مربعها در مثال فوق) را می‌توانیم از هر عدد دلخواه (کوچك) مانند ε کوچکتر بکنیم مشروط براینکه n به قدر کافی بزرگ انتخاب شود» (مربعها را به قدر کافی نصف کرده باشیم). و یا:

$$\forall\varepsilon\exists k\forall n(n>k\Rightarrow S_n<\varepsilon)$$

در این حالت اصطلاحاً گوییم که «حد S_n وقتی که n به بینهایت میل کند برابر است» و می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty}S_n=0$.
ضمناً ذکر این نکته نیز ضروری است که گو اینکه مقادیر S_n از هر عدد کوچکتر می‌شوند ولی همواره $S_n\neq 0$؛ زیرا هر S_n مساحت یك مربع است که هیچوقت صفر نمی‌شود. بعلاوه، دراین تعریف سور عمومی متناظر قید «دلخواه» و سور وجودی متناظر «به قدر کافی» در تعریف حد به زبان معمولی هستند که دانش‌آموزان به کمك پیشنیازها و کار عملی روی مثالها به درك آن پی برده و نه‌تنها تعریف سوری حد را به درستی فرا می‌گیرند بلکه قادرند مفهوم حد را به زبانی ساده و روان نیز بیان بکنند و لذا می‌توان گفت که مفهوم حد را فهمیده‌اند.

حد توابع. پس‌ازآشنایی با مفهوم حد دنباله‌ها حد توابع را شروع می‌کنیم. البته در اینجا نیز باید مفاهیم قبلی حد به عنوان پیشنیاز یادآوری گردد. می‌توانیم با توابع ساده‌ای مانند:

$$f(x)=2x+1 \quad \text{یا} \quad f(x)=\frac{1}{x}$$

شروع کنیم. در مورد مثال اول از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا مقادیر تابع را به ازاء xهای بزرگ در یك جدول بنویسند. عیناً مشابه دنباله $f_n=\frac{1}{n}$ نتیجه می‌گیرند که وقتی x به قدر کافی بزرگ اختیار شود $f(x)$ از هر عدد دلخواه کوچکتر می‌شود. در اینجا بهتر است نظیر چندین ε مقادیر k را به دست آورند $(\varepsilon>0)$:

مقادیر ε دلخواه (معلوم)	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	ε
مقادیر k به‌دست آمده (مجهول)	1	10	100	1000	$\frac{1}{\varepsilon}$

ε نمایشگر نزدیکی $f(x)$ به صفر و k به دست‌آمده مبین نزدیکی x به ∞ است.

درمورد مثال دوم نیزمشابهاً عمل می‌شود. ازدانش‌آموزان خواسته می‌شود تا نتیجه‌ها را بیان کنند:

«مقادیر $\frac{1}{x}$ به طور دلخواه (هر چقدر بخواهیم) به صفر نزدیك می‌شوند مشروط برآنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار

شود.»

«مقادیر $۲x+۱$ به طور دلخواه به عدد ۳ نزدیك می‌شوند مشروط بر آنکه x به قدر کافی به ۱ نزدیك شود.»

این ویژگی‌های مشترك‌را این طور بیان می‌کنیم که حد تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ وقتی x بـه ∞ میل‌کند برابر ۰ یا حد تابع $f(x)=۲x+۱$ وقتی x به ۱ میل‌کند برابر ۳ است. به زبان نمادی می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x}=۰$$

و:

$$\lim_{x\to۱}(۲x+۱)=۳$$

به صورت مجرد عبارت $\lim_{a\to x} f(x)=b$ معادل‌آن است‌که مقادیر $f(x)$ به طور دلخواه بـه b نزدیك می‌شوند هرگـاه xها به قدرکافی به a نزدیك شوند:

$$\forall\varepsilon\exists\delta\forall x(۰<|x-a|<\delta \Longrightarrow |f(x)-b|<\varepsilon)$$

ملاحظه می‌کنیم‌کـه ساختار تعریف حد تـوابع همان ساختار منطقی این مفهوم در مورد رشته‌ها و یا مثال مربعها است‌که به گونه‌ای کلی‌تر تکامل یافته است. این روند تکاملی مفهوم حد همچنان ادامه مـی‌یابد. حد توابع در فضاهای توپولوژی یا حد توابع چند متغیره و نظایر‌آن‌کـه در سطوح بـالاتر مورد مطالعه قرار می‌گیرد به همین منوال و به روش حلزونی انجام مـی‌گیرد. دانش‌آموزان باید به‌گـونه‌ای هماهنگ در طول تحصیلاتشان بـا مکانیزم رشد مفاهیم آشنا شوند تا بهتر بتوانند مفاهیم را درك‌کرده و خودشان صورتهای مجردتری از مفاهیم شناخته شده را تعمیم داده و بـه ارائه مفاهیم پیچیده‌تـر همت گمارند.

ذکر این نکته در اینجا لازم است‌کـه‌آشنا کردن دانش‌ـ آموزان با مفهوم حد ازطریق دنباله‌ها (توابع بر N) طبیعی‌تر و ساده‌تر از تعریف حد بـه صورت‌کلی‌تر است. درکتابهای دوره نظری‌کنونـی دانش‌آموزان از راه مفهوم حد توابع بـا مفهوم حدآشنا می‌شوند درحالی‌که حد دنباله‌کـه البته حالت خاصی از توابع هستند به دانشگاه محول می‌شود! با توجه به اینکه‌آمـوزش مفاهیم ریاضی باید حالتی تدریجی داشته باشد و از ساختارهـای ساده‌تر مفهوم شروع و به تدریج به مـوارد عالی‌تر هدایت‌گردد جا داردکه یك بازنگری اساسی در مورد آموزش مفاهیم ریاضی بخصوص مفهوم حد انجام‌گیرد.

۲ معرفی مفاهیم توپولوژی (دوم یا سوم راهنمایی)

وقتی بچه‌هـا بـا نمودارهـا و اشکال هندسی سروکار پیدا می‌کنند‌کـه درآنها اندازه اهمیت ندارد، در واقع با مفاهیم توپولوژی‌آشنا می‌شوند. این مفاهیم حتی‌بیش‌از مفاهیم هندسه مسطحه برای‌آنهـا قابل فهم بوده وازآن لذت می‌برند. این مفاهیم بـه صورت شهودی برای اینگونه دانش‌آموزان مطرح می‌شود و هدف ازآن تقویت حس شهودگـرایی‌آنان و ارائه پیشنیازی مناسب بـــرای مطـالعات بعدی در این شاخـه از ریاضیات است. در اینجا نیز همچون هندسه ابتدا از فضا که مسایل‌آن ملموس‌ترند شروع می‌کنیم.

فضا. مطالعهٔ فضا نباید برپایه استفاده از خط‌کش و پرگار برای اندازه‌گیری خطوط و زاویه‌ها شروع گـردد. بلکه باید بر مطالعه روابط اساسی‌تر فضا استوار باشد. شخصی‌که برای رفتن از یك مکان بـه مکان دیگـرآدرسی را جستجو مـی‌کند جوابی را کـه مبین متر و درجه باشد انتظار ندارد. به عوض آن، او جهت‌کلی مسیر و بخصوص نقاط تقاطعی را کـه باید در این مسیر طی‌کند می‌خواهد بداند. توپولوژی شامل این بررسیهای‌کلی و نیز بررسیهای معمولی هندسی است. در این مقطع می‌توانیم دانش‌آموزان‌را با مفاهیم ساده و شهودی این موضوع‌آشنا کنیم.

ادامه دارد

پاورقی‌ها:

(۱) Classification
(۲) Abstruction
(۳) Process
(۴) Spiral method

منابع :

۱. Primary Mathematics Today.
۲. Pchycology of Learning Mathematics, Skemp.

عدد طلایی و نسبت زیبایی

حسین غیور

عـدد طلایی در هندسه از مسئله‌ای بـه نـام (ذات وسط و طرفین) نتیجه می‌شودکه در اکثر هندسه‌های دبیرستان در فصل روابط متری در دایره، مطرح شده است.

این مسئله را ازکتاب هندسه‌ای که در ۱۲۷۵ هجری قمری در مدرسهٔ دارالفنون تدریس می‌شده است. عیناً نقل می‌کنیم. مناسبت این کار اشاره‌ای به تاریخچهٔ تدریس علوم بـه سبک جدید در ایران است و نـزدیك بودن تاریخ انتشارکتاب بـه عصرامیرکبیر و تأسیس دارالفنون می‌باشد[1] بعلاوه خط نستعلیق، انشاء و چاپ‌کتاب زیبا و محتوای‌آن پاکیزه و منقح و خالی از حشو و زوائد است.

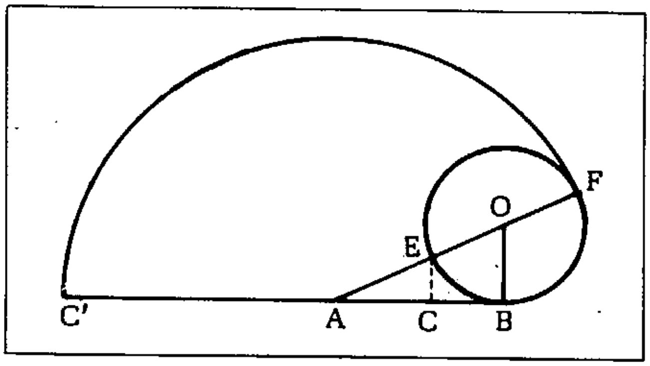
۱) مسئلهٔ ذات وسط و طرفین: «مـی‌خـواهیم تقسیم کنیم خطی را به نسبت ذات وسط و طرفین به نحوی کـه جزء اعظم او واسطه در نسبت (واسطهٔ هندسی) بـاشد میان تمام خط و جزء دیگر او» خلاصه راه حل مسئله در کتاب مذکورچنین است.

پاره خط AB مفروض است، می‌خواهیم نقطه C را روی آن، چنان تعیین‌کنیم‌که $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CB}$ بـاشد. این تناسب با ترکیب نسبت در صورت به این شکل در می‌آید:

$$\frac{AB+AC}{AB}=\frac{AB}{AC}$$

در این تناسب، AB واسطهٔ هندسی بین دو پـاره خط مجهول $(AB+AC)$ و AC و مساوی تفاصل‌آن دو پاره‌خط است. عطف بـه مسئله‌ای کـه قبل از این مسئله در روابط متری ذکر شده است. بـرای مسئله ذات وسط و طرفین راه حل زیر بـه دست می‌آید.

دایره‌ای به قطر AB رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ B بر AB مماس شود، از A و O (مرکزاین دایره) خطی عبور می‌دهیم تا دایره را در E و F قطع‌کند نقطه E را با رسم کمانی بـه مرکز A و شعاع AE به نقطه C روی AB که جواب مسئله است انتقال می‌دهیم



$$AB^{۲}=AE\cdot AF \Longrightarrow \frac{AF}{AB}=\frac{AB}{AE}$$

از این تناسب بـا تفضیل بـه نسبت، تساوی $\frac{AC}{AB}=\frac{CB}{AC}$ نتیجه می‌شود. بافرض $AB=a$ طول AC از روی a حساب می‌شود.

$$AO^{۲}=a^{۲}+\frac{a^{۲}}{۴} \Longrightarrow AO=\frac{a}{۲}\sqrt{۵}$$

پس:

$$AC=\frac{a}{۲}(\sqrt{۵}-۱)$$

تبصره. در هندسهٔ نجم‌الدوله‌که در ۱۳۱۸ هجری قمـری

یعنی ۴۸ سال بعد از این کتاب تألیف شده است، نقطه C' جواب دیگر این مسئله با رسم کمانی به مرکز A و شعاع AF (خلاف جهت کمان EC رسم شده است) به دست می‌آید

$$AC=\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$$

این مسئله را می‌توان با روش جبری روی محوری که از AB می‌گذرد و مبدأ آن A و جهت آن جهت بردار AB است حل کرد. با فرض $AC=x$ داریم:

$$AC^2=AB\cdot CB \Longrightarrow x^2=a(a-x)$$

$$x^2+ax-a^2=0$$

جواب مثبت این معادله طول نقطهٔ C و جواب منفی آن طول نقطهٔ C' است.

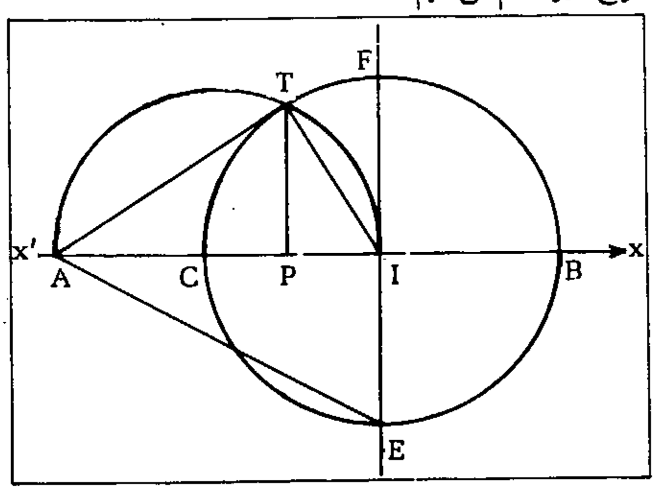
$$AC=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1) \qquad AC'=-\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$$

۲) نسبت طلایی ـ عددی مساوی نسبت $\frac{AC}{CB}$ است به شرط اینکه C بین A و B باشد.

برای تعیین عدد طلایی AC و CB را که برحسب a به دست آمده در نسبت قرار می‌دهیم:

$$(\text{عدد طلایی})=\frac{AC}{CB}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

نسبت زیبایی می‌دانیم برای دو پاره خط علاوه بر واسطهٔ هندسی، سه واسطهٔ عددی، توافقی وسطحی نیز وجود دارد که برای استفادهٔ دانش‌آموزان هرچهار واسطه را در یک شکل به شرح زیر رسم می‌کنیم:



برای تعیین واسطهٔ بین دوپاره خط AB و AC آنها را روی محور $x'x$ به بعداز A رسم می‌کنیم.

الف) تعیین واسطه عددی: عمود منصف پاره خط BC را رسم می‌کنیم تا محور را در I قطع کند:

$$AI=\frac{AB+AC}{2}$$

ب) واسطه هندسی. دایره‌ای به قطر BC رسم کرده و از A بر آن مماس AT را رسم می‌کنیم. AT واسطهٔ هندسی بین AB و AC است:

$$AT^2=AB\cdot AC \qquad \sqrt{AB\cdot AC}$$

ج) واسطه توافقی. از T عمود TP را بر محور فرود می‌آوریم AP واسطهٔ توافقی بین AB و AC است. زیرا

$$AT^2=AB\cdot AC$$

$$AT^2=AP\cdot AI=AP\cdot\left(\frac{AB+AC}{2}\right)$$

در مثلث قائم‌الزاویه ATI

$$AB\cdot AC=AP\cdot\frac{AB+AC}{2}$$

$$\frac{2}{AP}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$$

د) واسطهٔ سطحی. عمود منصف BC دایرهٔ به قطر BC را در دو نقطه E و F قطع می‌کند که AE یا AF واسطه سطحی بین AB و AC است زیرا:

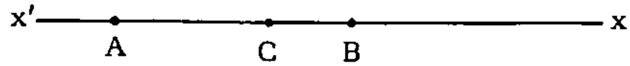
$$AE^2=AI^2+IE^2=\left(\frac{AB+AC}{2}\right)^2+\left(\frac{AB-AC}{2}\right)^2 \Longrightarrow AE^2=\frac{AB^2+AC^2}{2}$$

تبصره. بنا به شکل قبل داریم.

$$AP\leqslant AT\leqslant AI\leqslant AE$$

غرض اصلی از نگارش این مقاله این است که اگر در مسألهٔ ذات وسط و طرفین به جای واسطهٔ هندسی سه واسطهٔ دیگر را قرار دهیم نسبت حاصل (که در واسطه هندسی $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ است) چه نسبتهای جدیدی را می‌دهد.

الف) نسبت زیبایی. روی پاره خط AB نقطه C طوری اختیار شده‌که AC واسطهٔ توافقی بین AB و CB است. نسبت $\frac{AC}{CB}$ را تعیین کنید.



$AC=x$ و $AB=a$

فرض شده‌اند از فرض

$$\frac{2}{AC}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CB}$$

معادلهٔ

$$\frac{2}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a-x}$$

حاصل می‌شود

$$x^2-4ax+2a^2=0$$

از این معادله جوابی را برای x اختیار می‌کنیم که C بین A و B واقع شود:

$$x=2a-a\sqrt{2}$$

$$\frac{AC}{CB}=\frac{2a-a\sqrt{2}}{a-(2a-a\sqrt{2})} \Longrightarrow \frac{AC}{CB}=\sqrt{2}$$

C' جواب دیگر معادله چنین است:

$$\frac{AC'}{C'B}=-\sqrt{2}$$

و می‌دانیم که $\sqrt{2}$ را در هندسه نسبت زیبایی می‌نامند.

از این مطلب نتیجه می‌گیریم که عدد طلایی و نسبت زیبایی هر دو از مسألهٔ ذات وسط و طرفین نشأت می‌گیرند.

ب) اگر به همین ترتیب در مسأله ذات وسط وطرفین واسطهٔ هندسی را به‌واسطهٔ سطحی تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$AC^2=\frac{AB^2+CB^2}{2} \Longrightarrow x^2=\frac{a^2+(a-x)^2}{2}$$

$$x^2+2ax-2a^2=0$$

$$AC=-a+a\sqrt{3}$$

$$\frac{AC}{CB}=\frac{a(\sqrt{3}-1)}{a-a(\sqrt{3}-1)}=\sqrt{3}+1$$

در این صورت پاره خط AB در نقطهٔ C به نسبت $\sqrt{3}+1$ تقسیم می‌شودکه آن را نسبت سطحی می‌نامیم.

ج) اگر در مسأله ذات وسط و طرفین واسطه هندسی را به واسطه عددی تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$AC=\frac{AB+CA}{2}$$

پس

$$x=\frac{a+a-x}{4} \qquad x=\frac{2a}{3}$$

$$\frac{AC}{CB}=\frac{\frac{2a}{3}}{a-\frac{2a}{3}}=2$$

نقطه C پاره خط AB را به نسبت ۲ تقسیم می‌کند.

این چهار نسبت که از تعمیم مسألـه قدیمی ذات وسط و طرفین در بارهٔ چهار واسطهٔ بین دو پاره خط هندسی و توافقی و عددی وسطحی به‌دست‌آمده درهندسه موارد استعمال فراوان

پاورقی

۱ــ در مقدمهٔ مختصر این‌کتاب که در عهد ناصری وصدارت‌میرزا آقاخان نوری به وسیلهٔ معلمین اروپایی تدریس می‌شده است چنین نوشته شده است:

«عالیجاه مسیو بوهلر سرتیپ فرانسوی کـه سالها در ممالك [یوروپا] در تحصیل تکمیل حـاصل کـرده و اکنون در مـدرسه مذکوره معلم متعلمین این فن است به تألیف و تصنیف این رساله وکتاب مستطاب پرداخته و عالیجاه عبدالرسول‌خان مهندس مترجم این علـم شریف دقـایق و حقایق آن را کماهـو حقه مبرهن و خاطرنشان تلامذهٔ خود ساخته تا دین فیص خاص و عام گـردد و فواید آن برای **مستفیدان** کامل و تمام‌آید (این استاد فرانسوی) در آن زمان در هندسه بسیار وارد و متبحر بوده ولی ازکسانی که امیرکبیر برای تدریس در دارالفنون انتخاب کـرده نبوده است زیـرا امیر از فـرانسه و انگلیس و روسیه کـه منافع سیاسی در ایران داشتند کسی را دعوت نکرده است. (ذیلاً به یادداشت‌آقای جمالی از روزنامهٔ آن عصر توجه کنید) به اشارهٔ امضای دولت،.. این نسخهٔ شریفه مرقوم و بجهت سواد وتکثیر مواد در دارالطباعه خاصه به قالب طبع در آمد...»

دوست محترم آقـای علیرضـا جمالـی بعداز مطـالعهٔ کتاب یادداشتی از روزنامهٔ وقایع اتفاقیهٔ آن زمان نوشته‌اندکه عیناً نقل

دارد.

۱) می‌دانیم اگر شعاع دایره به نسبت عدد طلایی تقسیم شود جز اعظم مساوی ضلع ده ضلعی محاط در دایره است.

۲) قطرهای، پنج ضلعی منتظم یکدیگر را به نسبت طلایی تقسیم می‌کنند.

۳) نسبت زیبایی کاربردهای بیشتری در هندسه دارد که در اکثر مسائل هندسه که با ماگزیمم و می‌نیمم برخورد می‌کنیم نسبت زیبایی $\sqrt{۲}$ ظاهر می‌شود.

۴) ۱۲ وجهی منتظم از اجسام افلاطونی ۱۰۰ قطر دارد که ده زوج قطر آن یکدیگر را به نسبت طلایی و ده زوج دیگر به نسبت مربع عدد طلایی تقسیم می‌کنند (حسین غیور).

علاقه‌مندان می‌توانند مطالب فوق را به عنوان تمرین حل کنند.

مطالبی که ذکر شد آنچه مربوط به ارتباط نسبت زیبایی با مسأله ذات وسط و طرفین و نسبتهای سطحی و عددی است مطلقاً از ابداعات خود نگارنده است.

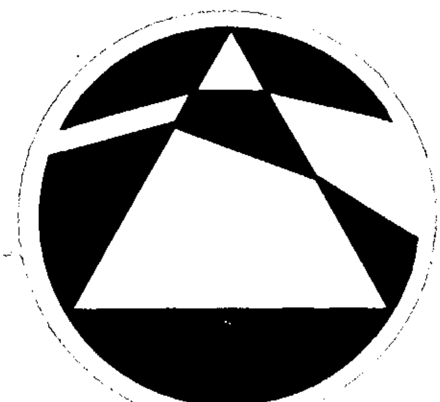
می‌کنیم. «تدریس ریاضی برمبنای اطلاعات اروپای از زمان تأسیس دارالفنون (۱۲۶۸ ه.ق) در ایران آغاز شد دو معلم اول این علم در دارالفنون کرثیش اطریشی و ملکم خان بودند». در روزنامهٔ آن زمان وقایع اتفاقیه چنین آمده است»... کرثیش علم توپخانه و علم هندسه و حساب و علم جغرافیا و مشق توپ تدریس می‌کرد و ملکم‌خان نیز به شاگردان خود دو درس می‌گفت یکی درس حساب و هندسه که جمیع شاگران می‌خواندند و یکی درس خاص که به دوازده نفر از شاگردان با استعداد مطالب عالیهٔ هندسه را از قواعد خجسته و صنعت نقاشی (ظاهراً مراد ثرسیکتو یا **علم مناظر و مرایاست**) و علم جغرافیا درس می‌گفت... در سال ۱۲۷۰ هجری قمری **مسیو بوهلر** فرانسوی به ایران آمد و تدریس ریاضی و مهندسی دارالفنون را به عهده گرفت و بعداز او **مسیو تمبرگ** فرانسوی عهده‌دار تدریس هندسهٔ مدرسه گشت.

چون محصلین اعزامی زمان ناصرالدین شاه به ایران بازگشتند چند تن از آنها مانند عبدالرسول‌خان میرزا نظام کاشانی و میرزا عباس‌خان که تحصیلات خود را در ریاضیات ادامه داده بودند چند گاهی به تدریس مأمور شدند. متداول‌ترین درس ریاضی آن زمان حساب و هندسه بود».

معرفی مجلات بین‌المللی ریاضی

MATHEMATICAL SPECTRUM

A MAGAZINE FOR STUDENTS AND TEACHERS OF MATHEMATICS AT SCHOOLS, COLLEGES AND UNIVERSITIES



دکتر حسین ذاکری

اسپکترم ریاضی مجله دانش‌آموزان، دبیران، دانشجویان، وعلاقمندان به‌ریاضی است. این مجله در سال ۱۹۶۳ به‌کمك انجمن ریاضی لندن بنیان‌گذاری شد و هدف از تأسیس آن تشویق به مطالعه و تحقیق در علوم ریاضی است. در حال حاضر سه شماره در سال منتشر می‌شود. مقالاتی برای چاپ در این مجله پذیرفته می‌شود که در زمینه‌های مختلف ریاضیات (مانند، محض، کاربردی، آمار و احتمال، تحقیق در عملیات، کامپیوتری، آنالیز عددی، و زیستی) باشد. البته از مقالات و مطالب توصیفی و تاریخی ریاضی و تحقیقات مقدماتی نیز برای درج در مجله استقبال می‌شود. قسمتی از این مجله اختصاص به درج مسائل ریاضی دارد و قسمتی نیز برای معرفی کتاب منظور شده است. آدرس سردبیر مجله چنین است:

The Editor, Mathematical Spectrum, Hicks Building, The University, Sheffield, S3 7RH, England.

ریاضیات دورهٔ اسلامی (۶)

دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل

«اینك می‌رسیم به شخصیتی فکری که از حیث مرتبه کاملاً در درجهٔ اول است، و در آثار علمی قرون وسطی مقامی خاص دارد و او بیرونی است. با اینکه ازعصر بیرونی قرنها می‌گذرد، قیافهٔ وی هنوز تازه و جوان است؛ گویی شخصیت ممتاز او از عصر وی جدا و به زمان ما نزدیك شده است. ماهیت و پختگی فکر او مانند متفکران کنونی است. بیرونی نکته‌سنج و تیزبین‌و فکرش‌موشکاف ونافذ است،و در تحصیل‌و تشریح‌مسائل‌سخت‌کنجکاومی باشد. بیرونی خاطرهٔ کسانی چون لئوناردوونسی [= داوینچی] ولایبنیتز را به ذهن می‌آورد؛ مانند متفکران بزرگ، در زمینه‌های بسیارمتنوع قدرت دارد. فیلسوف است، سیاح است، زبانشناس است، ادیب و شاعر است، ریاضیدان است، منجم است، و عالم جغرافیاست و در یکایك این امور مقامی شامخ دارد. اما چیزی که مخصوصاً آثار او را ممتاز می‌سازد، این است که مسائل را درعین‌حال هم از جنبهٔ فلسفی و هم از نظر ریاضی بررسی می‌کند.» [۱].

این سخنان را بارون کارادوو در کتاب متفکران اسلام در حق ابوریحان محمدبن‌احمد بیرونی گفته است، دانشی‌مردی ایرانی که در قرن اخیرصدها کتاب ورساله و مقاله دربارهٔ او وآثارش نوشته و هر یك به نحوی ذکاوت و دها و دانش و ... او را ستوده‌اند.

