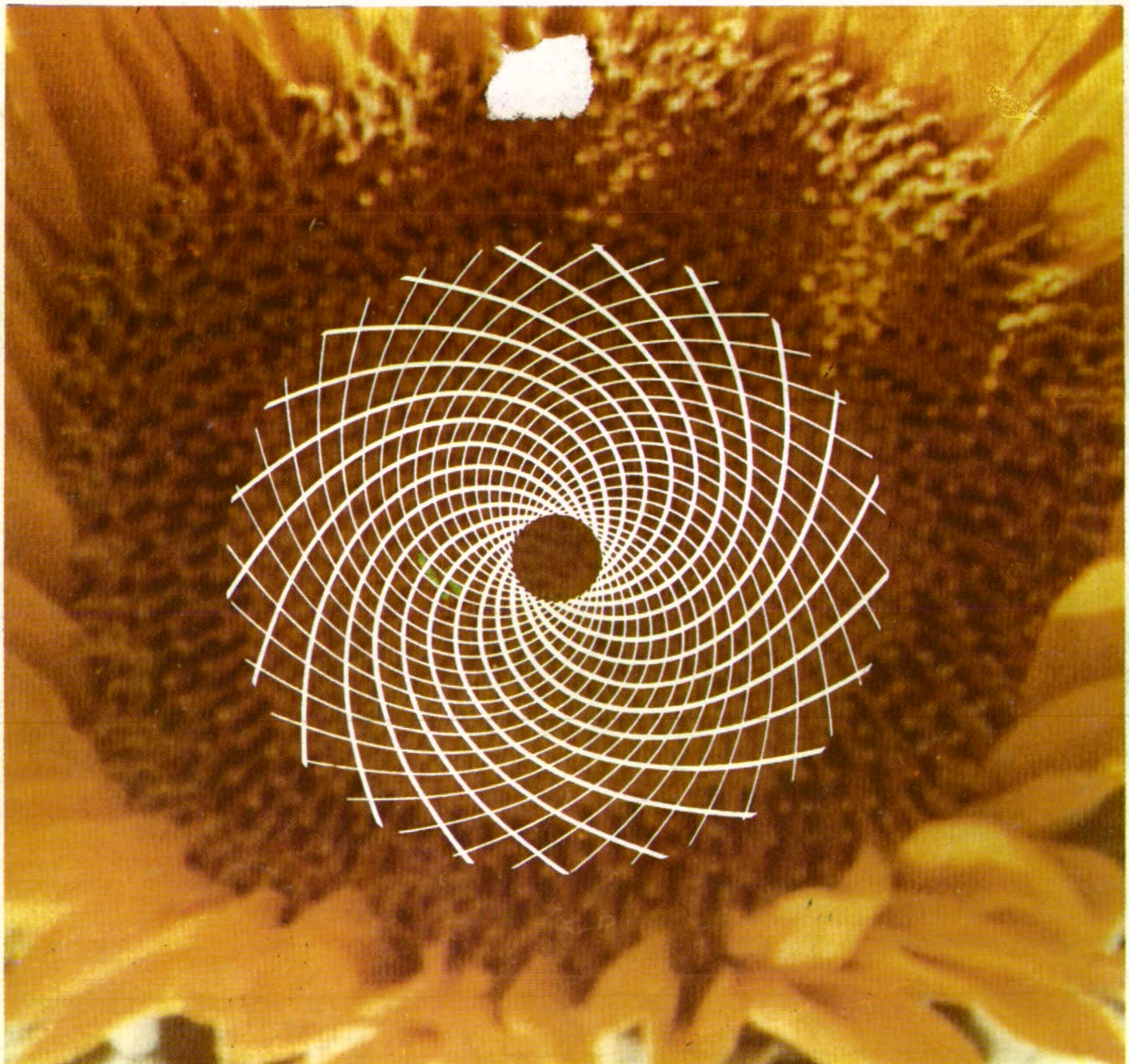
رشد

آموزش ریاضی

سال اول ـ شماره ۲ تابستان ۱۳۶۳ ـ بها ۱۰۰ ریال



رشد آموزش ریاضی

شمارهٔ ۲ تابستان ۱۳۶۳

نشریهٔ گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی سازمان پژوهش

نشانی : خیابان ایرانشهر شمالی ساختمان شمارهٔ ۴ تلفن ۸۲۵۹۶۴

● مجلهٔ رشد آموزش ریاضی نشریهٔ گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی سازمان پژوهش وزارت آموزش و پرورش است که هرسه ماه یکبار منتشر می‌شود. هدف از انتشار این مجله در وهلهٔ اول ایجاد ارتباط متقابل بین معلمین ریاضی و دفتر مذکور، به‌منظور تبادل تجارب و آراء در زمینهٔ آموزش ریاضی است؛ و در مرحلهٔ بعد طرح و بررسی مسائل بنیادی ریاضیات مقدماتی و مطالب جنبی و مفید درسی، به منظور ارتقاء سطح معلومات معلمین ریاضی است. مجله از مشارکت و همکاری معلمین ریاضی در ارائهٔ مقالاتی ناظر براهداف فوق، بالاخص در زمینهٔ آموزش ریاضی، استقبال می کند.

فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

برگزاری پانزدهمین کنفرانس ریاضی کشور را به عموم استادان ریاضی وخصوصاً به انجمن ریاضی ایران تبریك می‌گوئیم و برای شرکت‌کنندگان محترم در آن کنفرانس از خداوند قادر متعال طلب توفیق داریم.

تداوم گردهمآیی های سالانهٔ ریاضیدانان کشور به خودی خود حاکی ازقوت و قوام «ریاضی در مقایسه با سایر شاخه های علوم دقیقه» ایران است و امید می‌رود که با انقلاب اسلامی و انقلاب فرهنگی در دانشگاههای ایران، علوم پایه و ازجمله علم مهم وارزشمند ریاضی حیات تازه‌ای پیداکرده و رشدی متناسب با همت والا و آرمان‌های عالی ملت قهرمان وشهیدپرورما داشته باشد.

آنچه دراین فرصت ذکر آن ضروری به نظر می‌رسد اهمیت وظیفه آموزش وپرورش کشور در ترویج و تحکیم بنای علم ریاضی است. مسلم است که اگر نسل جوان ازدورهٔ کودکی و نوجوانی ودرمرحلهٔ دبیرستان شوق و ذوق ریاضی پیدا نکند ریاضیدانان کشور در دانشگاهها زمینهٔ مناسبی برای گسترش و پیشبرد این علم پیدا نخواهندکرد و به همین دلیل در همهٔ اهدافی که برای آیندهٔ ریاضی در کشور در نظر گرفته می‌شود نقش دور و نزدیك آموزش و پرورش نیز در نیل به آن اهداف باید ارزیابی شود و مورد توجه قرار گیرد.

از نشانه های افول حیات علمی دردوران قبل از انقلاب اسلامی کاهش شدید دانش آموزان رشتهٔ ریاضی در دبیرستانهای کشور است. در بررسی‌هایی که در دفتر تحقیقات سازمان پژوهش وبرنامه ریزی آموزشی بعمل آمده معلوم شده که تنها درفاصلهٔ سالهای ۵۴ تا ۵۶ نسبت دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی به کل دانش آموزان دبیرستانی از ۲۹ درصد به ۱۲ درصد کاهش یافته است. این کاهش در سالهای مقارن با انقلاب وپس از آن نیز باآهنگی کمتر ادامه یافته ودرسال ۶۰ نسبت مزبور به ۶/۲ درصدرسیده‌است.

پانزدهمین کنفرانس ریاضی کشورفرصت مغتنمی است تا وزارت آموزش وپرورش برخی از نکات را بر سبیل تقاضا و برخی دیگررا بر سبیل گزارش، متذکر شود.

تقویت و تحکیم رشتهٔ ریاضی فیزیک دبیرستانهای کشور منوط به‌تأمین دبیر ریاضی از جانب دانشگاههاست. اینک بحمدالله دانشگاهها بازگشائی ونوگشائی شده و فعالیت نوین مدارس عالی علمی ما در محیطی آکنده ازنظم و تقوی آغاز گشته است، این دانشگاهها و استاتید متعهد و دلسوز هستندکه باید با تربیت دبیران شایسته وکمك به باز آموزی دبیران شاغل، برای آینده رشتهٔ ریاضی پشتوانه ای فراهم کنند. پیداست که در این زمینه وظیفه دانشگاه تربیت معلم از سایر دانشگاههای سنگین‌تر وخطیر تراست. همین جا باید از مسئولان محترم دانشگاهها ودانشکده‌های علوم وریاضی کشور خواسته شودکه در تأمین مدرس ریاضی برای دوره‌های فوق دیپلم ریاضی مراکز تربیت معلم کشورکه مخصوص دبیران دوره راهنمائی است ازهمکاری ومساعدت با وزارت آموزش وپرورش دریغ نورزند.

آنچه مایهٔ خوشوقتی وامیدواری است همکاری و تفاهم صمیمانه‌ای است که برای رفع نا رسائیها میان وزارت آموزش‌وپرورش وهیأتهای علمی‌رشتهٔ ریاضی دانشگاههای کشور وجود دارد. سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، بحمدالله توانسته است با برقراری ارتباط با استادان ریاضی، ازهمکاری شمار قابل توجهی از برادران متعهد و مسئول در برنامه ریزی وتألیف و تدریس دروس ریاضی مقاطع مختلف بهره‌مند شود. در نتیجهٔ این ارتباط، وزارت آموزش وپرورش توانسته است از تاریخ تیرماه ۶۲ برای بررسی علل افت دانش آموزان رشتهٔ ریاضی فیزیك شورایی تشکیل دهدکه فعالیت آن هنوزهم ادامه دارد و تاکنون نتایج مطلوبی از آن حاصل‌شده است. اجمالاً باید گفت که در اثر توصیه ها و اقداماتی که صورت گرفته تعداد دانش‌آموزان سال دوم ریاضی‌فیزیك کشورکه در سال تحصیلی ۶۲ـ۶۱، ۱۲۰۷۶ نفر و در سال تحصیلی ۶۳ـ۶۲، ۱۵۰۳۱ نفر بودکه ۲۴/۴۷٪ درصدافزایش‌داشته است. کار برنامه ریزی وتألیف کتابهای جدید دورهٔ دبستان بحمدالله به پایان رسیده ودرحدود ۲۰۰۰۰۰ نفر از معلمان سراسر کشور برای تدریس این کتابها دوره‌های باز آموزی را طی کرده‌اند. برنامه ریزی دورهٔ راهنمائی نیز پایان یافته وتألیف کتابهای‌آن آغازشده است. برنامه ریزی بنیادی‌ریاضیات دبیرستانی نیز آغازشده و ادامه دارد. برنامه ریزی و تألیف کتابهای جدید تربیت معلم نیزکاری است که با همکاری استادان در شرف تکمیل است.

دسترسی بیشتر این استادان به منابع و مآخذ علمی از طریق سفارش انواع کتب ومجلات ریاضی فراهم شده و اقدامات لازم برای شرکت‌گروهی از آنان درکنفرانس جهانی آموزش ریاضی‌که در تابستان ۶۳ درکشور استرالیا برگزار خواهد شد انجام شده است.

به منظور تقویت بنیهٔ علمی دبیران و آموزش مجدد آنان، سمیناری از دبیران سرگروه آموزشی ریاضی سراسر کشور درشهریورماه ۶۲ در تهران برگزار گردید و سازمان پژوهش با همکاری استادان ارجمند ریاضی مخصوصاً استادان دانشگاه تربیت معلم توانسته است مجلهٔ رشد آموزش ریاضی را تدوین و به چاپ سپارد که انشاءالله در بهار ۶۳ در اختیار دبیران علاقمند سراسر کشور قرار خواهد گرفت.[1]

دفتر کمک‌آموزشی این سازمان نیز چند کتاب ریاضی مخصوص دبیران به چاپ سپرده که قریباً منتشر خواهد شد.

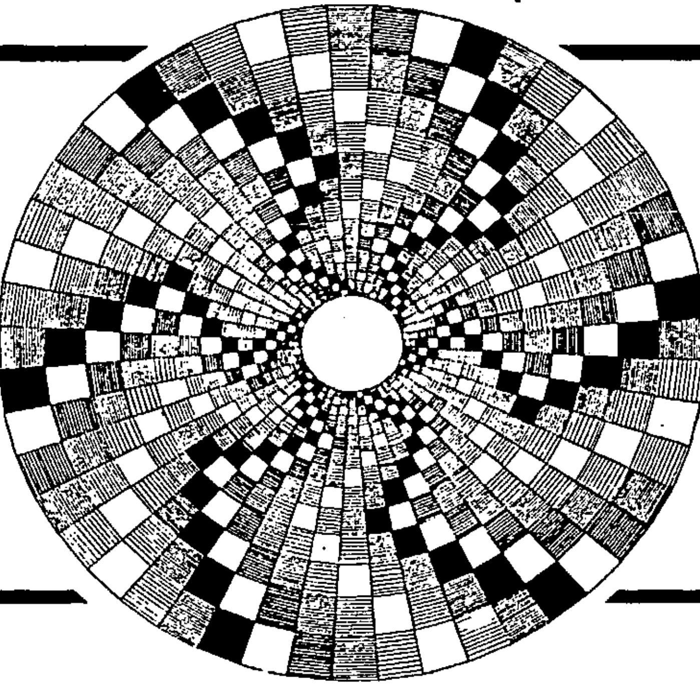
این دفتر آمادگی خودرا برای چاپ کتابهائی که استادان عزیز تألیف ویاترجمهٔ آنهارا برای دانش‌آموزان ومعلمان مفید تشخیص داده باشند، اعلام داشته وازصاحبنظران وصاحب قلمان رشتهٔ ریاضی انتظار همکاری دارد.

از جملهٔ اقدامات جدیدی که به آن امید خیر بسیار بسته شده برگزاری مسابقهٔ ریاضی میان دانش آموزان ممتاز رشتهٔ ریاضی دبیرستانهای کشور است که با همکاری مستقیم وصمیمانهٔ انجمن ریاضی ایران، صورت می‌گیرد و اولین دورهٔ آن همزمان باهمین کنفرانس در شیراز انجام خواهد شد.

برگزاری این کنفرانس، همانگونه که فرصتی برای گزارش اهم امور مربوط به آموزش ریاضی در سطح آموزش وپرورش بدست داده، فرصتی نیز فراهم می‌آورد تا از مقام معظم ریاست جمهوری و ائمهٔ محترم جمعه که به مناسبتهای مختلف دانش‌آموزان را به تحصیل دررشتهٔ ریاضی ترغیب کرده‌اند سپاسگزاری شود. همچنین لازم است از انجمن ریاضی ایران ونیز از همهٔ استادان دانشگاهها ودبیران ارجمندی که در بررسیهای بنیادی، برنامه ریزیها، تألیف و اصلاح کتب تدریس در مراکز تربیت معلم وکلاسهای آموزش ضمن خدمت با این وزارتخانه همکاری داشته ودارند سپاسگزاری نماید. امید است مجموعهٔ این مساعی، گامی درراه استقلال و سربلندی ملتی باشد که هم اکنون فرزندان دلاور آن در جبهه‌های خون و شرف در برابر استکبار ستمکارهٔ جهانی ایستاده‌اند وبا شهامت وشهادت خویش، لیاقت خود را برای سرافراز ماندن و به اهتزاز درآوردن پرچم مجد وعظمت اسلام ومسلمین به اثبات رسانده‌اند.

سید اکبر پرورش
وزیر آموزش وپرورش

(۱) پانزدهمین کنفرانس ریاضی کشور درفروردین ماه ۱۳۶۳ تشکیل شد وشماره اول رشد آموزش ریاضی دربهار ۶۳ منتشر شده است.



ریاضی چیست؟
ریاضی دان کیست؟

دکتر علیرضا مدقالچی

شاید درك مفهوم ریاضی یکی از مسائل بسیار مشکل و پیچیده باشد. ریاضی چیست؟ دراین دنیای شگفت‌انگیز علائم و فرمولها و نمادها چه‌می‌گذرد؛ در جستجوی پاسخ به این سئوال تصورات مختلفی بوجود آمده است. دسته‌ای آن را زیربنای همهٔ علوم وفنون می‌دانند، درحالی‌که گروهی آن را درحد یك‌علم غیر مفیدکاهش می‌دهند. در این کشاکش، تفاسیر وتعابیرو برداشتهای متنوعی از سوی متخصصین وغیر متخصصین بیان می‌شود؛ عوام آن راعلم‌الاعداد می‌پندارند، منطقیون آن‌را قسمتی ازفلسفه می‌شمارند، از دیدگاه طالبان مسائل نظری تئوریهای ریاضی فن وهنر است ولاغیر، و بالاخره، مهندسین و فیزیکدانان و دانشمندان علوم عملی آن را مجموعه‌ای از روشها وتکنیکهای خاص می‌دانند.

هدف این مقاله نقد و بررسی مکاتب ریاضی نیست، بلکه اجمالاً دیدگاههای فوق‌الذکر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. قبل از هر چیز بی مناسبت نیست‌که به این نکته اذعان داشت‌که دانش ریاضی با پیشرفت سریع دانش اهمیت ویژه‌ای پیدا کرده است واعتبار ارزشهای آن روز بەروزفزونتر می‌گردد. اما برداشت مبتدیان و محصلین از تعابیرمتنوع فوق‌الذکر، ممکن است‌موجب ابهامات عدیده‌ای شود که چه بسا موجبات دلزدگی از ریاضی را فراهم آورده و بالنتیجه رشد وتوسعهٔ آن را کاهش دهد.

گفتیم‌که به‌نظر عوام قلمرو دانش ریاضی فقط اعداد است، ولهذا، درباور اینان، یك ریاضیدان مبرز، انسانی است با قامتی خمیده‌که درکنجی نشسته و هزاران هزار محاسبات عددی دشوار انجام می‌دهد. اما مسلماً آنهائی‌که با قسمتهائی از ریاضیات سرو کار دارند می‌دانندکه این تصور عادی از حقیقت است. اگر از شاخهٔ خاص ریاضی، یعنی تئوری اعداد ــ که‌کاملاً با اعدادسروکار دارد ــ بگذریم در بسیاری ازکتب ریاضی، حتی بیش از دو سه عدد یافت نمی‌شود.

بعضی، دانش ریاضی را یك دانش غیر پسویا می‌پندارند. به‌گمان اینان کل ریاضیات متشکل از مکتشفات بابلیان، هندیان، یونانیان، اعراب، وایرانیان است وهر چه که هست به پیشینیان تعلق دارد و پیشرفت این علم اختتام پذیرفته است. بالنتیجه، از دیدگاه اینان یك ریاضیدان کسی است‌که اعمال حساب مقدماتی، هیئت قدیمی، ومختصری هم ازهندسهٔ اقلیدسی را بداند.

بدون شك این نوع‌تلقی شبیه به‌آنست‌که بگوئیم اگرکسی حرکت وسکون را تشخیص دهد یك فیزیکدان است، واگربتواند دو خط از رسالهٔ منطق ابن‌سینا را بخواند یك منطقی است و ...

متأسفانه نوعی از این طرز تلقی در بعضی از محصلین و دانشجویان نیز وجود دارد، یعنی آنها کل ریاضیات را دانشی اکتسابی می‌دانند وبرقدرت خلاقیت و ابتکار وتفکر در این رشته معتقد نیستند. ولی واقعیت کاملاً درخلاف این‌جهت قرار دارد. مادر پاسخ به این سئوال به ذکر این نکته اکتفا می‌کنیم‌که رشد وتکامل دانش ریاضی به ویژه از دهه های آخر قرن نوزدهم و اوائل قرن بیستم میلادی به شدت افزایش یافته‌است؛ امروزبیش از ۳۵۰ مجلهٔ معتبر در این زمینه منتشر می‌شودکه اکثر آنها فقط مقالات تحقیقی وبدیع ریاضی را چاپ می‌کنند[۲] و تعداد مقالات تحقیقی بقدری زیاد است‌که بعضاً حتی دوسال طول می‌کشد

تا مقالهٔ پذیرفته شده چاپ گردد.

در این زمینه بی مناسبت نیست که به نکتهٔ تاریخی زیر توجه کنیم:

موریتز کانتور[1] تاریخ ریاضی را تا سال ۱۷۹۹ میلادی در چهار جلد (مجموعاً ۳۶۰۰ صفحه) به رشتهٔ تحریر در آورده است، وحال می‌توان پیش‌بینی کرد که با توجه به رشد سریع ریاضیات در قرن نوزدهم و بیستم حداقل بیست جلد از مجلدات فوق لازم است تا بتوان ابداعات ریاضی قرن نوزدهم را باختصار بیان کرد[۲] و مسلماً در مورد جمع آوری ریاضیات قرن بیستم خیلی بیشتر.

حوزه وقلمرو این دانش در قرن اخیر بقدری وسعت یافته که هیچ کس قادر نیست در بیش از یك شاخه بسیار تخصصی صاحبنظر شود. لهذا، ریاضیات صرفاً محاسبات عددی نمی‌تواند باشد و ریاضیدان یك ماشین الکترونیکی محاسبه نیست. یعنی، ماشین محاسبه می کند ولی ریاضیدان تفکر می کند و خلاقیت دارد. بدیهی است که یك ماشین محاسبه، علی رغم محاسبات پیچیده هرگز نمی‌تواند ابتکار وخلاقیت خوارزمی وپوانکاره[2] را داشته باشد.

دیدگاه دیگر، دیدگاه کاربردی ریاضیات است؛ یعنی دانش ریاضی را باید به‌عنوان ابزاری برای فیزیکدانان و مهندسین تلقی کرد.

این واقعیت انکارناپذیر است که تکنیکهای ریاضی قویترین وکاری ترین ابزار برای بسط وگسترش علوم وتکنولوژی بوده و هستند و با پیشرفت سریع صنعت وتکنولوژی کاربرد آن روبه توسعه است. بقدری دامنهٔ کاربرد ریاضی افزایش یافته که در حال حاضر نه تنها در فیزیك و مهندسی بلکه در کلیهٔ علوم حتی علوم اجتماعی و اقتصادی نیز موارد استعمال ریاضی مشهود است؛ و فی‌الواقع، مدلسازی ریاضی یعنی پیدا کردن سیستم ریاضی برای دستگاههای مختلف فیزیکی وغیره اهمیت ویژه‌ای پیدا کرده‌است. تقریباً در کلیهٔ رشته‌های ریاضیات کاربردی، مجلات تحقیقی مستقلی منتشر می‌شود و حتی در سالهای اخیر مجلهٔ تحقیقی ویژه‌ای تحت عنوان «ریاضیات زیستی» چاپ می‌شود. خواستاران اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توانند به کتاب مرجع [۴] مراجعه کنند. پیتر هیلتون[3] درآوریل ۱۹۷۵ کنفرانسی درکاربرد تئوری فاجعه تشکیل‌داد که درواقع جویای موارد استعمال ریاضی در زیستشناسی بود، ونتایج جالب بدست آمده از این کنفرانس محتویات کتاب فوق‌الذکر [۴] را تشکیل می‌دهد.

بدون تردید اگر صنعت و تکنولوژی از روشهای ریاضی بهره نمی‌بردند، از مدتها قبل پیشرفت آنها متوقف شده بود ونیز اختراع قسمت اعظمی ازدانش ریاضی به‌تبع نیاز در آزمایشگاهها و یا کارگاهها بوده است.

ولی این همهٔ داستان نیست، ریاضیات کاربردی تنها یك چهرهٔ این صورت درشت وزیبا و یك روی این سکه است. قسمت دیگر ریاضیات، مسائل نظری یعنی ریاضیات محض است. متخصصین ریاضیات محض چندان نیازی به ریاضیات کاربردی ندارند؛ البته این نه بدان معنی است که بین این دوگرایش تضاد وجود دارد. معهذا این سئوال مطرح است که متخصص ریاضیات محض کیست؟ وکار اوچیست؟

یك متخصص ریاضیات محض برای پیشبردن تئوری ریاضی ویا برای ارضای نفس خویش ویا فرونشاندن عطش درونی دانش پژوهی وتحقیق می‌کند. او به‌هیچوجه دنبال پیداکردن کاربردی برای تحقیقات خودنیست. معهذا، اگر دیگران از تحقیقات او بهرهٔ عملی ببرند خوشحال می‌شود ولی این را نمی‌توان علت اکتشافات و تحقیقات او دانست. حتی برای خود او ممکن است این گرایش مبهم باشد و شاید بتوان حالات او را به حالات یك هنرمند تشبیه کرد، او برای آفریدن زیبائیها، برای کشف اسرارو معماها تقلا می کند و از این لحاظ دقیقاً دارای ذوق وخلاقیتی چون شعرا، و باریك‌بینی و دقتی چون منطقیون است.

بطورکلی، در طول تاریخ تحول دانش ریاضی، ریاضیات محض زائیدهٔ سه فرایند تجربه وتکمیل، تعمیم و تجرید، وتجرید وتعمیم بوده است؛ و این روش دامنهٔ تحقیق ریاضی را نا محدود ساخته است. یك ریاضیدان همواره می‌تواند مسئله‌ای برای تحقیق ایجادکند، وبر مبنای آن رسالات متعددومتنوعی به نگارش درآورد چه بسا که بسیاری ازاینها درزندگی روزمره فعلی غیرمفید باشند، ولی باید توجه داشت که اعتبار ارزشهای مسائل نظری ریاضی را نمی‌توان فقط با ارائهٔ کاربرد تئوری ارزیابی کرد. منتها نکتهٔ قابل توجه این است که یك تحقیق وقتی قابل اعتبار و ارزش خواهدبود که از روند طبیعی گسترش این دانش خارج نگشته وپیوستگی خود را با تحولات قبلی حفظ کرده باشد و یا انقلابی فکری در جهت پیدایش اندیشه‌های نوین علمی ایجادکند، در غیر این‌صورت، مثل همان نقاشی غیر کلاسیك خواهد بود که خود نقاش هم منظور خود را نمی‌فهمد.

حال برگردیم به یك ابهام بزرگ، بعضی تصور می کنند که ریاضیات راهم می‌توان با آزمایش ثابت کرد. این اشتباه شاید به این مسئله برمی‌گردد که همه کس ـ حتی ریاضیدانان ـ هندسه را مختص به هندسهٔ اقلیدسی می پنداشتند؛ که قضایای آن رادرصفحه ودر فضا می‌توان به وسیلهٔ آزمایش و تجربه اثبات نمود، و تصور می‌کردند که هندسهٔ اقلیدسی برای کل‌جهان سازگاراست وقضایای آن را منطبق با واقعیتهای جهان می‌پنداشتند. این تصور کاملاً نا درست است. همهٔ ما می‌دانیم که در قرن نوزدهم لباچفسکی[4] و ریمان[5] با زیر سئوال بردن اصل پنجم اقلیدس و جانشین کردن اصول دیگری، هندسه های نا اقلیدسی را بمنصهٔ ظهور رساندند ناگفته نماند که هندسهٔ اقلیدسی یك سیستم زیبائی از یك دستگاه ریاضی است که به‌روش اصول موضوعی تدوین شده است و سیستمی

(1) Moritz Cantor (2) Henri Poincare (3) P. Hilton (4) Lobachevski N. I. (5) Riemann, B.

است سازگار. یعنی در داخل این هندسه اجتماع نقیضین محال است. ولی هندسه های نا اقلیدسی هم چنین اند، و در داخل خود سازگارند.

نکتهٔ مهم این است که هر دستگاه ریاضی در داخل خود سازگار است و نه در دنیای فیزیکی. یعنی فرمولها و قضایای یك دستگاه ریاضی را همواره نمی‌توان با پدیده های فیزیکی تجربه کرد، مگر در یك قسمت از دانش ریاضی بنام فیزیك تئوریك که سعی می‌کند برای پدیده‌های فیزیکی مدل ریاضی بسازد [۳].