بیرونی در سال ۳۶۲ هجری قمری‌در ناحیهٔ خوارزم به دنیا آمد. زادگاهش را اینك به نام او نامگذاری‌کرده‌اند. مولد او در بیرون شهرکاث بودکه درآن هنگام یکی از دو شهر مهم ناحیهٔ خوارزم و بر ساحل شرقی رودخانهٔ آمو دریا (جیحون) و شمال شرق شهر خیوه قرار داشت. دومین مرکز مهم‌خوارزم‌جرجانیه، بر ساحل دیگر رودخانه و شمال غربی خیوه واقع بود. ابوریحان بخش زیادی از دوران جوانی را در همین شهرجرجانیه گذرانید. در بارهٔ اسلاف و دوران کودکی او چیزی دانسته نیست [۶]. در اوان‌جوانی به‌مطالعات‌علمی همت گماشت و معلم او منجم و ریاضیدان مشهور خوارزمی، ابونصر منصور عراق (در نیمهٔ دوم قرن چهارم و اوایل قرن پنجم هجری می‌زیسته) بود. در هفده سالگی با استفاده از حلقه‌ای‌که برحسب نصف درجه مدرج شده بود، ارتفاع نصف النهاری خورشید را اندازه‌گرفت. چهار سال بعد برنامه‌ای برای اجرای یك‌سری از چنین ارصادهایی را طرح و حلقه‌ای به قطر پانزده ذراع را، همراه با آلات ضمیمهٔ دیگر، آماده‌کرد. مع‌هذا تنها فرصت آن را به دست آوردکه انقلاب صیفی سال ۳۷۳ را در دهکده‌ای در جنوب شهرکاث رصد نماید. دراین زمان جنگ درگرفت و بیرونی گوشهٔ اختفاء گزید و مجبور به جلای وطن شد. وی اوضاع سیاسی و رویدادهای تاریخی دوروبر خود را درکتاب تاریخ عظیمی گردآورده‌که متأسفانه، بجز بخشهایی که

در سایر کتب تاریخ آمده، ازبین رفته است [۶]. جنگی که بیرونی را ناچار از جلای وطن کرد، منجر به انقراض خاندان آل عراق به دست مأمون بن محمد والی جرجانیه و قتل ابوعبدالله محمد بن احمد آخرین حکمران آل عراق بود.

به احتمال قوی در همین سالها بود که بیرونی به ری رفته، و چنانکه خود در مقدمهٔ کتاب مقالید علم الهیئه نوشته است درآنجا با ابومحمد خجندی (؟ ـ حدود ۳۹۰ هجری) و کوشیار گیلی (حدود ۳۳۰ ـ حدود ۴۰۰) دو تن ازریاضیدانان برجستهٔ آن دوران ملاقات کرده است. احتمالاً در زمان اقامت در ری به طبرستان، نزد ابوالعباس مرزبان بن رستم بن شروین از امیرزادگان آل باوند و صاحب کتاب مرزبان نامه رفته و کتاب مقالید علم الهیئه را که یکی ازشاهکارهای ریاضی اوست، به نام وی نوشته است. بیرونی مدتی را هم نزد منصور دوم پسر نوح سامانی (۳۸۷ـ۳۸۹) بوده، چه او را به عنوان حامی خود ستوده است.

در سال ۳۸۵، بیرونی مجدداً در خوارزم بوده؛ چه نوشته است که درآن سال در خوارزم اقامت داشته و با ابوالوفای بوزجانی (۳۲۸ هجری ـ ۳۸۷ هجری، شرح مختصری از احوال و آثار او در [۳] آمده است) که درآن هنگام در بغداد بوده، به وسیلهٔ مکاتبه قرار رصدی را گذاشته است.

بیرونی درسال ۳۸۸ به جرجان (ناحیه و ولایت قدیم ایران، درگوشهٔ شمال شرقی دریای خزر) رفت و چند سالی درآنجا در خدمت شمس المعالی قابوس وشمگیر گذرانید و کتاب آثار الباقیه را که نخستین اثر مشهور او و به زبان عربی است به نام وی تألیف کرد.

بیرونی پیش از سال ۳۹۹ به وطن بازگشت و در جرجانیه مورد احترام شاهزاده ابوالحسن علی بن مأمون قرار گرفت و مدت هفت سال نزد برادر وی یعنی خوارزمشاه ابوالعباس مأمون بن مأمون به سر برد و از متعمدان او بود.

ابوالعباس در سال ۴۰۷ به دست سپاهیان شورشی خود به قتل رسید و سلطان محمود غزنوی به بهانهٔ خونخواهی خوارزمشاه به خوارزم لشگرکشید و آنجا را فتح کرد.

سلطان محمود در مراجعت به غزنه در سجستان (افغانستان) در بهارسال ۴۰۸ هجری قمری، ابوریحان بیرونی و عده‌ای از علمایی را که در جرجانیه بودند، همراه با خود به غزنه برد. پس ازآن بیرونی در غزنه مستقر شد و در لشگر کشیهای او به هند در رکاب او بود. بیرونی ضمن آموختن علوم اسلامی و یونانی به علمای هندی، به فراگرفتن زبان سانسکریت و بعضی از لهجه‌های محلی هند و معارف هندیان و استقصا درافکار و فلسفهٔ آنان همت گماشت و گنجینه‌ای سرشار از اطلاعات گرانبها اندوخت و بدین گونه مواد اولیه اثرمشهورخود موسوم به تحقیق ماللهند را فراهم آورد.

سلطان محمود غزنوی در سال ۴۲۱ هجری درگذشت. در زمان سلطان مسعود (۴۲۱ـ۴۳۳) فرزند محمود، بیرونی سومین اثر مشهور خود، قانون مسعودی را که دایرةالمعارفی در نجوم و هیأت آن زمان است، در سال ۴۲۱ به سلطان مسعود هدیه کرد.

در زمان سلطنت مودود بن مسعود (۴۳۳ـ۴۴۰) نیز بیرونی مورد عنایت سلطان بود و کتاب الجماهر فی معرفة الجماهر ازآثار او در این عهد است.

بیرونی درآخرین اثر خود یعنی الصیدله فی الطب که در بارهٔ داروهای طبی است، اظهار داشته است که سن او در موقع نوشتن آن کتاب ازهشتاد متجاوز بوده است. بنابراین سال وفات بیرونی را که معمولاً سال ۴۴۰ ذکر می‌کنند، باید کمی بعداز سال ۴۴۲ دانست [۱].

بیرونی به علت امکانات فراوان علمی زبان عربی مدافع آن بود و ترجیح می‌داد که درآثار علمی خود از زبان عربی استفاده کند، ولی یکی ازکتابهای علمی خود به نام التفهیم لاوایل صناعةالتنجیم را به فارسی و عربی نوشته است.

بیرونی ۱۵۳ جلد کتاب و رساله و مقاله به رشتهٔ تحریر درآورده که ۱۱۵ فقرهٔ آنها در بارهٔ ریاضیات و نجوم و احکام نجوم بوده است. ازهمهٔ این ۱۵۳ جلد کتاب ورساله و مقاله فقط ۳۵ اثر باقی مانده که ۲۲ جلد ازآنها دربارهٔ ریاضیات خالص و عملی است. برخی ازآثار بیرونی درکتابهای بیرونی نامه [۱]، زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی [۲]، و فرهنگ زندگینامهٔ ـ علمی دانشوران [۶] مورد بررسی قرار گرفته است.

برخی از کارهای ریاضی بیرونی از این قرار است:

۱ـ محاسبهٔ مجموع $\sum_{0}^{63} 2^k$

بیرونی این مجموع را که تعداد دانه‌های گندمی است که به تصاعد هندسی در خانه‌های شطرنج قرار داده شود، در کتاب آثار الباقیه به کمك دو قضیه حساب کرده است.

۲ـ اثبات دستور محاسبهٔ وتر قوس $\frac{\alpha}{2^{n+1}}$

در مقالهٔ سوم کتاب قانون مسعودی، پس‌از بیان دستور محاسبهٔ وتر یك چهارم قوسی که وتر آن معلوم باشد، آن دستور را تعمیم داده و صحت دستور زیر را ثابت کرده است:

$$\frac{\alpha}{2^{n+1}}=\sqrt{r\times\frac{\left(\text{وتر}\ \frac{\alpha}{2^{n}}\right)\times\left(\text{سهم}\ \frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)}{\left(\text{وتر}\ \frac{\alpha}{2^{n}}\right)+\left(\text{نصف وتر}\ \frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)}}$$

که در آن α اندازهٔ یك قوس، n عددی طبیعی، و r شعاع دایره است. (منظور از سهم، خط واصل وسط وتر و وسط کمان مقابل به‌آن است.)

۳ـ محاط‌کردن نه ضلعی منتظم در دایره

بیرونی مسئلهٔ محاط‌کردن یك نه ضلعی منتظم محاطی در یك دایره را به مسئلهٔ‌حل معادلهٔ $x^3=1+3x$ تحویل کرد و جواب ۱۳ ,۴۷ ,۴۵ و ۵۲ ؛ ۱ را در دستگاه شصتگانی برای‌آن ارائه داده این عدد در دستگاه اعشاری ۱/۸۷۹۸۳۵۲۴۶۸ است که حداقل تا ۸ رقم اعشاری درست است [۵].

۴ـ بررسی مسئلهٔ تثلیث زاویه

بیرونی این مسئله را به‌بیش‌از دوازده مسئلهٔ هندسی دیگر معادل‌آنها تبدیل کرده است.

۵ـ محاسبهٔ تقریبی وتر یك درجه

بیرونی این مسئله را با دو روش حل کرده و اندازهٔ وتر یك‌درجه را تاخامسه، یعنی پنج رقم کسری‌در دستگاه شصتگانی، حساب‌کرده و نتیجهٔ محاسبات خود را با محاسبات بطلمیوس در این بارهٔ مقایسه کرده است.

۶ـ محاسبهٔ تقریبی $\frac{1}{\pi}$

بیرونی مقدار تقریبی نسبت قطر دایره به محیط آن را با روشی بدیع به دست آورده است.

۷ـ تشکیل جدول جیبها (سینوسها) به فرض آنکه شعاع دایره واحد باشد

بیرونی، همچنانکه امروزه معمول است، شعاع دایره را مساوی واحد گرفته و جیبها را ۱۵ دقیقه به‌۱۵ دقیقه تا چهار رقم کسری شصتگانی حساب‌کرده است.

۸ـ تدوین علم مثلثات کروی به صورت مستقل

علم مثلثات کروی نخستین بار توسط بیرونی در کتاب مقالید علم الهئیه به صورت مستقل تدوین و تنظیم شده است. بیرونی قضایای معروف به شکل مغنی و شکل ظلی [۳] را که معاصران ایرانی او اختراع کرده بودند، با شرح تاریخچهٔ آنها و مورد استعمال آنها در علم هیأت جمع‌آورده و به کار بردن‌آن دو قضیه را به جای شکل قطاع [۳] به ریاضیدانان توصیه‌کرده است و درآن‌کتاب استدلال ساده و زیبایی برای قضیهٔ زیر در مثلثات مسطحه از خودآورده است

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\cdot$$

مراجع

[۱] قربانی، ابوالقاسم، بیرونی نامه، نشریهٔ شمارهٔ ۱۰۷ سلسله انتشارات انجمن آثار ملی، تهران، ۱۳۶۳.
این کتاب درهشت بخش‌است: زندگینامهٔ بیرونی و شخصیت علمی او، فهرست آثار ریاضی ونجومی بیرونی، فرهنگ مشروح اصطلاحات ریاضی کتاب التفهیم،خلاصهٔ کتاب را شیکات‌الهند، منتخباتی ازکتاب آثار الباقیه، تحقیق درباره مقالهٔ سوم‌کتاب قانون مسعودی، تحقیق دربارهٔ کتاب مقالید علم الهئیه و شخصیت ریاضی بیرونی.

[۲] ـــ ، ـــ ، زندگینامهٔ‌ریاضیدانان دورهٔ اسلامی، انتشارات‌مرکز نشردانشگاهی، تهران، ۱۳۶۵.

[۳] وحیدی‌اصل، محمدقاسم، ریاضیات دورهٔ اسلامی (۳). مجلهٔ رشد آموزش ریاضی شمارهٔ ۹، ۱۳۶۵.

[4] Boyer , Carl *B.*, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons Inc. New York 1968.

[5] Itard J. & Dedron, P. *Mathematics & Mathematicians*, Open University Set Book, the Open University Press, Millon Keynes, 1973.

[6] Dictionary of Scientific Biography, Volume I, New - York, Charles Scribnis Sons, 1970–1978.

درسهایی از احتمالات و آنالیز ترکیبی (۱)

این سلسله مقاله‌ها در ارتباط با کتاب ریاضیات جدید سال سوم رشتهٔ ریاضی و فیزیك تهیه شده است.

دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل

۱ـ احتمالات

۱-۱- مقدمه. پیرسیمون مارکی دولاپلاس (۱۷۴۹ ـ ۱۸۲۷)، ریاضیدان و منجم مشهور فرانسوی، ملقب به نیوتن فرانسه در بارهٔ نظریهٔ احتمال چنین نظر داده است:

«می‌بینیم که نظریهٔ احتمال، در ژرفای خود، تنها عقل سلیم است که در قالب محاسبات درآمده است؛ این نظریه به ما امکان می‌دهد که به‌درك صحیحی‌از آنچه ذهنهای معقول با نوعی غریزه حس می‌کنند ـ اغلب بی‌آنکه قادر به ارائه توضیحی برای‌آن باشند ـ برسیم. ... قابل توجه است که این علم، که‌از تأمل در بازیهای شانسی به‌وجودآمد، به‌مهمترین موضوع دانش انسانی بدل شده است. ... مهمترین پرسشهای زندگی، عمدتاً، مسائلی در احتمالات‌اند.»

این گفته‌های لاپلاس، که خود سهم بزرگی در بسط نظریهٔ احتمال دارد، در مورد احتمالات، آن هم برای احتمالات عصر لاپلاس، گزافه به نظر می‌آید، اما واقعیت این است که نظریهٔ احتمال امروزه درکلیهٔ شاخه‌های علم نظیر فیزیك، مهندسی، اقتصاد، روانشناسی، وکشاورزی، ... رسوخ یافته است.

سؤال این است که چه عاملی سبب این کاربرد وسیع احتمال شده است. به‌عبارت دیگر شاخه‌های علمی فیزیك، مهندسی، ... چه وجه مشترکی دارند که موضوع علم احتمال قابل اعمال در همهٔ آنها باشد؟ پاسخ این است: پدیده‌ها یا آزمایشهای تصادفی. یعنی اینکه احتمالات که پدیده‌های تصادفی را مورد مطالعه قرار می‌دهد، به دلیل وجود عنصر تصادف در پدیده‌های فیزیکی، مهندسی و ... در این موضوعات کاربرد می‌یابد.

پدیده‌ای را تصادفی می‌نامیم که اگر آن‌را تحت مجموعه‌ای از شرایط مفروض مورد مشاهده قرار دهیم، نتیجهٔ مشاهده همواره برآمد (نتیجهٔ) واحدی نباشد. مثلاً اگر سکه‌ای را به هوا پرتاب کنیم و از عده‌ای که شاهد این آزمایش هستند سؤال کنیم که آیا سکه به طرف زمین برخواهد گشت یا خیر، همه جواب مثبت خواهند داد. اما اگر از آنها سؤال کنیم که سکه «شیر» خواهدآمد یا «خط» عده‌ای خواهند گفت که سکه «شیر» خواهدآمد و عده‌ای خواهند گفت «خط». پدیدهٔ اول یعنی سقوط سکه به زمین، یك پدیدهٔ تعیینی یا قطعی و پدیدهٔ دوم یعنی ظاهر شدن وجه معینی از سکه، یك پدیدهٔ تصادفی (غیر قطعی) است. جالب اینکه هرچه تعداد افرادی که نظر آنها در موردآمدن «شیر» یا «خط» با یك سکهٔ معمولی خواسته شده،زیاد باشد نسبت تعداد کسانی که به‌آمدن «شیر» (یا«خط»)

حکم خواهندکرد به $\frac{1}{2}$ نزدیکتر خواهد بود (برای توضیح بیشتر مثال ۱-۳-۱ در زیر را ببینید). به عبارت دیگر گرچه پدیده‌های تصادفی نظم قطعی یا تعیینی ندارند، ولی دارای نظم‌آماری‌اند. به زبان ساده می‌توان گفت که موضوع علم احتمال، کشف و مطالعهٔ این نظم‌آماری است.

نظریهٔ احتمال شاخه‌ای از ریاضیات است و لذا مانند تمام شاخه‌های ریاضیات برروش اصل موضوعی استوار است. در این بحث، مقدمات احتمالات را به روش اصل موضوعی، در سطح دبیرستان، مطالعه می‌کنیم و از آنجا که آنالیز ترکیبی، که شاخه‌ای دیگر از ریاضیات است، از احتمالات (و بخصوص احتمال مقدماتی) تفکیك ناپذیر است، به مقدمات این موضوع نیز خواهیم پرداخت و برای روشنتر شدن مفاهیم، مثالهای متنوعی خواهیم آورد.

۱-۲- فضای نمونه‌ای. گرچه پدیده‌ها یا آزمایشهای تصادفی برآمد واحدی ندارند، ولی می‌توان مجموعه‌ای را معین کرد که برآمد آزمایش تصادفی، عضوی از آن باشد. چنین مجموعه‌ای را فضای نمونه‌ای می‌نامیم و با Ω نشان می‌دهیم. برآمد آزمایش تصادفی، یعنی هر عضو فضای نمونه‌ای را یك نقطهٔ نمونه‌ای می‌نامیم. از این به بعد فرض می‌کنیم که آزمایشهای تصادفی مورد نظر ما دارای یك فضای نمونه‌ای متناهی باشند و

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}.$$

۱-۲-۱- مثال. اگر سکه‌ای را سه‌بار پرتاب کنیم (یا سه سکه را یك بار پرتاب کنیم)، فضای نمونه‌ای آزمایش عبارت است از:

$\Omega=\{$ششش، خشش، شخش، ششخ، خخش، شخخ، خشخ، خخخ$\}$

که در آن «ش» به نشانه شیر و «خ» به نشانه خط است.

کار بعدی ما در ساختن یك مدل ریاضی برای آزمایشهای تصادفی، اختصاص دادن عددی به هر برآمد آزمایش به عنوان احتمال آن برآمد است. به عبارت دیگر باید تابعی تعریف کنیم که قلمروی آن Ω و برد آن مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد. هر چنین تابعی مانند P را که ضمناً در دو شرط

$$P(\{\omega_i\}) \geqslant 0 \; ; \; i=1, 2, \dots, N \qquad (1\text{-}2\text{-}1)$$

و

$$P(\{\omega_1\})+P(\{\omega_2\})+\dots+P(\{\omega_N\})=1 \qquad (2\text{-}2\text{-}1)$$

نیز صدق کند، یك تابع احتمال می‌نامیم.

۱-۳- تعبیر فراوانی نسبی احتمال. اگر قرار دهیم $P(\{\omega_i\})=p_i$ ($i=1, 2, \dots, N$)، از لحاظ ریاضی فرقی نمی‌کند که p_i چه عددی باشد، همین قدر که p_i باید به ازاء هر i نا منفی باشد و مجموع p_iها (به ازاء کلیهٔ نقاط نمونه‌ای) برابر ۱ باشد. اما از لحاظ شهودی و از جهت اینکه p_i را احتمال وقوع برآمد iام آزمایش می‌دانیم، باید اختصاص p_i به نقطه نمونه‌ای ω_i به طرزی سنجیده انجام شود. برای روشن شدن مطلب مثالی می‌آوریم:

۱-۳-۱- مثال. در مثال ۱-۲-۱ دیدیم که اگر سه سکه را یك‌بار پرتاب کنیم، فضای نمونه‌ای آزمایش به صورت

$\Omega=\{$ششش، خشش، شخش، ششخ، خخش، شخخ، خشخ، خخخ$\}$

است. بدیهی است که اگر به هر طریق، اعداد نامنفی با مجموع ۱ را به این نقاط اختصاص دهیم، این اعداد در تعریف تابع احتمال صدق می‌کنند، اما اگر فرض کنیم که سکهٔ مورد استفادهٔ ما «سالم»، یعنی مواد سازندهٔ آن همگن باشد، انتظار ما این است که در دراز مدت هر یك از این نقاط به نسبت $\frac{1}{8}$ ظاهر شوند. جدول ۱-۳-۲ که از طریق شبیه سازی کامپیوتری به دست آمده است، این نکته را تأیید می‌کند:

جدول ۱-۳-۲

تعداد آزمایشها	تعداد دفعات آمدن ششش	فراوانی نسبی آمدن ششش
۱۰،۰۰۰	۱۲۰۹	۰/۱۲۱
۲۰،۰۰۰	۲۴۱۹	۰/۱۲۱
۳۰،۰۰۰	۳۶۷۰	۰/۱۲۲
۴۰،۰۰۰	۴۹۲۵	۰/۱۲۳
۵۰،۰۰۰	۶۲۴۳	۰/۱۲۵
۶۰،۰۰۰	۷۴۳۲	۰/۱۲۴
۷۰،۰۰۰	۸۶۴۱	۰/۱۲۳
۸۰،۰۰۰	۹۸۹۰	۰/۱۲۴

۹۰،۰۰۰	۱۱۱۱۹	۰/۱۲۴
۱۰۰،۰۰۰	۱۲۳۹۶	۰/۱۲۴
۱۱۰،۰۰۰	۱۳۶۸۳	۰/۱۲۴
۱۲۰،۰۰۰	۱۴۸۸۰	۰/۱۲۴
۱۳۰،۰۰۰	۱۶۱۶۰	۰/۱۲۴
۱۴۰،۰۰۰	۱۷۴۲۵	۰/۱۲۴
۱۵۰،۰۰۰	۱۸۶۹۵	۰/۱۲۵
۱۶۰،۰۰۰	۱۹۹۸۹	۰/۱۲۵
۱۷۰،۰۰۰	۲۱۲۶۶	۰/۱۲۵
۱۸۰،۰۰۰	۲۲۵۶۵	۰/۱۲۵
۱۹۰،۰۰۰	۲۳۷۷۸	۰/۱۲۵
۲۰۰،۰۰۰	۲۵۰۶۴	۰/۱۲۵
۲۱۰،۰۰۰	۲۶۲۵۵	۰/۱۲۵
۲۲۰،۰۰۰	۲۷۴۹۱	۰/۱۲۵
۲۳۰،۰۰۰	۲۸۷۹۹	۰/۱۲۵
۲۴۰،۰۰۰	۳۰۰۰۹	۰/۱۲۵
۲۵۰،۰۰۰	۳۱۲۷۱	۰/۱۲۵
۲۶۰،۰۰۰	۳۲۵۳۱	۰/۱۲۵
۲۷۰،۰۰۰	۳۳۷۳۴	۰/۱۲۵
۲۸۰،۰۰۰	۳۴۹۹۹	۰/۱۲۵
۲۹۰،۰۰۰	۳۶۳۰۸	۰/۱۲۵
۳۰۰،۰۰۰	۳۷۵۹۴	۰/۱۲۵

به طوری که مشاهده می‌کنیم هرچه تعداد آزمایشها بیشتر می‌شود، احتمال آمدن شش‌ش به $\frac{۱}{۸}$ نزدیکتر می‌شود. باید توجه شود که نسبت تعداد دفعات آمدن شش‌ش به کل آزمایشها $۰/۱۲۵ = \frac{۱}{۸}$ نبوده و این نسبت فقط تا سه رقم اعشار با $\frac{۱}{۸}$ تطبیق می‌کند. مع‌هذا اگر تعداد آزمایشها به بی‌نهایت میل کند (تعداد آزمایشها نامحدود شود)، این نسبت هم به $\frac{۱}{۸}$ میل می‌کند (اختلاف آن با $\frac{۱}{۸}$ از هر عدد مثبت دلخواهی کوچکتر می‌شود.)

در حالت کلی اگر Ω یك فضای نمونه‌ای و ω عضوی از آن باشد، و آزمایشی را که مجموعهٔ برآمدهای آن Ω است، n بار تکرار و دفعاتی را که برآمد ω در آن ظاهر شده با n_ω نشان دهیم، نسبت $\frac{n_\omega}{n}$ را فراوانی نسبی ω می‌نامیم. طبق آنچه در مثال بالا دیدیم، نسبت $\frac{n_\omega}{n}$، با افزایش n، به عددی نزدیك می‌شود که باید احتمال $\{\omega\}$ را، برای آنکه واقعیتهای ناشی از آزمایشها را هم درنظر داشته باشیم، برابر با این عدد بگیریم و بالعکس احتمال نقطهٔ نمونه‌ای ω را براین اساس تعبیر کنیم. مثال دیگری می‌آوریم.

۱-۳-۲- مثال. مدیر یك کارخانه سازنده لامپ روشنایی مدعی است که احتمال خراب بودن هر لامپ تولید شده توسط کارخانهٔ ش ۰/۰۱ است. منظور او از این گفته چیست؟

تعبیر طبیعی این گفته این است که «به طور متوسط» حدود یك لامپ از هر ۱۰۰ لامپی که به وسیلهٔ این کارخانه تولید می‌شود، خراب است. به عبارت دیگر یك درصد از محصولات این کارخانه خراب از آب درمی‌آیند.

در این مثال، آزمایش ما عبارت است از بررسی هر لامپ تولید شده به وسیلهٔ این کارخانه از لحاظ خراب بودن یا سالم بودن آن، و لذا فضای نمونه‌ای ما

$$\Omega = \{\text{سالم و خراب}\}$$

است. در نتیجه

$$\frac{n(\text{خراب})}{n}$$

یعنی نسبت لامپهای خراب به کل لامپها برای n بزرگ تقریباً ۰/۰۱ است.

۱-۳-۳- تبصره. در نظریهٔ اصل موضوعی احتمالات، به عنوان حالت خاصی از قضیه‌ای به نام قانون اعداد بزرگ ثابت می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_\omega}{n} = P(\{\omega\}) \qquad (۳.۳.۱)$$

یعنی فراوانی نسبی هر نقطهٔ نمونه‌ای به احتمال اختصاص داده شده به این نقطه میل می‌کند. بعکس عده‌ای فرمول (۳.۳.۱) را تعریف احتمال وقوع $\{\omega\}$ می‌گیرند و نظریه‌ای براین پایه بنا می‌نهند. این نظریه با موفقیتهای محدودی توأم بوده ولی نظریهٔ اصل موضوعی احتمالات عمومیت بیشتری

دارد.

۱-۴- پیشامدها و احتمالهای آنها. اینک مفهوم پیشامد را معرفی می‌کنیم. به طور شهودی، یك پیشامد با درنظر گرفتن محدودیتهای معینی در آزمایش تصادفی به دست می‌آید. ابتدا مفهوم یك پیشامد را دقیقتر تعریف می‌کنیم و سپس نحوهٔ اختصاص احتمال به پیشامدها را معین می‌کنیم. مثال زیر به روشن شدن مطلب کمك می‌کند.