شاید دوباره این ابهام پیش آید که دانش ریاضی مجموعه‌ای ازمکتشفات و تحقیقات صرف است که فقط وفقط برای ارضای حس کنجکاوی است. یعنی یك متخصص ریاضیات محض، نتایج جالب و زیبا بدست می‌آورد ویا دستگاه ریاضی جدیدی می‌سازد بی آنکه این نتایج در خارج ازریاضیات کاربردی داشته باشد. ولی باید دانست که یك ایدهٔ مجرد بعد از تکامل وتجرید وتعمیم‌های متوالی، بالاخره به صورت یك تئوری متکامل نسبی ریاضی در آمده، که صرفاً جنبهٔ محض داشته است، ولی بعد از مدتها مثلاً بیست و یا پنجاه ویا صد سال دیگر کاربرد عملی برای تعبیر پدیده های فیزیکی پیداکرده است. مثلاً موارد استعمال هندسهٔ ریمانی در تئوری نسبیت را می‌توان مثال زد، حدود سال ۱۸۵۰ ریمان هندسهٔ خودرا ابداع کرد، به طوری که تعریف انحناء را به فضاهای با بیش از سه بعد تعمیم داد. این مفاهیم به وسیلهٔ ریاضیدانان و دانشمندان مختلف مورد مداقه قرارگرفت ولی بالاخره انشتین[۶] بودکه درسال ۱۹۰۵ با استفاده از آن، تئوری نسبیت را کشف کرد؛ که خود تئوری نسبیت هم باتفاسیر فیزیکی آن دوره متناقض وعجیب بنظر می‌آمد. بالاخره، در این میان انشتین فرمول انرژی $E=mc^2$ را بدست آورد، وبسیاری از مفاهیم فیزیك کلاسیك هم عوض شد [۲] و[۳].

نکتهٔ قابل تذکر این است که کلیهٔ شاخه‌های ریاضی علی‌رغم همهٔ گسستگی‌های ظاهری بهم متصلند. برای اثبات این ادعا توسل به ریاضیات عالی را صحیح نمی‌دانیم ولی به ذکر این نکته اکتفا می‌کنیم که تئوریهای قیاسی ریاضی مرتباً تعمیم وتجرید یافته و به‌صورت یك دستگاه سازگار درمی‌آیند ولهذا، شیوهٔ تحقیق وتفکر هم باید براین مبنا باشد و آموزش ریاضی هم باید با همین سیر منطقی دنبال گردد. یعنی بایستی باور داشت که دستگاههای مختلف ریاضی به عنوان یك دانش مستقل ومتصل، از پدیده‌های طبیعی وفیزیکی نشأت گرفته وپس ازتجرید وتعمیم به‌صورت فعلی درآمده وبرهمین منوال به رشد خود ادامه خواهد داد. این اعتقادهرگونه تقسیم‌بندی به قسمتهای مجزا (محض و کاربردی) را نمی‌پذیرد، مگر آنکه این تفکیك صرفاً جهت تسهیل در مطالعه و تحقیق و اکتشاف باشد. این تقسیم بندی اعتباری رامی‌توان درشاخه‌های اصلی آنالیز، هندسه، تئوری اعداد، جبر، و از جانب دیگر در ریاضیات کاربسته و آماری و تحقیق در عملیات مورد مطالعه قرار داد. برای حسن ختام کلماتی از ریاضیدانان معروف پولیا و سگو نقل می‌کنیم:

«گرچه زبان ریاضی زبانی دشوار است ولی فنا‌ناپذیر است[۱] زبانها می‌میرند ولی افکارریاضی مرگ ندارند[۵]»

«ما قواعدی کلی سراغ نداریم که بتوانند مفیدترین ضوابط فکررا به تفصیل مقررکنند. حتی اگر تقریر چنین قواعدی ممکن بود چندان سودمند نبود. به جای دانستن قواعد صحیح تفکر از جنبهٔ نظری، بهترآنست که شخص این قواعدرا درگوشت وخون خود جذب کند، وبه نحوی که برای استفادهٔ آنی وفطری آماده باشند. بنابراین، برای تربیت قدرت تفکر، آنچه واقعاً مفید است تمرین در فکر کردن است. حل مستقل مسائل مبارز-طلب شخص را به مراقب بیشتر ازکلمات کوتاهی که به‌دنبال آنها می‌آید یاری می‌کند، اگرچه به عنوان اولین قدم زیانی ازآنها متوجه او نمی‌شود.»

(نقل از [۵] صفحهٔ ۲۵، ازکلمات ریاضیدانان معروف پولیا وسگو در مقدمهٔ کتاب [۱]).

امید است که در فرصتهای آتی بتوان هر یك از قسمتهای فوق را به طور دقیق شکافت تا شاید بتوان شناختی دقیق و نسبتاً کامل از دانش ریاضی کسب نمود واز این رهگذر بتوان محصلین را بسوی فراگیری وگرایش به افکارریاضی سوق داد تاتفکرعلمی وبینش منطقی گسترش یابد.

[۱] G. Polya and G. Szego, *Problems and Theorems in Analysis*, vol. I (1972), vol. II (1976) Springer-Verleg.

[۲] C. Stanley Ogilvy, *Through The Mathescope*, Oxford University Press, (1956).

[۳] Van Der Waerden, *The School of Hilbert and Emmy Noether*, the Bull. of the London Math. Soc. 15, 52(1983).

(مقالهٔ فوق به توسط نگارنده ترجمه شده و جهت چاپ به مجلهٔ فرهنگ واندیشهٔ ریاضی ارسال شده است.)

[۴] Yung — Chenlu, *Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory*, Springer Verleg, (1976).

[۵] مصاحب، غلامحسین، تئوری مقدماتی اعداد، ازانتشارات کتابفروشی دهخدا.

(۶) Einstein, A.

ریاضیات درعهد باستان

دکتر محمدقاسم وحیدی

ریاضیات سرگذشتی طولانی دارد. ما آن را باختصار ولی از ابتدا خواهیم‌گفت. وقتی به‌عصر شکوفائی علم درتمدن اسلامی وریاضیات این دوره می‌رسیم، تأملی ژرف خواهیم داشت وبه بیان تاریخ پرافتخار آن درسرزمینهائی اسلامی، به‌ویژه ایران، خواهیم پرداخت.

درشمارهٔ پیش، مختصراً اشاره‌ای داشتیم به‌مرحلهٔ تولدآن واینك سخنی داریم از طفولیت آن درشرق میانه.

اهرام مصر قریب به‌پنجهزارسال پیش‌ساخته شده‌اند. عظمت این بناها ودقت وظرافتی‌که درساختن‌آنها به‌کار رفته، به‌حدی است که موجب پیدایش هاله‌ای از افسانه درپیرامون آنها شده‌است. هرم بزرگ جیزه[1]، بیش‌از ۵۰٬۰۰۰ مترمربع زمین رامی‌پوشاند وبالغ بر ۲٬۰۰۰٬۰۰۰ قطعه سنگ، باوزنی به‌طورمتوسط برابربا ۲/۵تن، درساختن‌آن به‌کار رفته است. این قطعه سنگها ازمعادن سنگی آن سوی رود نیل استخراج شده و به‌محل هرمها حمل گردیده و به‌دقت تمام بههم جفت شده‌اند. سقف بعضی ازاطاقها ازسنگهای خارایی به‌وزن ۵۴تن، به‌طول ۸متر و ضخامت تقریبی ۱/۲متر ساخته شده‌اندکه ازمعادن سنگی‌که حدود ۱۰۰۰ کیلومتر بامحل فاصله دارند به‌آنجا آورده شده ودر ارتفاع ۶۰متری ازسطح زمین نصب شده‌اند. قاعدهٔ هرم بزرگ مربعی است‌که خطای نسبی دراختلاف اضلاع آن‌کمتراز $\frac{1}{14000}$ و خطای نسبی زوایا در انحراف ازقائمه‌کمتر از $\frac{1}{27000}$ است. اهرام برروی مدار ۳۰ درجه بناشده ودقیقاً متوجه چهارجهت اصلی‌اند. دراین اهرام راهروهای شیب‌داری ساخته شده که (در زمان بنای آنها) درست در امتداد ستارهٔ قطبی بوده‌اند. ساختمان این‌هرمها بدون تردید متضمن آشنایی با ریاضیات ونجوم است. با همهٔ این احوال، این بین‌النهرین (سرزمین بین دو رودخانهٔ دجله و فرات) است‌که گاهوارهٔ تمدن نامیده شده‌است. دراینجا برخلاف مصر هیچ نشانه‌ای ازبناهای عظیم برپا مانده نمی‌یابیم. از روی هزاران لوح سفالی‌که از زمین درآورده شده‌اند وکشف رمز وخواندن این لوحها، وجود تمدن عظیمی‌که ساکنین گذشتهٔ این سرزمین بدان رسیده بودند، آشکار شده‌است. برخی ازاین لوحها، کم وبیش به ریاضیات پرداخته‌اندکه به‌زودی ازآنها سخن خواهیم‌گفت.

هردو سرزمین مصر وبین‌النهرین، درمیان دو دریا امتداد پیدا می‌کنند؛ برای مصر دریای مدیترانه درشمال است و دریای سرخ درمشرق، ودر بین‌النهرین خلیج فارس درقسمت جنوب شرقی است ودریای سرخ درمغرب. این دوناحیه‌را بادیةالشام ازیکدیگر جدا می‌سازد وباشاید به‌تعبیری بتوان‌گفت‌که آن دو را بیابانی که میانشان است و دریاهای مشترك بین هردو به‌یکدیگرمتصل می‌سازد. بیشترحوادث تاریخی این دوره، دراین ناحیه اتفاق افتاده‌است. خط وکتابت، به‌طور مستقل، دراین دوسرزمین ابداع شده‌است، واختراع چرخ واستفاده ازآهن‌هم مصادف باآغازتمدن دراین دوناحیه بوده‌است. برای سهولت، این دوتمدن را به‌طور جداگانه مورد بررسی قرارمی‌دهیم ومطلب‌را با مصرآغازمی‌کنیم.

مصر

درجایی‌که سرزمین مصر کنونی است، ابتدا دوپادشاهی، یکی درشمال وديگری درجنوب وجود داشته‌است. زمانی بین سالهای ۳۵۰۰ و۳۰۰۰ ق. م. حکمروایی به‌نام منس[2] شمال وجنوب را متحدکرده است. ازاین زمان به‌بعد دوره‌های اصلی تاریخ مصربا نام سلسله‌های حاکم مشخص می‌شود و منس مؤسس سلسلهٔ اول بوده است. اوج تمدن‌مصر در دورهٔ سلسلهٔ اول (حدود ۲۵۰۰ سال ق.م.) حادث شده‌است‌که حکام این دوره اهرام را ساخته‌اند. تمدن مصر تازمان فتح‌آن به‌دست اسکندر درسال ۳۲۲ ق.م. مسیرطبیعی خود را داشته است. بعدازآن، تا حدود ۶۰۰ بعدازمیلاد، تاریخ و ریاضیات مصر به‌تمدن یونان تعلق دارد. بنابراین، جدا ازتهاجم کوتاه مدتی‌که درسالهای بین ۱۷۰۰ تا ۱۶۰۰ق.م. توسط هیکسوسها[3] انجام شده‌است، وجدا ازتماسی‌که باتمدن بابلی ایجاد شده‌است (شواهد این تماس ازکشف لوحهای تل‌العمارنه[4] به

زبان میخی مربوط به‌سال ۱۵۰۰ق.م. استنباط می‌شود)، تمدن مصری محصول مردم بومی آن بوده است.

مصریان دستگاههای خط‌نویسی خاص خودرا پدیدآوردند. یکی‌ازآنها خط هیروگلیفی وازنوع تصویری بود؛ یعنی، هرعلامت تصویری ازیك شیء بود. ازهیروگلیفها برای نوشتن روی بناهای یادبود تاحدود میلاد مسیح استفاده می‌شده است. ازحوالی ۲۵۰۰ ق.م. به‌بعد مصریان برای مقاصد روزانه آنچه راکه خط هیراتیك[5] (خط کاهنان) نامیده می‌شد، مورد استفاده قراردادند. دراین دستگاه خط‌نویسی، علایم‌قراردادی به‌کار می‌رفت‌که درابتدا صرفاً صورتهای اختصاری هیروگلیفها بودند. خط هیراتیك هجایی بود، هرهجا توسط یك ایدئوگرام[6] (اندیشه‌نگار) نمایش داده می‌شد و یك کلمهٔ کامل مجموعه‌ای از ایدئوگرامها بود. ازخط هیراتیك، خط دموتیك[7] (خط عوام) پدیدآمدکه مورد استفاده عموم بود. عمل نوشتن، با استفاده ازجوهر برروی پاپیروس انجام می‌گرفت. برای ساختن پاپیروس ساقه‌های نوعی نی‌آبی به‌نام پاپو[8] را به‌صورت نوارهایی بریده وکنارهم قرارمی‌دادند تاصفحه‌ای ازآن تشکیل شود. لایهٔ دیگری ازنوارها را برروی آن قرارمی‌دادند وهمه رابا آب خیس می‌کردندکه پس‌ازآن صفحه رامحکم فشرده درآفتاب خشك می‌کردند. چون پاپیروس باگذشت ایام خشك شده وخرد می‌شود، اسناد معدودی، سوای سنگنبشته‌های هیروگلیفی از گزند روزگار درامان مانده‌اند.

درسال ۱۷۹۹، درحملهٔ ناپلئون به‌مصر، باپیداشدن‌کتیبه‌ای در روزتا[9]، یك بندر باستانی درنزدیکی اسکندریه،که به‌سه خط یونانی، دموتیك، وهیروگلیف‌نوشته شده‌بود، رمز هیروگلیف توسط شامپولیون[10] درفرانسه و توماس یانگ[11] در انگلستان کشف وپس ازآن امکان خواندن سنگنبشته‌های موجود درگورها و یادواره‌های واقع درمصرفراهم‌شد. رمزدستگاه‌عددنویسی هیروگلیف مصری بسرعت‌گشوده شد. این دستگاه عددنویسی‌که به‌اندازهٔ اهرام ثلاثه قدمت دارد، مطابق انتظار، دهدهی است. با استفاده از علامتهای مجزایی برای هریك ازشش توان اول ده وتکرارآنها به‌قدرلزوم، اعداد حتی بالغ بریك میلیون برروی سنگ، چوب، وسایر مواد حك‌می‌شد. خط عمودی‌کوتاهی نمایش یك بود. علامتی شبیه به‌یك U وارون به‌نشانهٔ ۱۰ به‌کار می‌رفت، کلافی شبیه به حرف C نمایش ۱۰۰ بود، یك‌گل‌نیلوفر نمایش ۱۰۰۰، انگشت خمیده‌ای نشانهٔ ۱۰٬۰۰۰، یك ماهی ریشدار علامت ۱۰۰٬۰۰۰ ومردی زانوزده نشانهٔ ۱۰۰۰٬۰۰۰ بود. باتکرار این علایم، مثلاً عدد ۱۲٬۳۴۵ به‌صورت زیرنوشته می‌شد

ارقام از مرتبهٔ‌کوچك گاهی درسمت چپ قرار می‌گرفتند،

وگاهی ارقام را بطور عمودی زیرهم می‌نوشتند. خود علایم‌گهگاه درجهت معکوس نوشته می‌شدند، بطوری‌که تحدب علامت ۱۰۰ گاهی به چپ وگاهی به راست بود.

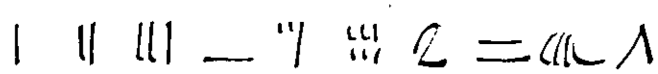
کتیبه های مصری‌گواه آشنایی مصریان با اعداد بزرگ در اعصار قدیم است. در موزه‌ای در آکسفورد یك گرز سلطنتی با قدمتی‌بالغ بر ۵۰۰۰ سال نگهداری می‌شودکه بر روی آن سخن‌از اسارت ۱۲۰٬۰۰۰ مردجنگی وبه‌غنیمت‌گرفته شدن ۱٬۴۲۲٬۰۰۰ رأس بز طی یك مبارزهٔ نظامی رفته است. شاید این ارقام مبالغه‌آمیز باشند ولی از منابع دیگر معلوم شده است که مصریان در شمارش و اندازه‌گیری دقتی وافر داشته‌اند.

دانش ریاضی مصریان باستان محدود به اطلاعات موجوددر سنگنبشته ها نیست، واگرچنین می بود تنهاامکان ارائهٔ طرح بسیار ناقصی از میزان پیشرفت آنها در این علم میسر می‌شد. ریاضیات تنها منحصر به‌شمارش واندازه‌گیری نیست ودرسنگنبشته‌های‌مصری چیزی فراسوی آن یافت نمی‌شود. خوشبختانه‌منابع دیگری برای کسب اطلاعات در این زمینه وجود دارد؛ معدودی طومار ازجنسی که دربالا به آن اشاره کردیم. مهمترین پاپیروس که محتوای ریاضی دارد طوماری است به‌عرض تقریبی ۳۰ سانتی‌متر وطول تقریبی ۵ مترکه اکنون در موزهٔ بریتانیا نگهداری می‌شود. این پاپیروس درسال ۱۸۵۸ توسط هنری ریند[12]، باستانشناس‌اسکاتلندی خریداری شد، وازاین‌لحاظ به نام پاپیروس ریند خوانده می‌شود. این پاپیروس به پاپیروس احمس[13] هم شهرت دارد، زیرا آن را احمس‌کاتب‌درحدود ۱۶۵۰ ق.م. رونویسی‌کرده است. بنا به‌قول این‌کاتب، مواد نوشتهٔ مزبور از نمونه‌ای‌که مربوط به سلطنت‌میانه (۲۰۰۰ تا ۱۸۰۰ ق.م.) می‌باشد، استخراج شده است. پاپیروس دیگری، پاپیروس مسکو نام دارد و شایان اهمیت زیادی است. پاپیروس مسکوطولی برابر با پاپیروس ریند دارد، یعنی طول‌آن تقریباً ۵ متر است ولی عرض آن به اندازهٔ یك چهارم پاپیروس ریند ــ تقریباً ۸ سانتی‌متر ــ است. پاپیروس اخیر توسط کاتب گمنامی در دورهٔ سلسلهٔ دوازدهم (حدود سال ۱۸۹۰ ق.م.) نوشته شده ودر نوشتن آن به اندازهٔ پاپیروس احمس دقت نشده است. علاوه‌براینها منابع‌دیگری وجوددارند؛ ازآن‌جمله‌پاپیروس‌کاهون[14] وپاپیروس برلین (هردومربوط به دوران‌سلسلهٔ دوازدهم)می‌باشند.

این پاپیروسها حاوی مسائلی همراه با حل آنها هستند. پاپیروس ریند شامل ۸۵ مسئله وپاپیروس مسکوشامل ۲۵ مسئله ــ است. به احتمال قوی مسائلی‌که در این دوپاپیروس مهم وجود

داشته‌اند، نمونه‌هایی از مسائل موجود و راه حلهای آنها بوده‌اند. گرچه تاریخ هردوپاپیروس حدوداً به سال ۱۷۰۰ ق.م. برمی‌گردد، ریاضیات موجود درآنها برمصریان حدود ۳۵۰۰ ق.م. معلوم‌بوده و تا زمان غلبهٔ یونان بر مصر چیز زیادی بر آن افزوده نشده و بدین ترتیب می‌توان گفت‌که در این فاصله، بعد از آغازی‌خوش، دچار رکودگشته است.

از محتوای این پاپیروسها معلوم می‌شودکه مصریان اعداد صحیح را به خط هیراتیکی با استفاده از نمادهای زیر نوشته‌اند:



۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰

حساب اساساً جنبهٔ جمعی داشته است. برای جمع و تفاضل معمولی آنها علایم لازم را برای رسیدن به مقصودکنار هم قرار می‌دادند. عملا ضرب و تقسیم نیز به عمل جمع تحویل می‌شد. برای پیدا کردن مثلا حاصلضرب ۱۲ در ۱۲ مصریان به ترتیب زیر عمل می‌کردند:

۱	۱۲
۲	۲۴
۴	۴۸
۸	۹۶

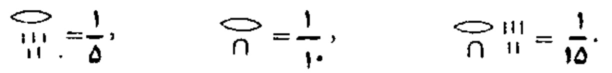
هر سطر ازسطرپیش، با دو برابرکردن‌آن به‌ دست می‌آید. چون $4 \times 12 = 48$ و $8 \times 12 = 96$، بـا جمع کـردن ۴۸ و ۹۶ مقدار 12×12 بـه دست می‌آید.

تقسیم یك عدد صحیح به‌عددیگری ازاین نوع‌توسط مصریان به همان نسبت جالب توجه است. برای مثال عمل تقسیم ۱۹ بر۸ چنین است:

۱	۸
۲	۱۶
$\frac{1}{2}$	۴
$\frac{1}{4}$	۲
$\frac{1}{8}$	۱

لذا جواب $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ است. همچنانکه دیـده می‌شود، صرفاً عدهٔ هشت‌ها وقسمتهایی از عددهشت‌که مجموع۱۹ را حاصل‌می‌کند، انتخاب شده است.

نمایش‌کسرها در دستگاه عدد نویسی مصری خیلی‌پیچیده‌تر از دستگاه عددنویسی امروزی است. علامت ⬭ نشان یك‌کسر بوده است. در دستگاه خط‌نویسی هیراتیك این بیضی کوچك تبدیل بـه یك نقطه شده واین علامت یا نقطه معمولاً دربالای عددصحیح قرار داده می‌شده تا نمایش یك‌کسر به دست آید. مثالهایی در دستگاه هیروگلیفی چنین‌اند:



$= \frac{1}{5}$، $= \frac{1}{10}$، $= \frac{1}{15}$.

برخی‌کسرها نمایش خاصی داشته‌اند مثلاً رمز هیروگلیف ⸗ به نشانهٔ $\frac{1}{2}$ و ⊓ نشانهٔ $\frac{2}{3}$، و × نشانهٔ $\frac{1}{4}$ بوده است.

سوای چندکسر، بقیهٔ به‌کسرهای واحد (کسرهایی بـا صورت یك) تجزیـه می‌شده‌انـد. مثلاً احمس $\frac{2}{5}$ را به صـورت $\frac{1}{15} + \frac{1}{3}$ می‌نویسد. علامتی برای جمع به کار نمی‌بردند، ولی وجود آن از قراین معلوم می شده است. درپاپیروس ریند جدولی برای بیان‌کسرهایی با صورت ۲ و مخرجهای فرد از ۵ تا ۱۰۱ به صورت‌کسرهایی با صورت ۱ وجوددارد. به‌کمك این‌جدول‌کسری نظیر $\frac{7}{29}$ را، که از نظر احمس خارج قسمت عدد صحیح ۷ بر عدد صحیح ۲۹ است، نیز می‌شد به صورت مجموع کسرهای واحد نشان داد. ازآنجاکه $1+2+2+2=7$، وی هریك ازکسرهای $\frac{2}{29}$ را به صورت مجمـوع کسرهایی با صورت ۱ در می‌آورد. با ترکیب این نتایج وتحویلهای بیشتر، وی به مجموعی ازکسرهای واحد دست می‌یابد،که مخرج همهٔ‌آنها متفاوت است. نمایش $\frac{7}{29}$، سرانجام، به‌صورت $\frac{1}{232} + \frac{1}{87} + \frac{1}{58} + \frac{1}{24} + \frac{1}{6}$ است. البته $\frac{7}{29}$ را می‌توان به صـورت $\frac{1}{145} + \frac{1}{29} + \frac{1}{5}$ هم نوشت. ولی ازآنجا که جدول «$\frac{2}{n}$» احمس منجربه تجزیهٔ اول می‌شود، همان‌هم مورد استفاده قرار می‌گیرد. بیان کسرهای‌کلی $\frac{a}{b}$ به‌صورت مجموعی ازکسرهای‌واحد باهمان روشهای سنتی انجام می‌شد. با استفاده از کسرهای واحد، مصریان چهارعمل اصلی را برای‌کسرهـا صورت می‌دادند. طول و پیچیدگی محاسبات باکسرها، یکی از عللی بود که جلو پیشرفت مصریان را درحساب وهمینطور در جبرمی‌گرفت.

درپاپیروسها مسائل جبر هم یافت می‌شود. این‌مسائل‌متضمن یك مجهول‌اندکه در اصل معادل با معادلات‌یك مجهولی‌کنونی‌اند.

معهذا، اعمال به‌کاررفته خصیصهٔ حسابی دارند وحل‌معادلات به‌عنوان موضوع مستقلی ازحساب به ذهن مصریان خطور نمی‌کرده است. مسائل به طور لفظی بیان می‌شوند و دستوراتی برای به‌دست‌آوردن جواب، بی آنکه روشهای بکاررفته توجیه شوند، داده‌می‌شدند. به‌عنوان مثال ترجمه تحت‌اللفظی مسئلهٔ شمارهٔ ۳۱ پاپیروس ریند چنین است:

«کمیتی، $\frac{2}{3}$ آن، $\frac{1}{2}$ آن، $\frac{1}{7}$ آن، و کل آن، مساوی ۳۳ است.»

این برای ما به‌معنی این است که

$$\frac{2}{3}x+\frac{x}{2}+\frac{x}{7}+x=33$$

حساب ساده‌ای ازنوع آنچه مصریان داشتند، جواب را می‌دهد.

مسئلهٔ ۶۳ همین پاپیروس به قرار زیر است: «دستورهایی برای تقسیم ۷۰۰ نان بین چهار نفر، $\frac{2}{3}$ برای یکی، $\frac{1}{2}$ برای دومی، $\frac{1}{3}$ برای سومی، $\frac{1}{4}$ برای‌چهارمی.» مسئله به‌زبان امروزی این است:

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x=700$$

حل آن، به صورتی که احمس داده چنین است: «$\frac{2}{3}$، $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{4}$ را جمع‌کن. نتیجه $1\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$ می‌شود. ۱ را بر $1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$ تقسیم کن. نتیجه $\frac{1}{2}\ \frac{1}{14}$ می‌شود. حالا $\frac{1}{2}\ \frac{1}{14}$ قسمت‌از ۷۰۰ را پیداکن. نتیجه ۴۰۰ است.»

درحل بعضی مسائل، احمس از «قاعدهٔ امتحان و تصحیح» استفاده‌می‌کند. مثلاً برای تعیین‌پنج عددکه جملات یك‌تصاعدحسابی هستند ومجموع آنها ۱۰۰ است، وی ابتدا قدر نسبت تصاعد را $5\frac{1}{2}$ برابرعددکوچکتر واین‌عددرا یك‌فرض می‌کند وتصاعد: ۱، $6\frac{1}{2}$، ۱۲، $17\frac{1}{2}$، ۲۳ را به دست می‌آورد. اما مجموع این اعداد ۶۰ است درحالی‌که باید ۱۰۰ باشد. پس او هر جمله را در $\frac{50}{3}\left(=\frac{100}{6}\right)$ ضرب می‌کند.

تنها انواع سادهٔ معادلات درجهٔ دوم‌ازقبیل $ax^2=b$ توسط مصریان مورد بحث قرارگرفته است. حتی موقعی که دو مجهول مطرح‌اند، معادله از نوع

$$x^2+y^2=100\ ,\ y=\frac{3}{4}x$$

است‌که با حذف y به حالت اول تحویل می‌شود. دراین پاپیروسها بعضی مسائل عملی متضمن تصاعدهای حسابی و هندسی نیز یافت می‌شوند. می‌توان از این مسائل و راه حلهای آنها به راه حلی کلی دست یافت.

در جبر مصریان عملاً نمادی به کار نمی رود. درپاپیروس احمس جمع وتفریق بترتیب توسط ساقهای‌انسانی‌که درحال‌آمدن ورفتن است، نشان داده می‌شود، و ازعلامت برای نشان دادن جذر استفاده می‌شود.

پیشرفت مصریان درهندسه چه اندازه بوده است؛ همه ساله رودخانهٔ نیل از بستر خود خارج شده مزارع اطراف را فرا می‌گیرد ودرعین محوکردن حدود ومرزهای این مزارع آنها را با نم وخاك حاصلخیزی می‌پوشاندکه غلات به طور معجزه آسایی در آن رشد می‌کنند. تعیین مجدد این حدود نیازمند مساحی بود، که سبب پیدایش هندسهٔ نسبتاً پیشرفته‌ای دربین مصریان شده‌بود. درپاپیروس ریند ۱۹ مسئله وجودداردکه مربوط به‌مساحات مزارع وحجم انبارهای غله است واین مسائل با دقت قابل ملاحظه‌ای حل شده‌اند. قسمتی از پاپیروس به تعیین مساحات مزارعی پرداخته است‌که‌به شکل مربع، مستطیل، مثلث، ذوزنقه، ونیزاشکالی‌هستند، که قابل تقسیم به اشکال فوق‌الذکرند. مساحت دوشکل‌اول به‌درستی داده شده است؛ در مورد مثلث و ذوزنقه جای تردید است. در یك تصویر مثلثی نشان داده شده‌که قاعدهٔ آن ۴ است. طول یکی از اضلاع ۱۰ است و گفته می شودکه مساحت آن ۲۰ می‌باشد. اگر آن‌گونه‌که از شکل برمی‌آید مثلث متساوی‌الساقین باشد، جواب نا درست است ولی اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد،جواب صحیح‌است. اگرچه عموماً تصور می‌شودکه مثلث متساوی‌الساقین در نظر بوده است، قابل توجیه نیست‌که مصریان،که دانش ریاضی آنهاکم نبوده است، دچار چنین خطایی شده باشند. غیر محتمل نیست‌که تصویر، که با بی مبالاتی‌کشیده شده، بد طراحی شده باشدوآنچه‌می‌بایست یك مثلث قائم‌الزاویه باشد، یك‌مثلث متساوی‌الساقین‌ازکاردرآمده است. همین مطلب عیناً در مورد ذوزنقه هم تکرار می‌شود.

مصریان مساحت دایره را معادل بامساحت مربعی‌گرفته‌اند که ضلع آن $\frac{8}{9}$ قطر دایره بود وبدین ترتیب برای نسبت محیط دایره به قطر آن (تقریب π) مقدار ۳٫۱۶ را به دست آورده‌اند. در یك مسئلهٔ دیگر حجم یك کاسه به شکل نیمکره به قطر ۸ را ۱۳۶٫۵۳ محاسبه‌کرده‌اند.این‌امربه مقدار ۳٫۲ برای نسبت محیط دایره به قطر آن منجر می‌شودکه خطایی بیش از مقدارفوقدارد.

مصریان طرز محاسبهٔ حجم استوانه و منشور با قاعدهٔ مستطیلی را می‌دانسته‌اند و مسائل زیادی از آنان راجع به محاسبهٔ ظرفیت انبارهایی که اشکال بالا را داشته‌اند، در دست است ولی بزرگترین دستاورد آنان تعیین حجم یک هرم ناقص (با قاعده‌های مربع‌شکل) است.

برای مصریان دانش نجوم جنبهٔ اساسی داشت، نیل برای آنها مشابهٔ خونی بود که در رگهای زندگی‌شان جریان دارد. چنانچه گفتیم مصریان از طریق کشت و زرع خاک حاصلخیزی که طغیانهای سالانهٔ نیل برای آنها به ارمغان می‌آورد، ارتزاق می‌کرده‌اند. با این حال آنها باید خودرا برای عوارض منفی این طغیان هم آماده می‌کردند. منزلگاه، ابزار، و گلهٔ خودرا باید به طور موقت از منطقه دور می‌کردند و به دنبال آن بلافاصله برای زراعت آماده می‌شدند. از این رو لازم بود که شروع طغیان از قبل پیش‌بینی شود، و این کار از طریق آگاهی به پدیده‌های سماوی که مصادف با این واقعه بود، میسر می‌گردید.

نجوم وضع تقویم را هم مقدور ساخت. علاوه بر نیازی که در امور کشاورزی و بازرگانی به تقویم حس می‌شد، می‌بایست اعیاد مذهبی هم پیش‌بینی می‌شدند. آنان عقیده داشتند که جلب نظر خدایان، وجود مراسم خاصی را در مواقع معین اقتضا می‌کند.

مصریان طول تقریبی سال خورشیدی را از طریق رصد کردن ستارهٔ شعرای یمانی به دست آوردند. آنها متوجه شدند که روز شروع طغیان، خورشید بلافاصله پس از طلوع این ستاره، طلوع می‌کند. بدین ترتیب عادت شد که سال را از طلوع مقارن خورشید و ستارهٔ شعرای یمانی آغاز و به طلوع بعدی ختم کنند. فاصلهٔ بین این دو حادثه $365\frac{1}{4}$ روز بود. از این رو مصریان، احتمالاً در سال ۴۲۴۱ ق.م. یک تقویم رسمی بر مبنای ۳۶۵ روز در سال را اتخاذ کردند.

به علت قلت منابعی که از مصریان به یادگار مانده است، ارزیابی دستاوردهای ریاضی و نجومی آنها (و دیگر ملل باستان) مورد اتفاق همهٔ علمای تاریخ نیست. عده‌ای ریاضیات «عملی» مصریان را خام و خالی از جنبه‌های استدلالی (که وجه مشخصهٔ ریاضیات یونانی است) تلقی می‌کنند و دیگران با در نظر گرفتن بعد زمانی این پیشرفتها، به تحسین توأم با شیفتگی خالقین آنها می‌پردازند. قبلاً برخی ویژگیهای اهرام را ــ که مستلزم مهندسی، ریاضیات، نجوم و مدیریت و... پیشرفته است ــ برشمردیم. برای آنها ویژگیهای بسیار متعدد دیگری هم نسبت داده می‌شود. گفته شده است که برای یکنواخت نمودن شیب وجوه اهرام، مصریان از یک مفهوم ریاضی استفاده کرده‌اند که معادل کوتانژانت زاویهٔ کنونی است؛ بدین ترتیب مصریان مبادی مثلثات و نظریهٔ مثلثهای متشابه را پدید آورده‌اند. گفته‌اند که آنها درپی آن بوده‌اند که نسبت طول پیرامون قاعده به ارتفاع اهرام را برابر 2π در آورند (هرچند که این موضوع با کار احمس درزمینهٔ مقادیر تقریبی ارائه‌شده برای π منطبق نیست). عده‌ای با عنوان کردن این مطلب که در ساختن اهرام، سپاه عظیمی از بردگان به کار گرفته شده و در واقع زور بازوی بردگان پدیدآورندهٔ اهرام بوده است، از اهمیت مهندسی و فنی متضمن در آن می‌کاهند. البته تردیدی نیست که در ساختن آنها شمارهٔ فراوانی آدم کار می‌کرده‌اند ولی این قضیه معمای معماری و فنی را حل نمی‌کند، بلکه معمای دیگری پیش می‌آورد که خود به اندازهٔ معمای قبلی دشواری دارد. گفتن اینکه مثلاً ۳۰٬۰۰۰ مرد پیوسته در ساختن این بناها به کار مشغول بوده‌اند، با زبان آسان است ولی عدهٔ افرادی که در یک محیط محدود کار می‌کنند، خود محدود است و حتی با قبول این فرض هم هدایت کار و کوشش آنها در جهت واحد به مهارت فراوان نیاز دارد و تهیهٔ خوراک و بسامان نگهداشتن ایشان و رسیدگی به پیچیدگیهای فنی چنین کار عظیمی هوش و نبوغ فوق‌العاده می‌خواهد. به هر حال اغلب مورخین متفق‌القولند که سهم مصریان به قرار زیر بوده است:

۱. آنها قادر به انجام چهار عمل اصلی درحساب بوده‌اند، که این اعمال شامل کسرها می‌شده است و نیز آنها روشی برای تقریب جذر اعداد داشته‌اند.

۲. آنها از تصاعدهای حسابی و هندسی مطلع بوده‌اند.

۳. آنها قادر به حل معادلات درجهٔ اول جبری و معادلات درجهٔ دوم بوده‌اند.

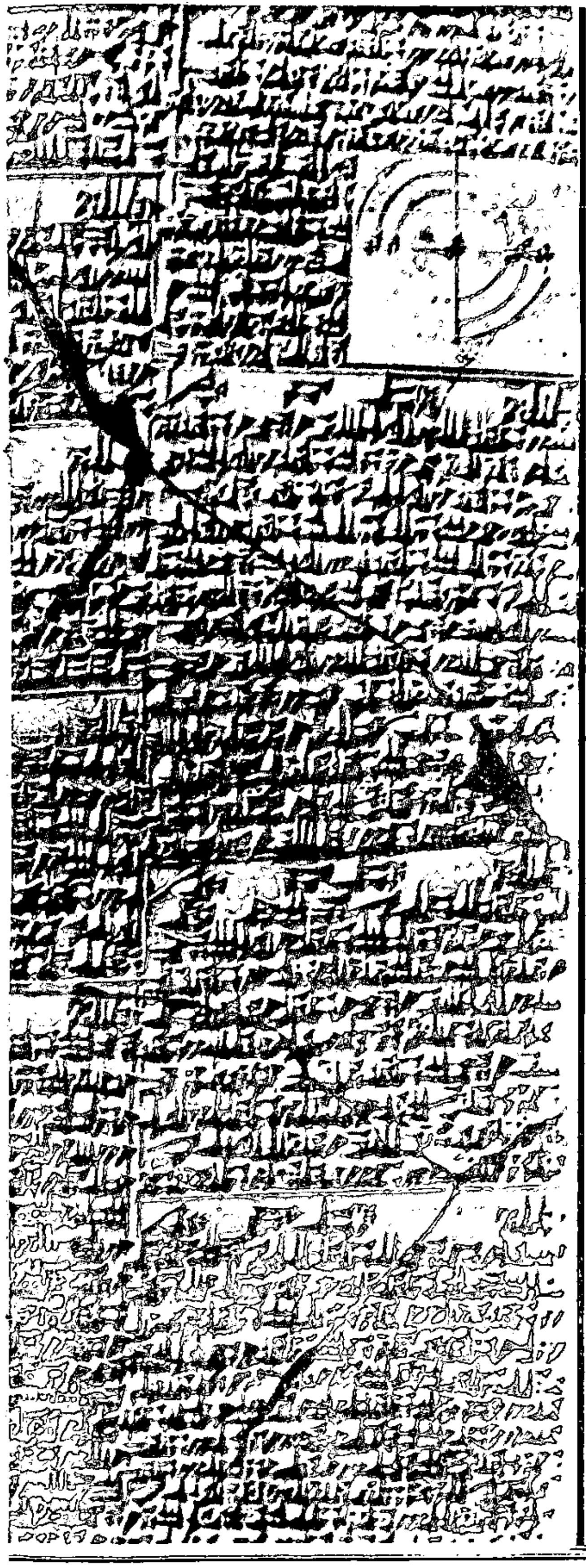
۴. معرفت آنها بر هندسه در حد مساحی اشکال مستوی و صلب بوده است.

۵. آنها دانش دقیقی از تربیع دایره و تقسیم دایره به قسمتهای مساوی داشته‌اند.

۶. آنها با مبادی نسبتها آشنا بوده‌اند. برخی نویسندگان در این کار ایده‌مبهمی از آنچه را که امروزه توابع مثلثاتی نامیده می‌شوند، مشاهده می‌کنند.

بابل

به تمدنهای بین‌النهرین در عهد باستان اغلب عنوان تمدن بابلی داده می‌شود، گرچه این تسمیه علی‌الاصول درست نیست. شهر بابل، نه در آغاز، مرکز فرهنگ منسوب به ناحیهٔ بین دو رودخانهٔ دجله و فرات بوده است و نه دردوره‌های بعدی برای همیشه چنین مانده است؛ ولی جهت سهولت به این ناحیه، در بین سالهای تقریباً از ۲۰۰۰ ق.م تا ۶۰۰ ق.م نام «بابلی» داده شده است. درسال ۵۳۸ ق.م. بابل به‌دست کوروش فتح شد، شهر سالم ماند ولی امپراطوری بابل به سرانجام خود رسید. معهذا ریاضیات «بابلی»

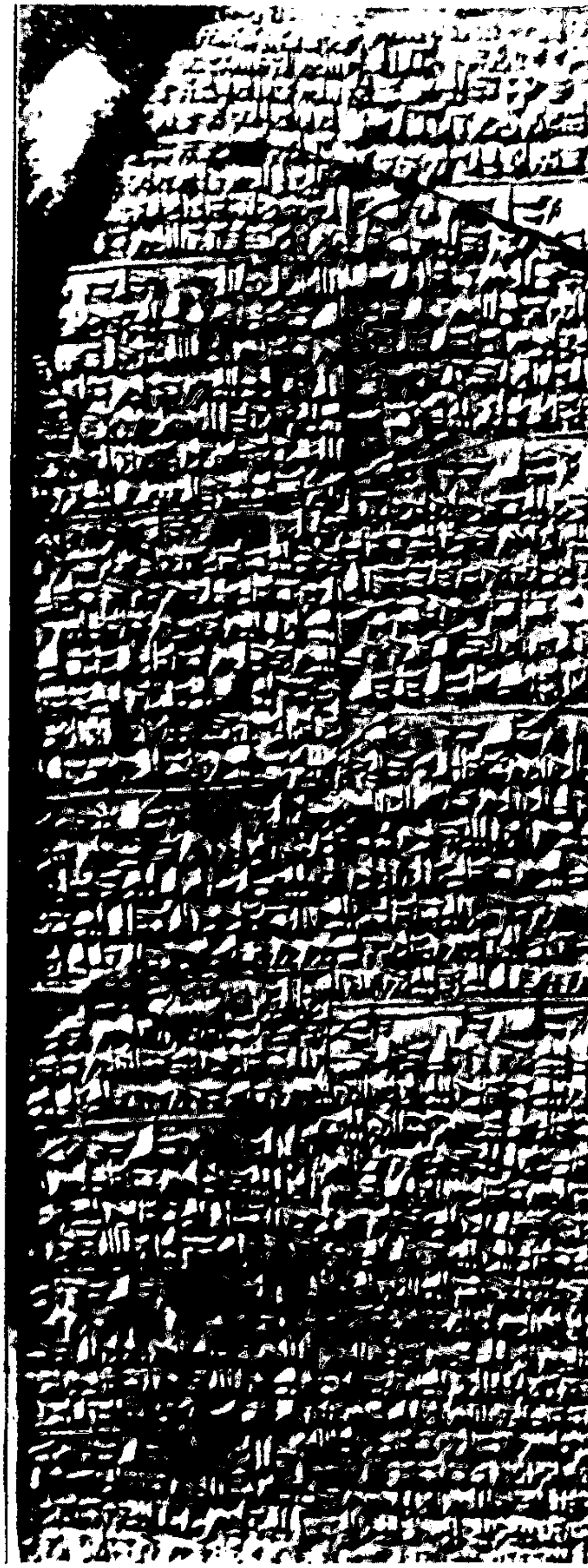


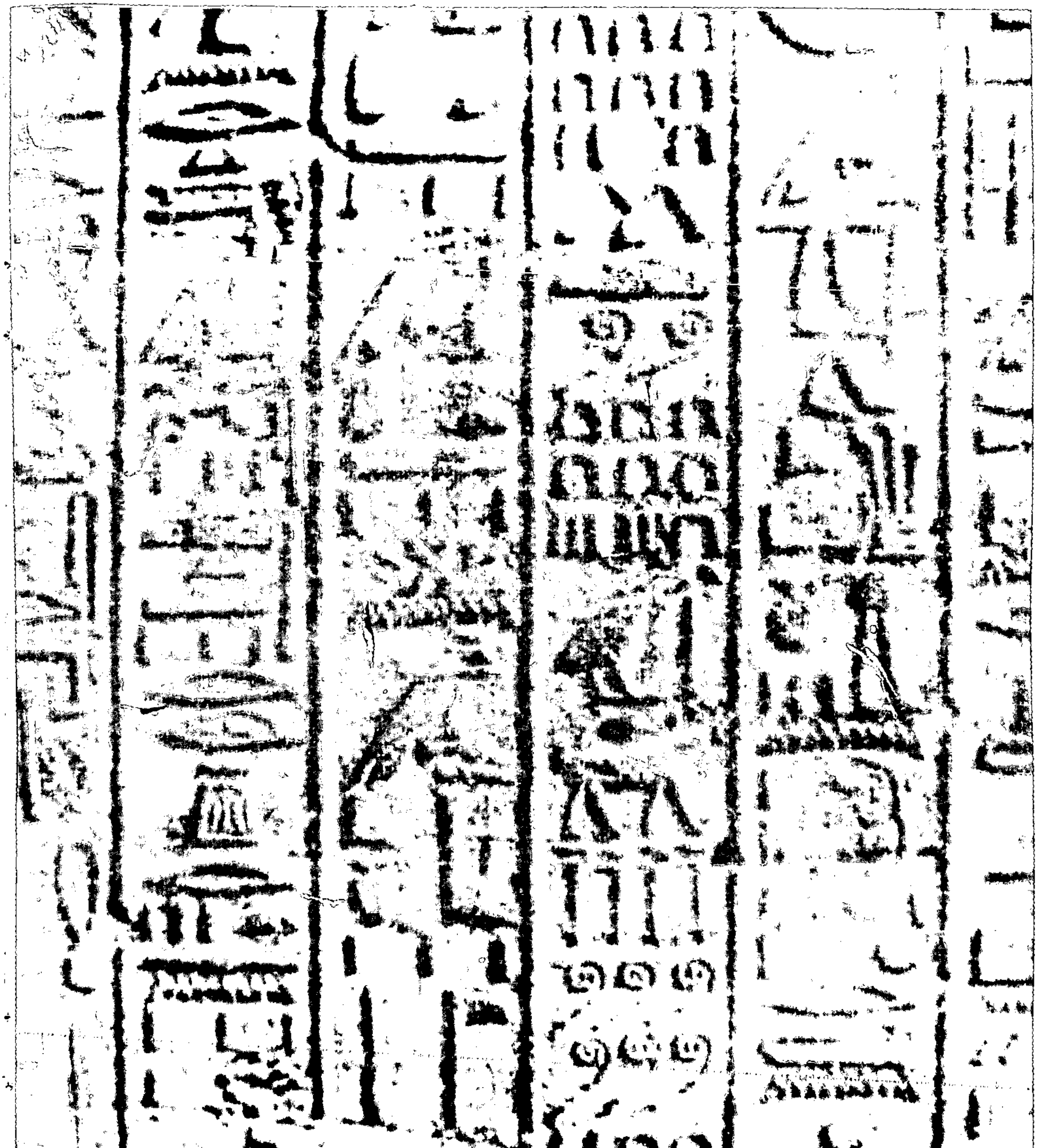
تا آغاز عصر مسیحیت از طریق سلسله‌های سلوکی سوریه به هستی خود ادامه داد. گاهی این ناحیه به نام کلده هم خوانده می‌شود، زیرا کلدانیان، که در اصل از جنوب بین‌النهرین برخاسته بودند، قوم مسلط را، عمدتاً در اواخر قرن هفتم ق.م. در سرتاسر ناحیهٔ بین دو رودخانه تشکیل می‌دادند. پس از آن سرزمین بین‌النهرین آماج حملاتی از جهات مختلف قرار گرفت و آن را بدل به آوردگاهی نمود که گاهی این و گاهی آن قوم بر ناحیه استیلا داشتند. یکی از مهمترین تهاجمات توسط اکدی‌ها که از نژاد سامی بودند، تحت رهبری سارگون[15] اول (حدود ۲۲۷۶ـ۲۲۲۱ ق.م.) به عمل آمد. وی به تأسیس یك امپراطوری همت گماشت که از خلیج فارس درجنوب تا دریای سیاه درشمال و از استپهای ایران در مشرق تا دریای مدیترانه را دربرمی‌گرفت. تحت حکمروایی سارگون، مهاجمین تدریجاً جذب فرهنگ بومی سومری و ازجمله خط میخی شدند. درمهاجمات و قیامهای بعدی نژادهای گوناگونی ازقبیل کاسیان[16]، عیلامیها، حتی‌ها[17]، آسوریها، مادها، پارسیها دربرهه‌های مختلف زمان به‌قدرت رسیدند ولی یگانگی درفرهنگ منطقه به قدری بودکه اطلاق تمدن بین‌النهرین به این تمدن را در دوره‌های مختلف موجه گرداند بویژه استفاده از خط میخی پیوند محکمی را برقرار ساخته بود. قوانین، حسابهای مالیات، وقایع، دروس مدارس، نامه‌های شخصی - اینها و همهٔ اسناد دیگر را با قلمی برلوحی ازگل رس نقش می‌کردند و سپس همه را دربرابر آفتاب یا در تنور می‌پختند. خوشبختانه چنین اسنادی کمتر از پاپیروسهای مصری دستخوش حوادث زمان شده‌اند و بنابراین دربارهٔ تمدن بابلی شواهد بیشتری دردست است تا تمدن مصری. تنها ازیك محل، نقطه‌ای که نیپور باستانی درآن واقع بوده، ۵۰٬۰۰۰ لوح کشف شده است. در کتابخانه‌های دانشگاههای بزرگ دنیا و نیز بعضی موزه‌ها، مجموعه‌های بزرگی ازاین لوحهای باستانی وجود داردکه برخی از آنها به ریاضیات اختصاص دارند. پیشرفت کمی درخواندن این لوحها در قرن نوزدهم توسط گروتفند[18] حاصل شده بود، ولی درربع دوم قرن بیستم بودکه شرحهای کاملی از ریاضیات بین‌النهرین در کتابهای تاریخ راجع به دورهٔ باستان پدیدارشد.

وجود خط درقدیمترین ایام دربین‌النهرین ازروی صدها لوح گلی که در اوروك[19] پیدا شده و حدود ۵٬۰۰۰ سال عمر دارند، تأیید شده است. دراین دوره خط تصویری به مقامی رسیده بود که علائم قراردادی برای بعضی چیزها به‌کارمی‌رفت. تدریجاً عدهٔ علامتها کاهش یافت. به طوری‌که از ۲۰۰۰ علامت سومری در

آغـاز ، تنها یك سوم آنها در دورهٔ تسلط اکدیان مورد استفاده بـود. نقاشیهای ابتدایی جای خود را به ترکیبی از علایم میخ - شکل دادند. هزاران لوحی‌که از حدود دورهٔ سلسلهٔ حمورابی[۲۰] (۱۸۰۰ـ۱۶۰۰ ق.م.) به جامانده‌اند ، حاکی از آن است کـه یك دستگاه عددنویسی در آن زمان کامـلاً جا افتاده بوده است. دستگاه اعشاری ،که مشترکاً مورد استفادهٔ تمدنهای قدیم و جدید است ، درتمدن بابلـی مغلوب نوعی نمادگذاری شده بودکه‌وجود مبنای شصت را ضروری می‌کـرد. دربارهٔ انگیزه‌های این تغییر مبنا مطالب زیادی‌نوشته شده است ؛ گفته شده‌که ملاحظات نجومی موجد این‌کاربوده است‌ویا ممکن است‌که دستگاه شصتگانی‌ترکیب طبیعی دودستگاه پیشتربوده است ، یکی اعشاری و دیگری درپایهٔ شش ، معهذا محتملتر به نظرمی‌رسدکه مبنای شصت آگاهانه اتخاذ شده وبه خاطرملاحظات‌مربوط به‌سنجش وزن و مقدار جنبهٔ قانونی یافته است ، زیراکمیتی معادل با شصت واحد را می‌توان بآسانی به نصف ، ثلث ، یك چهارم ، یك پنجم ، یك ششم ، یك دهم ، یك دوازدهم ، یك پانزدهم ، یك بیستم ، یك سی‌ام تقسیم کـرد و به اجزاء دهگـانه‌ای دست یافت. مبدأ آن هرچه باشد ، دستگـاه شصتگانی حتی تا به روزگار ما دوام‌آورده است. تقسیم ساعت به دقیقه وثانیه وتقسیم زوایا به همین‌منوال ، یادآور این‌دستگاه و مولود فرهنگ بابلی است.

عدد نویسی بابلی به خط میخی ، برای اعدادکوچك‌صحیح، بـه همان منوال هیروگلیف مصری بوده است ؛ یعنی ، نمادهای مربوط به واحد وده را به قدرمورد نیازتکرار می‌کردند. برای نوشتن مثلاً عدد ۵۹ ، چهارده علامت‌گوه شکل را برلوح‌گلی‌نقش می‌کردند ــ پنج عدد از این علامتها به‌شکل پرانتزهای شکستهٔ پهن بوده‌که هریك نمایش ده بوده‌اند ، و ۹ علامت میخی باریك عمودی هریك نشانهٔ یك واحد بوده است‌که به صورت‌گروهی‌کنار هـم قرار داده مـی‌شدند . به طور خلاصه نمایش ۵۹ به صورت  بوده است. شاید به علت انعطاف ناپذیری نوشت ـ افزاربابلی ویا ذکاوت بابلیان بودکه‌کفایت دوعلامت برای واحد وده را به منظور نشان دادن هرعددی ، هراندازه بزرگ ، بدون نیاز به تکرار اضافی این علائم بربابلیان معلوم‌کرد. این کار از طریق ابداع اصل ارزش موضعی ، درزمانی قریب به ۴۰۰۰سال پیش میسرگردید ــ اصلی‌که مایهٔ مؤثربودن نمادگذاری امروزی است. موضوع از این قراراست‌که بابلیان دریافتند که علایم آنها می‌توانند نقش‌دوگانه ، سه‌گانه ، وخلاصه چندگانه‌ای برای‌نمایش





مقادیرداشته باشند ، بستهٔ به اینکه موضع نسبی آنها درنمایش عدد چه باشد. علایم گوه شکلی که درنمایش عدد ۵۹ مورد استفاده قرار گرفته‌اند ، تنگاتنگ کنارهم گذاشته شده‌اند به طوری مجموعهٔ آنها تقریباً شکل علامت واحدی را پیداکرده است. حال گذاشتن جای کافی بین گـروههای مختلف علایم مـی‌تواند ارزشهای مختلف را القـاکند ، کـه بترتیب ، از راست به چپ ، متناظر با توانهای صعودی پایه ، یعنی شصت باشند. عدد ۲۲۲ ما ازعلامت ۲ سه بار استفاده مـی‌کند ، ولـی با ارزشهای متفاوت . به طریق مشابه علامت ۲۲ (به نشانهٔ ۲) می‌توانند نقش سه‌گانه‌ای داشته باشد. لذا ۲۲۲ که درآن سه‌گروه متشکل ازدوعلامت ازهم جدا شده‌اند ، نشانهٔ $2+2(60)+2(60)^2$ (= ۷۳۲۲ با نمادگذاری امروزی) است.

ازریاضیات بابلی نشانه‌های فراوانی به‌جا مانده است‌ولی جالب توجه اینکه قسمت اعظم آنها مربوط به دو دورهٔ مختلف‌اند که فاصلهٔ زمانی زیادی بین آنها وجود دارد. لوحهای زیادی از چند قرن‌هزارهٔ دوم‌قبل‌ازمیلاد در دست‌است، ونیزازچند قرن‌آخر هزارهٔ اول قبل‌ازمیلاد لوحهای متعددی به یادگارمانده است. سهم دورهٔ اول در ریاضیات عمده‌تر است ، اما کشف مهمی مربوط به حدود سال ۲۰۰ ق.م. به چشم می‌خورد. به نظرمی‌رسدکه بابلیان درابتدا روش معینی برای نشان دادن جای «خالی» (چیزی‌که ما آن را با صفرنشان می‌دهیم) نداشته‌اند ، گـرچه آنها درمواقعی جایی را کـه باید «صفر» درآن می‌نشست ، خالی می‌گذاشته‌اند. در غیاب این علامت ، مثلا دو عدد ۱۲۲ و ۷۲۰۲ باهم مشتبه مـی‌شوند زیرا ۲۲۲۲ مـی‌توانند بـه معنی $2+2(60)$ یا $2+2(60)^2$ باشد. معنی‌واقعی باید ازقراین استنباط شود ولی بدیهی است که نداشتن علامتی برای صفر باعث ابهام فراوان و اشکال زیادی می‌شود. اما تقریباًدراوان فتح بابل به دست اسکندر، علامت مخصوصی ، متشکل از ۲ علامت گوه شکل‌که به طور مایل قرارمی‌گرفتند ، نقش «جانگهدار» را بازی می‌کرد، ازآن به‌بعد، مادام کـه ازکتابت میخی استفاده مـی‌شد ، عدد ۲۲ ⁄⁄ ۲۲ یا $2+0(60)+2(60)^2$ را مـی‌شد بآسانـی از $2+2(60)$ تشخیص داد. پیدایش این علامت مشکل بابلیان را به طور کامل حل نکرد ، زیرا هیچ لوحی پیدا نشده است‌کـه نشانه‌ای از به کاربردن صفر آخردرآن موجود باشد.