۱-۴-۱- مثال. بازهم آزمایش پرتاب یك سکه را سه‌بار درنظر می‌گیریم. احتمال این «پیشامد» که «دقیقاً در دو پرتاب از سه پرتاب شیر بیاوریم»، چیست؟ برای آنکه احتمال این «پیشامد» را معین کنیم، ابتدا لازم است که راههای رخ دادن آن را پیدا کنیم. این راهها عبارت‌اند از:

ش‌ش‌خ , ش‌خ‌ش , خ‌ش‌ش

بنابراین اگر E معرف این پیشامد باشد که دقیقاً در دو پرتاب از سه پرتاب شیر می‌آید، E فقط و فقط در صورتی رخ می‌دهد که آزمایش منجر به ش‌ش‌خ، ش‌خ‌ش، خ‌ش‌ش شود. در این صورت به طور نمادی

$E=\{$ش‌ش‌خ , ش‌خ‌ش و خ‌ش‌ش$\}$.

می‌بینیم که E زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است. احتمال وقوع E را با P(E) نشان می‌دهیم. چون E فقط و فقط در صورتی رخ می‌دهد که برآمد آزمایش ش‌ش‌خ، ش‌خ‌ش، یا خ‌ش‌ش باشد، طبیعی است که P(E) را برابر با مجموع احتمالهای سه نقطهٔ نمونه‌ای ش‌ش‌خ، ش‌خ‌ش، و خ‌ش‌ش بگیریم. لذا قرار می‌دهیم،

$$P(E)=P(\{\text{خ‌ش‌ش}\})+P(\{\text{ش‌خ‌ش}\})+P(\{\text{ش‌ش‌خ}\})=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}=\frac{۳}{۸}.$$

با درنظر داشتن این مثال به تعریفهای زیر می‌رسیم.

۱-۴-۲- تعریف. فرض کنید Ω فضای نمونه‌ای یك آزمایش تصادفی باشد. پیشامدی مانند E صرفاً زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای Ω یا مجموعه‌ای از نقاط نمونه‌ای است. به زبان نمادی E یك پیشامد است هر گاه $E\subset\Omega$.

۱-۴-۳- تبصره. در چارچوب بحث ما که Ω را متناهی گرفته‌ایم، هر زیر مجموعه‌ای هم یك پیشامد است، ولی در حالت کلی که Ω نامتناهی باشد، چنین چیزی درست نیست؛ یعنی هر پیشامدی یك زیر مجموعه است ولی هر زیر مجموعه‌ای لزوماً یك پیشامد نیست.

گوییم پیشامد E رخ می‌دهد هر گاه بعداز انجام آزمایش، برآمد آن عضوی از E باشد.

توجه کنید که نقطهٔ نمونه‌ای ω را می‌توان پیشامدی مانند {ω} دانست. پیشامد {ω} فقط و فقط وقتی رخ می‌دهد که برآمد آزمایش ω باشد. هر پیشامدی که فقط شامل یك نقطهٔ نمونه‌ای باشد، یك پیشامد ساده نامیده می‌شود.

همان طور که در مثال ۱-۴-۳ گفتیم، می‌توان احتمال پیشامد E را، به طور طبیعی، به گونه زیر تعریف کرد:

۱-۴-۴- تعریف. فرض کنید که Ω فضای نمونه‌ای یك آزمایش تصادفی و E یك پیشامد باشد؛ یعنی $E\subset\Omega$. اگر

$$E=\{\omega_۱ , \omega_۲ , \dots , \omega_k\}$$

تعریف می‌کنیم،

$$P(E)=P(\{\omega_۱\})+P(\{\omega_۲\})+\dots+P(\{\omega_k\}).$$

بنابراین احتمال E، به صورت مجموع احتمالهای نقطه‌های نمونه‌ای که E را تشکیل می‌دهند، تعریف می‌شود.

۱-۴-۵- مثال. فرض کنید که یك تاس را یك بار پرتاب می‌کنیم. احتمال این پیشامد را حساب کنید که شماره ظاهر شده از ۳ کمتر نباشد.

ابتدا توضیح می‌دهیم که منظور از یك تاس، مکعبی است که اعداد از ۱ تا ۶، به ترتیبی، در روی شش وجه آن نوشته شده باشد.

روشن است که فضای نمونه‌ای ما مجموعهٔ

$$\Omega=\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

و پیشامد مورد نظر عبارت است از

$$E=\{۳, ۴, ۵, ۶\}.$$

برای محاسبهٔ احتمال E، ابتدا باید تابع احتمالی بر Ω تعریف کنیم. اگر تاس همگن باشد، یعنی به هیچ وجه گرایش یا کجی نداشته باشد، دلیلی ندارد که احتمال آمدن هر یك از وجوه آن بیشتر یا کمتر از احتمال سایر وجه‌ها باشد. پس می‌توان فرض کرد که

$$P(\{i\})=\frac{۱}{۶} \quad \text{و} \quad i=۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶$$

و طبق تعریف ۱-۴-۴ داریم،

$$P(E)=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}=\frac{۴}{۶}\cdot$$

۱-۵- فضاهای نمونه‌ای همشانس (متساوی‌الاحتمال)
به طوری که در مثال بالا دیدیم، به علت همگن بودن تاس، می‌توانیم احتمال پیشامدهای ساده را برابر بگیریم. در واقع اگر تاس همگن باشد، تعریف احتمال به صورتی غیراز این، با منطق و شهود جور در نمی‌آید. در رابطه با آزمایشهای دیگر هم، مواردی پیش می‌آید که می‌توان به علت وجود تقارن، یا شواهد دیگر، یا براثرانجام آزمایش به دفعات زیاد، می‌توانیم فضای نمونه‌ای آزمایش را همشانس یا متساوی‌الاحتمال بگیریم، یعنی احتمالهای نقطه‌های نمونه‌ای را برابر قرار دهیم.

فرض کنید

$$\Omega=\{\omega_۱\ ,\ \omega_۲\ ,\ \cdots\ ,\ \omega_N\}$$

قرار می‌دهیم

$$P(\{\omega_۱\})=P(\{\omega_۲\})=\cdots=P(\{\omega_N\})$$

در این صورت بنابر اصل ۱.۲.۲،

$$P(\{\omega_۱\})=P(\{\omega_۲\})=\cdots=P(\{\omega_N\})=\frac{۱}{N}$$

و اگر

$$E=\{\omega_۱\ ,\ \omega_۲\ ,\ \cdots\ ,\ \omega_N\}$$

در این صورت

$$P(E)=P(\{\omega_۱\})+P(\{\omega_۲\})+\cdots+P(\{\omega_N\})$$

$$=\underbrace{\frac{۱}{N}+\frac{۱}{N}+\cdots+\frac{۱}{N}}_{n\ \text{جمله}}$$

$$=\frac{n}{N}$$

$$=\frac{|E|}{|\Omega|}$$

(منظور از $|E|$ تعداد اعضای E است). در نتیجه،

۱-۵-۱- تعریف کلاسیك احتمال. اگر Ω یك فضای نمونه‌ای همشانس باشد و $E\subset\Omega$، در این صورت

$$P(E)=\frac{|E|}{|\Omega|}$$

$$=\frac{\text{صور مساعد (برای وقوع } E)}{\text{صور ممکن (آزمایش)}}$$

۱-۵-۲- تبصره. توجه کنید که نمی‌توان ۱-۵-۱ را در آغاز، به‌عنوان تعریف احتمال گرفت، زیرا این تعریف دوری است (در اینجا برای تعریف احتمال از واژه شانس که مترادف آن است، استفاده شده است و چنین کاری از لحاظ منطق باطل است).

۱-۵-۳- مثال. فرض کنید که در کیسه‌ای سه مهرهٔ سفید و یك مهرهٔ سیاه موجود باشد. اگر مهره‌ای بتصادف از این کیسه خارج کنیم. احتمال سفید بودن آن چقدر است؟

اگر توجه ما فقط به سیاه یا سفید بودن مهره معطوف باشد، واضح است که فضای نمونه‌ای آزمایش عبارت از

$$\Omega_۱=\{\text{سیاه و سفید}\}.$$

است. اما این فضای نمونه‌ای همشانس نیست. به عبارت دیگر شانس آمدن مهره سفید از شانس آمدن مهرهٔ سیاه بیشتر است. این مطلب از لحاظ شهودی روشن است و اگر به شهود اعتماد نکنیم، کافی است که آزمایش استخراج مهره را چندین بار تکرار کنیم. در نتیجه اگر

$$E=\text{آمدن مهرهٔ سفید}$$

نمی‌توانیم بنابر تعریف کلاسیك احتمال نتیجه بگیریم که $P(E)=\frac{۱}{۲}$. برای حل مسئله و برای اینکه هنوز هم بتوانیم از تعریف کلاسیك احتمال استفاده کنیم باید فضای نمونه‌ای همشانسی برای این آزمایش درنظر گیریم. درکیسهٔ ما ۳ مهرهٔ سفید موجود است و وقتی می‌گوییم مهره سفید نمی‌گوییم کدام مهره سفید. اما اگر هرکدام از این مهره‌ها در موقع استخراج یك مهره ازکیسه، خارج شوند، منظور ما برآورده می‌شود. به عبارت دیگر برآمدهای آزمایش فقط سیاه و سفید نبوده بلکه عبارت‌اند از

سیاه، سفید یك، سفید دو، سفید سه

پس فضای نمونه‌ای همشانس آزمایش عبارت است از

$$\Omega_۲=\{\text{سیاه، سفید یك، سفید دو، سفید سه}\}$$

و

$$E=\text{آمدن مهرهٔ سفید}=\{\text{سفید یك، سفید دو، سفید سه}\}$$

بنابراین طبق تعریف ۱-۵-۱،

$$P(E)=\frac{۳}{۴}$$

این بحث را در شمارهٔ آینده پی می‌گیریم. فهرست مراجع‌را در آخر بحث ذکر خواهیم کرد.

قاعده تعیین باقیمانده تقسیم یك عدد صحیح بر اعداد ۷، ۱۳، ۲۷، ۳۷

علی‌احمد معظمی‌گودرزی، دبیر دبیرستانهای بروجرد

آقای علی‌احمد معظمی‌گودرزی، از دبیرستان بحرالعلوم بروجرد، مطلبی در باب بخشپذیری اعداد صحیح ارسال داشته‌اند که دارای نکات جالبی است و می‌تواند روشی برای بخشپذیری اعداد باشد. ایشان غیر مستقیم از قضیه‌ای استفاده کرده‌اند که ما صورت قضیه را بیان می‌کنیم و تغییرات جزئی در نوشته ایشان داده شده است.

سردبیر

در ریاضیات جدید سال چهارم، قواعد بخشپذیری بر اعداد ۳، ۹، ۱۱، ... ارائه گردیده است با دقت در روش آن، در می‌یابیم که قضیه ذیل اساس برهان آن است.

قضیه. فرض می‌کنیم:

$$f(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x+a_0$$

یك چند جمله‌ای با ضرایب صحیح باشد و $a\equiv b(\mathrm{mod}\,n)$. در این صورت،

$$f(a)\equiv f(b)\ (\mathrm{mod}\,n)$$

برهان این قضیه، با توجه به اعمال جبری درهمنهشتیها، چندان مشکل نیست. بنابراین، از اثبات آن در اینجا صرفنظر می‌کنیم.

مثال ۱) فرض کنیم:

$$f(x)=x^5-3x^3+2x-1$$

در این صورت، باقیمانده $f(17)$ بر ۸ چیست؟

حل. چون $17\equiv 1(\mathrm{mod}\,8)$، پس:

$$f(17)\equiv f(1)=-1\equiv 7(\mathrm{mod}\,8)$$

یعنی باقیمانده $f(17)$ بر ۸ برابر ۷ است.

اینك، قاعده تعیین باقیمانده تقسیم یك عدد صحیح بر اعداد ۷، ۱۳، ۲۷ و ۳۷ را بیان می‌کنیم. فرض کنید:

$$N=a_n a_{n-1}\cdots a_3 a_2 a_1$$

یك عدد طبیعی دلخواهی باشد. عدد N را در مبنای 10^3 می‌نویسیم. بنابراین،

$$N=(a_3a_2a_1)+10^3(a_6a_5a_4)$$

با انتخاب:

$$A_1=(a_6a_5a_4)\quad \text{و}\quad A_0=(a_3a_2a_1)$$

و ... خواهیم داشت:

$$f(x)=A_0+A_1x+\cdots$$

که در آن، $f(10^3)=N$. عدد ۱۰۰۱ را به‌عوامل اول تجزیه می‌کنیم؛ یعنی،

$$1001 = 7 \times 11 \times 13$$

فرض کنید که m یکی از اعداد ۷، ۱۱، یا ۱۳ باشد. دراین صورت،

$$10^3 \equiv -1 \pmod{m}$$

بنابر قضیه قبل:

$$f(10^3) \equiv f(-1) \pmod{m}$$

یعنی:

$$N \equiv A_0 - A_1 + \cdots \equiv (a_3a_2a_1) - (a_6a_5a_4) + \cdots$$

فرض کنید که $m = 7$. بنابراین:

$$a_3a_2a_1 = a_1 + 10a_2 + 100a_3 \equiv a_1 + 3a_2 + 2a_3 \pmod{7}$$

$$a_6a_5a_4 \equiv a_4 + 3a_5 + 2a_6$$

$$\vdots$$

از اینجا نتیجه می‌شود که قاعدهٔ تعیین باقیمانده عدد صحیح N بر ۷ چنین است:

$$(1) \quad N \equiv (a_1 + 3a_2 + 2a_3) - (a_4 + 3a_5 + 2a_6) + \cdots \pmod{7}$$

به روش مشابه می‌توان قاعدهٔ تعیین باقیمانده تقسیم N بر اعداد ۱۳، ۲۷ و ۳۷ را مطابق ذیل ارائه داد.

$$(2) \quad N \equiv (a_1 - 3a_2 - 4a_3) - (a_4 - 3a_5 - 4a_6) + \cdots \pmod{13}$$

$$(3) \quad N \equiv (a_1 + 10a_2 - 8a_3) + (a_4 + 10a_5 - 8a_6) + \cdots \pmod{27}$$
$$\equiv (a_2a_1 - 8a_3) + (a_5a_4 - 8a_6) + \cdots \pmod{27}$$

$$(4) \quad N \equiv (a_1 + 10a_2 - 11a_3) + (a_4 + 10a_5 - 11a_6) + \cdots \pmod{37}$$
$$\equiv (a_2a_1 - 11a_3) + (a_5a_4 - 11a_6) + \cdots \pmod{37}$$

در مورد دستورهای (۳) و (۴)، باید توجه داشت که:

$$999 = 27 \times 37$$

بنابراین اگر m یکی از اعداد ۲۷ یا ۳۷ باشدآنگاه:

$$1000 \equiv 1 \pmod{m}$$

بالنتیجه:

$$N \equiv (a_3a_2a_1) + (a_6a_5a_4) + \cdots \pmod{m}$$

مثال ۲) باقیمانده $N = 12043214$ را براعداد ۷، ۱۳، ۲۷ و ۳۷ به دست آورید.

حل. بنابر دستورهای (۱)، (۲)، (۳) و (۴)،

$$N \equiv (4 + 3 \times 1 + 2 \times 2) - (3 + 3 \times 4) + (2 + 3 \times 1) \equiv 1 \pmod{7}$$

$$N \equiv (4 - 3 \times 1 - 4 \times 2) - (3 - 3 \times 4) + (2 - 3 \times 1) \equiv 1 \pmod{13}$$

$$N \equiv (14 - 8 \times 2) + (43) + 12 \equiv 53 \equiv 26 \pmod{27}$$

$$N \equiv (14 - 11 \times 2) + (43) + 12 \equiv 47 \equiv 10 \pmod{37}$$

بنابراین باقیمانده N براعداد ۷، ۱۳، ۲۷ و ۳۷، به ترتیب، ۱، ۱، ۲۶، ۱۰ می‌باشد.

مثال ۳) فرض کنید که $N = 9xy2xy$. x و y را به گونه‌ای به دست آورید که $\frac{1}{7}N$ عدد صحیح باشد.

حل. بنا به دستور (۱):

$$N \equiv (y + 3x + 4) - (y + 3x + 18) = 14 \equiv 0 \pmod{7}$$

پس به ازاء هر x و y، عدد $\frac{N}{7}$ عدد صحیح است.

اعداد صحیح ردیف شده

ترجمه و تنظیم: جواد لالی

ما ازعدد صحیح ردیف شده برداشت خاصی داریم که بهتر است این اصطلاح را تعریف کنیم.

تعریف. عـدد صحیح مثبت را ردیف شده مـی‌نامیم، در صورتی‌که، ارقـام‌آن، در نمایش اعشاری، از چپ به راست نانزولی باشد.

اینك، به حل دو مسأله ذیل می‌پردازیم.

الف) فرض می‌کنیم x عدد صحیح دلخواهی باشد، که در نمایش اعشاری‌آن، تعداد دلخواهـی ۳، و به دنبال‌آن تعداد دلخواهی ۶، و بعدازآن فقط یك ۷ باشد. ثابت کنیدکه $x^{۲}$ ردیف شده است. مثلاً،

$$۳۳۳۶۶۶۶۷^{۲} = ۱۱۱۳۳۳۴۴۶۶۶۸۸۸۸۹$$

ب) اعداد صحیح مثبتی، مانند x، به طوری‌که x و $x^{۲}$ ردیف شده‌اند کدامند.

حل (الف). جهت کوتاهی در نمایش اعداد (با اقتباس از شیمیدانها)، علامت زیردا برای چنین اعدادی به‌کار می‌گیریم؛ به عنوان مثال، دراین مسأله x دارای نمایشی به این صورت است:

$$x = ۳_{۲}۶_{۴}۷_{۱}$$

که

$$x^{۲} = ۱_{۲}۳_{۲}۴_{۳}۶_{۲}۸_{۴}۹_{۱}$$

در حالت کلی، فرض کنید

$$x = ۳_{k}۶_{n}۷_{۱}$$

که $k \geqslant ۰$ و $n \geqslant ۰$. ثابت می‌کنیم که؛

$$x^{۲} = \begin{cases} ۱_{k}۳_{k}۴_{n-k+۱}۶_{k}۸_{n}۹_{۱} & \text{اگر } k \leqslant n+۱ \\ ۱_{k}۳_{n+۱}۵_{k-n-۱}۶_{n+۱}۸_{n}۹_{۱} & \text{اگر } n+۱ < k \end{cases}$$

بنابراین، $x^{۲}$ ردیف شده است.

برهان. اگر $x = ۳_{k}۶_{n}۷_{۱}$ آنگاه

$$x = \overbrace{۳\cdots۳}^{k}\overbrace{۶\cdots۶}^{n}۷$$

$$= ۳ \times ۱۰^{n+۱} \times (۱\cdots۱) + ۶ \times (۱\cdots۱۰) + ۷$$
$$= ۳ \times ۱۰^{n+۱}\left(\frac{۱۰^{k}-۱}{۹}\right) + ۶۰ \times \left(\frac{۱۰^{n}-۱}{۹}\right) + ۷$$

بنابراین،

$$۳x = ۱۰^{n+k+۱} - ۱۰^{n+۱} + ۲ \times ۱۰^{n+۱} - ۲۰ + ۲۱$$
$$= ۱۰^{n+k+۱} + ۱۰^{n+۱} + ۱$$

اینك، دوطرف تساوی فوق را بتوان دو می‌رسانیم. بالنتیجه،

$$۹x^{۲} = ۱۰^{۲k+۲n+۲} + ۲ \times ۱۰^{۲n+k+۲} + ۱۰^{۲n+۲} + ۲ \times ۱۰^{n+k+۱} + ۲ \times ۱۰^{n+۱} + ۱$$

و از اینجا نتیجه می‌شود که:

$$x^{۲} = \left(\frac{۱۰^{۲n+۲k+۲}-۱}{۹}\right) + ۲\left(\frac{۱۰^{۲n+k+۲}-۱}{۹}\right) + \left(\frac{۱۰^{۲n+۲}-۱}{۹}\right) + ۲\left(\frac{۱۰^{n+k+۱}-۱}{۹}\right) + ۲\left(\frac{۱۰^{n+۱}-۱}{۹}\right) + ۱$$
$$= ۱_{۲n+۲k+۲} + ۲_{۲n+k+۲} + ۱_{۲n+۲} + ۲_{n+k+۱} + ۲_{n+۱} + ۱$$

بـرحسب اینکه $n+۱$ تا کمتر از k و یا کـوچکتر ازآن باشد، بحث می‌کنیم.

فرض کنید $k \leqslant n+۱$. با تنظیم ارقام اعداد بصورت زیر، آخرین عمل جمع را انجام می‌دهیم.

$$\begin{array}{r} \overbrace{۱\cdots۱}^{k}\overbrace{۱\cdots۱}^{k}\overbrace{۱\cdots۱}^{n-k+۱}\overbrace{۱\cdots۱}^{k}\overbrace{۱\cdots۱}^{n}۱+ \\ ۲\cdots۲۲\cdots۲۲\cdots۲۲\cdots۲۲ \\ ۱\cdots۱۱\cdots۱۱\cdots۱۱ \\ ۲\cdots۲۲\cdots۲۲ \\ ۲\cdots۲۲ \\ ۱ \\ \hline ۱\cdots۱۳\cdots۳۴\cdots۴۶\cdots۶۸\cdots۸۹ \end{array}$$

بنابراین،

$$x^{۲} = ۱_{k}۳_{k}۴_{n-k+۱}۶_{k}۸_{n}۹_{۱}$$

حال اگر $n+۱ < k$، به طریق مشابه می‌توان برهانی‌ارائه

داد. بنابراین، در هر حالت، حکم مطلوب حاصل می‌گردد.

حل (ب). اگر x و x^2 ردیف شده باشند آنگاه، نتیجه زیر، مقادیری را که x اختیار می‌کند، معین می‌نماید (در اینجا، از همان علامتی که در قسمت (الف) معرفی شده است استفاده می‌کنیم).

(۱) اگر بزرگترین رقم x یك باشد آنگاه $x=1$؛

(۲) اگر بزرگترین رقم x دو باشد آنگاه $x=2$ یا $x=12$؛

(۳) اگر بزرگترین رقم x سه باشد آنگاه $x=3$ یا $x=13$؛

(۴) اگر بزرگترین رقم x چهار باشد آنگاه $x=3_n4_1$ $(n \geqslant 0)$؛

(۵) اگر بزرگترین رقم x پنج باشد آنگاه $x=15$ یا $x=3_n5_1$ $(n \geqslant 0)$.

(۶) اگر بزرگترین رقم x شش باشد آنگاه $x=6,\ 16,\ 116$.

(۷) اگر بزرگترین رقم x هفت باشد آنگاه

$$x=7,\ 17,\ 117,\ 3_n7_1,\ 6_n7_1,\ 1_16_n7_1,\ 3_n6_m7_1$$

که $m \geqslant 1$ و $n \geqslant 1$.

(۸) اگر بزرگترین رقم x هشت باشد آنگاه $x=38$.

(۹) اگر بزرگترین رقم x صفر یا نه باشد آنگاه برای x عدد مطلوبی حاصل نمی‌شود. به طور خلاصه، اعداد صحیح مثبی مانند x، که در آن، x و x^2 هردو ردیف شده باشند عبارتند از:

۱، ۲، ۳، ۶، ۱۲، ۱۳، ۱۵، ۱۶، ۳۸، ۱۱۶، ۱۱۷

و همه اعدادی به صورت

$1_16_n7_1$، 3_n4_1، 3_n5_1 و $3_n6_m7_1$ $(n \geqslant 0,\ m \geqslant 0)$

برهان ذیل روشی را که برای اثبات نتایج فوق مورد نیاز است بیان می‌کند.

برهان (۵). فرض کنید:

$$x=a_n10^n+\cdots+a_110+5.$$

چون x ردیف شده است، پس حداکثر ارقام x ۵ است. بعلاوه،

$$x^2=\cdots+(a_1^2+a_1)10^2+2\times10+5$$

چون x^2 ردیف شده است و حداکثر مقدار a_1 برابر ۵ است، از آن نتیجه می‌گردد که

$$a_1=0,\ 1,\ \text{یا}\ 3.$$

اگر $a_1=0$، آنگاه $x=5$ و $x^2=25$.

اگر $a_1=1$، آنگاه

$$x=a_n10^n+\cdots+a_210^2+10+5$$

و بیشترین مقدار a_2، ...، a_n برابر ۱ است. بعلاوه،

$$x^2=\cdots+3a_210^3+2\times10^2+2\times10+5$$

بنابراین، $a_2=0$. بالنتیجه، $x=15$ و $x^2=225$.

اگر $a_1=3$، آنگاه

$$x=a_n10^n+\cdots+a_210^2+3\times10+5$$

و بیشترین مقدار a_2، ...، a_n برابر ۳ است. اگر

$$a_2=\cdots=a_n=3$$

آنگاه

$$x=3\times10^n+\cdots+3\times10+5$$

و

$$x^2=10^{2n+2}+\cdots+10^{n+2}+2\times10^{n+1}+\cdots+2\times10+5$$

ولی اگر $m \geqslant 1$ موجود باشد بطوریکه $a_{m+1} \neq 3$ و

$$x=a_n10^n+\cdots+a_{m+1}10^{m+1}+3\times10^m+\cdots+3\times10+5$$

در این صورت،

$$x^2=\cdots+(7a_{m+1}+1)10^{m+2}+2\times10^{m+2}+\cdots+2\times10+5$$

بالنتیجه، $a_{m+1}=0$. بنابراین، به ازاء $m \geqslant 1$

$$x=3\times10^m+\cdots+3\times10+5$$

در پایان احکامی را بیان می‌کنیم که تحقیق و بررسی آن را به عهده علاقمندان می‌گذاریم.

ثابت کنید که اگر x و y اعداد صحیحی بصورت (الف) باشند آنگاه حاصلضرب آنها؛ xy، ردیف شده است. همچنین خانواده نامتناهی از اعداد ردیف شده به طوری که مربع آن نیز ردیف شده‌اند در مبنای ۵ و ۹ موجودند. ولی، چنین خانواده نامتناهی، در مبنای ۶، ۷ یا ۸ موجود نیست.

منبع

Mathematics Magazine, Vol. 60, No 1, February 1987.

«مسائل مسابقهٔ دانشجویی ریاضی کشور»
«فروردین ۶۷ دانشگاه گیلان»

تنظیم از: دکتر محمدعلی شهابی
عضو هیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه تبریز

مسئله مسابقه

از یك چهارضلعی طول دو قطر و زاویه‌های چهارضلعی معلوم است چهارضلعی را رسم کنید.

سؤالات آنالیز (وقت ۲ ساعت)

۱ـ فرض کنید:

$$f: \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$$

یك تابع پیوسته باشد، و بعلاوه $M > 0$ای موجود باشد بقسمی که به ازاء هر $x \in \mathcal{R}$ و هر $y \in \mathcal{R}$؛

$$|f(x)-f(y)| \geqslant M|x-y|$$

نشان دهید که f، ۱ — ۱ و پوشا است. (۳۵ امتیاز).

حل. اگر

$$f(x)=f(y)$$

آنگاه $M|x-y| \leqslant 0$ و چون $M>0$ پس $x=y$ یعنی f، ۱ — ۱ است.

چون f، ۱ — ۱ و پیوسته است پس یکنواست و در نتیجه معکوس آن نیز پیوسته است و بنابراین $f(\mathcal{R})$ یك مجموعه باز است، علاوه براین $f(\mathcal{R})$ بسته نیز است و چون $f(\mathcal{R})$ همبند است پس:

$$f(\mathcal{R})=\mathcal{R}$$

۲ـ فرض کنید $(f_n)_{n\geqslant 1}$ دنباله‌ای نزولی از توابع حقیقی مثبت روی یك مجموعهٔ ناتهی S باشد. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه سری $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ همگرای یکنواخت بر S باشد، آن است که سری $\sum_{n\geqslant 1} n(f_n-f_{n+1})$ همگرای یکنواخت بر S باشد. (۴۰ امتیاز).

حل. می‌دانیم

$$na_{n+1}+\sum_{k=1}^{n} k(a_k-a_{k+1})=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

لزوم: همگرائی یکنواخت $\sum f_n$ نتیجه می‌دهد که (nf_n) به‌طور یکنواخت به صفر همگرا شود ($f_n \geqslant 0$ نزولی است). حال همگرائی یکنواخت $\sum n(f_n-f_{n+1})$ از شرط کوشی با توجه به رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} k(f_k-f_{k+1})\right| \leqslant |nf_{n+1}|+\left|\sum_{k=m}^{n} f_n\right|$$

و از اینجا لزوم ثابت می‌شود.

کفایت:

$$nf_n = n\left[\sum_{k=n}^{\infty}(f_k - f_{k+1})\right] \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} n(f_k - f_{k+1})$$

از رابطهٔ فوق و همگرائی یکنواخت $\sum_{n=1}^{\infty} n(f_n - f_{n+1})$ نتیجه می‌شود که (nf_n) همگرائی یکنواخت به صفر است. لذا شرط کافی از رابطه زیر و شرط کشی به دست می‌آید:

$$\left|\sum_{m}^{n} f_k\right| \leqslant \left|\sum_{m}^{n} k(f_k - f_{k+1})\right| + |nf_n|$$

۳- فرض کنید:

$$g: [0, 1] \longrightarrow \mathcal{R}$$

یک تابع انتگرال پذیر ریمان باشد، ثابت کنید:

$$\int_0^1 \left[\int_x^1 g(t)dt\right]dx = \int_0^1 tg(t)dt$$

(۲۵ امتیاز).

حل.

روش اول. از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

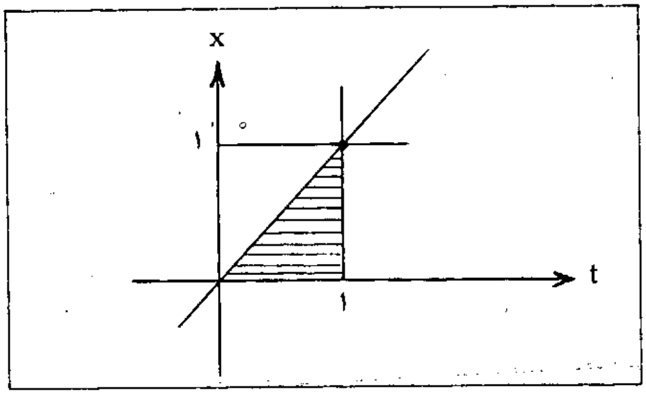
$$\begin{cases} dx = dv \implies x = v \\ \int_x^1 g(t)dt = u, \ du = -g(x)dx \end{cases}$$

$$\int_0^1 \left[\int_x^1 g(t)dt\right]dx = \left[x\int_x^1 g(t)dt\right]_0^1 + \int_0^1 xg(x)dx$$

$$= 0 + \int_0^1 xg(x)dx$$

$$= \int_0^1 xg(x)dx$$

$$\int_0^1 \left[\int_x^1 g(t)dt\right]dx = \int_0^1 tg(t)dt$$



روش دوم. با تغییر حدود در انتگرال دوگانه داریم:

$$\int_0^1 \left[\int_x^1 g(t)dt\right]dx = \int_0^1 \left[\int_0^t g(t)dx\right]dt$$

$$= \int_0^1 \left[xg(t)\right]_0^t dt$$

$$= \int_0^1 tg(t)dt$$

سؤالات جبر (وقت ۲ ساعت)

مسألهٔ ۱- فرض کنید G یک گروه از مرتبهٔ $2p$ باشد، که در آن p عدد اول فردی است. ثابت کنید که G دارای یک و تنها یک زیر گروه از مرتبهٔ p است. همچنین ثابت کنید که G دارای p زیر گروه از مرتبهٔ ۲، یا یک زیر گروه از مرتبهٔ ۲ است. در حالت دوم ثابت کنید که G یک گروه دوری است. (۲۵ امتیاز).

برهان. بنا به قضیه سیلو، G دارای $kp+1$ زیرگروه از مرتبهٔ p است و $kp+1|2p$. در نتیجه $1+kp=1$ و لذا G یك و تنها یك سیلو p−زیرگروه دارد. همچنین، بنابر قضیه سیلو، G به تعداد $2k+1$ زیرگروه از مرتبهٔ ۲ دارد و $2k+1|2p$. بنابراین:

$$1+2k=1 \quad \text{یا} \quad 1+2k=p$$

بالاخره، فرض‌کنیم G فقط یك سیلو ۲−زیرگروه داشته باشد. فرض‌کنیم H و K بترتیب سیلو ۲−زیرگروه و سیلو p−زیرگروه G باشند. فرض می‌کنیم $h\in H$ و $k\in K$ عضوخنثای گروه G نباشند. چون $|H\cap k|=1$، پس $hk=kh$ و لهذا مرتبهٔ hk مساوی با 2p است (توجه شود که p و ۲ نسبت به هم اولند). بنابراین زیرگروه دوری پدیدآمده توسط hk همان G است.

مسألهٔ ۲- فرض‌کنید G گروهی آبلی از مرتبهٔ فرد بوده و φ یك همریختی مرتبهٔ ۲ از G باشد. نشان دهید که هر عنصر $g\in G$ را می‌توان به‌طور منحصر به فردی به شکل $g=xy$ نوشت که درآن:

$$\varphi(x)=x \quad \text{و} \quad \varphi(y)=y^{-1}$$

(۲۵ امتیاز).

برهان. چون $|G|$ فرد فرض شده است، پس نگاشت $x\to x^2$ یك یکسانی (ایزومورفیسم) از G به G می‌باشد و در نتیجه به ازاء هر $g\in G$ عنصر $a\in G$ وجود دارد به طوری‌که $g=a^2$. حال اگر قرار دهیم:

$$x=a\varphi(a) \quad \text{و} \quad y=a\varphi(a^{-1})$$

آنگاه

$$xy=a\varphi(a)a\varphi(a^{-1})=a^2\varphi(a)\varphi(a^{-1})$$
$$=a^2\varphi(a^{-1}a)=a^2=g$$
$$\varphi(x)=\varphi(a\varphi(a))=\varphi(a)\varphi^2(a)=\varphi(a)a$$
$$=a\varphi(a)=x$$
$$\varphi(y)=\varphi(a\varphi(a^{-1}))=\varphi(a)\varphi^2(a^{-1})=\varphi(a)a^{-1}$$
$$=(a\varphi(a^{-1}))^{-1}=y^{-1}$$

حال برای اینکه نشان دهیم x و y با شرایط مفروض مسأله منحصر به‌فردند، فرض می‌کنیم $g=zt$، که در آن:

$$\varphi(z)=z \quad \text{و} \quad \varphi(t)=t^{-1}$$

از تساوی $xy=zt$ نتیجه می‌شود که

$$\varphi(x)\varphi(y)=\varphi(z)\varphi(t)$$

لهذا $xy^{-1}=zt^{-1}$ به عبارت دیگر $xyy^{-2}=zt^{-1}$. در نتیجه $zty^{-2}=zt^{-1}$. بنابراین $t^2=y^2$. چون نگاشت $x\to x^2$ یك تابع یکبیك است، پس $t=y$ و در نتیجه $x=z$.

مسألهٔ ۳- اگر R حلقه‌ای یکدار با مشخصهٔ ۲ باشد (یعنی برای هر $x\in R$، $2x=0$) و بعلاوه برای هر $x\neq 1$ و $y\neq 1$ داشته باشیم $xy^2=xy$، نشان‌دهید که R جابجایی است.

برهان. نشان می‌دهیم که R یك حلقهٔ بول است و درنتیجه جابجایی می‌شود. فرض‌کنیم $y\in R$ ای موجود باشد که $y^2\neq y$ (فرض خلف) در این صورت، هر $x\neq 1$ از حلقهٔ R یك مقسوم‌علیه صفر است؛ زیرا، با توجه به فرض، $x(y^2-y)=0$. حال، اگر عدد طبیعی n و $x\in R$ چنان باشند که $x^n=0$، آنگاه:

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})$$
$$(1-x)=1-x^n=1$$

در نتیجه $x-1$ مقسوم‌علیه صفر نبوده و لذا $1-x=1$ یعنی $x=0$. بنابراین، حلقه R هیچ عنصر پوچ توان غیراز صفر ندارد. حال فرض‌کنیم $x\in R$ دلخواه باشد. با توجه به فرض داریم $x^3=x^2$. لذا (چون R با مشخصهٔ ۲ است) $(x-x^2)^2=0$.

در نتیجه، چون صفر تنها عنصر پوچ توان R است، داریم $x^2=x$. این متناقض با فرض خلف است. بنابراین R یك حلقه بول است.

مسألهٔ ۴- فرض‌کنید هر ایده‌آل حلقه جابجایی و یکدار R اصلی‌است و $f:\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ یك همریختی پوشا باشد. ثابت کنید f یك یکریختی است.

(۲۵ امتیاز).

حل. زنجیر صعودی

$$\mathrm{Ker}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, f^{2} \subseteq \dots \subseteq \mathrm{Ker}\, f^{n} \subseteq \dots$$

از ایده‌آل‌های R را درنظر می‌گیریم. عددی طبیعی مانند k موجود است که به ازاء هر $n \geqslant k$، $\mathrm{Ker}\, f^{n}=\mathrm{Ker} f^{k}$.

فرض‌کنید $f(x)=0$؛ $y\in R$ ای موجود است که $x=f^{k}(y)$ لذا

$$0=f(x)=f^{k+1}(y).$$

پس

$$y\in \mathrm{Ker}\, f^{k}=\mathrm{Ker}\, f^{k+1}$$

یعنی

$$x=f^{k}(y)=0$$

پس f، (۱ — ۱) و حکم برقرار است.

مسألهٔ ۵- فرض‌کنید A یك ماتریس ۳×۳ وارون پذیر روی میدان F باشد به طوری‌که

$$\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(A^{-1})=0 \quad \text{و} \quad \det A=1$$

ثابت‌کنید $A^{3}=I$.

(۲۵ امتیاز).

حل. فرض می‌کنیم

$$f(x)=x^{3}+ax^{2}+bx+c$$

چند جمله‌ای مشخصهٔ A باشد داریم:

$$\det A=-c \quad \text{و} \quad \mathrm{tr}(A)=-a$$

پس $c=-1$ و $a=0$. حال:

$$f(x)=x^{3}+bx-1$$

چون $f(A)=0$، پس $A^{3}+bA-I=0$ در نتیجه $I+bA^{-2}-A^{-3}=0$. از آن نتیجه می‌شود که چند جمله‌ای مشخصهٔ ماتریس A^{-1} عبارتست از

$$g(x)=x^{3}-bx^{2}-1$$

اما داریم:

$$\mathrm{tr}(A^{-1})=b=0$$

پس $b=0$، در نتیجه $A^{3}-I=0$ و یا $A^{3}=I$.

مسألهٔ ۶- هرگاه α و β دو ریشه متمایز معادله

$$1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\dots+\frac{x^{p}}{p!}=0$$

(p عددی اول و $p>2$) باشد، نشان دهید که $\alpha-\beta$ و $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ اعدادی غیر گویا هستند.

(۲۵ امتیاز).

حل. واضح است که α و β ریشه‌های معادله

$$f(x)=p!+p!x+\frac{p!}{2!}x^{2}+\dots+x^{p}=0$$

می‌باشند. اول نشان می‌دهیم که $\alpha-\beta$ نیز گویا نیست. فرض کنیم $\alpha-\beta=r\in Q$ و به تناقض می‌رسیم. آشکارا $f(\beta+r)=0$ و چون $f(x)$ طبق محك آیزنشتاین روی Q تحویل ناپذیر است، پس $f(x)|f(x+r)$ در نتیجه

$$f(x+r)=f(x)$$

یعنی اگر α_1 و α_2 و ... و α_p ریشه‌های $f(x)=0$ باشند آنگاه، $r+\alpha_1$ و $r+\alpha_2$ و ... و $r+\alpha_p$ نیز تمام ریشه‌های $f(x)=0$ می‌باشند پس:

$$\sum_{1}^{p} (r+\alpha_i)=\sum_{1}^{p} \alpha_i \implies pr=0$$

$$\implies r=0 \implies \alpha=\beta$$

که یك تناقض است.

حال برای $\alpha+\beta$ بطور مشابه عمل می‌کنیم فرض می‌کنیم $\alpha+\beta\in Q$ و به تناقض می‌رسیم. قرار میدهیم

$$\alpha+\beta=r\in Q \quad \text{پس} \quad f(r-\beta)=0$$

و در نتیجه $f(x)|f(r-x)$ یعنی $f(1-x)=kf(x)$

پس $k=-1$ و برای $x=\frac{r}{2}$ داریم: $f\left(\frac{r}{2}\right)=0$، که یك تناقض است. بالاخره برای $\alpha\beta$ نیز به طور مشابه فرض‌کنیم $\alpha\beta=r\in Q$ و به تناقض می‌رسیم.

توجه:

۱ـ از مسایل ۱ و ۲ فقط یکی را انتخاب و حل کنید.

۲ـ « « ۳ و ۴ « « « «

سؤالات معلومات

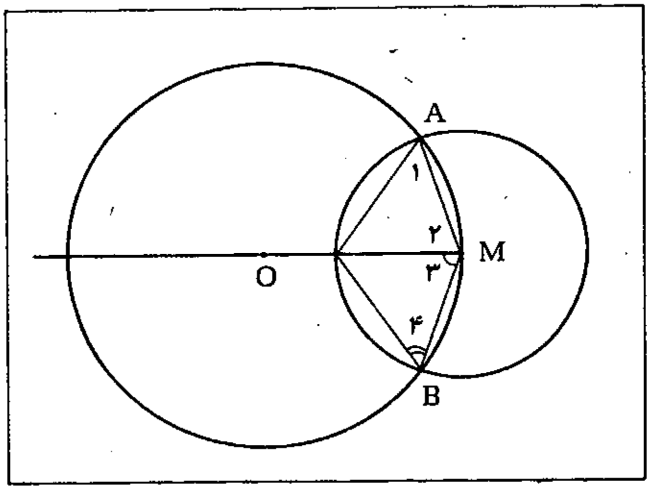
عمومی (وقت ۱ ساعت)

مسألهٔ ۱- دایرهٔ C بـه مـرکز O مفروض است، مـرکز مربعی روی محیط این‌دایره است. درصورتی که مساحت‌مربع از نصف مساحت دایره بـزرگتر نباشد، ثابت‌کنید یك رأس مربع همواره درون دایره قرار دارد. (۲۰ امتیاز).

حل. فرض می کنیم ضلع مربع a و به‌شعاع دایره R باشد، پس $a^{۲} \leqslant \frac{\pi R^{۲}}{۲}$ یعنی $a\sqrt{۲} \leqslant R\sqrt{\pi}$. لذا قطر مربع از قطر دایره‌کوچکتر است. بنابراین رئوس‌مربع روی دایره به مرکز M به شعاع $r < R$ قرار دارند. فرض‌کنیم A و B نقاط تقاطع این دو دایره باشند پس زوایای $\hat{۲} \geqslant ۶۰°$ و $\hat{۱} > ۶۰°$ ، $\hat{۳} \geqslant ۶۰°$ ، $\hat{۴} \geqslant ۶۰°$ ، زیرا

$$AM = MB < OM = OA = OB$$

پس زاویهٔ $\widehat{AMB} \geqslant ۱۲۰°$. لذا قوس $\widehat{AB}$ از دایره به مرکز M از $\frac{۲\pi}{۳}$ بـزرگتر است. از این‌رو بعضی‌از رئوس مربع بایستی روی این قوس قرار بگیرد.



مسألهٔ ۲- در یك‌آزمون تعداد ۱۷۰۰ نفر شرکت‌کرده‌اند، دراین‌آزمون ۱۵ سؤال داده شده است‌که داوطلبان به صورت صحیح و غلط بـه‌آنها پاسخ می‌دهند اگـر بدانیم هیچ یك از شرکت‌کنندگـان به‌هیچ دو سؤال متوالی پاسخ صحیح نداده و ضمناً بـه همهٔ سؤالان پاسخ داده باشند. آیا حتماً دو ورقهٔ مشابه وجود دارد؟

(۲۵ امتیاز).

حل. تعداد ورقه‌هایی‌کـه می‌توانند متمایز بـاشند عبارت است از

$$N = \binom{۱۵}{۱} + \binom{۱۴}{۲} + \binom{۱۳}{۳} + \cdots + \binom{۸}{۸} = \sum_{i=۱}^{۱۵} \binom{۱۵ - i + ۱}{۲} = ۱۵۹۶$$

چون این عدد از ۱۷۰۰ کمتر است پس دو ورقهٔ مشابه وجود دارد.

مسألهٔ ۳- مطلوب است محاسبهٔ:

$$۱ - C_n^{۲} + C_n^{۴} - C_n^{۶} + \cdots$$

(۱۰ امتیاز).

حل.

$$(۱+i)^n = \sum_{k=۰}^{n} C_n^k i^{(n-p)}$$

$$۱ + i = \sqrt{۲}\left(\cos\frac{\pi}{۴} + i\sin\frac{\pi}{۴}\right)$$

$$(۱+i)^n = (\sqrt{۲})^n\left(\cos\frac{n\pi}{۴} + i\sin\frac{n\pi}{۴}\right)^n$$

$$\sum_{k=۰}^{n} C_k^n (i)^{n-k} = (\sqrt{۲})^n \cos\frac{n\pi}{۴} + i(\sqrt{۲})^n \sin\frac{n\pi}{۴}$$

با فرض $n = ۲k$.

$$C_n^{۰} - C_n^{۲} + C_n^{۴} - C_n^{۶} + \cdots + (-۱)^k C_n^n = ۲^{\frac{n}{۲}} \cos\frac{n\pi}{۴}$$

$$۱ - C_n^{۲} + C_n^{۴} - C_n^{۶} + \cdots + (-۱)^k C_n^n = ۲^{\frac{n}{۲}} \cos\frac{n\pi}{۴}$$

«قضیه کوچك فرما»

بهمن خانه‌دانی

اگر p یك عدد اول باشد و $(p, a)=1$، آنگاه:

$$a^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}$$

برای اثبات حکم فوق، ابتدا، برهان یك لم‌را یادآوری می‌کنیم.

لم. اگر p یك عدد اول فرد باشد. آنگاه به ازاء هر k که $1\leqslant k\leqslant p-1$، $\binom{p}{k}$ بر p بخشپذیر است.

برهان. فرض کنید $\binom{p}{k}=m$. در این صورت،

$$\frac{p!}{k!(p-k)!}=m$$

$$p!=mk!(p-k)!$$

چون:

$$(p, (p-k)!)=(p, k!)=1$$

و p طرف اول تساوی فوق‌را عاد می‌کند، پس $p|m$؛ m بر p بخشپذیر است.

اینك، قضیه فرما را ثابت می‌کنیم. اگر $p=2$، حکم به ازاء هرعددصحیح a برقراراست. زیرا، چون $(p, a)=1$. پس a فرد است. بنابراین:

$$a^{p-1}=a\equiv 1 \pmod{2}$$

پس، فرض کنید که p یك عدد اول باشد. به استقراء نسبت به a، حکم را ثابت می‌کنیم. به ازاء $a=1$ حکم برقراراست. فرض کنید که $a\geqslant 1$ وفرض استقراء برقرار باشد. همچنین، فرض کنید $(a+1, p)=1$. بنابراین،

$$(a+1)^p=a^p+1+\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}b^k$$

$$\equiv a^p+1 \pmod{p}$$

که همنهشتی فوق بنابر لم فوق برقرار است. بنابه فرض استقراء، $a^p\equiv a \pmod{p}$. پس،

$$(a+1)^p\equiv a^p+1\equiv a+1 \pmod{p}$$

چون $(a+1, p)=1$. پس می‌توان دو طرف همنهشتی را بر $a+1$ تقسیم کرد. بالنتیجه، حکم به‌استقراء نتیجه می‌شود.

اگر a عدد صحیح منفی باشد. پس $-a$ عدد طبیعی است. بنابر حکم فوق:

$$1\equiv(-a)^{p-1}=(-1)^{p-1}\times a^{p-1}$$

$$=a^{p-1} \pmod{p}$$

بنابراین، به ازاء هرعدد صحیح، (مثبت و یا منفی)، قضیه فرما برقرار می‌شود.

مسائل شماره ۱۸

تهیه و تنظیم از: محمود نصیری

۱- با فرض

$$ax^3=by^3=cz^3 \quad \text{و} \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$

ثابت کنید

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$$

(فرستنده: نادر جامی مقدم و محمدرضا رحمانی تهران)

۲- اگر $x^2+x+1=0$، آنگـاه مقدار عبارت گویای $x^{101}+\frac{1}{x^{101}}$ را حساب کنید.

۳- فرض مـی کنیم a و b اعداد حقیقی مثبت و m و n اعداد صحیح و مثبت باشند بطوری که $m>n$، ثابت کنید،

$$(a^m+b^m)^n<(a^n+b^n)^m.$$

۴- مطلوبست تعیین فرمولی برای تعداد جملات

$$(a_1+a_2+a_3)^n \quad \text{و} \quad (a_1+a_2+a_3+a_4)^n$$

به‌طور کلی تعداد جملات بسط $(a_1+a_2+\cdots+a_k)^n$ را پیدا کنید.

(فرستنده: سید هادی سجادی دانش‌آموز ساری)

۵- رقم یکان عدد صحیح $\left[\dfrac{10^{20000}}{10^{100}+3}\right]$ را پیدا کنید

(کروشه به معنی جزء صحیح است).

۶- مطلوبست محاسبهٔ عبارت زیر

$$\mathrm{Arc}\,cotg\,1+\mathrm{Arc}\,cotg\,7+\cdots+\mathrm{Arc}\,cotg(n^2+n+1)+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Arc}\,cotg(n^2+n+1)$$

که به ازاء $t\geqslant 0$، $\mathrm{Arc}\,cotg\,t=\theta$ بطوری که $cotg\,\theta=t$ و $0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$.

۷- اگر x عدد حقیقی ثابت و

$$x\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

مطلوبست محاسبه حد عبارت زیر، وقتی که $n\to\infty$

$$((1+\sin x)(1+\sin^2 x)\cdots(1+\sin^{2^n} x))$$

(فرستنده: محمدرضا حقیقی اصفهان)

۸- ثابت کنید تابع f باضابطهٔ

$$f(x)=[\sin x]+[\cos x]$$

متناوب است. کوچکترین دوره تناوب آنرا پیدا کرده ونمودار آن را در یك دورهٔ تناوب رسم کنید. نقاط ناپیوستگـی این تابع را در این فاصله مشخص کنید.

(فرستنده: اکبر غفارپور رهبر دانشجو تبریز)

۹- طول اضلاع یك مثلث ریشه‌های معادله

$$x^3-ax^2+bx-c=0$$

است. مساحت مثلث را برحسب a و b و c پیدا کنید.

۱۰- اگر m عددی حقیقی ثابت و مخالف صفر باشد. تمام توابع پیوسته $f: R\to R$ را طوری تعیین کنید کـه در شرط

$$f\left(2x-\frac{f(x)}{m}\right)=mx$$

صدق کنند.

۱۱- ماکزیمم تابع

$$f(x)=x^{۳}-۳x$$

را بر مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی‌که در نامساوی

$$x^{۴}+۳۶ \leqslant ۱۳x^{۲}$$

صدق می‌کنند، پیدا کنید.

۱۲- اگر $۰<a<۱$ و

$$n=۰\text{ و }۱\text{ و }۲\text{ و }\ldots$$

مطلوب است محاسبه عبارت

$$I_n=(n+۱)\int_{۰}^{a}\frac{(a-x)^n}{(۱-x)^{n+۲}}\,dx.$$

سپس حد I_n را نیز وقتی‌که $n \to \infty$ پیدا کنید.

۱۳- مساحت مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\hat{A}=۹۰)$ برابر S است. پاره خطی از رأس قائمه A می‌گذرانیم تا وتر مثلث را در نقطه D قطع‌کند بطوری‌که دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای ABD و ADC مساوی باشند. ثابت‌کنید طول پاره خط AD برابر $\sqrt{S}$ است.

۱۴- از مثلث ABC، r شعاع دایره محاطی داخلی و طول AI (I مرکز دایره محاطی داخلی) و طول AH (H محل تلاقی سه ارتفاع‌اند) معاومند مثلث را رسم‌کنید.

۱۵- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a از نقطه دلخواه M داخل مثلث،عمودهای MH و MH' و MH'' را برسه ضلع مثلث رسم می‌کنیم. اگرمساحت مثلثهای MHH'و MHH'' و $MH'H''$ را به $S_۱$ و $S_۲$ و $S_۳$ نشان دهیم، ثابت‌کنید

$$S_۱\cdot S_۲\cdot S_۳ \leqslant \frac{a^{۶}}{۲^{۱۲}\cdot ۳\sqrt{۳}}$$

(فرستنده: فرهنگ مصطفی‌زاده دانش‌آموز ارومیه)

۱۶- در چهارضلعی محدب $ABCD$ نیمسازهای زوایای A و B یکدیگر را درنقطه M و نیمسازهای زوایای C و D یکدیگر را در نقطه N قطع می‌کنند. اگر $AB=m$ و $CD=n$ و $BC=a$ و $AD=b$ و زاویه بین BC و AD برابر α باشد ثابت‌کنید:

$$MN=\frac{۱}{۲\cos\frac{\alpha}{۲}}\,|a+b-m-n|$$

۱۷- فرض‌کنیم n مردکه A و B هم در بین‌آنها هستند در یك ردیف بایستند. احتمال اینکه دقیقاً r مرد بین A و B قرار گیرند، چیست؟

اگر این مردها حلقه‌وارکنار هم بایستند نشان دهیدکه این احتمال به r بستگی ندارد و لذا برابر $\frac{۱}{n-۱}$ است. (درجایگشت دوری تنها کمانی را درنظر بگیریدکه از A به B در جهت مثبت تشکیل می‌شود).