بابلیان نمادگذاری با ارزش موضعی را برای‌کسرها هم به‌کار می‌بردند. مثلاً ≪ ، به عنوان کسر، معنی $\frac{20}{60}$ را می‌داد و ۲≪ به عنوان کسر به‌معنی $\frac{21}{60}$ یا $\frac{20}{60}+\frac{1}{60^2}$ بود، کـه در این حالت ابهـام ناشی از دستگاه عدد نویسی بابلیان بیشتر از سابق بود.

بابلیان عمل جمع را باکنار هم قرار دادن علایم نشان می‌دادند. برای تفریق علامت ۲ مورد استفاده بود. بابلیان به انجام اعمال ضرب وتقسیم هم قادربودند. ضرب عددی مثلاً در ۳۷ به معنی ضرب‌آن عدد در۳۰ و ضرب‌در۷ وجمع‌کردن نتایج حاصل بود. علامت ۲ ۲ برای ضرب به‌کارمی‌رفت کـه به معنی «رفتن» بود. آنها عمل تقسیم را به ضرب تبدیل‌می‌کردند، چون تقسیم عـدد صحیحی بر a به معنی ضرب آن عدد در $\frac{1}{a}$ است ، وازاین‌روعمل تقسیم مستلزم کار باکسرها بود. برای رفع این مشکل بابلیان جداولی برای معکوس اعداد داشتند.

بابلیها جداولی نیز برای بیان مربع ، جذر ، مکعب ، و کعب اعداد داشتند. وقتی‌که ریشه ، عدد صحیحی بود ، آن را دقیقاً به دست می‌آوردند. برای سایر ریشه‌ها ، اعداد شصتگانی متناظر، بتقریب داده می‌شد. البته ، اعداد گنگ را نمی‌توان با ارقام اعشاری یا شصتگانی‌که تعدادشان متناهی باشد ، بیان‌کرد. معهذا شواهدی دردست نیست‌که بابلیان ازاین موضوع‌آگاه بوده باشند. آنها شاید براین اعتقاد بوده‌اندکه اعدادگنگ را می‌توان به اعداد شصتگانی درست تبدیل کرد به شرطی‌که از تعداد ارقام بیشتری استفـاده شود. تقریب تحسین برانگیزی بـرای $\sqrt{2}$ توسط بابلیان مقدار ... ۱/۴۱۴۲۱۳ را می‌دهد ، مقدارصحیح با این تعداد ارقام ۱/۴۱۴۲۱۴ است.

استخراج ریشه‌ها درمحاسبهٔ قطر d ازمستطیلی به اضلاع a و b پیش می‌آید. در یکی از مسائل ، قطر دروازهٔ مستطیل شکلی خواسته می‌شودکه ارتفاع و پهنای آن معلومند. جواب با توضیحی همراه نیست و معادل با استفاده از فرمول تقریبی برای قطر d است ، یعنی،

$$d \approx a+\frac{b^2}{2a}$$

این فرمول تقریب خوبی برای d است (وقتی کـه $a > b$). بنابراین برای $a > b$ ، می‌توان به این نتیجه رسیدکه جواب با توجه به اینکه داریم

$$d=\sqrt{a^2+b^2}=a\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=a\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

کاملاً منطقی است. اگر دو جمله‌ای را بسط دهیم و فقط دو جملهٔ نخست را نگهداریم ، به فرمول بالا می‌رسیم.

جدا از متون منحصر به جدول ، که اطلاعات زیادی در مورد دستگاه عدد نویسی واعمال با اعداد می‌دهند ، متون‌دیگری موجودندکه حاوی مسائلی درجبر و هندسه‌اند. در یکی از مسائل اساسی جبر بابل قدیم یافتن عددی مورد سؤال است‌که وقتی به معکوس خود اضافه شود ، عدد معینی را می‌دهد. با نمادهای امروزی بابلیان درپی اعدادی مانند x و $\bar{x}$ بودند به طوری که

$$x\bar{x}=1 \quad , \quad x+\bar{x}=b.$$

این دومعادله منجربه یک معادلهٔ درجه دوم برحسب x می‌شود ؛ یعنی ، معادله $x^2-bx+1=0$. برای حل معادله، آنها ابتدا $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ، سپس $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1}$ و بعداً

$$\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1} \quad \text{و} \quad \frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1}$$

را به دست می‌آوردندکه دو عدد اخیر جوابهای مسئله‌اند. مسائل دیگری ، نظیرپیداکردن دوعددکه مجموع وحاصلضربشان معلوم باشد ، به مسئلهٔ بالا تحویل می‌شود (چون بابلیان اعداد منفی نداشته‌اند ، از جوابهای منفی غفلت می‌شده است). گرچه تنها مسائل ملموس مورد بحث بوده‌اند ، اغلب آنها برای‌توضیح‌قاعده‌ای کلی برای حل معادلات درجهٔ دوم طرح شده‌اند. مسائل جبری پیچیده‌تربه‌کمک تبدیلات به مسائل ساده‌ترتحویل می‌شده‌اند.

بابلیان قادربه حل مسائلی (درحالات خاص) بوده‌اندکه متضمن پنج معادله باپنج‌مجهول بوده است. یک مسئله‌که‌درارتباط با تصحیح رصدهای نجومی مطرح شده است ، متضمن ده معادله با ده مجهول بوده است ، که اغلب معادلات خطی (ازدرجهٔ اول) بوده‌اند. حل مبتنی به‌روش خاصی بوده است‌که درآن معادلات تا یافتن مجهولها باهم ترکیب می‌شده‌اند.

مسائل جبری به طورلفظی طرح وحل شده‌اند ، ولی در اغلب مواردکلمات «دراز» ، «پهنا» ، و «مساحت» بترتیب برای نشان دادن دومجهول وحاصلضرب آنها به‌کاررفته‌اند ، ترجمهٔ تحت‌اللفظی نمونه‌ای ازاین مسائل چنین است: «دراز و پهنا را درهم ضرب کرده‌ام و مساحت ۱۰ است. دراز را در خود ضرب و مساحت را به دست‌آورده‌ام. زیادتی دراز و پهنا را درخود ضرب‌وحاصل را در ۹ ضرب‌کرده‌ام. واین مساحت همان مساحتی است‌که از ضرب‌دراز درخود به‌دست‌آمده است، دراز و پهنا چه‌هستند». مسئله به زبان امروزی این است:

$$xy=10 \quad , \quad 9(x-y)^2=x^2.$$

جواب به معادلهٔ درجهٔ چهارمی‌برحسب x که فاقد x و x^3 است، منجرمی‌شودکه می‌توان‌آن‌را به عنوان معادلهٔ درجه دومی‌برحسب x^2 حل‌کرد.

مسائلی‌که منجر به ریشه‌های سوم می‌شوند ، نیز مطرح شده‌اند. صورتبندی امروزی یکی از این مسائل چنین است:

$$12x=z \ , \ y=x \ , \ xyz=V$$

که درآن V حجم معلومی است. برای پیداکردن x بایدکعب استخراج شود. بابلیان این ریشه را ازجدول‌کعبها،که قبلاً ذکر آن رفت ، محاسبه می‌کردند.

مسائل جبری تنها با توصیف مراحل لازم برای یافتن جواب حل می‌شده‌اند. مثلاً گفته می‌شود که، ۱۰ را مربع‌کنید تا ۱۰۰ به دست‌آید ؛ ۱۰۰ را از ۱۰۰۰ کم‌کنید ؛ از این ۹۰۰ حاصل می‌شود ، و الی آخر. چون دلیلی برای هرمرحله داده نمی‌شده ، فقط می‌توانیم رمزکارآنها را حدس بزنیم.

بابلیان مجموع تصاعدهای حسابی و هندسی را طی مسائل عملی به دست‌آورده‌اند. درمورد تصاعد هندسی‌آنها رابطهٔ زیررا (که با نمادهای امروزی داده‌شده) ، می‌دانسته‌اند

$$1+2+2^2+\dots+2^9=2^9+(2^9-1)=2^{10}-1$$

همچنین‌آنها مجموع مربعات اعداد صحیح از ۱ تا ۱۰ را داده‌اند، توگویی‌که‌آنها ازفرمول زیراستفاده می‌کرده‌اند:

$$1^2+2^2+\dots+n^2=\left(1\times\frac{1}{3}+n\times\frac{2}{3}\right)\times(1+2+3+\dots+n).$$

حالات خاصی‌که درمتون بابلی داده شده ، باتوضیحی همراه نیست.

جبر بابلی محتوی‌کمی نظریهٔ اعداد است. مجموعه‌های زیادی ازسه‌گانه‌های فیثاغورسی از آنها به‌جا مانده است ؛ آنها شاید ازروش‌صحیح‌استفاده می‌کرده‌اند ؛ یعنی‌اگر $x=p^2-q^2$ ، $y=2pq$ ، $z=p^2+q^2$ ، در این صورت $x^2+y^2=z^2$. آنها همچنین جوابهای‌صحیح معادلهٔ $x^2+y^2=2z^2$ را یافته‌اند.

هندسه دربابل نقش ناچیزی‌داشته‌است. هندسه برای‌بابلیان موضوع جداگانه‌ای نبوده. آنها مسائل مربوط به تقسیم مزارع یا تعداد آجرهای‌لازم برای یک‌ساختمان را بلافاصله تبدیل به‌مسائل جبری می‌کرده‌اند. برخی‌محاسبات‌راجع به‌مساحتها واحجام‌مطابق با قواعد وفرمولهایی‌داده شده‌اند. معهذا اشکالی‌که برای توضیح مسائل هندسی داده شده‌اند، با بی‌مبالاتی‌کشیده شده‌اند وفرمولها ممکن‌است‌صحیح نباشند. همچنانکه‌راجع به‌مصریان‌گفتیم، نمی‌توان گفت‌که مثلاً مثلثهای رسم‌شده توسط آنها قائم‌الزاویه‌اند یا نه ، یا مثلاً چهار ضلعی‌ها مربع‌اند یا نه، و لذا فرمولهای همراه با اشکال مربوطه متناسب‌اند یا نه. معهذا، رابطهٔ فیثاغورس ، تشابه مثلثها وتناسب‌اضلاع متناظر درمثلثهای متشابه برآنها معلوم بوده است. مساحت یک‌دایره‌را ظاهراً به‌کمک قاعدهٔ $A=\frac{C^2}{12}$ محاسبهٔ

کرده‌اند که در آن c محیط دایره است. این قاعده معادل با استفاده از ۳ به‌جای π است. مع‌هذا درمتن دیگری رابطهٔ بین محیط یك شش‌ضلعی منظم به‌دایره محیطی آن‌مقدار $۳\frac{۱}{۸}$ را برای π عاید می‌کند. آنها در اندازه‌گیری حجم بعضی‌اشکال، تعدادی‌را بدرستی و تعدادی را بخطا محاسبه کرده‌اند.

جدا ازچند نتیجهٔ خاص ــ نظیر محاسبهٔ‌شعاع دایره‌محیطی یك مثلث متساوی‌الساقین معلوم ــ محتوای هندسهٔ بابلی جز مجموعه‌ای از قواعد محاسبهٔ اشکال‌مستوی ساده، مشتمل برچند‌ضلعیهای منتظم وحجم برخی اجسام صلب‌نیست. هندسه در خود و برای‌خودمورد‌مطالعهٔ بابلیان قرارنگرفته، بلکه‌دررابطه با‌مسائل عملی موردتوجه بوده است.

بابلیان دانش ژرفی درنجوم داشته‌اند و می‌توان قبول‌کرد که مهارت‌آنها درمحاسبه ازعلاقهٔ آنها به‌نجوم ناشی شده است و احتمالاً معلومات نجومی‌آنها درخدمت احکام نجوم بوده است، با این‌حال رصدهای بردبارانهٔ آنها از حرکت‌کواکب، زمینهٔ‌لازم را برای برخورد عملی بعدی با ایـن موضوع توسط هیپارخوس[21] (ابرخس) و بطلمیوس[22] فراهـم نموده است. سوابق نجومی‌کـه توسط‌آنها نگهداری می‌شده، دقیق و مستمر بوده و مشاهدات‌آنها ازاجرام‌سماوی به‌تعیین‌دقیق دوره‌های‌نجومی منجرشده‌است. مثلاً درمورد ماه‌قمری، این‌دوره تنها کمی‌بیش‌از یك‌ثانیه بامقدار واقعی تفاوت‌داشته است. درزمانی درحدودسه‌هزارسال پیش، ستاره‌شناسان بابلی طلوع وغروب مقارن خورشید سیارهٔ ونوس را ثبت‌کردند و پیش‌از قرن‌چهارم قبل‌از میلاد، سوابق نجومی‌آنها به‌مقامی‌رسیده که آنهارا قادر به محاسبهٔ قبل‌از موقع وضعیتهای ماه وخورشید و لذا پیش‌بینی خسوف وکسوف نموده‌است.

تقویم بابلی متشکل‌از دوازده‌ماه هریك شامل ۳۰روز بوده و عرشش‌سال یکبار یك‌ماه را ذراتها به‌سال می‌افزوده‌انـد. اما نظیر مصریان، درك‌ارتباط حوادث سماوی‌بایکدیگر بتأنی‌پیشرفت کرده است.

بطور خلاصه می‌توان‌گفت‌که ریاضیات و نجوم بابلیان از خیلی‌جهات برریاضیات ونجوم مصریان برتری داشته است،‌گرچه اینان‌هم عمدتاً درپی‌استفاده از ریاضیات دررابطه با کارهای عملی بوده‌اند تا مطالعهٔ ریاضیات به‌خاطر خودآن.

درپایان مقال‌متذکر می‌شویم‌که در دورهٔ موردبحث تمدنهای پیشرفتهٔ دیگری درسایر نقاط‌جهان وجود داشته‌است‌که ازمهمترین آنها تمدنهای‌باستانی چین وهند بوده‌است. انتقال ریاضیات هندی به‌غرب عمدتاً ازطریق دانشمندان‌مسلمان دورهٔ تمدن اسلامی‌صورت گرفته است، علیهذا در آینده درموقع بررسی این دوره سخن از ریاضیات هندی‌هم به‌میان خواهد آمد.

1. Gizeh
2. Menes
3. Hyksos
4. Tell al - Amarna
5. Hieratic
6. Ideogram
7. Demotic
8. Papu
9. Rosetta
10. Champollion
11. Thomas Young
12. Henry Rhind
13. Ahmes
14. Kahun
15. Sargon
16. Kassites
17. Hittites
18. Grotefend
19. Uruk
20. Hammurabi
21. Hipparchus
22. Ptolemy

منابع

1). Boyer, C. B. : A History of Mathematics, John Wiley and Sons, 1968

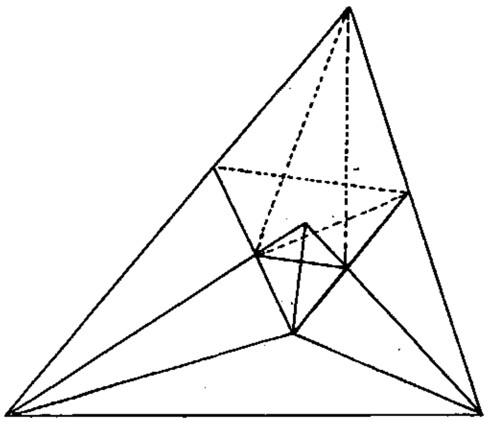
2). Kline, M. : Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Press, 1972

3). Scott, J. F. : A History ot Mathematics, Taylor and Francis LTD. London, 1975

4). Eves, H. : An Introduction to the History of Mathematics, Holt, Rinehatr, Winston, 4 th ed. 1976

[ترجمهٔ این کتاب قریباً از سوی مرکز نشر دانشگاهی منتشر خواهد شد.]

۵) سارتن. ج. تاریخ علم، تـرجـمهٔ احـمد‌آرام، انتشارات امیرکبیر، چاپ سوم، ۱۳۵۷



قضیهٔ مورلی

حسین غیور

۱. مقدمه. یکی ازمسائل بسیارزیبا دربارهٔ مثلثها که تااوایل این قرن کشف نشده بود ، مسئله‌ای است معروف که بعدها به نام ابداع کنندهٔ آن به قضیهٔ مورلی مشهور شد ، **فرانك مورلی**[1] (۱۸۶۰ـ۱۹۳۷) ریاضیدان انگلیسی این قضیه را درحوالی ۱۹۰۰ کشف کرد وخبرآن به زودی در دنیای ریاضی پیچید. این قضیه حکم می‌کندکه هرگاه زوایای مثلث دلخواهی به سه قسمت متساوی تقسیم شود ، ازتلاقی هردوخط تقسیم مجاورمثلثی متساوی‌الاضلاع بوجود می‌آید.

مورلی حل این مسئله را تا ۱۹۲۴ چاپ نکرد ، ودراین سال مقالهٔ وی در یك مجلهٔ ریاضی ژاپنی به چاپ رسید.

تاکنون براهین متعددی برای این قضیه ارائه شده است برخی ازآنها به روشهای مثلثاتی و بعضی به روش هندسی است یکی ازبراهین زیبا ومقدماتی این قضیهٔ از کاکستر[2] است که در کتاب وی ، مقدمه‌ای برهندسه[3] ، آمده است

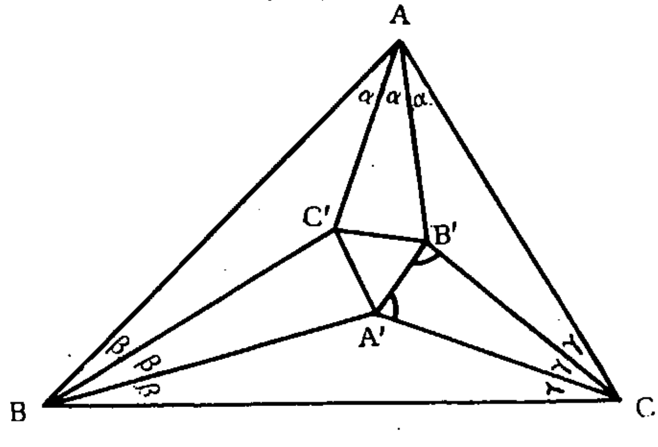
دراین مقاله قضیهٔ مورلی را از دوطریق مثلثاتی و هندسی ثابت کرده‌ایم. برهان هندسی ارائه شده همان برهان مقدماتی متداول است. از روی این اثبات قضیه را ، برای خطوطی که زوایای خارجی مثلث را به سه قسمت متساوی تقسیم می‌کند ، تعمیم داده‌ایم.

۲. قضیهٔ مورلی. هرگاه هرسه زاویهٔ مثلث به سه قسمت متساوی تقسیم شود ، از برخورد هردو خط تقسیم مجاور، مثلثی متساوی‌الاضلاع پدید می‌آید.

برهان (روش مثلثاتی). R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC است و به طوری‌که درشکل دیده می‌شود:

$$\alpha=\frac{A}{3}\ ,\quad \beta=\frac{B}{3}\ ,\quad \gamma=\frac{C}{3}\ ;$$

$$\alpha+\beta+\gamma=60^\circ .$$



در مثلث $A'BC$ به کمك قضیهٔ سینوسها ، با توجه به اینکه $BC=2R\sin 3\alpha$ ، طول AC' را حساب می‌کنیم:

$$\frac{A'C}{\sin\beta}=\frac{2R\sin 3\alpha}{\sin(60^\circ-\alpha)}\ ;$$

ازاینجا،

$$A'C=\frac{2R\sin 3\alpha\sin\beta}{\sin(60^\circ-\alpha)}\ ;$$

باتوجه به‌اینکه $\sin 3\alpha=4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)$،

$$(1)\quad A'C=8R\sin\alpha\sin\beta\sin(60^\circ+\alpha).$$

نظیرآنچه گفته شد ، از مثلث $AB'C$ ، طول $B'C$ را بدست می‌آوریم:

$$(2)\quad B'C=8R\sin\beta\sin\alpha\sin(60^\circ+\beta).$$

از تقسیم دوطرف (۱) و (۲) ، نتیجه می‌شودکه

$$\frac{A'C}{B'C}=\frac{\sin(60^\circ+\alpha)}{\sin(60^\circ+\beta)}\ .$$

درمثلث $CA'B'$ ،

$$(3)\quad \angle A'+\angle B'=180^\circ-\gamma\ ,\quad \frac{A'C}{A'B}=\frac{\sin B'}{\sin A'}.$$

از (۲) و (۳) نتیجه می‌شودکه

(۴) $$\frac{\sin(60+\alpha)}{\sin(60^\circ+\beta)}=\frac{\sin B'}{\sin A'}.$$

از طرفی،

(۵) $$(60^\circ+\alpha)+(60^\circ+\beta)=\angle A'+\angle B',$$

زیرا هر دوطرف تساوی فوق مساوی $180^\circ-\gamma$ است.

با توجه به روابط (۴) و (۵)، نتیجه می‌شودکه:

(۶) $$\angle A'=60^\circ+\beta \quad , \quad \angle B'=60^\circ+\alpha,$$

اینك درمثلث $CA'B'$، قضیهٔ سینوسها را بکارمی‌بریم:

$$\frac{A'B'}{\sin\gamma}=\frac{A'C}{\sin B'}.$$

ازاینجا، با توجه به (۱) و (۶)،

$$A'B'=\frac{A'C\sin\gamma}{\sin B'}=\frac{8R\sin\alpha\sin\beta\sin(60^\circ+\alpha)\sin\gamma}{\sin(60^\circ+\alpha)},$$

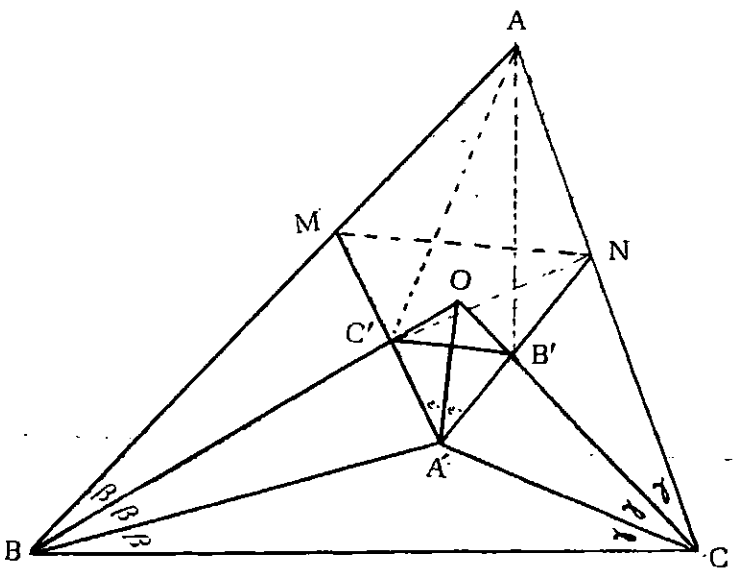
یا،

$$A'B'=8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

بنابراین،

$$A'B'=8R\sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}$$

برهان (روش هندسی). دوزاویهٔ B و C را به طوری که درشکل ذیل ملاحظه می‌شود به سه قسمت متساوی تقسیم می‌کنیم تا دوخط تقسیم مجاوربا BC یکدیگررا در A' و دوخط دیگر یکدیگررا در O قطع کنند.



OA' نیمساززاویهٔ $\angle BOC$ می‌شود (چرا؟). با توجه به این موضوع از A' دو خط رسم می‌کنیم تا با OA' زاویهٔ 30° بسازند، و OC و OB را در B' و C' قطع کنند. B' رابه C' وصل می‌کنیم؛ از تساوی دو مثلث $OA'B'$ و $OA'C'$ به حالت دو زاویه وضلع بین‌آنها، نتیجه می‌شودکه $A'B'=A'C'$ و چون $\angle B'A'C'=60^\circ$، مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع است. اینك باید ثابت کنیم‌دوخطی‌که A را به B' و C' وصل می‌کنند، زاویهٔ A را به سه قسمت متساوی تقسیم می‌کنند. برای این منظورروی ضلع CA پاره خط CN را مساوی CA' وروی ضلع BA پاره خط BM را مساوی BA' جدا می‌کنیم. ازتساوی دو مثلث $CB'N$ و $CB'A'$ به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین‌آنها $B'N=B'A'$؛ وازتساوی دومثلث $B'C'A'$ و $BC'M$، $C'M=C'A'$. ازاین دو تساوی نتیجه می‌شودکه

(۱) $$NB'=B'C'=C'M.$$

اینك‌باید دوزاویهٔ $\angle NB'C'$ و $\angle B'C'M$ رابرحسب زاویه‌های مثلث حساب‌کنیم:

$$\angle BOC=180^\circ-(2\gamma+2\beta)$$
$$=180^\circ-2(60^\circ-\alpha)=60^\circ+2\alpha,$$

ازاینجا، $\angle A'OB'=30+\alpha$.

$$\angle NB'O=\angle OB'A'=60^\circ+\angle OB'C'$$
$$=60^\circ+[90^\circ-(30^\circ+\alpha)]=120^\circ-\alpha.$$

(۲) $$\angle NB'C'=2OB'A'-60^\circ$$
$$=2(120^\circ-\alpha)-60^\circ=180^\circ-2\alpha.$$

به همین ترتیب ثابت می‌شودکه

(۳) $$\angle MC'B'=180^\circ-2\alpha.$$

باتوجه به‌تساویهای (۱)، (۲)، و (۳)، چهارضلعی $MNB'C'$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است، ودرنتیجه قابل محاط شدن دردایره می‌باشد.

$$\angle MNB'=180^\circ-\angle NB'C'$$
$$=180^\circ-(180^\circ-2\alpha)=2\alpha,$$

و NC' نیمساززاویهٔ MNB' است.

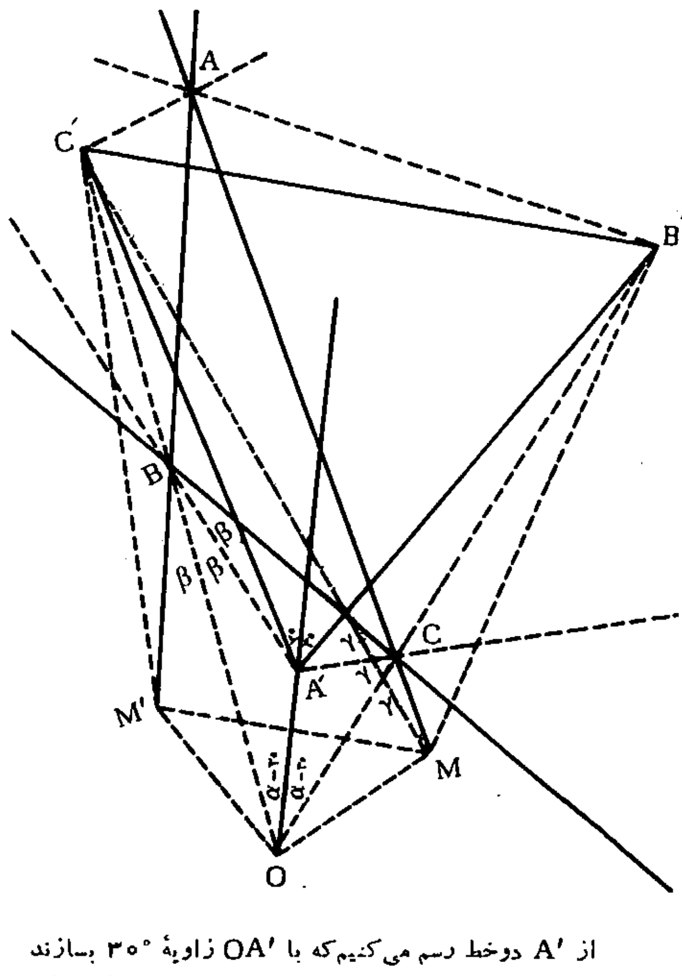
$$\angle NC'M=\angle B'C'M-\angle B'C'N$$
$$=(180^\circ-2\alpha)-\alpha=180^\circ-3\alpha,$$

ازاین تساوی نتیجه می‌شودکه $\angle NC'M+\angle MAN=180^\circ$، وچهارضلعی $AMC'N$ محاطی است، و دایرهٔ محیطی آن‌که از سه رأس N، M، و C' از ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین می‌گذرد، دایرهٔ محیطی ذوزنقه نیزمی‌باشد. یعنی از B' هم می‌گذرد وپنج ضلعی $AMC'B'N$ محاطی است و با عطف بـه تساوی (۱)، AB' و AC' زاویهٔ A را به سه قسمت متساوی تقسیم می‌کنند وقضیه ثابت می‌شود.