۱۸- فرض‌کنیم A و B و C و D ماتریسهای $n\times n$ و A' و B' و C' و D' بترتیب ترانهاده‌های آنها باشند بطوری‌که AB' و CD' متقارن و

$$AD'-BC'=I_{n\times n}$$

ثابت‌کنید:

$$A'D-C'B=I_{n\times n}$$

($I_{n\times n}$ ماتریس واحد است).

۱۹- فرض می‌کنیم A یك ماتریس ۲×۲ باشد بطوری که $A^{۳}=۰$. نشان دهیدکه وارون ماتریس $I-A$ بصورت $I+\alpha A+\beta A^{۲}$ است. α و β را محاسبه‌کنید (I ماتریس واحد است).

۲۰- در هریك از حالات زیر تعیین‌کنیدکه u و v و w در چه شرایطی صدق‌کنند تا دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x+y+z=u \\ (b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=v \\ bcx+cay+abz=w \end{cases}$$

سازگار باشد.

الف) a و b و c دو به دو متمایزند.

ب) $a=b$ و c متمایز ازآنها است.

ج) $a=b=c$.

اگر $u=۱$، $v=a$، $w=۰$ و $a\neq ۰$، دستگاه فوق را در حالاتی‌که سازگار است، حل‌کنید.

حل مسائل شماره ۱۶

تهیه و تنظیم از: ابراهیم دارابی

۱ـ فرض می‌کنیم

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

ثابت کنید:

$$A^{-1}=\frac{1}{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}A'$$

حل. با انجام محاسبات ساده می‌توان دید که:

$$AA'=(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)I=A'A$$

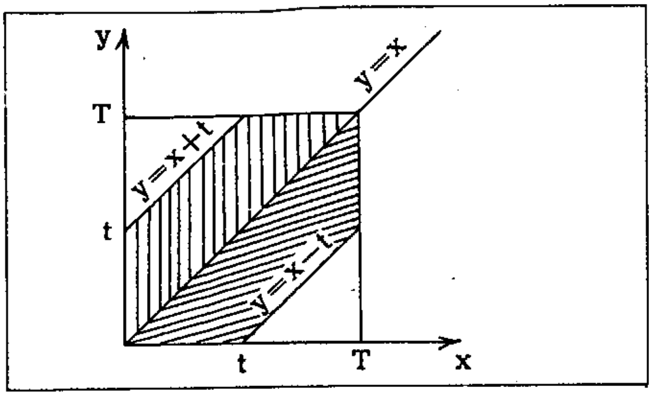
و در نتیجه:

$$A^{-1}=\frac{1}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)}A'$$

۲ـ اگر مسئول مرکز کنترل هوایی، دو علامت به ترتیب از دو پست رادیوکاتور در مدت کمتر از t دریافت کند، نزدیک شدن هواپیما را اطلاع می‌دهد.

درصورتی که این مرکز در مدت T از پست‌های اول و دوم دو علامت در زمانهای دلخواه دریافت کند، احتمال ظاهر شدن هواپیما در مدت T چقدر است.

حل. لحظه دریافت پیام از پست اول را به x و دومی را به y نشان می‌دهیم. می‌دانیم $0 \leqslant x \leqslant T$ و $0 \leqslant y \leqslant T$. مسئول کنترل نزدیک شدن هواپیما را وقتی خبر می‌دهد که $y > x$ و $y-x < t$ و یا $x > y$ و $x-y < t$ باشد. در شکل زیر از نظر تعبیر هندسی، اتحاد در مجموعه جواب نامعادلات:



$$\begin{cases} y > x \\ y-x < t \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x > y \\ x-y < t \end{cases}$$

داده شده است. بنابراین احتمال ظاهر شدن هواپیما، نسبت مساحت شکل هاشور خورده به مساحت مربع به ضلع T می‌باشد،

$$P=\frac{t(2T-t)}{T^2}$$

۳ـ فرض می‌کنیم G یك گروه با مرتبهٔ فرد باشد. ثابت کنیدکه به ازاء هر $a \in G$ معادلهٔ $x^2=a$ فقط یك جواب دارد. جواب این معادله را با $a^{\frac{1}{2}}$ نشان می‌دهیم و عمل O را در G چنین تعریف می‌کنیم

$$x \circ y=(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}})^2$$

نشان دهید (G, O) یك گروه است.

حل. فرض می‌کنیم e عضو خنثای گروه G و G دارای n عضو است. ابتدا نشان می‌دهیم که به ازاء هر $a \in G$ $a^n=e$. فرض می‌کنیم $a \in G$، در این صورت، a و a^1 و ... و a^2 ... متعلق به G می‌باشند. چون G یك گروه متناهی‌است، پس اعداد طبیعی i و j یافت می‌شوند که $i > j$ و $a^i=a^j$.

در نتیجه $a^{i-j}=e$. بنابراین، حداقل یك عدد طبیعی مانند k موجود است که $a^k=e$ (مثلاً $k=i-j$).

فرض می‌کنیم t کوچکترین عدد طبیعی باشد که $a^t=e$ (چنین عدد طبیعی را مرتبهٔ a می‌نامند) و:

$$H=\{e, a, a^2, \dots, a^{t-1}\}$$

بسادگی می‌توان دید که H زیرگروه G و دارای t عضو است. اینك ثابت می‌کنیم که t، n را عاد می‌کند. برای این منظور نسبت $\sim$ را در G چنین تعریف می‌کنیم. به ازاء هر x و y از G، می‌نویسیم $x \sim y$ فقط و فقط وقتی که $x=a^iy$ که در آن $0 \leqslant i < t$ (a^0 عضو خنثی تعریف می‌شود یعنی $a^0=e$). $\sim$ یك نسبت هم‌ارزی در G است و به ازاء هر $x \in G$، دستهٔ هم‌ارزی x، که به علامت $[x]$ نشان می‌دهیم، مجموعهٔ $\{x, ax, \dots, a^{t-1}x\}$ می‌باشد.

فرض می‌کنیم $[x_1]$ و ... و $[x_k]$ دسته‌های هم‌ارزی متمایز نسبت $\sim$ در G باشند. در این صورت به ازاء هر $i \neq j$، $[x_i]\cap[x_j]=\Phi$ و $G=\bigcup_{i=1}^{k}[x_i]$. بنابراین $n=kt$. اینك به ازاء $a \in G$ داریم

$$a^n=a^{kt}=(a^t)^k=e^k=e$$

بنابراین به ازاء هر $a \in G$ تساوی $a^n=e$ برقرار است.

اینك به اثبات مسأله می‌پردازیم. با توجه به فرض مسأله $(n, 2)=1$، بنابراین اعداد صحیح m و k موجود است که $kn+2m=1$. در نتیجه به ازاء هر $a \in G$،

$$(a^m)^2=a^{2m}=a^{2m}e=a^{2m}(a^n)^k=a^{2m}a^{nk}$$
$$=a^{2m+nk}=a$$

لذا، به ازاء هر $a \in G$، عضو a^m از G جواب معادلهٔ $x^2=e$ است. فرض کنیم $b \in G$ نیز یك جواب معادله بالا باشد در این صورت $b^2=a$ و لهذا

$$b^{2m}=(b^2)^m=a^m$$

ولی

$$b^{2m}=b^{2m}e=b^{2m}b^{kn}=b^{2m+kn}=b$$

بنابراین $b=a^m$ و در نتیجه جواب معادلهٔ $x^2=a$ منحصر به فرد است و آن a^m می‌باشد. بنابرآنچه که در مسأله آمده است a^m را با $a^{\frac{1}{2}}$ نشان می‌دهیم. بنابراین به ازاء هر a و $b \in G$ داریم

$$a \circ b=(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})^2=(a^mb^m)^2 \in G$$

اینك نشان می‌دهیم که (G, O) یك گروه است.

الف) O در G شرکت پذیر است به‌ازاء هر a و b و $c \in G$ داریم

$$(a \circ b)^{\frac{1}{2}}=[(a^mb^m)^2]^m=(a^mb^m)^{2m}=a^mb^m$$

و در نتیجه

$$(a \circ b) \circ c=((a \circ b)^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}})^2$$
$$=((a^mb^m)c^m)^2$$

به روش مشابه می‌توان دید که:

$$a \circ (b \circ c)=(a^m(b^mc^m))^2$$

چون

$$a^m(b^mc^m)=(a^mb^m)c^m$$

بنابراین

$$a \circ (b \circ c)=(a \circ b) \circ c$$

و لهذا عمل O در G شرکت پذیر است.

ب) e عضو خنثای G نسبت به عمل O است به ازاء هر $a \in G$ داریم

$$a \circ e=(a^me^m)^2=(a^m)^2=a^{2m}=a$$

و

$$e \circ a=a^{2m}=a$$

در نتیجه

$$a \circ e=e \circ a=a$$

ج) هر عضو G نسبت به عمل O دارای وارون (معکوس) است. فرض می‌کنیم $a \in G$، چون G با عمل قبلی گروه است پس $a^{-1} \in G$ موجود است که $a^{-1}a=aa^{-1}=e$. اینك داریم

$$a^{-1} \circ a=((a^{-1})^ma^m)^2=(a^{-m}a^m)^2=e^2=e$$

و به‌روش مشابه $a \circ a^{-1}=e$ بنابراین a^{-1} وارون a نسبت به O است. در نتیجه G با عمل O تشکیل یك گروه می‌دهد.

۴ـ اگر a و b و c اعداد حقیقی، دو به دو متمایز و ریشه‌های معادله درجه سوم $f(x)=0$ ثابت کنید

$$\frac{a}{f'(a)}+\frac{b}{f'(b)}+\frac{c}{f'(c)}=0$$

حل.

$$f(x)=A(x-a)(x-b)(x-c)$$

که در آن A مقدار ثابتی است.

$$f'(x)=A[(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-c)(x-b)]$$

$$f'(a)=A[(a-b)(a-c)]$$

$$f'(b)=A[(b-a)(b-c)]$$

$$f'(c)=A[(c-a)(c-b)]$$

از تساوی‌های بالا رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{a}{f'(a)}+\frac{b}{f'(b)}+\frac{c}{f'(c)}=\frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{A(a-b)(a-c)(b-c)}=۰$$

۵ـ حاصلضرب دو چند جمله‌ای با ضرایب صحیح کثیرالجمله‌ای شده است که ضرایب آن زوج می‌باشد. در بین ضرایب کثیرالجمله اخیر، لااقل یك ضریب وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر نیست. ثابت کنید همه ضرایب یکی از کثیرالجمله‌های اولیه زوج است.

حل. فرض می‌کنیم

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

و

$$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$$

فرض می‌کنیم حداقل یکی از ضرایب $f(x)$ و نیز حداقل یکی از ضرایب $g(x)$ زوج نباشد. i و j را طوری اختیار می‌کنیم که $۲|a_0$ و ... و a_{i-1} و $۲|b_0$ و ... و b_{j-1} ولی $۲ | a_i$ و $۲ | b_j$ در این صورت ضریب x^{i+j} در حاصلضرب $f(x)$ و $g(x)$ بر ۲ قابل قسمت نیست و این با فرض تناقض دارد. بنابراین ضرایب $f(x)$ یا $g(x)$ بر ۲ قابل قسمت است.

ضرایب هردوی $f(x)$ و $g(x)$ نمی‌تواند زوج باشد زیرا درآن صورت ضرایب حاصلضرب بر ۴ بخش‌پذیر خواهد شد و این هم با فرض تناقض دارد.

۶ـ یك ماشین تنها دوعمل جمع و تفریق را انجام می‌دهد. می‌دانیم تابع f یك تابع خطی و

$$f(۱)=۱۶/۳$$

و

$$f(۲)=۱۵/۱$$

می‌باشد. چگونه می‌توان $f(۱۹۸۵)$ را حساب کرد؟ مقدار آن چقدر است؟

حل. اگر $f(x)=Ax+B$ یك تابع خطی درنظر گرفته شود. آنگاه:

$$A=f(x+۱)-f(x)$$

می‌دانیم

$$f(۱)=۱۶/۳$$

و

$$f(۲)=۱۵/۱$$

پس

$$A=f(۲)-f(۱)=-۱/۲$$

با یك استقراء ساده می‌توان دید که،

$$\begin{aligned} f(x+n)&=A(x+n)+B\\ &=(Ax+B)+nA=f(x)+nA\\ &=f(x)+\underbrace{A+A+\cdots+A}_{\text{بار } n} \end{aligned}$$

اکنون

$$n=۱۹۸۳ \quad \text{و} \quad x=۲$$

را می‌گیریم،

$$f(۲+۱۹۸۳)=f(۲)+\underbrace{A+A+\cdots+A}_{\text{۱۹۸۳ مرتبه}}$$

پس

$$f(۱۹۸۵)=۱۵/۱-۱/۲-۱/۲-\cdots-۱/۲=-۲۳۶۴/۵$$

۷ـ تابع f بربازهٔ $[۰,۱]$ نامنفی و $f(۱)=۱$ است. اگر به ازاء هر دو عدد دلخواه $x_1\geqslant ۰$, $x_2\geqslant ۰$ و $x_1+x_2\leqslant ۱$ داشته باشیم،

$$f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)$$

ثابت کنید به ازاء همه مقادیر x،

$$f(x)\leqslant ۲x$$

آیا به ازاء همه مقادیر x،

$$f(x)\leqslant ۱/۹x$$

برقرار است.

حل. ازفرض مسأله نتیجه می‌شود که اگر $x\leqslant y$، آنگاه

$$2f(x) \leqslant f(2x) \quad \text{و} \quad f(x) \leqslant f(y)$$

با استفاده از این موضوع داریم؛

اگر $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$ آنگاه

$$f(x) \leqslant f(1) = 1 \leqslant 2x$$

اگر $\frac{1}{4} < x \leqslant \frac{1}{2}$ آنگاه

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2} f(2x) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 2x$$

به استقراء ثابت می‌شود که اگر

$$\frac{1}{2^{k+1}} < x \leqslant \frac{1}{2^k}$$

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2} f(2x) \leqslant \frac{1}{2^k} \leqslant 2x$$

ملاحظه می‌شود که $f(0) = 0$ پس به ازاء جمیع مقادیر x بر $[0, 1]$،

$$f(x) \leqslant 2x$$

ب) در حالت کلی خیر مثلاً،

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

این تابع در تمام شرایط مسأله صدق می‌کند، اما

$$f(0/51) > 1/9051$$

۸ـ ثابت کنید

$$(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \cdots + \sin\alpha_n)^2 + (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cdots + \cos\alpha_n)^2 \leqslant n^2$$

حل. از نامساوی کوشی ـ شوارتز ـ بونیا کوفسکی،

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

داریم

$$(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \cdots + \sin\alpha_n)^2 \leqslant n(\sin^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_2 + \cdots + \sin^2\alpha_n)$$

$$(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cdots + \cos\alpha_n)^2 \leqslant n(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 \cdots + \cos^2\alpha_n)$$

از جمع دو نامساوی نتیجه مطلوب بدست می‌آید.

۹ـ نامعادله

$$|\sin x - \sin y| + \sin x \sin y \leqslant 0$$

را حل کنید.

حل.

$$(1) \quad \sin x - \sin y + \sin x \sin y \leqslant 0$$

$$(2) \quad -\sin x + \sin y + \sin x \sin y \leqslant 0$$

یعنی

$$(1) \quad (1 - \sin x)(1 + \sin y) \geqslant 1$$

$$(2) \quad (1 - \sin y)(1 + \sin x) \geqslant 1$$

از ضرب نامعادلات اخیر درهم داریم،

$$\cos^2 x \cos^2 y \geqslant 1 \implies \cos^2 x = \cos^2 y = 1$$

$$x = \pi n \quad \text{و} \quad y = \pi m$$

با امتحان کردن جوابها ملاحظه می‌شود که در نامعادله صدق می‌کند.

۱۰ـ آیا روی صفحه محورهای مختصات می‌توان نواری طوری ساخت که نسبت به خط l به معادله

$$169x - 143y + 132 = 0$$

تقارن داشته و هیچ نقطه‌ای از آن مختصات صحیح نداشته باشد؟

حل. نواری را درنظر می‌گیریم که به طریق زیر تعریف شده باشد،

$$169x - 143y + 131 \leqslant 0$$

و

$$169x - 143y + 133 \geqslant 0$$

اگر نقطه‌ای با مختصات صحیح (p, q) وجود داشته باشد که در داخل این نوار قرار گرفته باشد، نامساوی زیر را خواهیم داشت،

$$-133 \leqslant 169p - 143q < -131$$

اما این ممکن نیست زیرا $169p - 143q$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است اما ۱۳۳ و ۱۳۲ــ و ۱۳۱ــ بخش‌پذیر نیست. بنابراین نوار بالا در شرایط مسأله صدق می‌کند.

۱۱ــ درستی برابری زیر را ثابت کنید.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}$$

$$=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{200}$$

حل. داریم،

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{199}$$

$$+\frac{1}{200}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{200}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{200}\right)$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}\right)$$

$$=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{200}$$

۱۲ــ از مثلثی یك ضلع، زاویه روبروی آن و طول نیمساز وارد بر آن ضلع مفروض است. مثلث را رسم کنید. (پاسخ به خوانندگان).

حل. فرض می‌کنیم مثلث ABC مثلث مطلوب باشد که از آن $BC=a$ و $AD=da$ و $\hat{A}$ معلوم است. BC را به اندازه a رسم می‌کنیم و روی آن کمان در خور $\hat{A}$ را رسم می‌کنیم. پس از مثلث مطلوب دایره محیطی و ضلع BC روی آن معلوم است. نیمساز AD، کمان BC را در نقطه M قطع می‌کند. چون $AMB \sim BMD$، پس

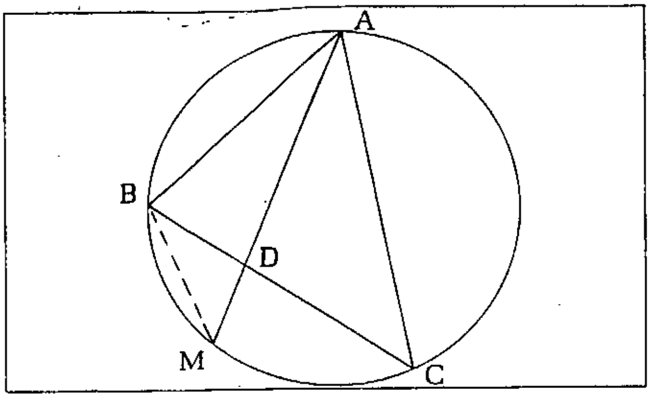
$$\frac{BM}{MD}=\frac{AM}{BM}$$

$$BM^2=AM\cdot MD$$

$$\begin{cases} AM\cdot MD=BM^2 \\ AM-MD=da \end{cases}$$

(BM معلوم است زیرا کمانش معلوم است.)

پاره خطهای AM و MD چون واسطه هندسی و تفاضلشان معلوم است قابل رسم‌اند و MA و MD به دست می‌آیند. از آنجا مثلث ABC رسم می‌شود.



۱۳ــ فرض می‌کنیم $n\geqslant 5$ عددی صحیح باشد نشان دهید n اول است اگر و فقط اگر به ازاء هر چهار عدد صحیح و مثبت n_1, n_2, n_3 و n_4 که

$$n=n_1+n_2+n_3+n_4$$

نامساوی $n_{i_1}\cdot n_{i_2}\neq n_{i_3}\cdot n_{i_4}$ برای هر تبدیل (i_1, i_2, i_3, i_4) از $(1, 2, 3, 4)$ بر قرار باشد.

حل. اگر n مرکب باشد می‌توان آنرا به صورت

$$n=(a+1)(b+1)$$

نشان داد. که در آن a و b اعداد صحیح و مثبتی هستند. در این صورت،

$$n=ab+a+b+1$$

که $ab\times 1=a\times b$ و نامساوی همواره برقرار نیست.

برعکس، اگر

$$n=n_1+n_2+n_3+n_4$$

باشد، بدون اینکه به کلیت اثبات خللی وارد شود فرض می‌کنیم

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{n_3}{n_4} \quad \text{یا} \quad n_1\cdot n_2=n_3\cdot n_4$$

اگر ساده شده این کسر را $\frac{c}{d}$ بگیریم،

$$\frac{n_1}{n_4}=\frac{n_3}{n_2}=\frac{c}{d}$$

در نتیجه اعدادی صحیح و مثبت مانند k و r وجود دارند بطوری‌که

$$\begin{cases} n_1 = kc \\ n_4 = kd \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} n_3 = rc \\ n_2 = rd \end{cases}$$

بنا بر این

$$n = kc + rd + rc + kd = c(k+r) + d(k+r) = (k+r)(c+d)$$

و n مرکب است.

۱۴- فرض می‌کنیم $f(x)$ و $g(x)$ چند جمله‌ای‌هایی باشند که، در رابطه

$$f(x^2+x+1) = g(x) \cdot f(x)$$

صدق می‌کنند. ثابت‌کنید $f(x)$ چند جمله‌ای با درجه زوج است.

حل. اگر $f(x)$ یك چند جمله‌ای با درجه زوج نباشد، درجه آن فرد خواهد بود و حداقل یك ریشه خواهد داشت. اگر α بزرگترین ریشه $f(x)$ باشد در این صورت

$$f(\alpha^2+\alpha+1) = f(\alpha) \cdot g(\alpha)$$

در نتیجه $\alpha^2+\alpha+1$ نیز ریشه چند جمله‌ای $f(x)$ است و چون $\alpha \leqslant \alpha^2+\alpha+1$ و α را بزرگترین ریشه $f(x)$ در نظر گرفته‌ایم و $\alpha^2+\alpha+1$ هم‌ریشه $f(x)$ است. به تناقض می‌رسیم بنابراین $f(x)$ نمی‌تواند از درجه فرد باشد.

۱۵- اگر $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ باشد ثابت‌کنید.

$$\frac{tg\,x_2}{tg\,x_1} > \frac{x_1}{x_2}$$

حل. این نامساوی را می‌توان به صورت

$$x_2\,tg\,x_2 > x_1\,tg\,x_1$$

نوشت. بنابراین کافیست ثابت‌کنیم تابع

$$f(x) = x\,tg\,x$$

در فاصله $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ اکیداً صعودی است. این تابع دراین فاصله مشتق‌پذیر است و داریم $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ و

$$f'(x) = tg\,x + x(1+tg^2x) > 0$$

بنابراین تابع در فاصله فوق‌الذکر اکیداً صعودی است.

۱۶- اگر a_1 و ... و a_n اعداد حقیقی باشند بطوری‌که

$$\sum_i a_i \text{ و } \sum_{i<j} a_i a_j \text{ و } \sum_{i<j<k} a_i a_j a_k \text{ و } \dots \text{ و } a_1 a_2 \cdots a_n$$

مثبت باشند، آنگاه a_1 و a_2 و ... a_n مثبت‌اند.

حل. می‌دانیم

$$\prod_{i=1}^{n} (x+a_i) = x^n + \sum_i a_i x^{n-1} + \sum_{i<j} a_i a_j x^{n-2} + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_n$$

در طرف دوم بنابه فرض ضرائب مثبت‌اند. چون هر $-a_i$ طرف اول را صفر می‌کند پس طرف دوم را نیز صفر خواهد کرد. ثابت می‌کنیم به ازاء هر i، $-a_i$ منفی و در نتیجه a_i مثبت است.

اگر به ازاء ای i $-a_i$ مثبت باشد به هر توانی برسد نیز مثبت است.

پس اگر در طرف دوم به جای x، $-a_i$ قرار دهیم چون ضرائب نیز مثبت‌اند پس طرف دوم همواره مثبت است که خلاف این است که به ازاء $-a_i$ طرف دوم صفر است. پس هر $-a_i$ منفی و در نتیجه هر a_i مثبت است.

۱۷- اگر a_i اعضاء یك تصاعد حسابی باشند که قدر نسبت آن عددی است صحیح و نا صفر، آنگاه

$$\sum_{i=0}^{k-1} \left[\frac{a+id}{kd}\right] = \left[\frac{a}{d}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{k} \left[\frac{a_i}{kd}\right] = \left[\frac{a_1}{kd}\right] + \left[\frac{a_2}{kd}\right] + \cdots + \left[\frac{ak}{kd}\right] = \left[\frac{a_1}{d}\right]$$

($[x]$ به معنی جزء صحیح x است.)

حل. ابتدا ثابت می‌کنیم،

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x+i-1}{n}\right] = [x]$$

برهان. این اثبات چند مرحله دارد.

۱- حکم‌را برای بازهٔ $[t_0, t_0+1[$ ثابت می‌کنیم. مثلاً

برای بازه]۱ ,۰]. فرض می‌کنیم x متعلق به این بازه باشد. پس داریم

$$0 \leqslant x < 1 \Longrightarrow [x]=0$$

$$0 \leqslant x < 1 \Longrightarrow 0 \leqslant \frac{x}{n} < \frac{1}{n} < 1$$

$$\Longrightarrow \left[\frac{x}{n}\right]=0$$

$$0 < \frac{1}{n} \leqslant \frac{x+1}{n} < \frac{2}{n} < 1$$

$$\Longrightarrow \left[\frac{x+1}{n}\right]=0$$

$$\vdots$$

$$0 < \frac{n-1}{n} \leqslant \frac{x+n-1}{n} < \frac{n}{n}=1$$

$$\Longrightarrow \left[\frac{x+n-1}{n}\right]=0$$

اکنون ثابت می‌کنیم اگر حکم به‌ازاء $x=x_0$ برقرار باشد، به ازاء $x=x_0\pm 1$ نیز برقرار است که در نتیجه با توجه به مرحله اول اثبات نتیجه می‌گیریم که حکم برای تمام اعداد حقیقی برقرار است.

فرض،

$$\sum_{i=1}^{m} \left[\frac{x_0+i-1}{m}\right]=[x_0]$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left[\frac{x_0+i}{n}\right]=\sum_{i=2}^{m+1} \left[\frac{x_0+i-1}{n}\right]$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \left[\frac{x_0+i-1}{n}\right]\right)+\left[\frac{x_0+n}{n}\right]-\left[\frac{x_0}{n}\right]$$

$$=[x_0]+1=[x_0+1]$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left[\frac{x_0+i-2}{n}\right]=\sum_{i=1}^{m-1} \left[\frac{x_0+i-1}{n}\right]$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x_0+i-1}{n}\right]\right)-\left[\frac{x_0+n-1}{n}\right]$$

$$+\left[\frac{x_0-1}{n}\right]=[x_0]-1=[x_0-1]$$

پس حکم ثابت است. با قرار دادن $\frac{a_1}{d}$ بجای x و k به جای n مسأله حل می‌شود.

۱۸- فرض کنید که $n \in N$. ثابت کنید

$$[(5+2\sqrt{6})^n]$$

یك عدد فرد است. ([ ] به معنی جزء صحیح می‌باشد.)

حل.

$$(5+2\sqrt{6})^n+(5-2\sqrt{6})^n$$
$$=\sum_{k=0}^{n} (1+(-1)^k)\binom{n}{k}(2\sqrt{6})^k 5^{n-k}$$

در حاصلجمع فوق اگر k فرد باشد، جمله متناظر آن، صفر می‌شود. بنابراین حاصل‌جمع فوق مجموع جملاتی است که k زوج باشد، بالنتیجه، حاصل آن یك عدد صحیح است. فرض می‌کنیم که مقدار آن A_n باشد. بنابراین،

$$A_n=(5+2\sqrt{6})^n+(5-2\sqrt{6})^n$$

که در آن به ازاء هر n، $A_n \in N$. از سوی دیگر

$$2\sqrt{6}+1 > 5 > 2\sqrt{6}$$

پس

$$0 < 5-2\sqrt{6} < 1$$

پس

$$0 < (5-2\sqrt{6})^n < 1$$

از اینجا نتیجه می‌شود

$$[(5-2\sqrt{6})^n]=1$$
$$A_n-(5-2\sqrt{6})^n=(5+2\sqrt{6})^n \Longrightarrow$$
$$[A_n-(5-2\sqrt{6})^n]=[(5+2\sqrt{6})^n] \Longrightarrow$$
$$A_n-1=[(5+2\sqrt{6})^n]$$

از طرفی A_n همواره زوج است (چرا؟) پس

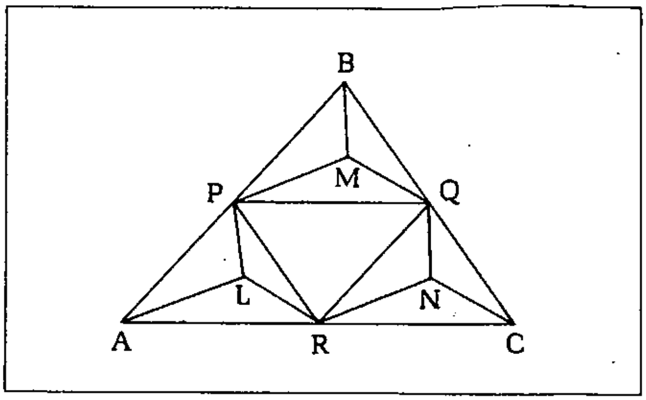
$$[(5+2\sqrt{6})^n]$$

یك عدد فرد است.

۱۹- در مثلث حاده‌الزاویه، از وسط هریك از اضلاع به دو ضلع دیگر عمود رسم می‌کنیم. ثابت کنید مساحت شش ضلعی محدود به این عمودها برابر نصف مساحت مثلث است.

حل. فرض می‌کنیم ABC مثلث مفروض باشد. P و Q و R را به ترتیب اوساط AB و BC و AC درنظر می‌گیریم مثلث‌های APR و PBQ و RQC با مثلث ABC متشابه و حاده‌الزاویه هستند. بنابراین نقاط L و M و N محل برخورد

ارتفاعات این مثلث‌ها در داخل آنها قرار دارد. (شکل زیر).



S' مساحت شش ضلعی LPMQNR برابر است با،

$$S'=S_{PQR}+S_{PMQ}+S_{QNR}+S_{RLP}$$

$$=\frac{1}{4}S+S_{PMQ}+S_{QNR}+S_{RLP}$$

که در آن S مساحت مثلث ABC می‌باشد. داریم

$$\triangle_{APR}=\triangle_{PBQ}=\triangle_{RQC}$$

پس

$$\triangle_{PMQ}=\triangle_{ALR}$$

و

$$\triangle_{QNR}=\triangle_{PLA}$$

بنابراین

$$S_{PMQ}+S_{QNB}+S_{RLP}=S_{APR}$$

$$=\frac{1}{4}S \Longrightarrow S'=\frac{1}{2}S$$

۲۰ـ ثابت کنید در مجموعه مثلث‌های $T(\theta)$ مثلثی به‌اضلاع $\sin\theta$ و $\cos\theta$ و $\cos 2\theta$ وجود دارد $\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$.

ماکزیمم شعاع دایره محیطی $R(\theta)$ را تعیین کنید.

حل. ابتدا ثابت می‌کنیم به ازاء $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ مثلث ABC وجود دارد. برای این منظور نامساوی‌های زیر را ثابت می‌کنیم،

$$(1)\quad \sin\theta<\cos\theta+\cos 2\theta$$

$$(2)\quad \cos 2\theta<\sin\theta+\cos\theta$$

$$(3)\quad \cos\theta<\sin\theta+\cos 2\theta$$

چون $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ پس $\cos\theta>\sin\theta$ و $\cos 2\theta>0$

در نتیجه نامساوی (۱) واضح است. برای اثبات نامساوی (۲) داریم،

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$
$$=(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)$$
$$<\sin\theta+\cos\theta$$

چون

$$\cos\theta+\sin\theta>0$$

طرفین را بر آن تقسیم می‌کنیم

$$\cos\theta-\sin\theta<1 \Longrightarrow \cos\theta<1+\sin\theta$$

که با توجه به شرط $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ برقرار است.

برای اثبات نامساوی سوم می‌توان نوشت.

رابطهٔ (۳) معادل است با

$$\cos\theta-\sin^2\theta>\cos\theta-\sin\theta$$

یعنی معادل است با

$$(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)>\cos\theta-\sin\theta$$

چون $\cos\theta-\sin\theta>0$ پس طرفین را به آن تقسیم می‌کنیم که این همواره برقرار است.

$$\cos\theta+\sin\theta>1$$

اگر $\theta=0$ آنگاه اضلاع مثلث ۰ و ۱ و ۱ خواهد بود که مثلثی وجود ندارد. در این حالت

$$R=\frac{1}{2} \quad \text{پس} \quad \theta\longrightarrow 0$$

همچنین اگر $\theta=\frac{\pi}{4}$ آنگاه اضلاع مثلث $\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\frac{1}{\sqrt{2}}$ و ۰ خواهد بود. که باز مثلثی وجود ندارد و

$$R=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

پس

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}<R(\theta)<\frac{1}{2}$$

حال اگر از O به B و C وصل کنیم AB و BC مقابل زوایای 2θ و $\pi-4\theta$ خواهد بود اگر $R=\frac{1}{2}$ آنگاه

$$AB=\sin\theta \quad \text{و} \quad BC=\cos 2\theta \quad \text{و} \quad AC=\cos\theta$$

بنابراین به ازاء هر θ که $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ آنگاه

$$R(\theta)=\frac{1}{2}$$

اسامی افرادی

که حل مسائل پنجمین مسابقه

ریاضی کشور و بعضی از

مسائل شماره ۱۶

را ارسال داشته‌اند

مسعود مجامی، دوم ریاضی، تهران - کامران کریمی دانش‌آموز چهارم ریاضی، تهران - فریبرز محمدزاده غربی، دانش‌آموز چهارم ریاضی، تهران - عبدالرضا رهبر دانشجو، تهران - کیوان پژوتن، دانش‌آموز سال چهارم ریاضی، تهران - صدیق حیدریان، دانشجو، سنندج - غفور غفوری و علی کریمی دانش‌آموز، میانه - احمدرضا شهیدی، دانش‌آموز دوم ریاضی، نجف‌آباد - پدرام صفری، کرج - مهدی رضائی، دانش‌آموز، قم - محمدحسین محمدیان دانش‌آموز، مشهد - مهرداد شمس دانش‌آموز، اصفهان - حسین صفری، دانش‌آموز، تهران - نادر فلاح، دانش‌آموز، کرج - شیرداد شریف، دانش‌آموز، قم - هادی السقی، دانش‌آموز، تهران (متأسفانه حل ارسالی مسأله هندسه درست نیست).

مجید صادقی، دانش‌آموز چهارم ریاضی، اصفهان - فرنوش رهگذر، دانش‌آموز سوم ریاضی، تهران - نادر وندیوسفی، میاندوآب - امیرحسن جمالی، دانش‌آموز سوم ریاضی، شاهرود - سیروس عزیزمحمدی، دانشجو، تهران - منوچهر و بهمن جعفری، دانش‌آموز - سید علیرضا مصباح، سوم ریاضی، رشت - منصور حمایتی، دانش‌آموز - فرامرز صابری دانش‌آموز دوم ریاضی، تهران - آرش سعیدی، دانشجو - بهزاد علیزاده، دانش‌آموز، نوشهر - حمیدرضا فنایی، دانشجو - تهران.

اسامی خوانندگان

عزیزی که در تنظیم حل

مسائل از راه‌حلهای

آنها هم استفاده شده است

(شماره مسائل ذیلاً درج شده‌است)

علی‌اکبر جاویدمهر دبیر - ساوه
(۱ و ۸ و ۱۱ و ۱۸)

علیپور اسکندانی - دانش‌آموز - تبریز
(۱ و ۱۱ و ۱۲)

اوستاگودرزی - دانش‌آموز - بروجرد
(۱ و ۴)

کیوان پژوتن - دانش‌آموز - تهران (۴)

محمد سباتی - دانش‌آموز - خوزستان
(۴ و ۸ و ۱۵ و ۱۹)

محمدجابر بران - تبریز
(۴ و ۶ و ۱۵ و ۲۰)

مهدی رضایی - دانش‌آموز - تهران
(۴ و ۵ و ۶ و ۸ و ۹ و ۱۰ و ۱۵ و ۱۷)

عبدالرضا رهبر - دانشجو - تهران
(۴ و ۱۱)

پیام سنایی - دانش‌آموز - اصفهان
(۴ و ۱۹ و ۲۰)

صدیق حیدریان - دانشجو - سنندج
(۴ و ۱۵)

مسعود مجامی - دانش‌آموز - تهران
(۴ و ۱۹)

حسین رستمی - دبیر - آشتیان
(۴ و ۱۵)

مهرداد جلالیان - دانش‌آموز
(۴ و ۱۱ و ۱۵)

یونس یاوری - دانش‌آموز - تهران
(۵ و ۱۵)

اسماعیل بابکی - دبیر - مینودشت
(۱۱ و ۱۵ و ۱۹)

سیامک دلشادپور - دانش‌آموز - بندرانزلی
(۱۱ و ۱۷ و ۱۹)

مجید مطهری - دانش‌آموز - مشهد
(۱۱ و ۱۲ و ۱۶ و ۱۷ و ۱۹)

داریوش هادیزاده - دانشجو (۱۹)

پیام سنایی - دانش‌آموز - اصفهان
(۴ و ۲۰)

محمد بیاتانی - دانشجو - بروجرد
(۴ و ۶ و ۱۵)

عیسی پیله‌ور (۱ و ۸ و ۱۲)

حمیدرضا شاطری نجف‌آبادی - اصفهان
(۷ و ۸ و ۹ و ۱۱ و ۱۴ و ۱۸)

جاوید مهر - دبیر ریاضی - ساوه
(۴ و ۹ و ۱۵ و ۱۷)

حمیدرضا فنایی - دانشجو - تهران
(۱ و ۳ و ۴ و ۵ و ... ۲۰)

یك پارادوكس درباره انتگرالهای ناسره (توسعی)

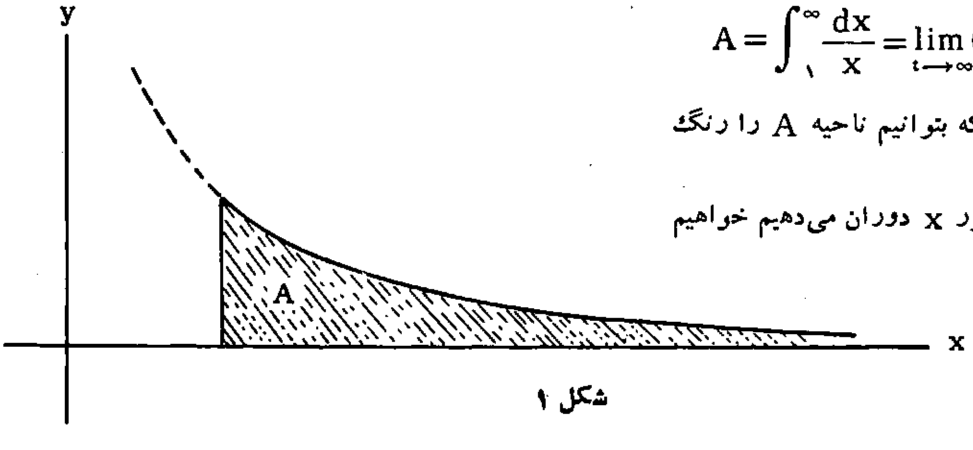
ترجمه: سید محمدعلی بصام‌تبار

خیلی روشن و شناخته شده است که:

$$A=\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{t\to\infty}(\ln t)=\infty.$$

به حد کافی رنگ وجود ندارد که بتوانیم ناحیه A را رنگ کنیم! (شکل ۱).

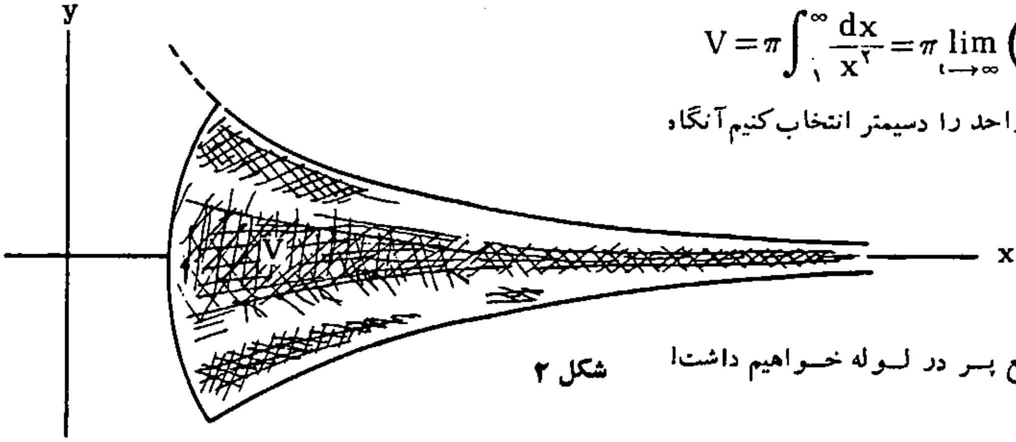
حال این ناحیه را حول محور x دوران می‌دهیم خواهیم داشت:



شکل ۱

$$V=\pi\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{2}}=\pi\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{t}+1\right)=\pi.$$

چنین به نظر می‌آید اگر ما واحد را دسیمتر انتخاب کنیم آنگاه کمتر از ۳/۲ لیتر از مایع پر در لوله خواهیم داشت! (شکل ۲).



شکل ۲

شگفتی اعداد

فرستنده: کمال زارعی

$1!=1$

$145!=1!+4!+5!$

$40585=4!+0!+5!+8!+5!$

با یك برنامه نویسی بـه زبان فرترن تعدادی از این اعداد را به‌دست آورید. آیا فراوانی این اعداد در مقایسه با فراوانی اعداد اول، اعداد متحابه (دوستدار هم)، چگونه است؟

گزارش سفر هیأت اعزامی ایران جهت شرکت در بیست‌ونهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی

دکتر علیرضا مدقالچی

هیأت اعزامی ایران برای شرکت در بیست‌ونهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی ساعت ۸/۱۵ بعدازظهر روز چهارشنبه پانزده تیرماه ۶۷ با بدرقه مسئولین محترم وزارت آموزش‌وپرورش از طریق پکن و توکیو عازم استرالیا شد. سرپرستی این هیأت را آقای دکتر محمدعلی نجفی عضو هیأت علمی دانشگاه صنعتی شریف و سرپرستی دوم را آقای دکتر علیرضا مدقالچی عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت معلم عهده‌دار بودند. آقای توفیق حیدرزاده از مجله دانشمند در این سفر همراه هیأت بودند. دانش‌آموزان شرکت کننده عبارت بودند از:

۱) علیرضا بیگدلی	سال چهارم	از قم	
۲) آرش حسیبی	«	«	« تهران
۳) حسام حمیدی تهرانی	«	«	« «
۴) محمدعلی خجسته‌پور	«	سوم	« شیراز
۵) امیراعلم غضنفریان	«	چهارم	« زنجان
۶) بهزاد نظری	«	«	« اصفهان

یادآوری می‌شود که اعضاء این تیم از طریق دو آزمون استانی و نهایی انتخاب شده، و در یك اردوی دو هفته‌ای در مجموعهٔ ورزشی انقلاب تهران شرکت کرده بودند. در این اردو مسایل مختلف ریاضی از جمله مسایل المپیادهای گذشته توسط اساتید دانشگاه و دبیران مجرب مورد بحث و بررسی قرار گرفت. کلیه امور مربوط به برگزاری مسابقات داخلی و انجام سایر مراحل اعزام با همت و مساعدت سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی انجام گرفت و کمیته ویژه‌ای تحت عنوان کمیته مسابقات ریاضی دانش‌آموزی کشور عهده‌دار نظارت بر اجرای مسابقات داخلی بود.

هیأت اعزامی با بدرقه و دعای خیر ریاست محترم سازمان و عده‌ای از مسئولین سازمان با دلی سرشار از امید و آرزو از طریق پاویون دولتی به سوی توکیو پرواز کرد. هواپیما در ساعت ۳ صبح به وقت تهران (ساعت ۷/۳۰ وقت پکن) در فرودگاه پکن به زمین نشست و در ساعت ۹ پکن را به قصد توکیو ترك کرد، در ساعت ۲/۵۷ بعدازظهر به وقت توکیو در فرودگاه ناریتای توکیو به زمین نشست. بالاخره ساعت ۸ و ۶ دقیقه بعدازظهر از توکیو پرواز و در ساعت ۵/۲۰ صبح به وقت ژاپن در فرودگاه بین‌المللی سیدنی به زمین نشست. اختلاف ساعت پکن و تهران چهار ساعت‌ونیم و توکیو و سیدنی یك ساعت است. چین و ژاپن اختلاف ساعت ندارند، در فرودگاه سیدنی آقای پیتر اوهالرن (Peter J. Ohellarn) رئیس کمیته اجرایی بیست‌ونهمین المپیاد از هیأتها استقبال می‌نمود و راهنمایی‌های لازم را ارائه می‌داد. به هرحال هیأت اعزامی بعداز یك مسافرت طولانی به اولین مقصد المپیاد رسید و از فرودگاه توسط سرویس دانشگاه ما را به دانشگاه نیوساوت ویلز (New South Wales) هدایت کردند. هیأت ما از اولین هیأتهایی بود که به سیدنی رسیده بود. در این دانشگاه هیأتها در خوابگاههای مختلف اسکان می‌یافتند. سیدنی شهر بزرگ و تمیزی است و حدود سه‌ونیم میلیون نفر جمعیت دارد. یکی از بناهای بسیار با عظمت شهر سیدنی برج این شهر است این برج بر یك ساختمان تجارتی ده طبقه قرار گرفته و ارتفاع آن در حدود سیصدمتر است که حقیقتاً ثمره‌ای از دانش و تکنولوژی قرن بیستم است. در اوج این برج ساختمانی مدور از چهار طبقه است که در آن فروشگاه و رستوران و ایوانی مدور قرار دارد

که مشرف بر کلیه نقاط شهر ساحلی سیدنی است.

در روز یکشنبه نوزدهم تیرماه متوجه شدیم که عده‌ای از مسلمانان بر علیه حمله آمریکا به هواپیمای ایرباس ۶۶۵ تظاهرات و راهپیمایی کرده‌اند و مراتب نفرت و انزجار خود را ابراز می‌دارند. جالب توجه این بود که عده‌ای از غیر مسلمانان نیز در این تظاهرات شرکت داشتند. خبر این تظاهرات به طور وسیع در رسانه‌های گروهی پخش گردید. اعضای تیم ایران نیز در بخشی از این تظاهرات شرکت داشتند. خبر این تظاهرات به‌طور وسیع در رسانه‌های گروهی پخش گردید.

روز دوشنبه بیستم تیرماه مراحل برگزاری المپیاد به طور رسمی شروع شد. در این روز سرپرستان اول هیأتها برای شرکت در جلسات هیأت ژوری و طرح و انتخاب سؤال و سایر مراحل امتحان به‌شهر کنبرا (Canberra) اعزام شدند. اعضاء هیأتها همراه با سرپرست دوم در سیدنی ماندند. در این مدت، فرصت مناسبی پیش‌آمد تا با سرپرستان هیأتها دربارهٔ موضوعات مختلف آموزش ریاضی و نحوه انتخاب اعضاء تیم‌هایشان وسایرمسایل علمی و آموزشی مذاکره نماییم. آزمون مقدماتی درکشورهای مختلف حداقل در دو مرحله انجام می‌گیرد. مثلاً سرپرست دوم یوگسلاوی می‌گفت که یك آزمون در بین ایالات مختلف و یك آزمون نهایی به عمل می‌آید وبعداز طی یك اردوی دو هفته‌ای انتخاب نهایی انجام می‌گیرد. درکشورهای بلوك شرق مدارس ویژه‌ای (Special school) برای تأمین کادر فنی و علمی کشور وجود داردکه اعضاء تیمهای شرکت‌کننده در المپیادها نیز از این مدارس انتخاب می‌شوند وآزمونهای مقدماتی بین کلیه دانش‌آموزان به عمل می‌آید و لذا یك دانش‌آموز می‌تواند حتی سه یا چهاربارهم در المپیاد شرکت کند. در فرانسه و آلمان غربی هم المپیاد داخلی انجام می‌گیردکه دومرحله‌ای است. سیستم انتخاب درآمریکا و انگستان چند مرحله‌ای است یعنی دانش‌آموزان طی چندین مرحله آزمون تستی و تشریحی و گذراندن اردوهای مختلف انتخاب می‌شوند. آزمون اولیه در این دوکشور تستی است و بین تمام دانش‌آموزان انجام می‌گیرد. از مجموع آنچه در مورد انتخاب اعضاء تیم بر می‌آید آن است که در هر یك از کشورهای شرکت‌کننده، کمیته ویژه‌ای مسئول برگزاری المپیادهای داخلی است این کمیته‌ها برای تشویق و ترغیب جوانان برای ادامه تحصیل در رشتهٔ ریاضی فعالیت می‌کنند و هر ساله جزواتی از مسایل مختلف ابتکاری تهیه می‌کنند و در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌دهند. برای انتخاب اعضاء تیم چندین مرحله گزینش انجام می‌گیرد و مراحل آماده‌سازی در اردوهای مختلف به عمل می‌آید. در این اردوها نه تنها مسایل مختلف ریاضی مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد بلکه مباحث درسی هم تدریس می‌شود. مثلاً دانش‌آموزان رومانی اظهار می‌کردندکه در طی اردو مسایل زیادی از مجله ماهانه ریاضی را حل کرده‌اند. رومانی جزو کشورهایی است که همواره در ردیفهای بالا قرار دارد.

بدون شك ایده اولیه تأسیس المپیاد بین‌المللی ریاضی شناساندن اهمیت دانش ریاضی برای پیشرفت صنعت وتکنولوژی و تشویق جوانان برای ادامه تحصیل در این رشته است و مراحل مختلف المپیادگویای این تشویق و ترغیب است که ریاضی‌کاران جوان همراه با سرپرستان خود از ملیتهای مختلف در یك محیط صمیمی گرد هم جمع می‌شوند و با تجربیات آموزشی وعلمی وپیشرفتهای کشورهای دیگر آشنا می‌شوند، و نیز از مشکلات عدم استقبال جوانان از رشته ریاضی و علل افت با خبر می‌گردند. یکی از مسائلی که در این رآستا در ضمن صحبت با سرپرستان هیأتها به دست آمد این است که تقریباً در اکثر کشورها عدم استقبال از رشتهٔ ریاضی به چشم می‌خورد. حتی درکشورهای بلوك شرق هم دیپلمه‌های ریاضی ترجیح می‌دهندکه در رشته پزشکی ادامه تحصیل دهند. به نظر ما عامل اول عدم استقبال، به ماهیت رشتهٔ ریاضی بر می‌گرددکه ذاتاً مشکل است و کاربردآنی ندارد. عامل دوم، عدم شناخت افراد مختلف‌جامعه، حتی افراد با تحصیلات عالی، ازدانش ریاضی است، یا بهتربگوییم عدم درك آنها از ارتباط بین نظریه‌های پیشرفته دانش ریاضی با صنعت و تکنولوژی است. بالاخره عامل سوم، عامل اقتصادی است که وضع اقتصادی یك دبیریا استاد ریاضی در مقایسه با بعضی‌از مشاغل دیگرچندان رضایت‌بخش نیست. مثلاً سرپرست تیم یوگسلاوی می‌گفت که درکشورش حقوق یك استاد ریاضی یك سوم حقوق یك مکانیك است.

در اینجا بی مناسب نیست که به تشکیلات اداره‌کننده در سیدنی وکنبرا اشاره شود. تشکیلات بسیار منظمی عهده‌دار اداره برنامه‌های المپیاد و برنامه‌های جنبی و بازدیدها بودکه از اعضاء انجمن ریاضی استرالیا، انجمن ریاضی دبیران، دانش‌آموزان برندهٔ مدال سالهای گذشته تشکیل شده بود.

صبح روز پنجشنبه بیست‌سوم تیرماه کلیه هیأتها همراه با سرپرستان و ناظرین از شهر سیدنی عازم کنبرا شدند. این

مسافرت توسط اتوبوس چهار ساعت طول کشید. اطراف جاده بین سیدنی و کنبرا پوشیده از جنگلهای سرسبز و مزارع کشاورزی و مراتع دامپروری است که گویای فعالیتهای خستگی‌ناپذیر انسانهایی است که برای ساخت جامعهٔ خود مجدانه فعالیت می‌کنند، به طوری که کشور خود را به صورت یکی از کشورهای بزرگ صادرکننده محصولات کشاورزی و دامپروری درآورده‌اند. گرچه فرهنگ غربی بر این جامعه حاکم است و مسایل اخلاقی رو به زوال، ولی نمی‌توان رشد و ترقی جامعه را نادیده انگاشت. جوامع دیگر می‌توانند سخت‌کوشی و فعالیت افراد این جامعه را سرمشق قرار دهند و در چهارچوب فرهنگ و سنت خویش از تجربیات آنان بهره جویند و به جای به کار گرفتن سرمایه‌های خود در راههای غیر تولیدی و تجاری به کارهای تولیدی و کشاورزی و صنعتی بپردازند.