تبصره. برای اینکه ثابت شود قضیهٔ مورلی در مثلث، وقتی‌که زاویه‌ها را به چهارقسمت متساوی تقسیم‌کنیم، یا درچهار ضلعی قابل تعمیم نیست، باید ازمثلثها وچهارضلعیهای خاص مانند مستطیل استفاده کنیم (صفحهٔ ۲۹، هندسهٔ اقلیدسی و نا اقلیدسی تألیف ماروین جی‌گرینبرگ).

۳. تعمیم قضیهٔ مورلی. هرگاه زاویه‌های خارجی مثلث مفروض را به سه قسمت متساوی تقسیم کنیم، از تقاطع دو به دو خطوط تقسیم که مجاور اضلاع مثلث قرار دارند مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌شود.

برهان. مانند حالت اصلی زاویهٔ خارجی B را به سه قسمت متساوی β وزاویهٔ خارجی C را به‌سه قسمت متساوی γ تقسیم می‌کنیم. خطوط تقسیم مجاور BC در A' متقاطع‌می‌شوند. اگردوخط دیگرتقسیم زاویه‌های B و C در O تقاطع‌کنند، در مثلث OBC خط OA' نیمسازِزاویهٔ BOC می‌شود.



از A' دوخط رسم می‌کنیم‌که با OA' زاویهٔ ۳۰° بسازند واین دو خط را امتداد می‌دهیم تا OC و OB را در B' و C' قطع‌کنند. دومثلث $A'B'O$ و $A'C'O$ درحالت دوزاویه وضلع بین‌آنهامساوی می‌شوندو $A'B'=A'C'$. درنتیجه مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع می‌شود. اینک باید ثابت‌کنیم دو خطی‌که رأس A را به B' و C' وصل می‌کند زاویهٔ خارجی A را به سه قسمت متساوی‌که‌آنها را به α نشان می‌دهیم تقسیم می‌کند. برای این کار درامتداد CA ، CM را مساوی با CA' و درامتداد AB ، BM' را مساوی BA' جدا می‌کنیم. دومثلث $A'B'C$ و $MB'C$ به حالت دوضلع وزاویهٔ بین‌آنها باهم مساوی می‌شوند؛ ودرنتیجه $MB'=A'B'$. همانطور ازتساوی دومثلث $BC'A'$ و $BC'M'$ نتیجه می‌شودکه $M'C'=A'C'$ و حاصل‌آنکه،

(۱) $$MB'=B'C'=C'M'.$$

چون $3\beta+3\gamma+3\alpha=360°$ ،

$$\alpha+\beta+\gamma=120°.$$

$$\angle BOC=180-(2\beta+2\gamma)=180°-(240°-2\alpha)=2\alpha-60°,$$

$$\angle C'OA'=\angle A'OC=\alpha-30°,$$

ودرمثلث $A'B'O$ ، با توجه به شکل، داریم

$$\angle A'B'C=30°-(\alpha-30°)=60°-\alpha,$$

$$\angle MB'C'=\angle MB'A'+\angle A'B'C'=2(60°-\alpha)+60°.$$

بنابراین،

(۲) $$\angle MB'C'=180°-2\alpha$$

بهمین ترتیب ثابت می‌شودکه

(۳) $$\angle B'C'M'=180°-2\alpha.$$

از (۲) و (۳) معلوم می‌شودکه

(۴) $$\angle MB'C'=\angle B'C'M'.$$

ازتساویهای (۱) و (۴) نتیجه می‌شودکه چهارضلعی $MB'C'M'$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، ودرنتیجه محاط دردایره است. درذوزنقهٔ نامبرده قطر MC' را رسم می‌کنیم.

$$\angle M'C'M=\angle M'C'B'-\angle MC'B'=180°-2\alpha-\alpha=180°-3\alpha=\angle M'AM.$$

ازتساوی دوزاویهٔ $M'AM$ و $M'C'M$ نتیجه می‌شود که دایرهٔ محیطی ذوزنقه از رأس A می‌گذرد. یعنی، پنج ضلعی $AC'M'MB'$ محاطی استودرنتیجه دوخط AB' و AC' زاویهٔ خارجی A را به سه قسمت متساوی تقسیم می‌کنند، وقضیه ثابت است. همانطورکه دراول اثبات قضیه اشاره شد، ملاحظه می‌کنید که اثبات قضیه دراین حالت شباهت زیادی با اثبات‌آن در حالت اصلی دارد.

تبصره . اگرزاویه‌های مثلث جهتدارفرض شوند، هرزاویه سه خط تقسیم پیدا می‌کند و ۱۸ مثلث بدست می‌آید؛ که درشمارهٔ بعد مورد مطالعه قرارخواهدگرفت.

1. Frank Morley
2. Coxeter
3. H.S.M. Coxeter , *Introduction to Geometry* , (1969)

چند قضیه دربارهٔ توابع پیوسته (۱)

علیرضا جمالی

مقدمه در اینجا هدف آنست که به بیان و اثبات چند قضیهٔ مهم بپردازیم کـه به‌خواص توابع پیوسته مربوط می‌شوند. این قضایا عبارتند از: قضیهٔ بولتسانو[۱]، قضیهٔ مقدار متوسط، قضیهٔ نقطه ثابت بروئر[۲]. دو قضیهٔ اخیر مبتنی بر قضیهٔ بولتسانو است که بطورشهودی حکم بدیهی ذیل را درمورد تابع پیوستهٔ f که بر بازهٔ [a,b] تعریف‌شده، بیان‌می‌کند: هرگاه نمودار f درنقطهٔ a بالای (پایین) محور xها ودر نقطهٔ b پایین (بالای) این‌محور قرارداشته‌باشد، آنگاه این‌نمودار محورxها را درنقطه‌ای بین a و b قطع می‌کند. این‌نتیجهٔ ساده و مهم ناشی‌از خاصیت پیوستگی f، و اصل موضوع تمامیت است.

درخاتمهٔ این‌مبحث بذکرچندمثال مقدماتی خواهیم پرداخت که توانائی قضایای مذکور را در حل برخـی‌از مسائل (ازجمله مسائل مربوط به‌وجود ریشهٔ معادلات) نشان می‌دهد.

۱. تعریفات و مقدمات

فرض‌کنیم‌که S مجموعه‌ای ازاعداد حقیقی‌باشد. عدد b را یك کران بالای S گویند هرگاه به ازای هر x از S، $x \leqslant b$؛ عدد c را کوچکترین‌کران بالای S خوانند در صورتی‌که اولاً c یك‌کران‌بالای S باشد، وثانیاً به‌ازای هرکران بالای S مانند b، $c \leqslant b$. بدیهی است که کوچکترین‌کران بالای یك مجموعه مانند S (درصورت وجود) منحصر بفرد است.

یکی‌از اصول موضوعهٔ دستگاه اعـداد حقیقی‌که به وجـود کوچکترین‌کران‌بالا برای مجموعه‌های اعداد حقیقی مربوط‌می‌شود، اصل موضوع تمامیت است‌که ازاین قرار است:

هرمجموعهٔ غیر تهی از اعداد حقیقی‌که دارای یك کران بالا باشد، دارای‌کوچکترین‌کران بالا است. کوچکترین کران بالای یك‌مجموعه مانند S را سوپریموم S نیز می‌نامند وآن را با علامت sup S نشان می‌دهند.

این‌خاصیت سوپریموم مجموعه‌ای مانند S است‌که به ازای هرعـدد مثبت مـانند δ، عضوی از S مانند s هست به طوری‌که $\sup S - \delta < s \leqslant \sup S$.

۲. قضیهٔ بولتسانو، قضیهٔ مقدار متوسط، و قضیهٔ نقطهٔ ثابت

پس‌از ذکر قضیهٔ مقدماتی ذیل‌که در برهان قضیهٔ بولتسانو مورد حاجت است، به‌بیان و اثبات قضایای مذکور مبادرت خواهیم کرد.

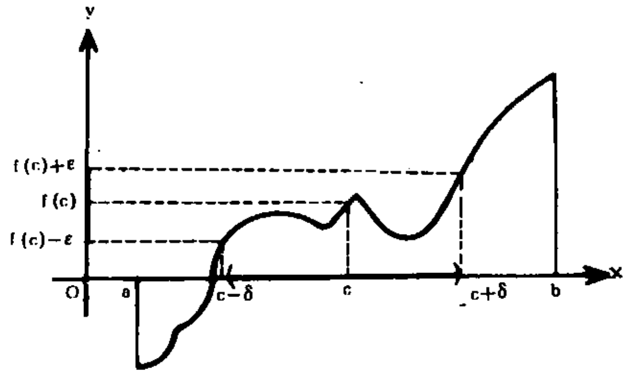
قضیهٔ ۱. فرض‌کنیم‌که تابع $f: [a,b] \rightarrow R$ در نقطـهٔ $x=c$ از [a,b] پیوسته باشد و $f(c) \neq 0$. دراین‌صورت‌بازه‌ای مانند $(c-\delta, c+\delta)$ وجود دارد بطوری‌که به ازای هر x از $(c-\delta, c+\delta)$، $f(x)$ با $f(c)$ هم‌علامت است.

برهان. درحالتی‌که $f(c)>0$، قضیه‌را ثابت‌می‌کنیم؛ در حالت دیگر برهان به‌طریق مشابـه صورت می‌گیرد. گوئیم چـون $\lim_{x \to c} f(x)=f(c)$، با انتخاب $\varepsilon=\frac{f(c)}{2}$ عـددی مثبت مانند δ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر x از $(c-\delta, c+\delta)$،

$$|f(x)-f(c)|<\frac{f(c)}{2};$$

Bolzano (۱) Brouwer (۲)

از اینجا، $\circ < \frac{f(c)}{2} < f(x)$. یعنی به ازای هر x از مقطع دوبازهٔ مذکور، $f(x)$ و $f(c)$ هم‌علامت‌اند. (ملاحظه کنید که این برهان کلیت داشته و درصورتی که $c=a$ یا $c=b$، حکم باز هم برقرار است. با این تفاوت که درحالت $c=a$ بجای $(c-\delta, c+\delta)$ بازهٔ $[c, c+\delta)$ درنظر گرفته‌می‌شود؛ بهمین‌ترتیب درحالت $c=b$، بازهٔ $(c-\delta, b]$ ملحوظ می‌شود.) ■



قضیهٔ ۲ (بولتسانو). فرض‌کنیم‌که تابع $f:[a,b]\to R$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد، و $f(a) f(b) < \circ$. دراین‌صورت عددی مانند c بین a و b وجود دارد بطوری‌که $f(c)=\circ$.

برهان. حکم‌را درحالتی‌که $f(a)<\circ$ و $f(b)>\circ$ اثبات می‌کنیم، درحالت دیگر برهان به طریق مشابه صورت می‌گیرد مجموعهٔ S را چنین تعریف می‌کنیم:

$$S = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b,\ f(x) < \circ\}.$$

واضح‌است‌که $a \in S$، و بعلاوه‌به‌ازای هر x از S، $x \leqslant b$؛ یعنی S غیرتهی و دارای یك‌کران بالاست. بالنتیجه، S دارای سوپر موم است. فرض می‌کنیم‌که $\sup S = c$.

ابتدا ثابت می‌کنیم کـه c یك نقطهٔ داخلی $[a,b]$ است (یعنی $a<c<b$)؛ سپس نشان می‌دهیم‌کـه $f(c)=\circ$. گوئیم $c \neq a$؛ زیرا درغیراین‌صورت $f(c)=f(a)<\circ$، بالنتیجه به موجب‌قضیهٔ ۱، بازه‌ای مانند $[c, c+\delta)$ وجود دارد بطوری‌که به‌ازای‌هر x ازاین بازه $f(x)<\circ$؛ واین‌متناقض‌است بااینکه $\sup S = c$. به‌طریق مشابه، $c \neq b$. حال می‌پردازیم به اثبات اینکه $f(c)=\circ$. فرض‌کنیم که چنین نباشد؛ بنا براین $f(c)\neq\circ$ ازاینجا، مطابق قضیهٔ۱، بازه‌ای مانند $(c-\delta, c+\delta)$ وجود دارد که به‌ازای هر x ازاین بازه، $f(x)$ و $f(c)$ هم‌علامت‌اند. درصورتی که $f(c)<\circ$، به‌ازای هر x از $[c, c+\delta)$، $f(x)<\circ$ که متناقض بافرض $\sup S = c$ است. ازطرف دیگر درصورتی که $f(c)>\circ$، به‌ازای هر x از $(c-\delta, c]$، $f(x)>\circ$. ولی به مـوجب خاصیت سوپر موم‌که پیشتر ذکرشد، عضوی از S مانند s هست بطوری‌که $c-\delta < s \leqslant c$. یعنی عدد s چنان است‌کـه درنامساوی اخیر صدق می‌کند و $f(s)<\circ$. و این متناقض‌است بااینکه به‌ازای هر x از $(c-\delta, c]$، $f(x)>\circ$. بنابرایـن هردو حالت به تناقض منجرشده وحکم محقق می‌شود. ■

قضیهٔ ۳ (قضیهٔ مقدار متوسط). فرض‌کنیم‌که‌تابع $f:[a,b]\to R$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد، و اعداد متمایز x_1 و x_2 از $[a,b]$ چنان باشند‌که $f(x_1)\neq f(x_2)$. دراین‌صورت f هرمقدار بین $f(x_1)$ و $f(x_2)$ را درنقطه‌ای بین x_1 و x_2 می‌گیرد. به‌عبارت دیگر، هرگاه k عددی دلخواه بین[3] $f(x_1)$ و $f(x_2)$ باشد آنگاه عددی مانند c بین x_1 و x_2 هست بطوری‌که $f(c)=k$.

برهان. بی‌آنکه خللی به‌کلیت استدلال وارد شود، فرض می‌کنیم‌که $x_1<x_2$ و $f(x_1)<f(x_2)$

$$f(x_1) < k < f(x_2). \qquad (*)$$

اینك تابع $g:[x_1, x_2]\to R$ را با ضابطهٔ ذیل درنظر می‌گیریم

$$g(x) = f(x) - k,$$

بنابراین، به‌موجب $(*)$، $g(x_1)\,g(x_2)<\circ$. پس‌مطابق قضیهٔ‌بولتسانو، عددی‌مانند c وجود دارد‌که $x_1<c<x_2$ و $g(c)=\circ$.
از اینجا، $f(c)=k$.

(ملاحظه کنید‌که هرگاه $k=f(x_1)$ یا $k=f(x_2)$، حکم بالبداهه برقرار است) . ■

قضیهٔ ۴ (قضیهٔ نقطهٔ ثابت بروئر). فرض‌کنیم‌کـه تابع $f:[\circ,1]\to[\circ,1]$ بر $[\circ,1]$ پیوسته باشد. دراین صورت عددی مانند c بین $\circ$ و 1 هست بطوری‌که $f(c)=c$.

برهان. گوئیم هرگاه $f(\circ)=\circ$ یا $f(1)=1$، حکم برقراراست. فرض می‌کنیم‌که $f(\circ)\neq\circ$ و $f(1)\neq 1$. اینك تابع $g:[\circ,1]\to R$ را باضابطهٔ ذیل درنظر می‌گیریم؛

$$g(x) = f(x) - x.$$

معلوم‌است‌که g بر $[\circ,1]$ پیوسته‌وبعلاوه $g(\circ)\,g(1)<\circ$ (چرا؟) بنابراین بموجب قضیهٔ بولتسانو، عددی‌مانند c هست‌که $\circ<c<1$ و $g(c)=\circ$. به‌عبارت دیگر $f(c)=c$. ■

تمرین . فرض‌کنیم‌کـه تابع $f:[-1,1]\to[-1,1]$ بر $[-1,1]$ پیوسته باشد. دراین‌صورت عددی مانند c بین -1 و 1 وجود داردکهٔ $f(c)=c$.

۳. مثالها

(آ) . (قضیهٔ وجود ریشهٔ n ام اعداد مثبت)

این قضیه درتأسیس اعداد حقیقی، درمبحث‌قوای اعدادگویا، مطرح می‌شود و اثبات آن مبتنی براصل استقراء و اصل تمامیت

(۳) دراینجا بینیت به‌معنی کلی موردنظراست و بینیت اکید مراد نیست.

است. دراینجا این‌قضیه را با توسل به قضیهٔ مقدار متوسط[۴] ثابت می‌کنیم.

فرض‌کنیم‌که $k > 0$. می‌خواهیم ثابت‌کنیم‌که عددی مانند c هست به‌طوری‌که $c^n = k$. اثبات درحالتی‌که $k = 1$ بدیهی‌است. بنابراین فرض می‌کنیم‌که $k \neq 1$. دوحالت زیرپیش می‌آید:

حالت اول $k > 1$. برای اثبات حکم دراین‌حالت تابع پیوستهٔ $f:[0, k] \to R$ را با ضابطهٔ

$$f(x) = x^n,$$

درنظر می‌گیریم. ازاینکه $k > 1$، معلوم می‌شودکه $0 \leqslant k \leqslant k^n$. به‌عبارت‌دیگر $f(0) < k \leqslant f(k)$. بنابراین، مطابق‌قضیهٔ مقدار متوسط، عددی مانند c وجود دارد به طوری‌که $f(c) = k$، یا $c^n = k$.

حالت دوم $k < 1$. دراین‌حال بافرض $k_1 = \frac{1}{k}$، به‌موجب حالت اول، عددی مانند c_1 هست‌که $c_1^n = k_1$. ازاینجا $c_1^n = \frac{1}{k}$، یا $\left(\frac{1}{c_1}\right)^n = k$. بنابراین کافی‌است c را همان $\frac{1}{c_1}$ بگیریم.

بسادگی‌می‌توان (باتوجه به‌خواص قوای‌طبیعی اعدادحقیقی) یکتائی c راهم ثابت‌کرد.

(ب). فرض کنیم‌که $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ و $a_0 a_n < 0$. دراین صورت معادلهٔ $f(x) = 0$ حداقل دارای یک ریشهٔ مثبت است.

برهان. حکم را در حالتی‌که $a_n > 0$ و $a_0 < 0$ ثابت می‌کنیم وحالات دیگر را به خواننده محول می‌کنیم. ابتدا ملاحظه می‌شودکه تابع f بر R پیوسته‌است، و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. ازعبارت اخیر، معلوم است‌که‌عددی مثبت‌مانند l هست به‌طوری‌که $f(l) > 0$. ازطرف دیگر $f(0) = a_0 < 0$. بنابراین، برای‌نیل به‌نتیجهٔ‌مطلوب، کافی‌است قضیهٔ بولتسانو را درمورد بازهٔ $[0, l]$ بکاربندیم.

(پ). به موجب قضیهٔ نقطهٔ ثابت معادلهٔ $\cos x = x$ در بازهٔ $(0, \frac{\pi}{2})$ دارای جواب است[۵] (چرا؟)

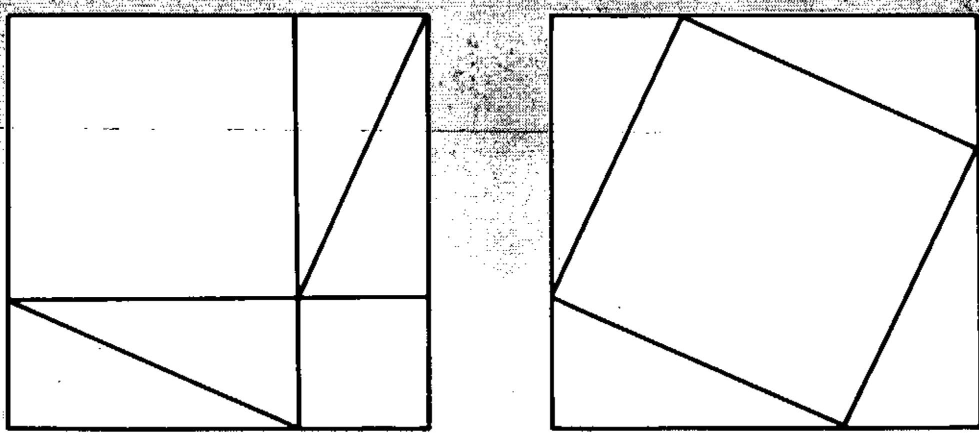
(ت). می‌خواهیم ثابت‌کنیم‌که معادلهٔ $\tan x = x + 1$ در بازهٔ $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ دارای‌جواب‌است. برای‌این‌منظور تابع $g : [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \to R$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$g(x) = \tan x - x - 1$$

معلوم است‌که $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} g(x) = +\infty$. بنابراین عددی‌مثبت مانند $\delta (< \frac{\pi}{4})$ وجود دارد به‌طوری‌که $g(\frac{\pi}{2} - \delta) > 0$ اینک کافی است ملاحظه کنیم‌که تابع g بر $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} - \delta]$ پیوسته است، و بعلاوه $g(\frac{\pi}{4}) < 0$. با بکاربستن قضیهٔ بولتسانو، نتیجهٔ‌مطلوب حاصل‌خواهد شد. ■

(۴) البته بدیهی است‌که قضیهٔ مذکور با استفاده از قضیهٔ بولتسانو نیز ثابت می‌شود (بعنوان تمرین می‌توان بدین‌کار اقدام‌کرد.)

(۵) منظور از اینکه فلان معادله در مجموعهٔ A دارای جواب است یعنی‌مقطع مجموعهٔ جوابهای این معادله ومجموعهٔ A غیرتهی‌است.



ساده‌ترین برهان قضیه فیثاغورس

آشنایی با فضاهای برداری

مودیس گلیمن

۱. مقدمه

تعلیم هندسه برای‌مبتدیان (۱۲ تا ۱۴ ساله) مسئلهٔ سختی است. ما به همهٔ مشکلات و معضلات معرفی هندسهٔ سنتی، که تنها بر اساس مفاهیم متری‌بنا شده، واقفیم. برای مدت مدیدی، معلمین را عقیده بر این بودکه مفاهیم دیگری برای نوجوانان قابل درك و استفاده نیست. این سنت به عقیده‌ای منجر شده، که برطبق‌آن تئوری مثلثهای همنهشت یکی از ارکان بوده است.

مدخل مناسبی برای هندسه، آغاز کردن از مفهوم فضای برداری روی اعداد حقیقی است. در این‌صورت نگاشتهای خطی و حاصلضرب اسکالر از مؤثرترین وسایل برای ایجاد مفاهیم‌اساسی هندسه هستند. از این طریق نه تنها برای بچه‌ها یك مبنای استوار و متین فراهم می‌شود بلکه در عین حال ایده‌هائی را فرامی‌گیرند که ممکن‌است در سایرشاخه‌های‌ریاضیات نیزآنها را بکارگیرند. در واقع، آنچه‌که باید به بچه‌ها آموخته شود چگونه حل‌کردن این یاآن نوع از مسائل نیست، بلکه بیشترچگونه بکار بردن مفاهیمی کلی است‌که ممکن است در فعالیتهای‌آتیه آنان‌بکار رود.

آشکار است‌که بچه‌های ۱۲ ساله مستقیماً نمی‌توانند مفهوم فضای برداری روی اعداد حقیقی را درك‌کنند. ولی، تجارب‌اخیر نشان داده که موضوعات زیر برای سنین ۱۲ تا ۱۴ سال قابل درك است:

(۱) گروههای متناهی وگروههایی که بر روی یك مجموعه عمل می‌کنند. گروههای نامتناهی نظیر $(Z,+)$.

(۲) همنهشتیهای بـه پیمانهٔ n. مثالهایی از حلقه‌ها و و میدانهای متناهی. حلقه‌ها ومیدانهای نامتناهی‌نظیر $(Z,+,\times)$ و $(Q,+,\times)$.

(۳) مثالهای پیمانه‌ها روی حلقه‌های نامتناهی. مثالهای فضای برداری روی میدانهای متناهی.

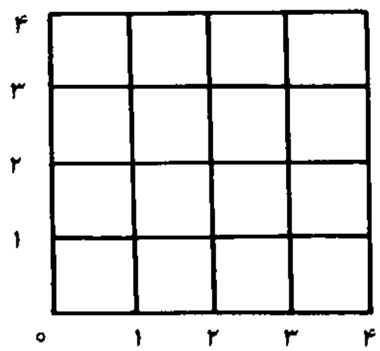
(۴) آشنایی با مفهوم نگاشت خطی.

مثالی از یك فضای برداری روی یك میدان‌متناهی ذیلاً مورد بحث قرار می‌گیرد.

۲. مطالعهٔ یك وضعیت خاص

G مجموعهٔ $\{۴ , ۳ , ۲ , ۱ , ۰\}$ است‌که با عمل‌جمع به به پیمانهٔ ۵ در نظر گرفته می‌شود. گروه $(G , +)$ تعویضپذیر است. حاصلضرب دکارتی $G^۲ = G \times G$ را در نظرمی‌گیریم، یعنی مجموعهٔ همهٔ جفتهای (x,y) که‌$x\in G$ و $y\in G$. $G^۲$ از نظر هندسی مبین مجموعه‌ای نقاط است، یعنی یك صفحهٔ آفینی متشکل از ۲۵ نقطه. یك نقطهٔ M از این صفحه با $\binom{a}{b}$ نشان داده می‌شودکه درآن $a\in G$ و $b\in G$،

$$M = \binom{a}{b}.$$



نگاشتهای φ از $G^۲$ به $G^۲$،

$$\varphi : G^۲ \longrightarrow G^۲$$

چنین تعریف می‌شوند: هرگاه u و v دوعضو از Gباشند، نگاشت φ نقطهٔ $M = \binom{a}{b}$ رابه نقطـهٔ $N=\binom{a'}{b'}$می‌نگارد به طوری‌که

$$\begin{cases} a'=a+u & \text{(پیمانهٔ ۵)} \\ b'=b+v & \text{(پیمانهٔ ۵)}, \end{cases}$$

یعنی

$$\varphi : M \longrightarrow N,$$

$$\varphi : \binom{a}{b} \longrightarrow \binom{a+u}{b+v}$$

φ با (u , v) نیز نشان داده می‌شود.

به سادگی ثابت می‌شود که φ یك تناظر یك به‌یك است. در واقع:

(۱) هرگاه $\varphi(P)=\varphi(Q)$ با فرض $P=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ، $Q=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ ، آنگاه

$$x+u=x'+u,$$
$$y+v=y'+v;$$

چون $(G,+)$ یک‌گروه است، خواهیم داشت

$$x=x'$$
$$y=y',$$

یعنی $P=Q$ بنابراین از $\varphi(P)=\varphi(Q)$ نتیجه می‌شود که $P=Q$. پس φ یک نگاشت یک به یک است.

(۲) به ازای هر $P=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ مفروض نقطه‌ای مانند $Q=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ هست به طوری‌که

$$\varphi(Q)=P;$$

در واقع، معادلات

$$\begin{cases}x+u=X\\ y+v=Y,\end{cases}$$

درگروه $(G,+)$ ، دارای یک جواب منحصر بفرد است ؛ از اینجانتیجه‌می‌شودکه‌هر نقطهٔ P تصویر نقطه‌ای است مانند Q تحت نگاشت φ . بنابراین ، φ یک نگاشت پوشا است.

بنابراین φ یک تناظر یک به یک از G^2 به G^2 است ؛ که‌به تأسی ازهندسهٔ سنتی ، یک انتقال صفحهٔ آفینی G^2 نامیده می‌شود.

مجموعهٔ انتقالهای‌صفحهٔ G^2 با $\mathbf{T}$ نشان داده می‌شود. مجموعهٔ $\mathbf{T}$ دارای ۲۵ عضو است.

تعریف‌کردن یک عمل ترکیب بر $\mathbf{T}$ ، امری طبیعی است. دو انتقال

$$T_1=(u_1\,,\,v_1) \text{ و } T_2=(u_2\,,\,v_2)$$

را در نظر می‌گیریم . فرض‌کنیم‌که $P=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ یک نقطهٔ‌دلخواه از صفحهٔ‌آفینی باشد ؛ T_1 نقطهٔ P را به Q می‌نگارد. T_2 نقطهٔ Q را به S می نگارد. آیا انتقالی مانند T_3 وجود دارد که P را به S بنگارد؟

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "T_1"] \arrow[dr, "T_3"'] & Q \arrow[d, "T_2"] \\ & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \arrow[r, "T_1"] \arrow[dr, "T_3"'] & \begin{pmatrix}a+u_1\\b_1+v_1\end{pmatrix} \arrow[d, "T_2"] \\ & \begin{pmatrix}(a+u_1)+u_2\\(b+v_1)+v_2\end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

اگر چنین $T_3=(u_3,\ v_3)$ ی موجود باشد،آنگاه به ازای هر a و b باید داشته باشیم

$$\begin{cases}(a+u_1)+u_2=a+u_3\\ (b+v_1)+v_2=b+v_3\,,\end{cases}$$

بنابراین به موجب شرکتپذیری جمع،

$$\begin{cases}u_3=u_1+u_2\\ v_3=v_1+v_2\,.\end{cases}$$

این ما را مجاز می‌داردکه یک عمل جمع روی مجموعهٔ $\mathbf{T}$ تعریف‌کنیم،

$$\mathbf{T}\times\mathbf{T}\longrightarrow\mathbf{T}$$
$$(T_1,T_2)\longrightarrow T_3=T_1+T_2.$$

با بکار بردن خواص‌گروه $(G,+)$ ، به سهولت می‌توان ثابت‌کرد که $(\mathbf{T},+)$ دوباره یک‌گروه تعویضپذیر است ؛

(۱) عمل $+$ شرکتپذیر است ؛ زیرا به ازای اعضای‌دلخواه T_1 ، T_2 ، T_3 از $\mathbf{T}$ ،

$$(T_1+T_2)+T_3=T_1+(T_2+T_3)\,.$$

(۲) انتقال $o=(0\,,\,0)$ خنثا است، به ازای هر T از $\mathbf{T}$،

$$o+T=T+o=T.$$

(۳) هر عضو T از $\mathbf{T}$ دارای یک قرینه مانند T' است،

$$T+T'=T'+T=o\,.$$

(۴) عمل $+$ تعویضپذیر است ؛ به ازای هر T_1 و T_2 از $\mathbf{T}$ ،

$$T_1+T_2=T_2+T_1.$$

ملاحظه می‌شودکه به ازای هر جفت از نقاط مانند A و B از G^2 یک انتقال منحصر بفرد مانند T از $\mathbf{T}$ وجود داردکه

$$T: A\longrightarrow B\,.$$

در واقع، با قرار دادن $A=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ ، بر طبق خواص گروه $(G,+)$ ، یک جفت مانند (u,v) هست

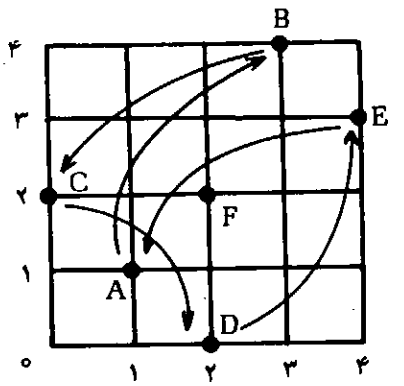
به‌طوری‌که

$$\begin{cases} x+u=x' \\ y+v=y'. \end{cases}$$

این امر، قبل از ادامهٔ منظم و دقیق موضوع، به بچه‌ها اجازه می‌دهد که خواص گروه $(\mathbf{T},+)$ را کشف کنند و آنها را بکار گیرند. فرض کنیم که مثلاً انتقال $T_1=(2,3)$ مفروض باشد، از نقطهٔ $A=\binom{1}{1}$ شروع کرده و از خود می‌پرسیم که آیا با بکار بردن T_1، به دفعات متعدد، می‌توان به نقطهٔ $F=\binom{2}{2}$ رسید. اینک

$$\binom{1}{1}\xrightarrow{T_1}\binom{3}{4}\xrightarrow{T_1}\binom{0}{2}\xrightarrow{T_1}\binom{2}{0}\xrightarrow{T_1}\binom{4}{3}\xrightarrow{T_1}\binom{1}{1}.$$

بنابراین، با شروع از نقطهٔ A پنج نقطهٔ A، B، C، D، و E را بدست می‌آوریم و نه بیشتر؛ زیرا بعد از E به A برمی‌گردیم. به‌وسیله T_1 هرگز نمی‌توان به F رسید.



چرا فقط پنج نقطه بدست می‌آید؟ آیا در صورتی که از نقطهٔ دیگری این عمل شروع شود و یا اینکه انتقال دیگری بکار برده شود، باز هم همان تعداد بدست خواهد آمد؟

از نقطهٔ $M=\binom{a}{b}$ شروع می‌کنیم و انتقال $T=(u,v)$ را بکار می‌بریم. متوالیاً خواهیم داشت،

$$T:\binom{a}{b}\longrightarrow\binom{a+u}{b+v},$$

$$T:\binom{a+u}{b+v}\longrightarrow\binom{a+u+u}{b+v+v}=\binom{a+2u}{b+2v}$$

(با قراردادن $u+u=2u$ و $v+v=2v$)

$$T:\binom{a+2u}{b+2v}\longrightarrow\binom{a+3u}{b+3v},$$

$$T:\binom{a+3u}{b+3v}\longrightarrow\binom{a+4u}{b+4v},$$

$$T:\binom{a+4u}{b+4v}\longrightarrow\binom{a+5u}{b+5v}.$$

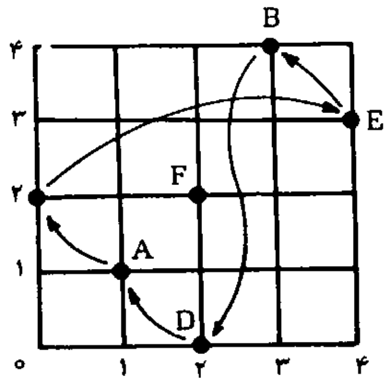
گروه $(G,+)$ یک گروه حلقوی از مرتبهٔ ۵ است، یعنی به‌ازای هر u از G، $5u=0$، از اینجا

$$T:\binom{a+4u}{b+4v}\longrightarrow\binom{a}{b}.$$

بنابراین از هر نقطه مانند M به‌وسیلهٔ انتقال دلخواه T، بعد از پنج مرحله به M برمی‌گردیم (البته، $T\neq 0$).

مجدداً با شروع کردن از نقطهٔ $A=\binom{1}{1}$ و با بکاربردن انتقال $T'=(4,1)$، آیا می‌توان نقطهٔ F را بدست آورد؟ دراین حالت داریم

$$\binom{1}{1}\xrightarrow{T'}\binom{0}{2}\xrightarrow{T'}\binom{4}{3}\xrightarrow{T'}\binom{3}{4}\xrightarrow{T'}\binom{2}{0}\xrightarrow{T'}\binom{1}{1},$$



که بدین معنی است که از همان نقاط قبلی می‌گذریم، البته با یک ترتیب دیگر.

چرا از همان نقاط قبلی می‌گذریم؛ ترکیب T_1 با خودش چنین است

$$T_1+T_1=(2,3)+(2,3)=(4,1).$$

بنابراین $T'=T_1+T_1$. انتقالهای T_1 و T' نامستقل خطی هستند،

$$T'=2T_1.$$

این امر ما را به تعریف یک قانون ترکیب خارجی هدایت می‌کند

$$\begin{aligned} G\times\mathbf{T} &\longrightarrow \mathbf{T}, \\ (\alpha,T) &\longrightarrow \alpha.T. \end{aligned}$$

قبل‌از دنبال‌کردن موضوع دراین زمینه ، نقطهٔ $A=\begin{pmatrix}۱\\۱\end{pmatrix}$ وانتقال $T_{۲}=(۲،۴)$ را درنظرمی‌گیریم؛ آیا اینك بااین‌مفروضات می‌توان به‌نقطهٔ $F=\begin{pmatrix}۲\\۲\end{pmatrix}$ رسید؛

$$\begin{pmatrix}۱\\۱\end{pmatrix}\xrightarrow{T_{۲}}\begin{pmatrix}۳\\۰\end{pmatrix}\xrightarrow{T_{۲}}\begin{pmatrix}۰\\۴\end{pmatrix}\xrightarrow{T_{۲}}\begin{pmatrix}۲\\۳\end{pmatrix}\xrightarrow{T_{۲}}\begin{pmatrix}۴\\۲\end{pmatrix}\xrightarrow{T_{۲}}\begin{pmatrix}۱\\۱\end{pmatrix},$$

که بدین‌معنی‌است‌که‌گرچه ازنقاط دیگری عبورکرده‌ایم ولی بازهم به F نرسیده‌ایم.

اینك $T_{۱}$ و $T_{۲}$ را باهم بکارمی‌بریم. آیا ممکن‌است از A به F برسیم؛ با درنظرگرفتن تعویضپذیری گروه $(\mathbf{T},+)$ طرح ذیل‌را بدست می‌آوریم:

$$\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix}۱\\۱\end{pmatrix} \arrow[r, "T_{۱}"] \arrow[d, "T_{۲}"'] & \begin{pmatrix}۳\\۴\end{pmatrix} \arrow[r, "T_{۱}"] \arrow[d, "T_{۲}"'] & \begin{pmatrix}۰\\۲\end{pmatrix} \arrow[r, "T_{۱}"] & \begin{pmatrix}۲\\۰\end{pmatrix} \arrow[r, "T_{۱}"] & \begin{pmatrix}۴\\۳\end{pmatrix} \arrow[r, "T_{۱}"] & \begin{pmatrix}۱\\۱\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}۳\\۰\end{pmatrix} \arrow[r, "T_{۱}"] \arrow[d, "T_{۲}"'] & \begin{pmatrix}۰\\۳\end{pmatrix} \arrow[r] \arrow[d, "T_{۲}"'] & \begin{pmatrix}۲\\۱\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}۴\\۴\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}۱\\۲\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}۳\\۰\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}۰\\۴\end{pmatrix} \arrow[r] \arrow[d, "T_{۲}"'] & \begin{pmatrix}۲\\۲\end{pmatrix} \arrow[r] \arrow[d] & \begin{pmatrix}۴\\۰\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}۱\\۳\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}۳\\۱\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}۰\\۴\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}۲\\۳\end{pmatrix} \arrow[r] \arrow[d, "T_{۲}"'] & \begin{pmatrix}۴\\۱\end{pmatrix} \arrow[r] \arrow[d] & \begin{pmatrix}۱\\۴\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}۳\\۲\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}۰\\۰\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}۲\\۳\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}۴\\۲\end{pmatrix} \arrow[r] \arrow[d, "T_{۲}"'] & \begin{pmatrix}۱\\۰\end{pmatrix} \arrow[r] \arrow[d] & \begin{pmatrix}۳\\۳\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}۰\\۱\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}۲\\۴\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}۴\\۲\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}۱\\۱\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}۳\\۴\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}۰\\۲\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}۲\\۰\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}۴\\۳\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}۱\\۱\end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{pmatrix}۱\\۱\end{pmatrix}\xrightarrow{T_{۱}}\begin{pmatrix}۳\\۴\end{pmatrix}\xrightarrow{T_{۲}}\begin{pmatrix}۰\\۳\end{pmatrix}\xrightarrow{T_{۲}}\begin{pmatrix}۲\\۲\end{pmatrix}.$$

بنابراین از A می‌توان به F رسید. جوابهای دیگری‌هم‌موجودند، یعنی

$$\begin{pmatrix}۱\\۱\end{pmatrix}\xrightarrow{T_{۲}}\begin{pmatrix}۳\\۰\end{pmatrix}\xrightarrow{T_{۱}}\begin{pmatrix}۰\\۳\end{pmatrix}\xrightarrow{T_{۲}}\begin{pmatrix}۲\\۲\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}۱\\۱\end{pmatrix}\xrightarrow{T_{۲}}\begin{pmatrix}۳\\۰\end{pmatrix}\xrightarrow{T_{۲}}\begin{pmatrix}۰\\۴\end{pmatrix}\xrightarrow{T_{۱}}\begin{pmatrix}۲\\۲\end{pmatrix},$$

و غیره . بعلاوه ملاحظه می‌کنیم که

(۱) همهٔ‌نقاط صفحهٔ آفینی $G^{۲}$ دراین طرح ظاهر می‌شوند. ازاین نتیجه می‌شودکه با ترکیبات انتقالهای $T_{۱}$ و $T_{۲}$، ازهر نقطهٔ $G^{۲}$ می‌توان به‌هر نقطهٔ دیگر رسید. ازاینجا معلوم می‌شودکه هرعضو $\mathbf{T}$ یك ترکیب‌از $T_{۱}$ و $T_{۲}$ است.

(۲) اولین وآخرین سطر این‌طرح مانند ستون‌اول وآخر آن یکی‌است. چنین وضعیتی قابل‌نمایش دریك چنبره است.

اینك برمی‌گردیم به‌قانون ترکیب خارجی،

$$G\times\mathbf{T}\longrightarrow\mathbf{T}$$
$$(\alpha,T)\longrightarrow\alpha\cdot T,$$

یعنی $\alpha\cdot T=(u',v')$ که‌درآن $T=(u,v)$ و (پیمانهٔ۵) $u'=\alpha u$، (پیمانهٔ۵) $v'=\alpha v$. دراینجا، عمل دوم G ، یعنی خاصیت‌میدان، وارد عمل می‌شود.

مجموعهٔ $\mathbf{T}$ به‌انضمام جمع $(+)$ و ترکیب خارجی $(\cdot)$ مذکور، یك فضای برداری روی میدان G است. می‌توان به‌سهولت اصول موضوعهٔ زیررا تحقیق‌کرد:

(۱) به‌ازای هر $\alpha\in G$ و هر $T_{۱},T_{۲}\in\mathbf{T}$ ،
$$\alpha\cdot(T_{۱}+T_{۲})=\alpha\cdot T_{۱}+\alpha\cdot T_{۲}\ .$$

(۲) به ازای هر $\alpha,\beta\in G$ و هر $T\in\mathbf{T}$ ،
$$(\alpha+\beta)\cdot T=\alpha\cdot T+\beta\cdot T.$$

(۳) به ازای هر $\alpha,\beta\in G$ و هر $T\in\mathbf{T}$ ،
$$\alpha\cdot(\beta\cdot T)=(\alpha\beta)\cdot T.$$

(۴) به‌ازای هر $T\in\mathbf{T}$ ،
$$۱\cdot T=T\ .$$

اعضای $\mathbf{T}$ بردارهای این فضای برداری است.

اینك می‌پردازیم به معرفی مفاهیم مهمی در فضای برداری $(\mathbf{T},+,\cdot)$.

(آ). دستگاه مولدهای یك فضای برداری

هربردار مانند T ازفضای برداری $\mathbf{T}$ ترکیبی ازبردارهای $T_{۱}=(۲،۳)$ و $T_{۲}=(۲،۴)$ است: مثلاً به‌ازای $T=(۰،۲)$ داریم

$$T=\alpha T_{۱}+\beta T_{۲}\ ,$$

یعنی

$$(۰،۲)=\alpha\cdot(۲،۳)+\beta\cdot(۲،۴)\ ,$$

و

$$\begin{cases}۰=۲\alpha+۲\beta\\ ۲=۳\alpha+۴\beta,\end{cases}$$

ازاینجا، نتیجه می‌شودکه

$$\begin{cases}\alpha=۴\beta\\ ۲=۲\beta+۴\beta,\end{cases}$$

بنابراین، $\alpha=۳$ و $\beta=۲$ ؛ ازاینجا

$$T=۳\cdot T_{۱}+۲\cdot T_{۲}\ .$$

یك‌دستگاه‌مانند $\{T_{۱},T_{۲},\dots,T_{p}\}$ را مولد می‌نامند درصورتی‌که هربردار T از $\mathbf{T}$ به‌صورت یك‌ترکیب خطی از $T_{۱}،\dots،T_{p}$ باشد.

(ب) . دستگاه آزاد

مجدداً دو بردار زیر را درنظر می‌گیریم،

$$T_1=(2,3) \quad \text{و} \quad T'=(4,1)$$

معلوم است که

$$T'=2\cdot T_1 \text{ ،}$$

به عبارت دیگر

$$T'+3\cdot T_1=0 .$$

بنابراین، دو عضو مانند α و β از G وجود دارد به طوری که هردو درعین حال صفر نیستند و

$$\alpha\ T'+\beta\cdot T_1=0 .$$

(درواقع، $\alpha=1$ و $\beta=3$).

بالعکس، به ازای دو بردار

$$T_2=(2,4) \quad \text{و} \quad T_1=(2,3)$$

تساوی

$$\alpha\cdot T_1+\beta\cdot T_2=0,$$

منجر به دستگاه

$$\begin{cases} 2\alpha+2\beta=0 \\ 3\alpha+4\beta=0 \end{cases}$$

می‌شود که تنها جواب آن عبارت است از $\alpha=\beta=0$.

یك دستگاه مانند $\{T_1,\dots,T_p\}$ را آزاد می‌نامند در صورتی که ازتساوی $\alpha_1T_1+\dots+\alpha_pT_p=0$ نتیجه شود که

$$\alpha_1=\dots=\alpha_p=0.$$

(پ) . مبنا و بعد

لازم به تذکر است که دستگاه $\{T_1 , T_2\}$ هم مولد است وهم آزاد. چنین دستگاهی را یك مبنای فضای برداری می‌نامند.

اینك می‌توان از محصلین خواست تا مبناهـای دیگری بیابند. آنان، به ویژه مبنای قانونی $\{I , J\}$ را، که در آن $I=(1,0)$ و $J=(0,1)$، کشف خواهندکـرد؛ همچنین پی خواهند برد که هرمبنا دارای دو عضو است. این امر، منجر به مفهوم بعد مـی‌شود. فضای برداری $(\mathbf{T} , + , \cdot)$ دارای بعد ۲ است.

محصلین با مطالعهٔ فضاهای برداری تولید شده به وسیلهٔ یك بردار به مفهوم فضای برداری با بعد ۱ و بالنتیجه به مفهوم خط برداری می‌رسند. مثلاً، بردار $T_1=(2,3)$ فضای جزئی‌را که شامل بردارهای ذیل است تولید می‌کند

$$0\cdot T_1=(0,0)$$
$$1\cdot T_1=(2,3)$$
$$2\cdot T_1=(4,1)$$
$$3\cdot T_1=(1,4)$$
$$4\cdot T_1=(3,2) ,$$

همین‌گونه، بردار $T_2=(2,4)$ فضای جزء دیگری راکه شامل بردارهای زیراست تولید می‌کند

$$0\cdot T_2=(0,0)$$
$$1\cdot T_2=(2,4)$$
$$2\cdot T_2=(4,3)$$
$$3\cdot T_2=(1,2)$$
$$4\cdot T_2=(3,1),$$

محصلین وجود ۶ فضای جزء با بعد ۱ را تحقیق خواهند کرد همهٔ اینها شامل بردار $(0,0)$ است، یگانه عضومشترك دوفضای جزء متمایز.

۳. نتیجه

اگربخواهیم دراین‌جهت فراتررویم، باید مثالهای‌دیگری ازفضاهای برداری راکه قابل درك برای نوجوانان باشند، کشف کنیم. آنـان بعداز اینکه با مثالهای متعددی مـواجه شدند، عرضهٔ مفهوم فضای برداری با اصول موضوعه، میسر خواهـد شد واین مبنای استواری برای هندسه خواهد بود.

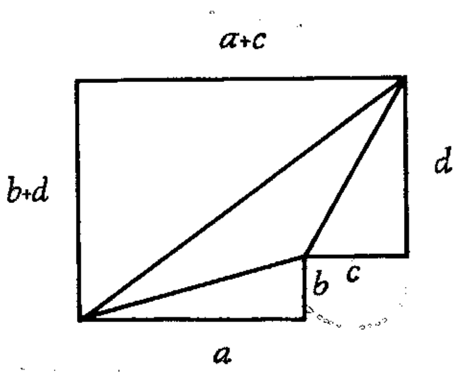
* * *

ترجمه از:

Educational Studies in Mathematics 2(1969) 69–79 ;
c D. Reidel Dordrecht – Holland .

نوشتهٔ Maurice Glaymann

ترجمهٔ علیرضا جمالی



$$\sqrt{(a^2+b^2)}+\sqrt{(c^2+d^2)} \geq \sqrt{((a+c)^2+(b+d)^2)}.$$

دو قضیهٔ مشهور در حساب عالی

رضا شهریاری اردبیلی

همنهشتیهای عددی در تئوری اعداد از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. در اینجا، با استفاده از خواص این همنهشتیها، به بیان و اثبات دوقضیهٔ مشهور در حساب عالی‌خواهیم پرداخت. برای اینکه برهان این احکام آسان و قابل فهم باشند، ابتدا مثالهای ساده‌ای جهت آماده کردن ذهن خواهیم آورد و سپس حالت کلی را عنوان خواهیم کرد*.

درصورتی‌که قوای متوالی اعداد طبیعی به‌پیمانهٔ ۷ را درنظر بگیریم، می‌بینیم که حاصل رشته‌ای است از اعدادکه بصورت خاصی تکرار می‌شوند. به عنوان مثال در مورد قوای ۲ داریم:

$$۲^{۰}\equiv ۱ \qquad ۲^{۳}\equiv ۱ \qquad ۲^{۶}\equiv ۱$$
$$۲^{۱}\equiv ۲ \qquad ۲^{۴}\equiv ۲ \qquad ۲^{۷}\equiv ۲$$
$$۲^{۲}\equiv ۴ \qquad ۲^{۵}\equiv ۴ \qquad ۲^{۸}\equiv ۴ \quad (\text{پیمانه ۷});$$

در این‌مثال، اعداد ۱، ۲، ۴ متناوباً تکرار می‌شوند. درمورد قوای ۳، اعداد ۱، ۳، ۲، ۶، ۴، ۵ تکرار خواهند شد. به همین‌ترتیب، در مورد اعداد طبیعی دیگر نیزاین خاصیت بر قرار است که می‌توان به امتحان آن را ملاحظه کرد.

در مثالهای فوق، مشاهده می‌کنیم که حاصل بعضی از قوای اعداد طبیعی مساوی ۱ است؛ مانند ۲^۶ و ۳^۶، و غیره. به‌امتحان معلوم می‌شود که هر عدد نا صفر (به‌پیمانهٔ ۷) مانند x در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$x^{6}\equiv ۱ \qquad (\text{پیمانه ۷}).$$

در صورتی که محاسبات لازم را به ازای هر عدد نا صفر (به پیمانهٔ ۵) مانند x انجام دهیم، خواهیم داشت،

$$x^{4}\equiv ۱ \qquad (\text{پیمانه ۵}),$$

در مورد پیمانهٔ ۱۱، داریم،

$$x^{10}\equiv ۱ \qquad (\text{پیمانه ۱۱}).$$

در اینجا، چون اعداد اول نقش خاصی را دارند، توجهمانرا صرفاً به پیمانه‌های اعداد اول معطوف می‌کنیم. بنظر می‌رسد که به ازای هر عدد نا صفر (به پیمانهٔ p) مانند x داشته باشیم:

$$x^{p-1}\equiv ۱ \qquad (\text{پیمانه } p).$$

برای روشن شدن اثبات، ابتدا این حکم را در مورد عدد اول ۷ ثابت می‌کنیم. اعداد نا صفر به پیمانهٔ ۷ عبارتند از

$$۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶.$$

در صورتی‌که این اعداد را دو برابرکنیم (به پیمانهٔ ۷)، اعداد زیر را بدست خواهیم‌آورد:

$$۱, ۴, ۶, ۱, ۳, ۵;$$

که‌در واقع، همان اعداد با ترتیب دیگری‌هستند. معلوم است که دو عدد

$$۱ . ۲ . ۳ . ۴ . ۵ . ۶$$

و

$$۱ . ۴ . ۶ . ۱ . ۳ . ۵$$

به پیمانهٔ ۷ همنهشت‌اند. ولی عدد اخیر، ضمناً با عدد ذیل نیز همنهشت است:

$$(۱.۲)(۲.۲)(۳.۲)(۴.۲)(۵.۲)(۶.۲) \qquad (\text{پیمانه ۷}).$$

ولی، این عدد مساوی است با

$$۲^{۶}.(۱.۲.۳.۴.۵.۶) \qquad (\text{پیمانه ۷}).$$

بنابراین،

$$۲^{۶}.(۱.۲.۳.۴.۵.۶)\equiv ۱.۲.۳.۴.۵.۶ \qquad (\text{پیمانه ۷})$$

از اینجا،

$$۲^{۶}\equiv ۱ \qquad (\text{پیمانه ۷}).$$

اینک هرگاه اعداد سابق‌الذکر را سه برابرکنیم، اعداد ذیل را بدست خواهیم‌آورد:

$$۳, ۶, ۲, ۵, ۱, ۴$$

با دلیل مشابهی نتیجه می‌گیریم که

$$۳^{۶}\equiv ۱ \qquad (\text{پیمانه ۷})$$

اکنون مقصود اینست که حکم را در حالت کلی، به پیمانهٔ p، ثابت کنیم، گوئیم‌چون p اول‌است، اعداد

$$(1.x), (2.x), \ldots, ((p-1).x)$$

درست همان اعداد ۱، ۲، ...، p − ۱ هستند (البته

(*) به منظور اهداف آموزشی، از اثبات دقیق قضایا در این مقاله خودداری شده، و برهانها بطورشهودی صورت‌گرفته است. علاقه‌مندان می‌توانند به کتابهای تئوری اعداد مراجعه کنند.

یا یك ترتیب دیگر) . بنا براین،

$$(1.x).(2.x)\ldots((p-1).x) \equiv 1.2.3\ldots(p-1) \quad (\text{پیمانه } p)$$

یا ،

$$x^{p-1}(1.2\ldots(p-1)) \equiv 1.2\ldots(p-1) \quad (\text{پیمانه } p) .$$

از اینجا ،

$$x^{p-1} \equiv 1 \quad (\text{پیمانه } p) .$$

یك کاربرد ساده از این قضیه اینست که بدون انجام عمل تقسیم می‌توان گفت که مثلاً عدد

$$7^{18}-1 = 1628413597910448$$

بر ۱۹ قابل قسمت است . درکتابهــای تئوری اعداد این قضیه ، پس از ذکر اصول و خواص همنهشتیهای عددی ، دقیقاً به اثبات می‌رسد . قضیه مذکور ، به قضیهٔ کوچك فرما موسوم است .

قضیهٔ دوم ، در بارهٔ حاصلضرب اعداد ۱ ، ۲ ، ... ، $p-1$ ، یعنی عدد

$$1.2\ldots(p-1) ,$$

است که در قضیهٔ فرما هم ظاهر شد . هدف اینست که حاصل آن را به پیمانهٔ p تعیین کنیم .

در صورتی که $p=7$ ، حاصلضرب زیر را خواهیم داشت ،

$$1.2.3.4.5.6 .$$

اگر این حاصلضرب را بصورت ذیل بنویسیم :

$$1.(2.4)(3.5).6 ,$$

نتیجه می‌گیریم که همنهشت است با

$$1.1.1.(-1) ,$$

که مساوی -1 است ، همانگونه که ملاحظه می‌شود ، جفت کردن اعداد در حاصلضرب مذکور چنان صورت گرفته کـه حاصلضرب هر یك از این جفتها مساوی ۱ شود .

اینك درصورتی که همین عمل را در مورد پیمانهٔ ۱۱ انجام دهیم ، خواهیم داشت ؛

$$\begin{aligned} &1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 \\ &= 1.(2.6)(3.4)(5.9)(7.8).10 \\ &= 1.1.1.1.1.(-1) \\ &= -1 . \end{aligned}$$

یا در مورد پیمانهٔ ۱۳ ،

$$\begin{aligned} &1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12 \\ &= 1.(2.7)(3.9)(4.10)(5.8)(6.11).12 \\ &= 1.1.1.1.1.1.(-1) \\ &= -1 . \end{aligned}$$

چنانکه در سه مثال مذکورملاحظه شد، روش اثبات اینست که هرعدد را با عکسش جفت کنیم . مثلاً ، در مثال اخیر عکس هر یك از اعداد ۲،۳،۴،۵، ۶ بترتیب ، ۷،۹،۱۰،۸، ۱۱ است که با خـود آن‌عدد جفت‌شده‌اند (عکس یك عدد یعنی عددی که چون در آن‌عدد، به پیمانهٔ مفروض، ضرب شود حاصل ۱ گردد) .