کنبرا شهر بسیار بزرگی است و در حدود دویست‌وهفتاد هزار هکتار وسعت دارد. معهذا، جمعیت آن در حدود سیصد هزار نفر است. در واقع، پایتخت ملی (National Capital) وسیاسی استرالیا است. کلیه ساختمانهای دولتی و سفارتخانه‌ها در این شهر قرار دارد. اعضاء هیأتها همراه با سرپرستان دوم در کالج مطالعات پیشرفته کنبرا (Canberra College of advanced studies) اسکان یافتند. سرپرستان اول هیأتها کماکان در محل دیگری بودند وهیچ ارتباطی بین سرپرستان اول واعضاء هیأتها وجود نداشت. اعضاء هیأتها از شماره ۱ تا ۶ و سرپرست اول ۷ و سرپرست دوم ۸ و با علامت اختصاری کشورها مشخص شده بود یعنی کارت شناسایی ما به صورت IRA1 ، ... ، IRA6 برای شرکت‌کنندگان در مسابقه، IRA7 برای سرپرست اول و IRA8 برای سرپرست دوم وناظر تیم به‌صورت IRA8Z شماره‌گذاری شده بود. این کالج بسیار زیباتر و تمیزتر از دانشگاه محل اقامت در سیدنی بود. خوابگاهها تمیزتر و منظمتر بود. ساختمانها بسیار وسیع، فضای سبز، زمین و سالنهای مختلف ورزش، دریاچه قایقرانی، ساختمانهای خیلی زیاد برای اسکان دانشجویان، قسمتهای مختلف دانشگاه را تشکیل می‌داد. از همه مهمتر کتابخانه بسیار وسیع و کاملاً کامپیوتری و دانشکده‌آموزش علوم با وسایل و امکانات بسیار مدرن جلب توجه می‌کرد.

کمسیونی مرکب ازهیجده نفر از اساتید ممتاز دانشگاهها، انجمن ریاضی استرالیا، انجمن ریاضی دبیران، نماینده ریاضیدانان زن، سرپرست آکادمی علوم استرالیا، نماینده دانشکده‌آموزش علوم سیدنی، رئیس کالج پیشرفته کنبرا، مسئول IBM استرالیا، سرپرست المپیاد داخلی استرالیا و نماینده‌ای از طرف وزارت‌آموزش وپرورش و اشتغال تشکیل شده بود. سرپرست این کمسیون پروفسور R. B. Potts از بخش ریاضی کاربردی دانشگاه‌آدالایت بود. اولین جلسه این کمسیون در اوت ۱۹۸۴ برای بررسی امکان پذیرایی بیست‌ونهمین المپیاد ریاضی با دویستمین سال تشکیل حکومت در استرالیا همزمان شد. جلسات بعدی در ماه مه ۱۹۸۶ و نوامبر ۱۹۸۷ برای استراتژی اساسی و برنامه‌ریزی و جدول زمانبندی تشکیل شد. بالاخره کمیته اجرایی تشکیل و بودجه لازم پیش‌بینی گردید. با توجه به برنامه‌ریزی کامل و مرتبی که پیش‌آمده بود همهٔ برنامه‌ها به طور کامل و منظم انجام گردید. گفته شد که هزینه‌ای در حدود پانصدهزار دلار استرالیایی صرف برپایی این المپیاد شده است که ۲۵٪ از آن توسط وزارت‌آموزش وپرورش فدرال و بقیه توسط شرکت IBM و سایر مؤسسات تهیه شده است. کمیته اجرائی از ده نفر اعضاء هیأت علمی دانشگاههای مختلف و یك مشاور برای کامپیوتری کردن مراحل تشکیل شده بود، وظیفه عمده این کمیته عبارت بود از:

تشویق هرچه بیشتر ریاضیدانان و دبیران برای شرکت در اجرای المپیاد، تشویق شرکتهای مختلف برای مساعدت، تشویق کشورهایی که قبلاً در المپیادهای قبلی شرکت کرده‌اند و نیز کشورهایی که به نحوی با استرالیا ارتباط دارند، تشکیل کمیته جنبی برای هیأت ژوری، و کامپیوتری کردن کلیه مراحل المپیاد و برنامه‌ریزی برای المپیادهای آینده. سایر کمیته‌ها عبارت بودند از: کمیته برنامه‌ریزی، کمیته اطلاعات، کمیته مالی، کمیته علمی. ارگان اصلی همان هیأت ژوری است که امسال نیز مثل سال گذشته اقدام نمود.

مراسم رسمی افتتاحیه در ساعت ۱۴ روز پنجشنبه بیست‌وچهارم تیرماه در یکی از سالنهای کالج و با شرکت هیأتهای چهل‌ونه کشور شرکت‌کننده در المپیاد و ناظرین (مجموعاً از پنجاه‌وهفت کشور) و نمایندگیهای سیاسی کشورهای شرکت‌کننده شروع شد. این مراسم با شکوه با نواختن سرود ملی استرالیا و افراشتن پرچمهای کشورهای شرکت‌کننده آغاز شد. در این مراسم سرپرستان اول هیأتها با تشریفات خاصی وارد سالن شده و در جایگاه مخصوص قرارگرفتند. اعضاء اصلی عبارت بودند از: وزیر

آموزش و پرورش، رئیس کمسیون المپیاد ۱۹۸۸، رئیس آکادمی علوم استرالیا، رئیس کالج تحصیلات پیشرفته کنبرا، رئیس کمیته اجرایی و رئیس کمیته محلی. ابتدا رئیس کمسیون فعالیتهای چهارساله را بر شمرد و سپس هر یك از افراد فوق‌الذکر ضمن خوش‌آمدگویی و آرزوی موفقیت برای شرکت‌کنندگان، اظهار امیدواری کردند که این المپیادها بتوانند به رشد و پیشرفت دانش ریاضی در کشورهای متبوع شرکت‌کنندگان کمك کند و نقش آنرا برای خدمت به جامعه بشری روشنتر سازد و دانش‌آموزان مستعد را برای ادامه راه خود در ریاضی تشویق کند. به طوری که قبلاً ذکر گردید کلیه مراحل این المپیاد عوامل مشوقی برای رشد و دانش ریاضی و جلوگیری از افت آن است. این مراسم در ساعت ۱۶ پایان یافت. سرپرستان اول به طور جداگانه سالن را ترك کردند وهنوز ارتباط آنها با اعضاء تیم‌های خود قطع بود.

روز جمعه بیست‌وچهارم تیرماه اولین آزمون از ساعت ۸/۵ صبح تا ساعت ۱ بعدازظهر با سه سئوال و با امتیاز هرسئوال ۷ نمره شروع شد، به این صورت که راهنماها و سرپرستان دوم هیأت اعضاء تیمهای خود را برحسب شماره در اطاقهای جداگانه‌ای قرار دادند یعنی کلیه شماره‌های ۱ در یك اطاق و به همین ترتیب ۲ و ۳ و ... و ۶. آزمون بعدی روز شنبه بیست‌وپنجم تیرماه با همان روال انجام گرفت. هیچیك از سرپرستان اول و دوم و راهنماها در جلسات آزمون شرکت نداشتند وآزمون زیر نظر کمیته ویژه‌ای انجام گرفت. بعداز شروع آزمون دوم سرپرستان اول تیم‌ها از قرنطینه خارج شدند و در عصر همان روز اوراق امتحانی تیم ایران در اختیار ما قرارگرفت. اوراق هر شرکت‌کننده در پوشهٔ جداگانه قرار داشت کلیه جاهای سفید با رنگ قرمز علامت گذاری شده و تعداد برگها نیز در روی پوشه نوشته شده بود. اوراق توسط سرپرستان تصحیح و نمره پیشنهادی در یك جدول جداگانه‌ای نوشته می‌شد. هیچ نمره‌ای نباید در روی ورقه داده می‌شد. این نمرات درشش جلسه نیم‌ساعته با اعضاء کمیته مصححین بحث‌ونمره نهایی توسط آن کمیته ارائه می‌شد. سؤالات به مراتب مشکلتر ازسؤالات سال گذشته بود، به‌طوری که مجموع نمرات اولین تیم ۲۱۷ بود درحالی که سال گذشته تیم اول نمره ۲۵۰ کسب نموده بود. به هرحال یك گروه مرکب ازشش تیم شش نفره عهده‌دار تصحیح اوراق بود یعنی هر سؤال توسط یك گروه دو نفره تصحیح می‌شد و همزمان سه گروه یك سؤال را تصحیح می کردند. سرپرستی این تیم با یك استاد دانشگاه (Chief of Coordinator) و سه نفر مصحح اصلی (Senior Coordinator) از اساتید دانشگاه و سی‌وشش نفر مصححین از اساتید دانشگاه، دانش - آموزان برنده مدال المپیادهای گذشته و دبیران زبده بودند. در هر جلسه هماهنگی نمرهٔ هر سؤال توسط سرپرستان تیم به مصححین پیشنهاد می‌شد و بعداز ترجمه اوراق و بررسی آنها نمره‌نهایی توسط مصححین تعیین می‌شد. این کار بادقت خاصی انجام گرفت که بجرأت می‌توان ادعا کرد که حق کسی ضایع نگردید و نمرهٔ خارج از حق هم به‌کسی داده نشد. نمرات بلافاصله در تابلوی بزرگی در سالن ناهارخوری برحسب شماره شرکت‌کننده‌ها و با کدکشورها اعلام می‌شد. عصر روز دوشنبه بیست‌وهفتم تیر ماه کلیه مراحل تصحیح و تعیین امتیازها به اتمام رسید. در ساعت $14\frac{1}{2}$ کمیته جنبی (IMO Site Comitte) و متعاقب آن هیأت ژوری تشکیل شد. در این جلسه ابتدا میزبان المپیادهای آینده به شرح زیر تعیین شدند:

جمهوری فدرال آلمان	۱۹۸۹
جمهوری خلق چین	۱۹۹۰
سوئد	۱۹۹۱
جمهوری دموکراتیك آلمان	۱۹۹۲
ترکیه	۱۹۹۳
بلژیك	۱۹۹۴
مشخص نشد	۱۹۹۵
برزیل	۱۹۹۶
مشخص نشد	۱۹۹۸ و ۱۹۹۷
رومانی	۱۹۹۹

در این جلسه موضوعات دیگری نیز مورد بحث و بررسی قرارگرفت. سرپرست تیم فرانسه اظهار داشت که در چند سال گذشته سیستم آموزشی عوض شده ولی سیستم المپیاد عوض نشده است باید مسایلی از احتمالات، اعداد مختلط، در مسایل المپیاد گنجانده شود. سرپرست تیم آمریکا می گفت که مسایل حساب دیفرانسیل و هندسه تحلیلی باید جزو مسایل المپیاد باشد. او پیشنهاد کرد که تعداد دفعات شرکت برای یك فرد محدود به دوبار گردد. این پیشنهاد به این خاطر مورد بحث قرار گرفت که متأسفانه در بعضی‌ازکشورها مسأله المپیاد از روال اصلی خارج شده و صرفاً جنبه حرفه‌ای و قهرمان‌پروری و یا احیاناً سیاسی گرفته است. به هرحال در مورد هیچیك

از پیشنهادهـای فوق تصمیم‌گیری به عمل نیامد. هیأت ژوری در ساعت ۱۹ همانروز برای بحث و بررسی در مورد اعطاء مدال و با شرکت سرپرستان دوم تیم‌ها به عنوان ناظر تشکیل شد. طبق سنت المپیاد بـه نصف شرکت‌کنندگـان مدال تعلق می‌گیرد. فرمول تعلق مدالها به این صورت است که به طور تقریبی $\frac{N}{12}$ طلا، $\frac{2N}{12}$ نقره، $\frac{3N}{12}$ برنز، که N تعداد شرکت کنندگـــان است. و از این‌رو تعلق مـــدال بـــه صورت ۲۲ ⩽ برنز ⩽ ۱۴، ۳۱ ⩽ نقره ⩽ ۲۳، ۳۲ ⩽ طلا بـه تصویب رسید. بـه این ترتیب بـه تعداد ۶۵ نفر مدال برنز، ۴۸ نفر مدال نقره، و ۱۷ نفر مدال طلا تعلق گرفت.

از دیگر بحث‌هـای این جلسه اعطاء جایزه به افرادی بود که مدال دریافت نکرده بودند. بحث عمده بر سر این بود که این افراد سرخورده نشوند. هیأت ژوری بعداز بحث زیاد به این نتیجه رسید کـه طبق سنت المپیادهای گذشته به هر یك از شرکت کنندگان دیپلم شرکت در المپیاد اعطاء گـردد. بحث دیگـر در مورد اعطاء جایزه مخصوص بود معمولاً* این جایزه به کسی تعلق می‌گیرد که برای یك مسأله راه‌حلی استثنایی ارائه دهد. امسال این جایزه به یك دانش‌آموز بلغاری تعلق گرفت که راه‌حل خیلی زیبایی برای مسأله ۶ ارائه داده بود. مسأله ۶ یکی از مشکلترین مسایل المپیاد بود و تعدادکمی این مسأله را حل کرده بودند.

مراسم اختتامیه المپیاد واعطاء جوایزدرساعت ۲ بعدازظهر روز چهارشنبه بیست‌ونهم تیرماه در سالن تأترشهر برگـزار گردید. گفته می‌شدکه این سالن گنجایش ده هزار نفر جمعیت دارد. در این مـراسم ابتدا آقـــای ر. ج. ال. هـــاوك (R. J. L. Hawke) نخست‌وزیر استرالیا سخنرانی کـرد و بعد مدالها به شرح زیر اعطاء گردید:

مدالهای طلا توسط آقای نخست‌وزیر، مدالهای نقره در دو مرحله توسط رئیس برگـزاری جشنهای دویستمین سال تشکیل حکـومت در استرالیا و رئیس شرکـت IBM استرالیا، و مدالهـای برنز در سه مرحله توسط رئیس کالج پیشرفته کنبرا، سرپرست تیم جمهوری فدرال‌آلمان و رئیس کمیته اجـرایی المپیاد ۱۹۸۸ اعطاء گـردید. سپس پـروفسور ا. آنگـل (A. Engel) سرپرست تیم جمهوری فدرال‌آلمان بـه طور رسمی ازطرف دولت آلمان میزبانی کشورش را برای سی‌امین المپیاد اعلام‌ و ازکشورهای مختلف برای شرکت درآن دعوت کرد. دراین مراسم کلیه نمایندگیهای سیاسی کشورهای شرکت

نتایج تیم اعزامی جمهوری اسلامی ایران به شرح زیر است

اسامی	کد	سؤال ۱	سؤال ۲	سؤال ۳	سؤال ۴	سؤال ۵	سؤال ۶	مجموع امتیازها	ردیف	مدال
امیراعلم غضنفریان	IRA2	۴	۴	۲	۷	۵	۱	۲۳	۵۹	نقره
آرش حسیبی	IRA4	۵	۶	۲	۰	۶	۰	۱۹	۸۶	برنز
علیرضا بیگدلی	IRA1	۷	۰	۱	۱	۷	۰	۱۶	۱۱۰	برنز
محمدعلی خجسته‌پور	IRA5	۵	۱	۲	۳	۲	۱	۱۴	۱۲۳	برنز
بهزاد نظری	IRA6	۰	۵	۱	۱	۲	۱	۱۰	۱۶۵	—
حسام حمیدی‌تهرانی	IRA3	۳	۰	۰	۰	۰	۱	۴	۲۲۲	—
جمع نمرات اعضاء		۲۴	۱۶	۸	۱۲	۲۲	۴	۸۶	۲۰	
میانگین اعضاء		۴	۲/۷	۱/۳	۲	۳/۷	/۷	۱۴/۳		
میانگین کلی تیم		۳/۹	۳/۲	۱/۷	۲/۳	۳/۳	/۶	۱۵/۱		

به این ترتیب تیم ایران با اخذ ۸۶ امتیاز در ردیف هیجدهم قرار گرفت و بیست‌ونه کشور از جمله بسیاری ازکشورهای اروپایی را پشت‌سر گذاشت.

کننده حضور داشتند. مراسم با افراشتن پرچمهای کشورهای شرکت‌کننده و نواختن سرودهای ملی استرالیا و آلمان غربی پایان پذیرفت.

هیأت اعزامی ساعت ۹ صبح روز پنجشنبه بیست‌ونهم تیرماه از کنبرا به سیدنی حرکت‌کرد. روزشنبه ساعت ۱۰ صبح از سیدنی به توکیو پروازکردیم و بعداز یك اقامت کوتاه در توکیو در ساعت ۳/۱۵ از توکیو بـه طرف تهران از طریق پکن پروازکردیم و در ساعت ۱۱ بعدازظهر روز دوشنبه سوم مردادماه هواپیمای ما در فرودگاه مهرآباد به زمین نشست. در فرودگاه مهرآباد مسئولین محترم سازمان پژوهش و برنامه ـ ریزی و خانواده‌های محترم دانش‌آموزان، از هیأت اعزامی استقبال‌کردند. پاویون دولتی سرشار از شادی و امید بود. دسته‌های گل از طرف مدیرکل سازمان نثار جوانان پاکدل ما گردید، جوانانی که در طول سفر لیاقت و شایستگی خود را از هر نظر نشان دادند.

در پایان لازم است ازمسئولین وکارکنان سفارت جمهوری اسلامی ایران درکنبرا و توکیو تشکر و قدردانی نماییم که نهایت‌کوشش خود را جهت همکاری وراهنمایی هیأت اعزامی به عمل‌آوردند. وظیفه خود مـی‌دانیم از برادر اکرمی وزیر محترم‌آموزش و پرورش وقت، ریاست محترم سازمان پژوهش‌و برنامه‌ریزی بـرادر دکتر حداد عادل و مدیرکل محترم دفتر تحقیقات برادر مهندس ابوطالبی و اعضاء گروه ریاضی دفتر تحقیقات‌که نهایت هم وکوشش خود را جهت ارتقاء آموزش و پرورش‌کشور، بـه ویژه‌آموزش ریـاضی درکشور مبذول می‌دارند تشکر نماییم.

این نوشته قسمتهایی ازتجربیات هیأت اعزامی است. هنوز تجارب ونکات زیادی وجود داردکه دراین گزارش نمی‌گنجد. این تجربیات در اختیارکمیته المپیاد ریاضی قـرار خـواهد گرفت تا انشاءالله با برنامه‌ریزی دقیق وکامل برای‌آینده و رفع نقائص و انتخاب بهترین‌ها، بتوانیم شاهد موفقیتهای بیشتری در این زمینه و نیز در زمینه‌هـای رشد علمی و تکنولـوژی کشورمان باشیم.

بقیه از صفحه ۷

نرسیده و بالنتیجه‌کتاب جدیدی‌هم بعداز انقلاب تألیف نکـرده‌ایم. کار تـا پایان دوره راهنمایـی‌آمده و بعدازآن دیگـر تقریباً متوقف شده است. ادامـه این کار مستلزم همکاری دانشگاهیان است و من در همین‌جا تقاضای وزارت‌آموزش وپرورش را برای‌همکاری بیشتردانشگاهیان‌خصوصاً در امـر برنامه ریزی و تألیف‌کتابهـای ریاضی متوسطه اعلام می‌کنم. مـا دست تقاضا به‌سوی شما دراز می‌کنیم وآمادگی داریم تا این کار را مشترکاً شروع‌کنیم.

یکـی دو پیشنهاد مختصر هـم بـرای دانشگاهها دارم تصور می‌کنم برای‌جذب و جلب دانش‌آموزان با استعداد به رشته ریـاضی بایـد در این رشته بورس‌هـای تحصیلی دراختیار دیپلمه‌ها گذاشته بشود. واقعیت‌های اقتصادی و ابهاماتی‌که راجع بـه‌آینده شغلی رشته ریاضی وجـود دارد باعث می‌شودکه حتی‌کسانی‌که در ریاضی معدل‌بالا دارند درکنکورسراغ رشته‌هایی بروندکه پول سازوخوش‌آینده است. این یـك واقعیت است. حـالا تلخ است یـا شیرین، هـرچه هست باید برای‌آن فکری کرد. ایرادی ندارد‌کـه دولت، وزارت فرهنگ وآموزش عالی و دانشگاهها بـه کسانی‌که معدل دیپلم‌آنها ازیك حد معینی بالاتر باشد و درکنکور در رشته ریاضی قبول شوند بورس تحصیلی بدهد و جاذبه این رشته را بیشترکند. اینهـا و خیلی کارهای دیگر، کارهایی است‌کـه می‌شود برای تقویت رشته ریاضی‌کرد.

مـا امیدواریم‌کـه این سمینار بتواند راه‌حل‌های مشخصی عرضه‌کند واین نتایج را دراختیار تصمیم‌گیران وسیاست‌گزاران فـرهنگـی کشور بگذارد. در جمهوری اسلامی به هیچوجه نباید از بیان واقعیت ابایی داشته باشیم و نگران باشیم. اولین وظیفه ما این است‌که هرجا درد و تلخی و مشکلی مـی‌بینیم‌آن را به صراحت بیان کنیم. شما مشکل را به تمام قامت ترسیم کنید، بـه اطلاع مسئولان برسانید و راه حل‌آنها را هم پیشنهادکنید، پیگیری‌کنید، و یقین داشته باشید کـه در این کار جهاد گونه‌که جهاد دانشگاهی‌واستادان‌دانشگاه باهـم انجام مـی‌دهند عنایت خدا همراه شماست و باید امیدوار باشید. انشاءالله همه ، شما در دانشگاهها و ما درآمـوزش و پرورش و هرکس در هرجا کـه هست بتوانیم بـا وحدت و همدلـی و همکاری صمیمانـه مشکلات‌آمـوزش ریـاضی را برطرف‌کنیم وکاری‌کنیم که‌آموزش‌ریاضی و ریـاضیات در جمهوری اسلامی شأنی شایستهٔ فرهنگ‌و تمدن اسلامی پیداکند.

خبر بیست و نهمین

29th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD JULY 9-21

روز اول

۱۵ جولای ۱۹۸۸ - کنبرا

۱ـ دوایر متحدالمرکز به شعاع R و r ($R > r$) در صفحه را درنظر بگیرید. فرض کنید P نقطه‌ای ثابت روی دایره کوچك و B نقطه‌ای متغیر روی دایره بزرگ باشد. پاره خط BP دایره بزرگ را در نقطه دیگری چون C قطع می‌کند. از P عمودی بر BP رسم کنید تا دایره کوچك را در نقطه دیگری چون A قطع کند (اگر این عمود بر دایره کوچك مماس باشد، $A=P$ قرار دهید).

الف) تمام مقادیر ممکن برای $BC^2+CA^2+AB^2$ را زمانی که B روی دایره بزرگ تغییر نماید، تعیین کنید.

ب) مکان هندسی نقطه وسط پاره خط AB را به دست آورید.

۲ـ فرض کنید n عددی صحیح و مثبت، B یك مجموعه و A_1 ، A_2 ، … ، A_{2n+1} زیر مجموعه‌های B باشند بطوری که داشته باشیم:

الف) هریك از A_iها دقیقاً دارای $2n$ عضو است؛

ب) برای هر i و j ، $1 \leqslant i < j \leqslant 2n+1$ ، $A_i \cap A_j$ دقیقاً دارای یك عضو است؛

ج) هر عضو B حداقل به دو تا از A_iها تعلق دارد.

می‌خواهیم به هر یك از اعضاء B یکی از دو عدد صفر یا یك را نسبت دهیم بطوری که به هر یك از A_iها دقیقاً n صفر نسبت داده شود، ($1 \leqslant i \leqslant 2n+1$)، تعیین کنید برای چه مقادیری از n این کار ممکن است.

۳ـ تابع f با شرایط زیر روی مجموعه اعداد صحیح و مثبت تعریف شده است:

$$f(1)=1 \quad \text{و} \quad f(3)=3$$

و

$$f(2n)=f(n)$$

و برای هر $n \geqslant 1$ داریم:

$$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n)$$

$$f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n)$$

تعداد اعداد صحیح و مثبت n را که در شرایط زیر صدق می‌کنند تعیین کنید:

$$1 \leqslant n \leqslant 1988 \quad \text{و} \quad f(n)=n$$

(مدت امتحان ۴/۵ ساعت، هر سؤال ۷ نمره دارد.)

روز دوم

۱۶ جولای ۱۹۸۸ - کنبرا

۴ـ مجموعه اعداد حقیقی x را که در نامساوی زیر صدق می‌کنند درنظر بگیرید:

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{5}{4}$$

نشان دهید که این مجموعه از اجتماع تعدادی فاصلهٔ مجزا از هم تشکیل شده است که مجموع طول این فواصل برابر ۱۹۸۸ است.

۵ـ مثلث قائم‌الزاویه ABC را که در رأس A قائمه است درنظر بگیرید. فرض کنید D پای ارتفاع مرسوم از A باشد. مرکز دوایر محاطی مثلثهای ABD و ACD را بههم وصل کنید تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط K و L قطع کند. مساحت مثلث‌های ABC و AKL را به ترتیب S و T می‌نامیم. ثابت کنید $S \geqslant 2T$.

۶ـ فرض کنید a و b اعداد صحیح و مثبت باشند بطوری که $(ab+1)$، a^2+b^2 را عاد می‌کند. نشان دهید $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ مربع کامل است.

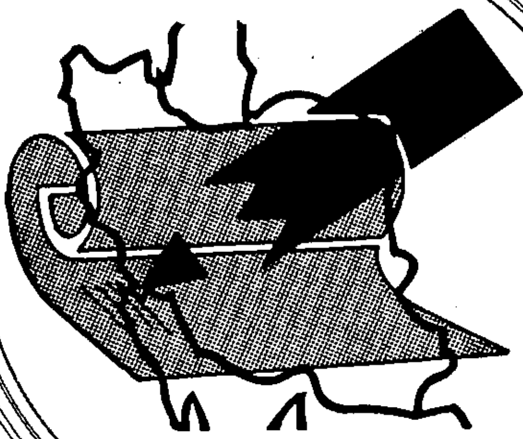
(مدت امتحان ۴/۵ ساعت، هر سؤال ۷ نمره دارد.)