درحالت کلی اعداد ۱،۲، . . . ، $p-1$ را در نظرمی‌گیریم به استثناء ۱ و $p-1$ که با عکس خود برابرند ، دیگر اعداد این رشته را با عکسشان جفت می‌کنیم. خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} 1.2\ldots(p-1) &\equiv 1.\left(2.\frac{p+1}{2}\right)\ldots \\ &\left(\frac{p-1}{2}.(p-2)\right)(-1) \\ &\equiv 1.1\ldots1.(-1) \\ &\equiv -1 \quad (\text{پیمانه } p) \end{aligned}$$

از اینجا ، معلوم می‌شودکه به ازای هر عدد اول p ،

$$1.2\ldots(p-1) \equiv -1 \quad (\text{پیمانه } p)$$

یا

$$(p-1)! \equiv -1 \quad (\text{پیمانه } p)$$

این نتیجه ، به قضیهٔ ویلسون معروف است .

در صورتی که بجای p ، عدد مرکبی مانند m در نظـر گرفته شود ، حکم برقرار نمی‌ماند . زیـرا ، هرگاه m مرکب باشد، دارای یك مقسوم‌علیه مانند d است $(1<d\leqslant m-1)$. واضح است که d حاصلضرب $1.2\ldots(m-1)$ را عاد می‌کند. بنا براین، باقیماندهٔ تقسیم $1.2\ldots(m-1)+1$ بر d ، مساوی ۱ است ؛ و این بدان معنی است که m نمی‌تواند عـــدد $(m-1)!+1$ را عاد کند .

قضیـهٔ ویلسون در تشخیص اولیت اعداد بکار می‌رود . برای تشخیص اینکه آیا عدد مفروض q اول است یا نه ، کافی است عدد

$$1.2\ldots(q-1)+1$$

را بر q تقسیم‌کنیم ؛ هرگاه باقیمانده صفر شود، q اول و درغیر این صورت مرکب است . به عنوان مثال ، چون عدد

$$1.2.3.4.5.6+1=721$$

بر ۷ قابل قسمت است ، ۷ یك عدد اول‌است . ولی چون

$$1.2.3.4.5+1=121$$

بر ۶ قابل قسمت نیست ، ۶ یك عدد مرکب است .

دراینجا ، ملاحظه می‌شودکه برای‌تشخیص‌عدد اول‌کوچکی مانند ۱۷ ، باید عدد

$$1.2\ldots16+1=20922789888001$$

را بر ۱۷ تقسیم کنیم ، کـه عملاً کار دشواری است . بنا براین روش مذکور در تشخیص‌اولیت اعداد اول روش مناسبی‌نیست.

* * *

مأخوذ ازکتاب

Ian Stewart, *Concepts of Modern Mathematics*, Penguin Books, (Reprinted 1982).

اصل انعکاس و کاربرد آن

تهیه و تنظیم : ق . وحیدی

مقدمه . روشی موسوم به اصل انعکاس[1] ، همراه با تعبیر هندسی آن ، مشکل‌گشای مسائل متعددی است که در زمینه‌های مختلف ریاضی، وبخصوص دراحتمالات ، باآنها مواجه می‌شویم. روش مزبوررا درکتب ومقالات راجع به‌احتمال ، به **د . آندره**[2] (۱۸۸۷) نسبت می‌دهند. در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هم ازاین روش استفاده می‌شود ، ودراین شاخه، ازریاضیات به روش تصاویر[3] شهرت دارد. دربین عموم ، ابداع این روش به **ماکسول**[4] یا **لردکلوین**[5] منسوب است. دراینجا ، این روش‌را باختصار توضیح داده ودومورد استعمال آن را درحل دومسئلهٔ مشهور می‌آوریم.

فرض‌کنیم‌که هریك از n علامت ε_1 ، ε_2 ، ... ، و ε_n نمایندهٔ $+1$ یا -1 باشند ، و نیز فرض می‌کنیم‌که r تای آنها مثبت و s تا منفی باشند $(n=r+s)$. حاصلجمع جزئی $S_k=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_k$ نمایش اختلاف بین عدهٔ علامات مثبت و منفی در میان k علامت ε_1 ، ε_2 ، ... ، و ε_k است. دراین صورت

$$(1)\quad S_k-S_{k-1}=\varepsilon_k=\pm 1,\quad S_n=r-s,$$

که درآن $k=1, 2, \dots, n$ (برطبق قرارداد فرض می‌شود که $S_0=0$).

دریك دستگاه مختصات معمولی‌نقاط (k, S_k) را به‌ازای $k=1, 2, \dots, n$ مشخص‌کرده وآنها را به هم وصل می‌کنیم. شکل حاصل را، که یك خط چند ضلعی‌است ، یك مسیر می‌نامیم. باید توجه داشت‌که ضریب زاویهٔ ضلع k م این چند ضلعی ε_k است.

تعریف . فرض‌کنیم که $n(>0)$ و y اعداد صحیحی باشند. یك مسیرازمبدأ به‌نقطهٔ (n, y) ، که با $(S_1, S_2, \dots, S_n)$ نشان داده می‌شود ، خطی است چند ضلعی‌که رئوس آن دارای طولهای ۰ ، ۱ ، ۲ ، ... ، n و عرضهای S_0 ، S_1 ، ... ، و S_n هستند وبعلاوه درروابط (۱) ، باشرط $S_n=y$ ، صدق می‌کنند. n را طول مسیرمی‌نامیم.

اگر r عدهٔ ε_k های مثبت و s عدهٔ ε_k های منفی باشد ، بدیهی است‌که

$$(2)\quad n=r+s\ ,\quad y=r-s$$

برای‌آنکه مسیری ازمبدأ به نقطهٔ دلخواه (n, y) موجودباشد، لازم است‌که n و y در روابط (۲) صدق‌کنند. اگر عدهٔ کل مسیرها از مبدأ به نقطهٔ (n, y) را با $N_{n,y}$ نشان دهیم ، داریم:

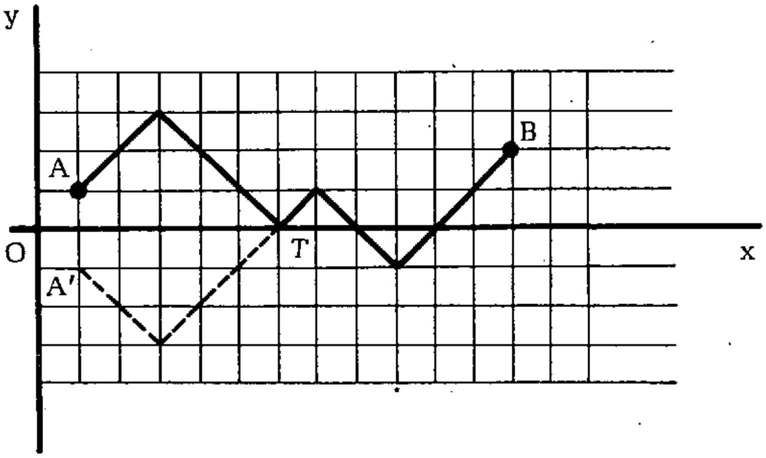
$$N_{n,y}=\binom{r+s}{r}=\binom{r+s}{s};$$

زیرا برای رسیدن به نقطهٔ (n, y) بایداز n علامت مثبت ومنفی ، r تا مثبت (و s تا منفی) باشد. رابطهٔ اخیررا ، به موجب (۲) ، می‌توان چنین نوشت:

$$(3)\quad N_{n,y}=\binom{n}{\frac{n+y}{2}}=\binom{n}{\frac{n-y}{2}}.$$

بعلاوه ، درصورتی‌که مسیری ازنقطهٔ دلخواه (a, b) به نقطهٔ دلخواه (l, z) موجود باشد ، در این صورت ، عدهٔ تمام‌این‌گونه مسیرها برابراست با $N_{l-a, z-b}$.

اینك فرض می‌کنیم که $A=(a, \alpha)$ و $B=(b, \beta)$ دو نقطه با مختصات صحیح نامنفی باشند و $b>a\geqslant 0$ ، $\alpha>0$ ، و $\beta>0$. منعکس نقطهٔ A نسبت به محور x ها نقطه‌ای مانند $A'=(a, -\alpha)$ است (شکل ۱).



قضیه (اصل انعکاس). عدهٔ مسیرها از A به B که با محور x ها تماس داشته یا آن را قطع می‌کنند، برابر است با عدهٔ کل مسیرها از A' به B.

برهان. مسیری مانند $(S_a=\alpha, S_{a+1}, \dots, S_b=\beta)$ از A به B را در نظر می‌گیریم که یکی یا بیش از یکی از رئوس آن در روی محور x ها باشد. فرض می‌کنیم که x طول اولین رأسی باشد که بر روی محور x هاست؛ یعنی x را چنان انتخاب می‌کنیم که $S_x=0$ ؛ $S_{x-1}>0$ ، ... ، و $S_a>0$. در این صورت $(-S_a, -S_{a+1}, \dots, -S_{x-1}, 0, S_{x+2}, \dots, S_b)$ مسیری است از A' به B که نقطهٔ $T=(x, 0)$ اولین رأسی از آن است که بر محور x ها واقع است. چون دو قطعهٔ AT و A'T منعکس هم هستند، یك تناظر یك به یك بین جمیع مسیرهای از A' به B و مسیرهای از A به B که با محور x ها متقاطع اند یا بر آن مماس‌اند بر قرار است؛ و بدین ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

اینك با استفاده از این قضیه دو مسئلهٔ مشهور زیر را حل می‌کنیم.

مسئلهٔ ۱ (مسئلهٔ رأی‌گیری[۶]). فرض کنیم که در جریان یك انتخابات، کاندیدای (الف)، r رأی و کاندیدای (ب) s رأی را به خود اختصاص دهند ($r > s$). احتمال اینکه در سرتاسر مدت شمارش آراء تعداد رأیهای (الف) بیشتر از (ب) باشد چیست؟

(این مسئله اولین بار توسط و. ا. **ویتوورث**[۷] در ۱۸۷۸ و سپس در ۱۸۸۷ توسط **ج. برتران**[۸] ثابت شده است.)

حل: رأی داده شده به نفع (الف) را با ۱+ و رأی داده شده به نفع (ب) را با ۱− نشان می‌دهیم. در این صورت

$$S_k \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

اختلاف بین تعداد آراء به نفع (الف) یا (ب) را درموقع شمارش k مین رأی نشان می‌دهد ($n=r+s$). اگر همهٔ حالتهای ممکن را همشانس فرض کنیم، می‌توان از فرمول کلاسیك احتمال استفاده کرد. داریم

$$\text{صورممکن} = N_{n,y} = \binom{r+s}{r} = \binom{r+s}{s},$$

(r رأیی که به (الف) داده شده، می‌تواند به هر ترتیب درجریان شمارش، ظاهر شود.) با علامتگذاری رأیها درفوق بآسانی می‌توان دریافت که صور مساعد عبارت است از کل مسیرهای از مبدأ به نقطهٔ $(n, r-s)$، که در آن

$$S_1>0,\ S_2>0,\ \dots,\ S_n=y>0. \quad (۴)$$

تعداد مسیرهایی که در نامساویهای (۴) صدق می‌کنند برابر است با تعداد مسیرهای از نقطهٔ $(1,1)$ به (n, y) که نه با محور x ها تماس دارند و نه با آن متقاطعند (زیرا $S_1>0$). اما تعداد این مسیرها برابر است با تفاضل عدهٔ جمیع مسیرهائی که نقطهٔ $(1, -1)$ (یعنی منعکس نقطهٔ $(1,1)$) را به (n, y) وصل می‌کنند (به موجب اصل انعکاس)، یعنی

$$N_{n-1,y-1} - N_{n-1,y+1}$$

بنابراین، عدهٔ مسیرهای مطلوب با توجه به (۳)، چنین است:

$$\binom{r+s-1}{r-1} - \binom{r+s-1}{r}$$

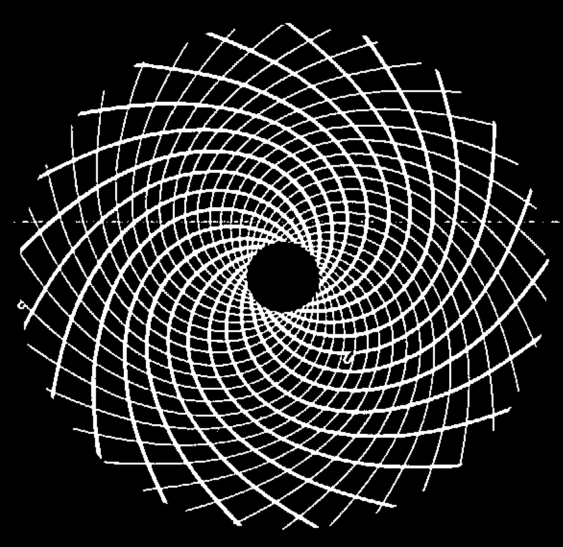
که پس از ساده کردن به صورت $\frac{(r-s)N_{n,y}}{r+s}$ درمی‌آید.

در نتیجه احتمال پیشامد مطلوب، یعنی احتمال جلو بودن کاندیدای (الف) در سرتاسر جریان شمارش آراء عبارت است از

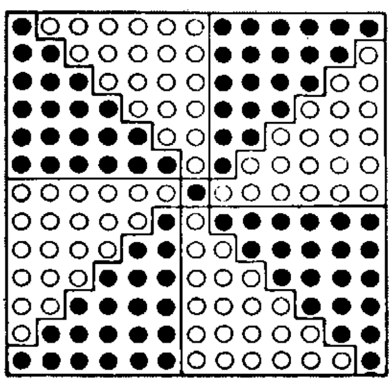
$$\frac{r-s}{r+s}$$

مسئلهٔ ۲. در مقابل گیشهٔ یك سینما $2n$ نفر برای خرید بلیط صف کشیده‌اند. n نفر از آنها اسکناسهای بیست تومانی، و n نفر دیگر اسکناسهای ده تومانی دارند. قیمت هر بلیط ده تومان است و هر نفر یك بلیط می‌خرد. اگر در لحظهٔ شروع فروش بلیط پولی در گیشه نباشد، احتمال اینکه بلیط فروش برای فروختن بلیط به $2n$ نفر مذکور هیچ وقت دچار لنگی پول خرد کردن نشود، چیست؟

حل. اسکناسهای ده تومانی را ۱+ و اسکناسهای بیست تومانی را ۱− نشان می‌دهیم. در این صورت بدیهی است که تعداد اسکناسهای ده تومانی موجود درگیشه در لحظه‌ای که فرد k ام بلیط می‌خرد، S_k $(k=1,2,\dots,2n)$ است (S_k ممکن است منفی باشد). برای اینکه کار فروختن بلیط دچار لنگی پول خرد



طرحهای مارپیچی در گل آفتابگردان



$$T_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n=n^2$$

$$8T_n+1=S_{2n+1}$$

کردن‌نشود باید داشته باشیم:

$$S_k \geqslant 0 \qquad (k=1,2,\ldots,2n). \tag{5}$$

صور ممکن در احتمال مطلوب عبارت است از

$$\binom{2n}{n},$$

[یعنی همهٔ حالتهائی که n نفری که اسکناسهای بیست تومانی (یا ده تومانی) دارند، به هر ترتیب دلخواه در بین 2n نفر قرار گیرند]. صور مساعد عبارت است از عدهٔ مسیرهائی که در نا مساویهای (5) صدق می‌کنند. چون $S_1>0$، بنابراین عدهٔ مسیرهای قابل قبول برابر است با تعداد مسیرهای از نقطهٔ $(1,1)$ به نقطهٔ $(2n,0)$ که خط $y=-1$ را قطع نکنند و یا با آن تماس نداشته باشند. اینك هرگاه محورهای مختصات را به نقطهٔ $(0,-1)$ منتقل کنیم، مسئله بر می‌گردد به تعیین عدهٔ همهٔ مسیرهائی‌که نقطهٔ $(1,2)$ را به نقطهٔ $(2n,1)$ وصل می‌کند و با محور x ها(ی جدید) نه متقاطع است و نه در تماس. ولی‌این تعداد برابر است با تفاضل تعداد جمیع مسیرهائی‌که نقطهٔ $(1,2)$ را به $(2n,1)$ وصل می‌کند و عدهٔ جمیع مسیرهایی که نقطهٔ $(1,-2)$ (منعکس نقطهٔ $(1,2)$) را به $(2n,1)$ وصل می‌کند (به موجب اصل انعکاس). بنابراین، عدهٔ مطلوب برابر است با $N_{2n-1,-1}-N_{2n-1,3}$؛ به عبارت دیگر،

$$\binom{2n-1}{n-1}-\binom{2n-1}{n+1}.$$

ولی

$$\binom{2n-1}{n-1}-\binom{2n-1}{n+1}=\binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}$$

پس احتمال مطلوب برابر است با $\frac{1}{n+1}$.

توضیحات

1. Reflection Principle
2. D. André
3. Method of images
4. Maxwell
5. Lord Kelvin
6. The ballot problem
7. W.A. Whitworth
8. J. Bertran

مأخوذ از

۱) Feller, william. An Introductioh to Probability Theory and its Applications, vol. I, Third Edition. john wiley & Sons, New York, 1971.

۲) Gnedenko, B. V. The Theory of Probability. Fourth Printing, Mir Publishers, 1978.

مجموعیابی رشتهٔ $1^k+2^k+\dots+n^k$

ف. چورلتون *

۱. مقدمه

یك روش‌کلی برای مجموعیابی[۱] رشتهٔ فوق، به‌ازای هرعدد طبیعیk، ارائه می‌گردد. دراین‌روش از اتحادهای دوجمله‌ای،که باآنها آشناهستیم، استفاده خواهد شد. طریقهٔ مذکور، اعمال تفاضل متناهی[۲] مقدماتی را بکار می‌گیرد و به‌حل یك دستگاه مثلثی متشکل‌ازمعادلات جبری خطی،که به‌سهولت قابل حل‌اند، منجر می‌شود.

۲. روش

رشتهٔ فوق‌را با S_n نشان می‌دهیم (که درآن، $n\geqslant 0$ و k عددی است طبیعی). باعلامت استاندۀ تفاضل متناهی،

$$\Delta S_n=S_{n+1}-S_n=(n+1)^k.$$

چون $(n+1)^k$ بسجمله‌ای[۳] است برحسب n ازدرجهٔ k و شامل $k+1$ جمله برحسب n^m ($m=0,1,2,\dots,k$) می‌باشد، سعی می‌کنیم که آن را به‌صورت یك ترکیب خطی‌از $k+1$ بسجملهٔ ذیل بیان‌کنیم

$$\binom{n+m}{k}\qquad (m=1,2,\dots,k+1).$$

هریك ازچنین بسجمله‌ها، بسجمله‌ای است برحسب n ازدرجهٔ k.
بنابراین، فرض می‌کنیم

$$(n+1)^k\equiv a_1\binom{n+1}{k}+a_2\binom{n+2}{k}+\dots+a_k\binom{n+k}{k}+a_{k+1}\binom{n+k+1}{k}.$$

باقراردادن $n=-1$، دراین اتحاد، معلوم می‌شودکه $a_{k+1}=0$ و بنابراین اتحاد فوق تبدیل می‌شود به

$$(n+1)^k\equiv\sum_{m=1}^{k}a_m\binom{n+m}{k}.$$

درعبارت اخیر، اگر بجای n عدد $-(n+2)$ قرار دهیم[۴]، طرف چپ به $(-1)^k(n+1)^k$ تبدیل‌می‌شود. همچنین‌ضریب a_m، درطرف راست، به‌صورت ذیل درمی‌آید،

$$\binom{-n-2+m}{k}=\frac{(-n-2+m)(-n-3+m)\dots(-n-k-1+m)}{k!}$$

$$=\frac{(-1)^k(n+k+1-m)(n+k-m)\dots(n+2-m)}{k!}=(-1)^k\binom{n+k+1-m}{k}.$$

بنابراین، اتحاد مزبور قابل‌بیان به‌صورت زیراست.

$$(n+1)^k\equiv\sum_{m=1}^{k}\binom{n+k+1-m}{k}a_m\equiv\sum_{t=1}^{k}\binom{n+t}{k}a_{k+1-t}\quad (t=k+1-m).$$

باتوجه به اتحادهای

$$(n+1)^k\equiv\sum_{m=1}^{k}\binom{n+m}{k}a_m\equiv\sum_{m=1}^{k}\binom{n+m}{k}a_{k+1-m},$$

بسهولت ملاحظه می‌شودکه $a_m=a_{k+1-m}$. بنابراین می‌توان نوشت

$$(n+1)^k\equiv\left[\binom{n+1}{k}+\binom{n+k}{k}\right]a_1+\left[\binom{n+2}{k}+\binom{n+k-1}{k}\right]a_2+\dots.$$

در اتحاد اخیر، با فرض $n=0,1,2,\dots$ دستگاه زیر را بدست می‌آوریم

$$1=a_1$$
$$2^k=(k+1)a_1+a_2$$
$$3^k=\frac{1}{2}(k+2)(k+1)a_1+(k+1)a_2+a_3$$

. . . .

aها ازاین دستگاه مثلثی به‌سادگی پیدا می‌شوند.
بااستفاده ازرابطهٔ

(*) F. Chorlton

$$\Delta S_n = \left[\binom{n+1}{k}+\binom{n+k}{k}\right]a_1+$$
$$\left[\binom{n+2}{k}+\binom{n+k-1}{k}\right]a_2+\dots,$$

با توجه به‌اینکه به‌ازای هر عدد طبیعی b

$$\Delta\binom{n+a}{b}=\binom{n+a}{b-1},$$

به سهولت معلوم می‌شود که ۵.

$$S_n = \left[\binom{n+1}{k+1}+\binom{n+k}{k+1}\right]a_1+$$
$$\left[\binom{n+2}{k+1}+\binom{n+k-1}{k+1}\right]a_2+\dots .$$

(i) برای مجموعیابی رشتهٔ

$$S_n = 1^4+2^4+\dots+n^4,$$

فرض می‌کنیم که

$$(n+1)^4 \equiv \left[\binom{n+1}{4}+\binom{n+4}{4}\right]a_1+$$
$$\left[\binom{n+2}{4}+\binom{n+3}{4}\right]a_2.$$

به‌ترتیب، باقراردادن $n=0$ و $n=1$،

$$1=a_1$$
$$16=5a_1+a_2,$$

از اینجا، $a_1=1$، $a_2=11$؛ بنابراین،

$$S_n = \left[\binom{n+1}{5}+\binom{n+4}{5}\right]+$$
$$11\left[\binom{n+2}{5}+\binom{n+3}{5}\right]$$

(ii) برای حالت

$$S_n = 1^5+2^5+\dots+n^5$$

فرض می‌کنیم که

$$(n+1)^5 \equiv \left[\binom{n+1}{5}+\binom{n+5}{5}\right]a_1+$$
$$\left[\binom{n+2}{5}+\binom{n+4}{5}\right]a_2+\binom{n+3}{5}a_3.$$

به‌ترتیب، باقراردادن $n=0$، $n=1$، و $n=2$،

$$1=a_1$$
$$32=6a_1+a_2$$
$$243=21a_1+6a_2+a_3;$$

از اینجا، $a_1=1$ ، $a_2=26$، و $a_3=66$ ؛ بنابراین

$$S_n = \left[\binom{n+1}{6}+\binom{n+5}{6}\right]+26\left[\binom{n+2}{6}+\right.$$
$$\left.\binom{n+4}{6}\right]+66\binom{n+3}{6}.$$

ترجمه از مجلهٔ
International Journal of *Mathematical Education* in Science and Technology Vol. 14, No. 4, July – August 1983.

* * *

توضیحات مترجم

1. Summation
2. Finite difference

«مبحث حساب تفاضلات متناهی مبتنی‌است بر دو عمل تفاضل‌گیری و مجموع‌گیری بر توابع، که نظیر اعمال مشتق‌گیری و تابع اولیه‌گیری می‌باشند، ولی به‌مراتب از آنها ساده‌ترند، زیرا مفهوم «حد» در آنها درکار نمی‌آید، بلکه محاسبه و استدلال با آنها جنبهٔ جبری دارد.» (نقل از کتاب «تئوری مقدماتی اعداد»، تألیف دکتر غلامحسین مصاحب). خواستاران اطلاعات بیشتر به‌کتاب مذکور، صفحات ۱۰۶۳ـ۷۸۵، مراجعه کنند.

3. Polynomial [کثیر الجمله]

۴. درواقع، منظور اینست که aها را چنان تعیین کنیم که به ازای هر عدد صحیح n طرفین اتحاد مذکور مساوی باشند (گرچه بعداً با nهای طبیعی سروکار خواهیم داشت). برای این کار، چنان که ملاحظه می‌شود، عباراتی به‌صورت $\binom{a}{b}$ درکار می‌آیند که a صحیح و b طبیعی است. تعریف این عبارت چنین است:

$$\binom{a}{b}=\frac{a(a-1)\dots(a-b+1)}{b!}.$$

معلوم است که اگر a طبیعی و $a<b$ ، خواهیم داشت

$$\binom{a}{b}=0$$

۵. دراینجا، ازحکم سادهٔ زیر استفاده شده است:
«فرض کنیم که به ازای هر عدد طبیعی n ، $\Delta s_n = \Delta r_n$. دراین‌صورت، به‌ازای هر عدد طبیعی n ، $s_n = r_n + (s_1-r_1)$. بعلاوه، اگر $s_1=t_1$ آنگاه همواره $s_n=r_n$.» (ملاحظه شود که نقش Δ نظیر عملگر مشتق است؛ وحکم فوق نظیر تابع اولیه‌گیری از طرفین تساوی بصورت $d(f(x)) = d(g(x))$ است.)

۶. خواستاران بحثی مشروحتر دراین زمینه می‌توانند به مقالهٔ جامع ب. ترنر (B. Turner)، باعنوان حاصلجمع قوای اعداد صحیح از طریق قضیهٔ دو جمله‌ای مندرج در مجلهٔ Mathematics Magazine ، مجلد ۵۳، شمارهٔ ۲، مارس ۱۹۸۰؛ مراجعه کنند.

مسائل

❶ تابع f با ضابطهٔ

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x<-1)\\ 0 & (x=-1)\\ \dfrac{x^2-1}{x+1} & (x>-1)\end{cases}$$

مفروض است. مستقیماً، با استفاده از تعریف پیوستگی دریك نقطه، در پیوستگی این تابع در نقطهٔ $x=-1$ بحث کنید.

(کنکور ۶۲)

❷ ثابت کنید که در هر مثلث ABC ، همواره

$$b^2\cos^2\frac{C}{2}+c^2\cos^2\frac{B}{2}=p$$

(p نصف محیط است). (کنکور ۶۲)

❸ ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح نا منفی n ،

$3^{6n+2}+3^{3n+1}\equiv 0$ (پیمانهٔ ۱۳)

(امتحان نهائی ۶۲)

❹ دو دایرهٔ O و O′ در نقطهٔ A مماس خارج‌اند . از A دو قاطـع دلخواه رسم می‌کنیم تا دایرهٔ O را در نقاط B و C و دایرهٔ O′ را در نقاط B′ و C′ قطع کند. ثابت کنید که $BC \parallel B'C'$.

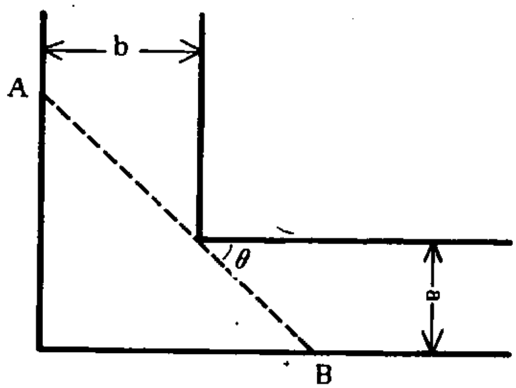
(کنکور ۶۲)

❺ در زیر جدول جمع ، و قسمتی از جدول عمل ضرب یك حلقـهٔ چهار عضوی داده شده است. با استفـاده از قانـون توزیعپذیری ، جدول عمل‌ضرب را تکمیل کنیـد . آیا این حلقـه تعویضپذیر است ؛ عضو خنثای عمل‌ضرب کدام است؛

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

·	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	—	—	a
c	a	—	c	—
d	a	b	c	—

❻ در شکل زیر ، زاویهٔ θ را چنان تعیین کنید که طول AB ، کمترین مقدار را داشته باشد.