مسابقات المپیاد ریاضی استرالیا

جدول مدالها

نام کشور	تعداد اعضاء تیم	کد	امتیاز	تعداد مدالها: طلا	نقره	برنز
اتحاد جماهیر شوروی	۶	USS	۲۱۷	۴	۲	
رومانی	۶	ROM	۲۰۱	۲	۴	
جمهوری خلق چین	۶	PRC	۲۰۱	۲	۴	
جمهوری فدرال آلمان	۶	FRG	۱۷۴	۱	۴	
جمهوری خلق ویتنام	۶	VIE	۱۶۶	۱	۴	
ایالات متحده آمریکا	۶	USA	۱۵۳		۵	۱
جمهوری‌دموکراتیک‌آلمان	۵	GDR	۱۴۵	۱	۴	
بلغارستان	۶	BUL	۱۴۴		۴	۲
فرانسه	۶	FRA	۱۲۸	۱	۱	۳
کانادا	۶	CAN	۱۲۴	۱	۱	۲
انگلستان	۶	UNK	۱۲۱		۳	۲
چکسلواکی	۶	CZE	۱۲۰		۲	۲
سوئد	۶	CWE	۱۱۵	۱		۴
اسرائیل	۶	ISA	۱۱۵	۱		۴
اطریش	۶	AUT	۱۱۰	۱	۱	۱
مجارستان	۶	HUN	۱۰۹		۲	۲
استرالیا	۶	AUS	۱۰۰	۱		۱
سنگاپور	۶	SIN	۹۶	۱		۱
یوگسلاوی	۶	YUG	۹۲			۴
جمهوری اسلامی ایران	۶	IRA	۸۶		۱	۳
هلند	۶	NET	۸۵			۳
جمهوری کره	۶	ROK	۷۹			۳
بلژیك	۶	BEL	۷۶			۳
هنگ‌کنگ	۶	HKG	۶۸			۲
تونس	۴	TON	۶۷			۳
کلمبیا	۶	COL	۶۶			۳
ترکیه	۶	TUR	۶۵			۳
یونان	۶	GRE	۶۵			۱
فنلاند	۶	FIN	۶۵			۲
لوکزامبورگ	۶	LUX	۶۴	۱		۲
مراکش	۶	MOR	۶۲			۲
پرو	۶	PER	۵۵			۱
لهستان	۳	POL	۵۶		۱	
زلاندنو	۶	NZI	۴۷		۱	
ایتالیا	۴	ITA	۴۴			۱
الجزایر	۵	ALG	۴۲		۱	
مکزیك	۶	MEX	۴۰			۱
برزیل	۶	BRA	۳۹			۱
ایسلند	۴	ICE	۳۷			
کوبا	۶	CUB	۳۵			
اسپانیا	۶	SPA	۳۴			
نروژ	۶	NOR	۳۳			
ایرلند	۶	IRE	۳۰			
فیلیپین	۵	PHI	۲۹			
کویت	۶	KUW	۲۳			
آرژانتین	۳	ARG	۲۳			
قبرس	۶	CYP	۲۱			
اندونزی	۳	INA	۶			
اکوادور	۱	EQU	۱			

پاسخ به نامه‌ها



برادر محمودرضا ضیائی ـ دانش‌آموز ـ تهران

از ارسال مسائل شماره مشترك ۱۴ـ۱۳ تشکر می‌نمائیم. پیشنهادهای شما در هیأت تحریریه مطرح گردید.

برادر غفور غفوری و علی کریمی ـ میانه

انتگرالی که پیدا کرده‌اید یك انتگرال بیضوی است و محاسبهٔ این انتگرالها فقط با تقریب انجام می‌گیرد.

برادر اکبر نظری ـ دانش‌آموز ـ زنجان

از همکاری شما با مجله رشد تشکر می‌نمائیم. امیدواریم که موفق باشید.

برادر احمدرضا شهیدی

اکثر شماره‌های مجله نایاب هستند.

برادر فرهاد منشور

درشماره‌های قبل درموزد عدم محاسبه محیط بیضی بحثهای مفصلی شده است. اولین رابطهٔ شما یعنی برابری A_1A_2 و B_1B_2 نادرست است.

خواهر گویا اجسامی ـ دانش‌آموز ـ تهران

راه حل ارسالی شما یك راه حل کلاسیك است. می‌دانید که حدس جواب همواره ساده نیست و حدس جایگزین استدلال نیست.

برادر کامیاب شادمان ـ دانش‌آموز ـ تهران

بطوری که می‌دانید نقیض یك گزاره راست، دروغ است. علامت ! را که به کار برده‌اید نمی‌دانیم به چه معنی است.

برادر اسماعیل‌نیا ـ دبیر ـ بابل (فرهنگ شهر)

همکار ارجمند بعداز عرض سلام متقابل، کوشش ما بر این است که مجله رشد برای دانش‌آموزان و دبیران مفید باشد و در این راستا بارها و بارها از دبیران ارجمند درخواست همکاری کرده‌ایم تا با ارسال مقالات و نظریات خود مطالب دبیرستانی مجله را بیشتر کنند.

برادر لطیف پورشامی ـ دانشجو ـ تبریز

برهانی که برای مسأله پروانه ارائه کرده‌اید قبلاً در مجله درج شده است. از ارسال حل مسائل تشکر می‌نمائیم.

برادر فرزاد رشیدی ـ دانش‌آموز ـ دزفول

در مسأله ۵ مسابقه استانی، صورت مسأله چنین است: مطلوب است تعیین چند جمله‌ای $f(x)$ که... بطوری که اطلاع دارید در زمینه جبر مقالاتی چاپ کرده‌ایم و بازهم ادامه خواهیم داد.

برادر مجید قادر ـ دانش‌آموز ـ تهران

از ارسال حل بعضی از مسائل شماره ۱۶ تشکر می‌نمائیم. امیدواریم که پیشنهادات شما در مورد تصحیح مراحل مختلف آزمون استانی و نهایی مورد توجه کمیته برگزاری مسابقات ریاضی قرار گیرد. همیشه موفق باشید.

خواهر سیمین شاپوری ـ دانش‌آموز ـ تهران

همانطور که حدس زده‌اید، تصویر روی جلد شماره ۷ خیالی و زاده فکر طراح هنرمند آن است. ممکن است از نوار موبیوس الهام گرفته شده باشد. بطور ساده اگر دو سر یك نوار کاغذی در جهت عکس به هم بچسبانید نوار موبیوس ایجاد می‌شود. یعنی سطحی است که داخل و خارج ندارد.

برادر علی‌پور اسکندانی ـ دانش‌آموز ـ تبریز

از ارسال حل چند مسأله از شماره ۱۶ و حل مسأله آقای دکتر امیر معز تشکر می‌نمائیم. امیدواریم که موفق باشید.

برادر آرش رستگار ـ دانش‌آموز ـ تهران

قضایایی را که فرستاده‌اید به راحتی قابل اثبات هستند. بهتر است روی قضایای مقدماتی مسائل کار کنید که بدون شك به رشد تفکر شما کمك خواهد کرد. درقضایای فضایی ارسالی شما مشکلاتی وجود دارد.

برادر رضا جهانبخش ـ دانش‌آموز ـ تهران

صورت مسأله ارسالی شما یك فرض کم دارد. برای تکمیل صورت مسأله باید EF معلوم باشد.

برادر ماهان غلامی ـ تهران

می‌دانید که در تابع fog برد g دامنه یا برد f نیست. از ارسال حل مسائل شماره ۱۶ تشکر می‌نمائیم. امیدواریم که موفق باشید. در مسأله ۸ جواب معادلهٔ دیفرانسیلی که نوشته‌اید درست نیست.

برادر پدرام صفری ـ دانش‌آموز ـ تهران

از ارسال حل مسائل شماره ۱۶ تشکر می‌نمائیم. در مورد مسألهٔ ۴ شماره ۱۴ـ۱۳ لازم نیست تمام مقادیر f را با توجه به $x+\frac{1}{x}+1$ پیدا کنیم، زیرا تابع مفروض به صورت fog است. و قلمرو آن، قلمرو g است.

برادر کوروش حمیدزاده ـ دانش‌آموز، برادر عباس نژاد ـ دانش‌آموز ـ تهران

از ارسال مسائل برای درج در مسائل تشکر می‌نمائیم.

برادر محمدعلی رستمی‌زاده ـ دانشجو ـ کرمان

از اظهار لطف شما نسبت به مجله رشد تشکر می‌نمائیم. در مورد مسأله چهار المپیادکه گفته‌اید تابع f اصم و گویا نیست ولی دلیلی ارائه نکرده‌اید. همیشه موفق باشید.

برادر جمشید شکراللهی

حل مسأله ارسالی شما درست است. از زحمات شما تشکر می‌نمائیم.

برادر فرخ شفیعی ـ اهواز

در مسأله ۱ تشخیص یك ریشه عملاً ساده نیست. در مسأله ۲ حالت $k=\frac{1}{2}$ نیز تازگی ندارد. این مسأله در هندسه آقایان صفاری و قربانی با همین روش حل شده است در صورت مسأله ۵ مسابقه ریاضی گفته شده است که: مطلوب است **تعیین چند جمله‌ای...**

خواهر آزاده بهپور ـ دانش‌آموز ـ شیراز

از اظهار لطف شما نسبت به مجله و ارسال حل مسائل مسابقه دانش‌آموزی تشکر می‌نمائیم. امید است که موفق باشید. امیدواریم که درآتیه بتوانیم مطالب بیشتری در مورد ریاضیات جدید داشته باشیم.

برادر حمیدرضا فنایی ـ دانشجو ـ تهران

از همکاری مدام شما با مجله رشد تشکر می‌نمائیم. امیدواریم که این همکاری کماکان ادامه یابد موفق باشید.

برادر حسنی ـ دانش‌آموز ـ توسیرکان

از ارسال حل چند مسأله تشکر می‌نمائیم. متأسفانه عوامل مختلفی باعث می‌شود که مجله خیلی دیرتر از موعد به دست خوانندگان می‌رسد. به هر حال ما ازجانب خود جداً پوزش می‌خواهیم ولی ذکر این نکته را ضروری می‌دانیم که بقدری تعداد مقالات پذیرفته شده زیاد است که حتی می‌توان این مجله را هر دو ماه یکبار منتشر کرد.

برادر کیوان پژوتن ـ دانش‌آموز ـ تهران، برادر مهدی رضایی ـ دانش‌آموز تجربی ـ قم

از ارسال حل چند مسأله تشکر می‌نمائیم.

برادر مهدی رحمانی ـ دانش‌آموز ـ تهران

کوشش ما بر این است که مجله برای دانش‌آموزان و دبیران مفید باشد. از ارسال حل بعضی از مسائل شماره ۱۶ تشکر می‌کنیم. توصیه می‌شود در حل مسائل دقت بیشتری به عمل آورید.

برادر منوچهر تکریمی ـ دانش‌آموز ـ ارومیه

احکام ارسالی شما بدون برهان هستند و فقط با مثال بیان شده‌اند. می‌دانید مثال جایگزین استدلال نیست.

برادر مازیار پورعبدالله ـ دانش‌آموز ـ مشهد

راه حل ارسالی شما برای مسأله «فیثاغورث در سه بعد» کاملاً صحیح است. از همکاری شما تشکر می‌کنیم.

برادر عبدالواحد زمان ـ مهاباد

از اظهار لطف شما نسبت به مجله تشکر می‌کنیم. متأسفانه شماره‌های ۱و۲و۳و۴ نایاب هستند. راه حل ارسالی شما برای مسأله ۹ شماره مشترك ۱۴ـ۱۳ درست است. موفق باشید.

برادر محسن سامانیان ـ اصفهان

با یك استقراء ساده ثابت می‌شود که اگر $n > 3$، آنگاه $2^{n-1} > n$. لهذا، تنها جوابهای معادله $2n = 2^n$ دراعداد طبیعی $n = 1, 2$ می‌باشد. به طریق مشابه اگر $n > 5$، آنگاه $2^n > n^2$. لهذا تنها جوابهای معادله $2^n = n^2$ در اعداد طبیعی $n = 1, 2, 4$ است.

برادر حسین‌زاده مرشدبیك ـ دانشجو ـ تهران

از ارسال حل مسأله ۱۷ شماره مشترك ۱۴ـ۱۳ تشکر می‌نمائیم. در مورد منابع احتمال هندسی به مراجع مقاله آقای دکتر آذری درشماره اول رشد نگاه کنید. همچنین ترجمه کتاب چانگ تحت عنوان «نظریه مقدماتی احتمال وفرایندهای تصادفی» از طرف مرکز نشر دانشگاهی منتشر شده است.

برادر وحید جنگل‌دوست ـ دانش‌آموز ـ ارومیه

اثبات اینکه در هر مثلث قائم‌الزاویه نیمساز هرزاویه حاده عمود منصف ضلع مقابل را در خارج مثلث قطع می‌کند ساده است. کافی است ثابت کنید که در هر مثلث نیمساز داخلی هر زاویهٔ بین ارتفاع و میانه آن رأس قرار دارد و می‌دانید که این یك مثلث معروف هندسه است.

برادر کامبیز اخلاقی ـ تهران

در مورد مرز بین ریاضیات محض و کاربردی باید گفت که تعیین چنین مرزی کار ساده‌ای نیست و یا بهتر بگوئیم هر نوع مرزبندی صرفاً به خاطر تسهیل در تحقیق است. می‌دانید درج اکتشافات جدید ریاضی از اهداف مجله به دور است و فقط می‌توان اخبار آنها را منتشر کرد. برهان ارسالی شما برای قضیه ویلسون درست است.

برادر عبدالرسول رستاد ـ دانشجو ـ تبریز

ابتدا صورت مسأله شما و بعد حل آنرا که توسط همکار ارجمند آقای محمدتقی دیبائی عضو هیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم ارسال شده است می‌آوریم:

مسأله. فرض کنید

$$f: N \times N \longrightarrow R$$

با ضابطهٔ

$$f(m, n) = m^{2n-1} - (m-1)^{2n-1}$$

آیا عدد طبیعی مانند n موجود است که به ازاء هر m، $f(m, n)$ اول باشد.

اگر nای باشد که به ازاء هر m از N، $f(m, n)$ اول باشد، آنگاه باید ادعا کرد که چند جمله‌ای مانند $g(x)$ با ضرایب صحیح وجود دارد که به ازاء هر $x \in N$، $g(x)$ اول است.

(مثلاً، $g(x) = f(x, n) = -\sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} (-1)^{n-r} x^r$).

اما ذیلاً ثابت می‌کنیم که اگر

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

با ضرایب صحیح باشد، به‌ازاء بینهایت عدد طبیعی x، $g(x)$ مرکب است (اول نیست). برای اثبات فرض می‌کنیم $a_n > 0$، آنگاه چون

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

پس Kای است که $g(k) > 1$. فرض کنید $l = g(k)$، به ازاء هر $p \in N$ داریم

$$g(pl + k) = Ql + g(k) = Ql + l$$

یعنی $l \mid g(pl+k)$. واضح است ۲− و $Q = 0$ نیست زیرا،

در این صورت معادله

$$g(x)+1=0 \quad \text{یا} \quad g(x)-1=0$$

دارای بینهایت جواب است که ممکن نیست. پس پاسخ مسأله منفی است.

برادر حجتی‌امامی دانش‌آموز ـ تهران

می‌دانیدکه اصول هندسه و مکانیك جدا ازهم هستند ونباید با هم مخلوط شوند.

برادر فریبرز محمدزاده‌غربی ـ دانش‌آموز ـ تهران

متأسفانه ادعای شما درست نیست و هر عدد بزرگتر از ۱ و مرکب را می‌توان به صورت حاصلضرب اعداد اول تجزیه کرد.

برادر مسعود جعفری ـ دانشجو ـ شیراز

راه حل‌ارسالی شما برای مسأله پروانه خیلی طولانی‌است. امید است که موفق باشید.

برادر پیام ثمره‌پهلوان ـ دانش‌آموز ـ تجریش

مطالبی‌که در مورد محاسبهٔ ضریب جمله پیشرو باقیمانده یك چند جمله‌ای در تقسیم بر $(x-a)^n$ فرستاده‌اید درست است، ولی برهانی خیلی مقدماتی داردکه می‌توانید درحالت کلی ثابت‌کنید.

برادر عبدالمجید فطانت ـ دانشجو ـ تهران

در تربیع دایره از این مطلب‌که π روی Q جبری نیست استفاده مـی‌شودکـه خود بیانگـر اصم بودن π است. لذا، اثبات اصم بودن π با استفاده از تربیع دایره مجاز نیست.

برادر رشید زارع ـ دانشجو ـ تهران

روشی برای اثبات جابجایی حلقه‌های باخاصیت $x^3=x$ مطرح کرده‌اید متکی بر این است که هر عضو خود توان چنین حلقه‌ها در مـرکزآن قـرار دارد و قسمت اعظم مقالـهٔ آقای دکتر صدیقی (شمـاره ۱۵) صرف اثبات این مـوضوع شده است.

برادر فرامرز صابری ـ دانش‌آموز ـ تهران

اگر به برهـان خود برای حـل مسألـه ۱۱ شماره مشترک

۱۴ــ۱۳ دقت‌کنید متوجه می‌شویدکه نیازی به‌استفاده از قضیه اویلر نیست.

برادر سیامك دلشادمهر ـ دانش‌آموز ـ بندرانزلی

ضمن تشکرازحل بعضی‌از مسائل شماره ۱۶، مسأله ارسالی شما به بخش مسائل ارسال شد.

خواهر نغمه عبادیان ـ شهرری

از ارسال ترجمه یك‌یادداشت تاریخی دربارهٔ هندسه تشکر می‌کنیم. متأسفانه این‌مقاله متناسب بامجله تشخیص داده نشده است.

برادر عیسی پیله‌وری ـ اردبیل

پیشنهاد شما در هیأت تحریر مطرح می‌شود.

آرتا صدرزاده ـ تهران

ضمن تشکراز ارسال چند مسأله با حل، نکات زیررا ملاحظه نمایید:

مسأله ۱ حالت خاصی از مسألـه کلی ترکیب بـا تکرار است، می‌توانید ازکتاب‌تئوری مقدماتی اعداد، دکتر غلامحسین مصاحب استفاده نمایید. در مسأله ۲ در حالت‌کلی‌که P نقطهٔ مشخصی نیست در هندسه اقلیدسی قـابل حل نمی‌باشد. اگر به جای دو دایره دو خط باشد، مسأله وقتی قابل حل است‌که P روی نیمساز زاویه دوخط باشد. این مسأله به بخش مسائل ارجاع‌گردید. مسأله ۳ حالت خـاصی از مسأله سوزن بوفون است‌کـه طی مقالـه‌ای در صفحه ۳۰ شماره ۱ مجله حل شده است.

برادر عباس سلمانیان ـ ساری

ضمن تشکر از تذکر اشتباهات چاپی، نکات زیر را ملاحظه نمایید:

قضیه نما وگروههای‌آبلی متناسب بـا اهداف مجله نیست. در مورد ایده‌آلهای ماکسیمال می‌توانید به‌کتب جبر دانشگاهی مـراجعه‌کنید. سؤالات‌آزمـونهـای ورودی کارشناسی ارشد (فوق‌لیسانس) را می‌توانید ازگـروههای ریاضی دانشگـاهها دریافت دارید. با بررسی بعضی‌از مجلات خارجی ریاضی در رشدآدرس‌آنها نیز داده می‌شود.

اطلاعیه

در بارهٔ نشریات رشد آموزش تخصصی

مجلات رشد آموزش مواد درس مدارس کشور نشریاتی است که از سوی گروههای درسی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش هر سه ماه یکبار ــ چهار شماره در سال ــ منتشر می‌شود.

این نشریات در حال حاضر عبارتند از:

۱ ــ رشد آموزش ریاضی
۲ ــ رشد آموزش زبان
۳ ــ رشد آموزش فیزیک
۴ ــ رشد آموزش شیمی
۵ ــ رشد آموزش زمین‌شناسی
۶ ــ رشد آموزش ادب فارسی
۷ ــ رشد آموزش جغرافیا
۸ ــ رشد آموزش زیست‌شناسی
۹ ــ رشد آموزش معارف اسلامی

هدف از انتشار این نشریات در وهلهٔ اول ارتقاء سطح معلومات معلمان و در مرحلهٔ بعد ایجاد ارتباط متقابل میان معلمان هر رشته و دفتر تحقیقات به منظور تبادل تجارب و مطالب جنبی و مفید درسی است.

دبیران، دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر علاقه‌مندان به اشتراک این مجلات می‌توانند جهت اشتراک هر چهار شماره از یک مجله در سال مبلغ ۴۰۰ ریال به حساب ۹۲۹ خزانهٔ بانک مرکزی ــ قابل پرداخت در کلیهٔ شعب بانک ملی ــ واریز و فیش آن را همراه با فرم تکمیل شدهٔ زیر به نشانی تهران، جاده آبعلی، خیابان سازمان آب بیست متری خورشید مرکز توزیع انتشارات کمک آموزشی کد پستی ۱۶۵۹۸ ــ تلفن ۷۸۵۱۱۰

محل فروش آزاد

الف ــ تهران:

۱ ــ کتابفروشی شهید سیدکاظم موسوی ــ اول خیابان ایرانشهر شمالی
۲ ــ فروشگاه انتشارات رشد ــ خیابان انقلاب بین ولی‌عصر و کالج
۳ ــ مرکز نشردانشگاهی ــ نمایشگاه دائمی کتاب
۴ ــ نمایشگاه دائمی کتاب کودک ــ روبروی دانشگاه تهران.
۵ ــ کتابفروشی صفا ــ روبروی دانشگاه تهران
۶ ــ کیوسکهای معتبر مطبوعات
۷ ــ شرکت کتاب طب و فن روبروی دانشگاه
۸ ــ کتابفروشی انجمن اسلامی دانشگاه تربیت معلم

ب ــ شهرستانها:

۱ ــ باختران ــ کتابفروشی دانشمند ــ خیابان مدرس پاساژ ارم
۲ ــ آذربایجان شرقی (تبریز) ــ مطبوعاتی ملازاده
۳ ــ آذربایجان غربی (ارومیه) ــ مطبوعاتی زینال‌پور
۴ ــ اصفهان ــ کتابفروشی مهرگان و کتابفروشی جنگل
۵ ــ مازندران (ساری) هماهنگی گروههای آموزشی استان
۶ ــ کرمان ــ پارک مطهری ــ فرهنگسرای زمین
۷ ــ خرم‌آباد ــ خیابان شهدای شرقی، کتابفروشی آسیا
۸ ــ مشهد ــ فروشگاه شماره یک انتشارات آستان قدس
۹ ــ تبریز ــ کتابفروشی علامه دهخدا
۱۰ ــ اصفهان ــ کتابفروشی رودکی
۱۱ ــ رشت ــ کتابفروشی فرهنگستان
۱۲ ــ گرگان ــ کتابفروشی جنگل
۱۳ ــ قم ــ کتابفروشی طوس
۱۴ ــ آستارا ــ کتابفروشی نیما
۱۵ ــ سقز ــ نمایندگی روزنامه کیهان

توجه، دانشجویان مراکز تربیت معلم می‌توانند با ارسال فتوکپی کارت تحصیلی از ۵۰٪ تخفیف برخوردار شوند.

فرم اشتراک مجلات رشد تخصصی

اینجانب .... با ارسال فیش واریز مبلغ ۴۰۰ ریال، متقاضی اشتراک یکسالهٔ مجلهٔ رشد آموزش .... هستم.

نشانی دقیق متقاضی: استان .... شهرستان .... خیابان ....

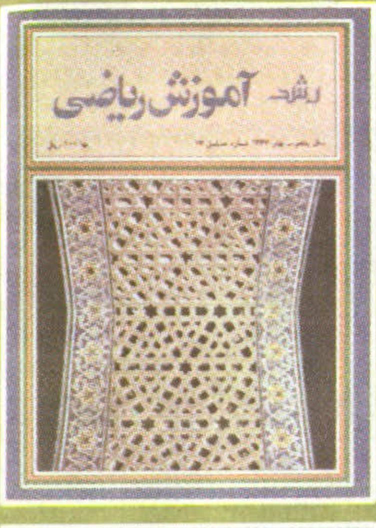
کوچهٔ .... پلاک .... کُد پستی .... تلفن ....

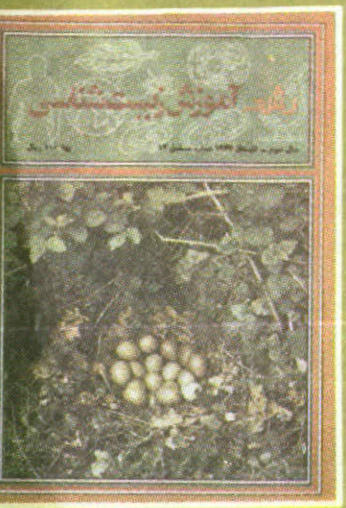
Content

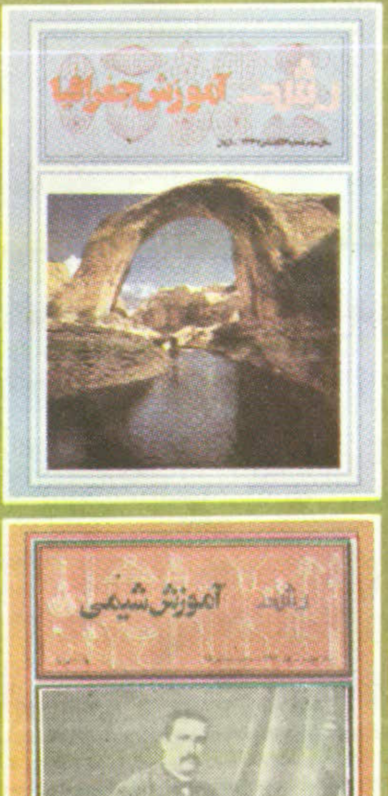
Roshd, Magazine of Mathematical Education, Vol V No.18. Summer 1988 Mathematics Section, 274 BLDG-No. 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave., Tehran - Iran.

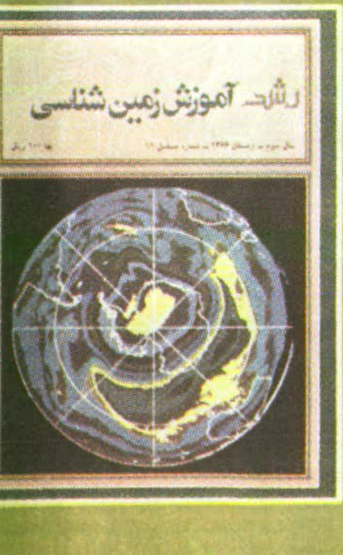
A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.

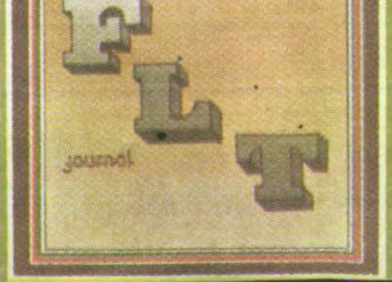
آیا شما مجلات رشـ
مخصوص دبیران
را مـــی‌خوانید؟











مجلات رشد تخصصـ

هر سه‌ماه یکبار، برای استفاده دبیران ز
دانشجویان رشته‌های مختلف
دانش‌آموزان علاقمند دبیرستانها از سو
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشـ
وزارت آموزش و پرورش منتشر می‌شو