❼ ثابت کنید که معادلهٔ $x^5+x=10$ فقط دارای یك ریشهٔ حقیقی است و این ریشه عددی گنگ است.

❽ ثابت کنید که

$$\int_0^x (t-[t])^2dt=\frac{1}{3}[x]+\frac{1}{3}(x-[x])^3.$$

❾ مطلوبست تعیین عدهٔ جمیع دسته‌های n تائی متشکل از ارقام ۰ ، ۱ مشروط بر اینکه در هر یك از این دسته‌ها رقم ۱ به طور متوالی نیامده باشد .

❿ ثابت کنید که به ازای هر دو عدد طبیعی a و b ،

$$\frac{(2a)!(2b)!}{a!b!(a+b)!}$$

یك عدد طبیعی است.

⓫ مطلوبست تعیین جزء صحیح عدد زیر

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{10000}}.$$

۱۲ فرض کنیم که a و b دوعدد مثبت، و m ، n اعدادی طبیعی باشند به طوری که $m>n$. ثابت کنید که

$$(a^m+b^m)^n<(a^n+b^n)^m .$$

۱۳ فرض کنیم که $|a_{ij}|$ دترمینانی از مرتبهٔ n باشد. معلوم است که بسط این دترمینان دارای $n!$ جملـه است . اینك اعضای واقع برقطراصلی این دترمینان را به صفر تبدیل می‌کنیم. عدهٔ جمل بسط دترمینان جدید را تعیین کنید .

۱۴ ثابت کنید کـه به ازای هر عدد صحیح نا منفی مانند k ،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}}\sum_{i=1}^{n} i^k=\frac{1}{k+1}.$$

۱۵ تابع f با ضابطهٔ ذیل تعریف شده است.

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\in Q) \\ p\sin\frac{1}{q} & (x=\frac{p}{p},\ q>0, (P,q)=1) \end{cases}$$

(Q مجموعـهٔ اعـدادگویاست) . مطلوبست تعیین نقاط پیوستگـی و نقاط انفصال تابع f .

۱۶ اعـداد حقیقی مفـروض a ، b ، c ، d ، و e چنان‌اند که

$$a+b+c+d+e=8 ,$$
$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16 .$$

ماگزیمم مقدار e چیست ؟

۱۷ عدد طبیعی n را مطلوب نامیم در صورتی که بتوان آن را به صورت $n=a_1+a_2+\dots+a_k$ نوشت ، که در آن a_1 ، a_2 ، ... ، و a_k اعدادی طبیعی‌انـد (نه لزوماً متمایز) به‌طوری که $1/a_1+1/a_2+\dots+1/a_k=1$. بنابرآنکه بدانیم اعداد طبیعی ۳۳ تا ۷۳ اعدادی مطلوب هستند ، ثابت کنید کـه جمیع اعداد طبیعی ناکمتر از ۳۳ نیز چنین‌اند .

حل مسائل

۱ فرض کنیم کـه توابع $f:A\to B$ و $g:B\to A$ چنان باشند که $gof=I_A$ و $fog=I_B$ (I_A و I_B توابع همانی ، بترتیب، بادامنه‌های A و B اند) .دراین‌صورت تابع $f:A\to B$ یك تناظر یك به یك است و $f^{-1}=g$.

حل. برای اثبات اینکه f یك تناظر یك به یك است باید ثابت کنیم که f یك به یك و پوششی است. فرض کنیم که $x_1,x_2\in A$، و $f(x_1)=f(x_2)$. ازاینجا $g(f(x_1))=g(f(x_2))$ ، یا $(gof)(x_1)=(gof)(x_2)$. بنابراین، $I_A(x_1)=I_A(x_2)$. ولی چون I_A تابع همانی است ، $x_1=x_2$. یعنی تابع f یك به‌یك است. اینك ثابت می‌کنیم کـه f پوششی‌است . برای این منظور ، فرض می‌کنیم که y عضو دلخواهی از B باشد . گوئیم $I_B(y)=y$ ، یـا $(fog)(y)=y$. ازاینجا ، $f(g(y))=y$. بنابراین عضوی از A مانند x (که همان g(y) باشد) پیداشد به طوری که $f(x)=y$. یعنی f پوششی است. برای کامل شدن برهان باید ثابت کنیم کـه $f^{-1}=g$.(توجه کنید که وجود f^{-1} از تناظریك به یك بودن f محقق می‌شود.)میدانیم که $g:B\to A$ و $f^{-1}:B\to A$ بنابراین، برای اثبات اینکه $g=f^{-1}$، باید ثابت کنیم که به ازای هر b از B ، $f^{-1}(b)=g(b)$. فرض می‌کنیم کـه $f^{-1}(b)=a$.پس ، $f(a)=b$ (۱) . ازاینجـا ، $g(f(a))=g(b)$ ؛ بنابرایـن ، $(gof)(a)=g(b)$. بالنتیجه ، $I_A(a)=g(b)$ ، یا $a=g(b)$ (۲) . از (۱) و (۲)،معلوم می‌شود که $f(a)=g(b)$.

۲ ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح n ،

$$\int_0^{n\pi} x\,|\sin x|\,dx=n^2\pi.$$

حل. ابتدا فرض می‌کنیم که $n\in N$. گوئیم

$$I=\int_0^{n\pi} x\,|\sin x|\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} x\,|\sin x|\,dx.$$

معلوم است که به ازای هر x از $](k-1)\pi, k\pi[$ ،

$$|\sin x|=(-1)^{k-1}\sin x \qquad (k=1,2,\ldots,n) .$$

بنابراین ،

$$I=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}x\sin x dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}x\sin x dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left[-x\cos x\Big|_{(k-1)\pi}^{k\pi}+\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\cos x dx\right] \quad \text{[طریقهٔ جزء به جزء]}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left[(k-1)\pi\cos(k-1)\pi-k\pi\cos k\pi\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left[(k-1)\pi(-1)^{k-1}-k\pi(-1)^{k}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[(k-1)\pi+k\pi\right]=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\pi$$

$$=\pi\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\pi n^2$$

اینک فرض کنیم که $n\in Z$ ، $n\leqslant 0$. در حالتی که $n=0$ ، تساوی مذکور در حکم مسئله ، به وضوح بر قرار است ؛ درغیر این صورت $-n\in N$ ، و به موجب قسمت قبل داریم

$$\int_{0}^{-n\pi}x|\sin x|dx=(-n)^2\pi .$$

برای اخذ نتیجه مطلوب ،کافی است درانتگرال فوق‌تغییر متغیر $y=-x$ را اعمال کنیم .

۳ ثابت کنید که در هر مثلث ABC ،

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8} .$$

راه حل اول . گوئیم

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{bc}}\ ,\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(P-a)(P-c)}{ac}}\ ,$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(P-a)(P-b)}{ab}} .$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم که

$$\frac{(P-a)(P-b)(P-c)}{abc}\leqslant\frac{1}{8} .$$

از طرفی ،

$$P-a=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{b+c-a}{2}\ ,$$

$$P-b=\frac{a+c-b}{2}\ ,\ P-c=\frac{a+b-c}{2}$$

بنابراین ، باید ثابت کنیم که

$$(*)\qquad \frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{abc}\leqslant 1 .$$

برای اثبات نامساوی اخیر ،گوئیم

$$a^2\geqslant a^2-(b-c)^2 ,$$
$$b^2\geqslant b^2-(c-a)^2 ,$$
$$c^2\geqslant c^2-(c-b)^2 ;$$

از حاصلضرب این نامساویها (باتوجه به اینکه طرف‌دوم هر یك ازآنها مثبت است) ،

$$a^2b^2c^2\geqslant(a+b-c)^2(a+c-b)^2(b+c-a)^2 .$$

بنابراین ، با جذرگیری از طرفین خواهیم داشت

$$abc\geqslant(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) .$$

(ملاحظه کنید که هریك از عوامل عبارت طرف دوم نامساوی فوق مثبت است .) از اینجا ، نامساوی (*) و بالنتیجه حکم مسئله ثابت می‌شود .

راه حل دوم : فرض کنیم که $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=k$.

از اینجا ،

$$k=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{A+B}{2}\ ,$$

یا

$$\cos^2\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}+2k=0 .$$

از اینجا ،

$$\left(\cos\frac{A+B}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}-2k .$$

گوئیم چون طرف اول تساوی فوق نا منفی است ،

$$\frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}-2k\geqslant 0 .$$

از اینجا،

$$k\leqslant\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}\leqslant\frac{1}{8} .$$

❹ فرض‌کنیم‌که r و R بترتیب شعاعهای دوایر محاطی و محیطی مثلث مفروض ABC باشد. ثابت‌کنیدکه $\frac{r}{R} \leqslant \frac{1}{2}$.

راه حل اول . فرض می‌کنیم که S مساحت این مثلث باشد و $P=\frac{a+b+c}{2}$ ، که درآن a ، b ، و c طول اضلاع مثلث‌اند.

گوئیم،

$$\frac{r}{R}=\frac{S}{PR}=\frac{1}{2}\cdot\frac{ab\sin C}{PR}$$

$$=\frac{2R\sin A\sin B\sin C}{R(\sin A+\sin B+\sin C)}.$$

ولی

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$=4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

وبالنتیجه،

$$\frac{r}{R}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

مسئله برمی‌گردد به اثبات اینکه

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}.$$

(مسئلهٔ ۳ را ملاحظه‌کنید).

راه حل دوم . با مفروضات مسئله ، می‌دانیم‌که

$$d^2=R^2-2Rr,$$

که درآن d طول خط‌المرکزین دودایرهٔ محاطی و محیطی است [رجوع‌کنید به شمارهٔ ۱ ، مسئلهٔ ۶]. ازاینجا،

$R^2-2Rr\geqslant 0$ ، یا $\frac{r}{R}\leqslant\frac{1}{2}$.

❺ ثابت‌کنیدکه به ازای هر x

$$\cos(\sin x)>\sin(\cos x).$$

حل . نامساوی اخیررا می‌توان به صورت زیرنوشت،

$$\cos(\sin x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\cos x\right)>0,$$

یا

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sin x-\cos x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sin x+\cos x}{2}\right)>0.$$

بنابراین ، کافی است نامساوی فوق را ثابت کنیم. برای این منظور ، ثابت می‌کنیم‌که هریك‌ازعوامل عبارت‌طرف چپ‌نامساوی مثبت است.

چون

$$|\sin x-\cos x|=\left|\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\sqrt{2}<\frac{\pi}{2},$$

نتیجه می‌شودکه

$$\frac{-\pi}{4}<\frac{\sin x-\cos x}{2}<\frac{\pi}{4},$$

وبالنتیجه،

$$0<\frac{\pi}{4}+\frac{\sin x-\cos x}{2}<\frac{\pi}{2}.$$

ازاینجا ، به ازای هر x ،

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sin x-\cos x}{2}\right)>0.$$

با استدلال مشابهی می‌توان ثابت‌کردکه

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sin x+\cos x}{2}\right)>0.$$

❻ ثابت‌کنیدکه به ازای هر n طبیعی‌که $n>1$ ،

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

راه حل اول . اثبات به استقراء است. بەازای $n=2$ ، نامساوی $2<\frac{9}{4}$ حاصل می‌شودکه به وضوح برقراراست. فرض می‌کنیم‌که $k!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k$. دراین صورت ، به موجب‌فرض استقراء ،

$$(k+1)!=k!(k+1)<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k(k+1).$$

اینك هرگاه ثابت‌کنیم‌که

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^k(k+1)<\left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1},$$

حکم ثابت می‌شود (چرا؟) نامساوی فوق معادل است با

$$2<\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}.$$

ولی این نامساوی به موجب قضیهٔ دوجمله‌ای برقراراست؛ زیرا،

$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}=1+(k+1)\frac{1}{k+1}+\dots>2.$$

راه حل دوم . بـرای اثبات نـامساوی فوق از نامساوی میانگین حسابی وهندسی استفاده می‌کنیم. گوئیم به ازای هـر $n(\geqslant 2)$ عدد مثبت x_1 ، x_2 ، ... ، و x_n

$$(*)\quad \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}\,.$$

اینك فرض می‌کنیم‌که $x_i = i$ $(i=1,2,\dots,n)$. بنابراین،

$$\frac{1+2+\dots+n}{n} > \sqrt[n]{1\,.\,2\dots n}\,.$$

(باید توجه داشت‌که در $(*)$ تساوی فقط وفقط وقتی برقراراست که x_i ها مساوی باشند) ازنامساوی فوق خواهیم داشت

$$\frac{n+1}{2} > \sqrt[n]{n!}$$

راه حل سوم. برای اثبات نامساوی فوق، کافی است نامساوی زیررا ثابت‌کنیم:

$$(n!)^2 < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n} \qquad (n>1)\,.$$

برای این منظور $n!$ را به دوصورت ذیل می‌نویسیم:

$$n! = 1\,.\,2\,\dots\,k\,\dots\,(n-1)\,.\,n$$
$$n! = n\,.\,(n-1)\,\dots\,(n-k+1)\,\dots\,2\,.\,1$$

ازضرب این دورابطه، معلوم می‌شودکه:

$$(n!)^2 = (1\,.\,n).\,2(n-1)\,.\,3(n-2)\ \dots\ k(n-k+1)\ \dots\ 2(n-1).\,(1\,.\,n).$$

به موجب نامساوی بین میانگین (حسابی و هندسی) می‌توان نوشت:

$$\sqrt{k\,.\,(n-k+1)} \leqslant \frac{k+(n-k+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$
$$(k=1,2,3,\dots,n)\,;$$

وتساوی فقط وفقط وقتی برقراراست‌که $k=n-k+1$، یعنی $k=\frac{n+1}{2}$. بنابراین

$$(n!)^2 < \left(\frac{n+1}{2}\right)^2\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\cdots\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\cdots\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}\,.$$

❼ تابع $f: R \longrightarrow R$ با ضابطهٔ ذیل مفروض است.

$$f(x)=\begin{cases} x\left[\frac{1}{x}\right] & (x\neq 0)\,,\\ 1 & (x=0)\,.\end{cases}$$

ثابت‌کنید کـه f در $x=0$ پیوسته است. آیا f در $x=0$ مشتقپذیراست؟

حل. ثابت می‌کنیم کـه $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$. فرض کنیم‌که $x\neq 0$. می‌دانیم‌که

$$\frac{1}{x}-1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{x}.$$

ازاینجا، هرگاه $x>0$ آنگاه $1-x < x\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant 1$، و هـرگـاه $x<0$ آنگـاه $1 \leqslant x\left[\frac{1}{x}\right] < 1-x$.

بنابراین،

$$\left|x\left[\frac{1}{x}\right]-1\right| < |x| \qquad (x\neq 0)\,.$$

اینك فرض‌کنیم‌که ε عدد مثبت دلخواهی باشد، باانتخاب $\delta=\varepsilon$ داریم: به‌ازای هر x که $|x|<\delta$،

$$\left|x\left[\frac{1}{x}\right]-1\right| < \varepsilon\,.$$

یعنی $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

برای وجود مشتق f در $x=0$، باید دروجود حدزیر تحقیق‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\left[\frac{1}{x}\right]-1}{x}\,.$$

به عبارت دیگر، باید وجود حد $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left[\frac{1}{x}\right]-\frac{1}{x}\right)$ مورد بررسی قراردهیم.

گوئیم حد فوق موجود نیست؛ زیرا، هرگاه

$$\lim_{x\to 0}\left(\left[\frac{1}{x}\right]-\frac{1}{x}\right)=l$$

آنگاه با انتخاب $\varepsilon=\frac{1}{4}$، عددی مثبت مانند δ وجود دارد به طوری‌که به ازای هر x که $|x|<\delta$،

$$(*)\quad \left|\left[\frac{1}{x}\right]-\frac{1}{x}-l\right| < \frac{1}{4}\,.$$

اینك عدد طبیعی N را چنان اختیار می‌کنیم‌کـه $N>\frac{1}{\delta}$.

بنابراین، $\frac{1}{N}<\delta$ و همچنین $\frac{1}{N+\frac{1}{2}}<\delta$. بالنتیجه،

با انتخاب $x=\frac{1}{N}$ و $x=\frac{1}{N+\frac{1}{2}}$، بـه مـوجب $(*)$ خواهیم داشت:

$$\left|N-N+\frac{1}{2}-l\right| < \frac{1}{4} \text{ و } |N-N-l| < \frac{1}{4}.$$

یا

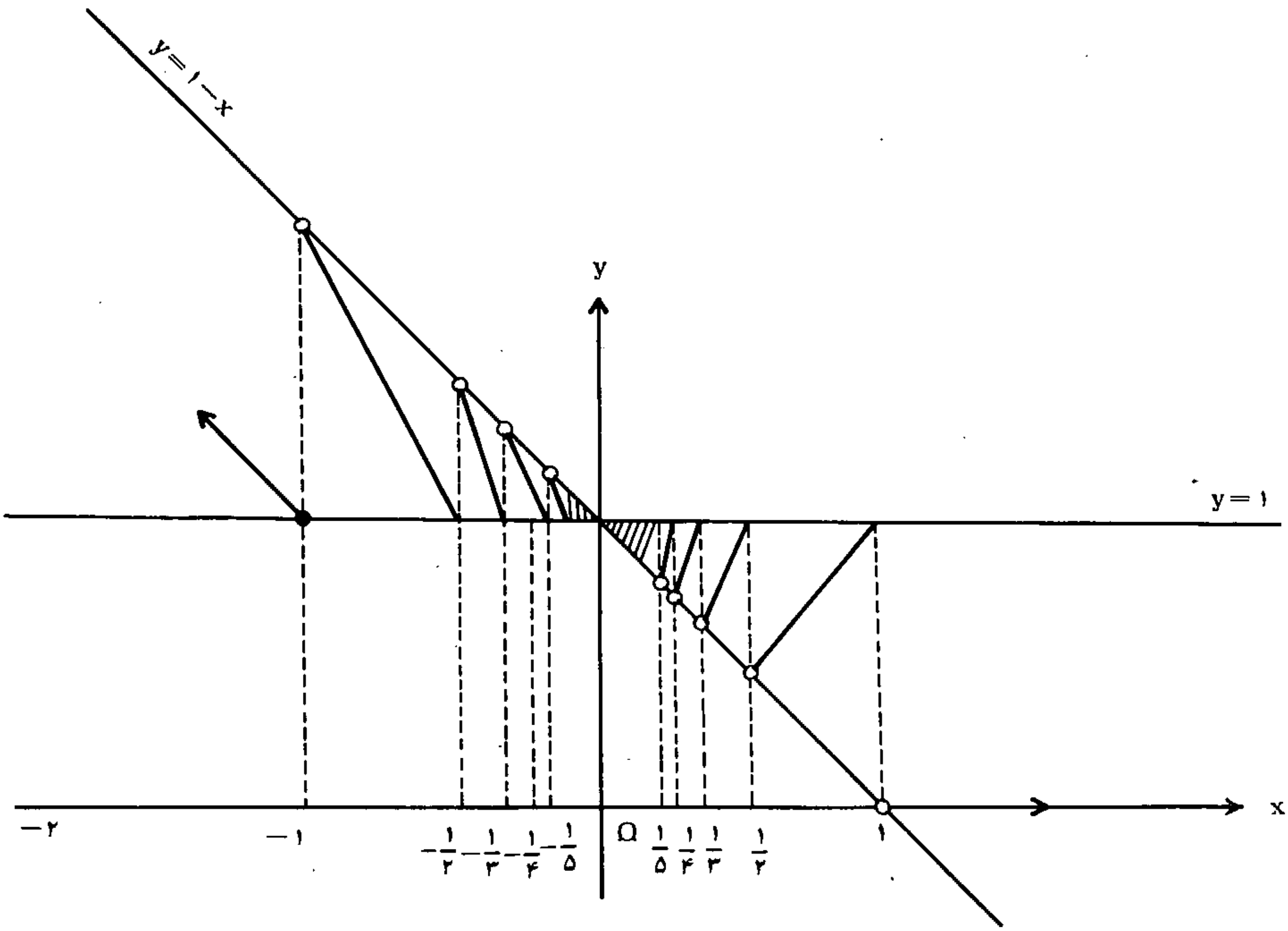
$$\left|\frac{1}{2}-l\right| < \frac{1}{4} \text{ و } |l| < \frac{1}{4}\,.$$

ازاینجا،

$$\frac{1}{2}=\left|l+\frac{1}{2}-l\right| \leqslant \left|\frac{1}{2}-l\right|+|l| < \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\,.$$

که یك تناقض است. بنابراین ، f در $x=0$ مشتقپذیر نیست.

(**تبصره** توجه‌کنید‌که مجموعهٔ نقاطی‌که تابع در آن نقاط پیوسته نیست عبارتست از $\left\{\frac{1}{n} \mid n\in Z-\{0\}\right\}$.)



❽ تابع $f:R\longrightarrow R$ با ضابطهٔ ذیل مفروض است:

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\in Q)\ , \\ 1-x & (x\notin Q). \end{cases}$$

(Q مجموعهٔ اعدادگویاست). ثابت‌کنیدکه f فقط در نقطهٔ $x=\frac{1}{2}$ پیوسته است.

راه حل‌اول. ابتدا ثابت می‌کنیم‌که

$$(*)\quad \lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ .$$

ε را عدد مثبت دلخواهی می‌گیریم. با انتخاب $\delta=\varepsilon$ ، گوئیم هرگاه x عضو دلخواهی از بازهٔ $(\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta)$ باشد،

$$\left| f(x)-\frac{1}{2} \right| < \varepsilon\ ;$$

زیرا، هرگاه x عددی‌گویا باشد، آنگاه نامساوی فوق، به وضوح، برقرار است، درصورتی‌که x عددی گنگ باشد، داریم

$$\left| f(x)-\frac{1}{2} \right| = \left| 1-x-\frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{2}-x \right| < \delta=\varepsilon.$$

بنابراین، (*) ثابت می‌شود؛ یعنی f در $x=\frac{1}{2}$ پیوسته است.

اینك ثابت می‌کنیم‌که f درهر نقطه مانند a که $a\neq\frac{1}{2}$ پیوسته نیست. برای این‌منظور دوحالت تشخیص می‌دهیم:

حالت اول. a عددی‌گنگ است. فرض‌کنیم که f در a

پیوسته باشد (فرض خلف). دراین‌صورت،

$$\lim_{x\to a} f(x)=1-a.$$

ازاینجا، باانتخاب $\varepsilon=\frac{1}{2}$، عددی مثبت مانند δ $(<\frac{1}{4})$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر x از $(a-\delta, a+\delta)$،

$$|f(x)-(1-a)|<\frac{1}{2}.$$

اینك عددگویای $x=a+h$ را چنان می‌گیریم‌که $0<h<\delta$. در این صورت

$$|f(x)-(1-a)|=|(a+h)-(1-a)|=|1-h|<\frac{1}{2}.$$

ازاینجا $h>\frac{1}{2}$؛ که یك تناقض است، زیرا $h<\delta<\frac{1}{4}$.

حالت دوم، a عددی گویا است. فرض کنیم‌که f در a پیوسته باشد (فرض خلف). دراین صورت،

$$\lim_{x\to a} f(x)=a.$$

ازاینجا باانتخاب $\varepsilon=\frac{|1-2a|}{2}$ (ملاحظه کنید که $\varepsilon>0$)، عددی‌مثبت‌مانند δ هست به‌طوری‌که به‌ازای هر x از $(a-\delta,a+\delta)$،

$$|f(x)-a|<\frac{|1-2a|}{2}.$$

اینك عددگویای h راچنان اختیارمی‌کنیم‌که $0<h<\delta$. دراین صورت باتوجه به‌اینکه $a+h\in(a-\delta,a+\delta)\cap Q$، خواهیم داشت،

$$(1)\quad |f(a+h)-a|=|a+h-a|=h<\frac{|1-2a|}{2}.$$

از طرف دیگر، عددگنگ k را چنان اختیار می‌کنیم‌که $0<k<\delta$. دراین صورت چون $a+k$ عددی گنگ و متعلق به بازهٔ $(a-\delta,a+\delta)$ می‌باشد، خواهیم داشت:

$$|f(a+k)-a|=|1-a-k-a|<\frac{|1-2a|}{2}.$$

یا

$$(2)\quad |(1-2a)-k|<\frac{|1-2a|}{2}.$$

بااستفاده از (1) و (2)،

$$|(1-2a)+(h-k)|<\frac{|1-2a|}{2}+\frac{|1-2a|}{2}.$$

از اینجا،

$$|(1-2a)+(h-k)|<|1-2a|.$$

برای استخراج تناقض، دو حالت $a<\frac{1}{2}$ و $a>\frac{1}{2}$ را درنظر می‌گیریم. درصورتی‌که $a<\frac{1}{2}$، اعداد مذکور h و k را چنان می‌گیریم‌که $h>k$. بنابراین با توجه به نامساوی فوق

$$(1-2a)+(h-k)<1-2a.$$

که یك تناقض است. به‌همین قیاس، حالت $a>\frac{1}{2}$ را بررسی‌کنید.

• راه‌حل دوم، طریق دوم اثبات حکم، به‌استناد دوقضیه از آنالیز است‌که ابتدا به‌بیان آنها می‌پردازیم. (باید تذکر داد که راه‌حل اول، گرچه طولانی است ولی مستقیماً با استفاده از تعریف پیوستگی ثابت شده است.)

قضیهٔ ۱. به‌ازای هرعدد حقیقی a دنباله‌ای ازاعدادگویا مانند $\{a_n\}$ و دنباله‌ای از اعداد گنگ مانند $\{b_n\}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=a.$$

قضیه۲. شرط لازم وکافی برای‌آنکه‌تابع $f: E\longrightarrow R$ (که درآن $E\subseteq R$) درنقطهٔ $x=a$ پیوسته باشد آنست‌که به‌ازای هردنباله ازاعضای E مانند $\{x_n\}$ که $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$،

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a).$$

اینك برمی‌گردیم به‌اثبات اینکه تابع f مذکور درصورت مسئله فقط در $x=\frac{1}{2}$ پیوسته‌است. اثبات پیوستگی f در $x=\frac{1}{2}$ مانند راه‌حل اول صورت می‌گیرد. فرض می‌کنیم‌که $a\neq\frac{1}{2}$ و f در a پیوسته باشد (فرض‌خلف). به‌موجب قضیهٔ ۱، دنباله‌هائی‌مانند $\{a_n\}$، از اعدادگویا و $\{b_n\}$، از اعدادگنگ، موجودند‌که

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=a.$$

ازطرف دیگر، مطابق قضیهٔ ۲،

$$(*)\quad \lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty} f(b_n)=f(a).$$

ولی، $f(a_n)=a_n$ و $f(b_n)=1-b_n$. ازاینجا، باتوجه به(*)،

$$f(a)=1-f(a)\ .\ f(a)=a$$

پس، $a=\frac{1}{2}$؛ که خلاف فرض است.

(۶) فرض کنیم‌که،

$$f(x)=x\sin\frac{1}{x}\qquad (x\neq 0).$$

$$g(x)=\begin{cases} x & (x\neq 0).\\ 1 & (x=0).\end{cases}$$

ابتدا ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$. سپس تابع مرکب $g(f(x))$ را درنظر گرفته، نشان دهید که این تابع در $x=0$ دارای حد نیست.

حل. اثبات $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ سهل است. می‌پردازیم به اثبات اینکه $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. فرض کنیم که ε عدد مثبت مفروضی باشد. باانتخاب $\delta=\varepsilon$، گوئیم به ازای هر x که $|x|<\delta$،

$$|f(x)-0|=\left|x\sin\frac{1}{x}\right|$$

$$=|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|<\delta=\varepsilon.$$

یعنی، $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

اینك تابع مرکب $g(f(x))$ را درنظرمی‌گیریم. معلوم است که $g(f(x))=f(x)$ درصورتی که $f(x)\neq 0$، و $g(f(x))=1$ درصورتی که $f(x)=0$. بنابراین،

$$g(f(x))=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \left(x\neq\dfrac{1}{k\pi}\right), \\ 1 & \left(x=\dfrac{1}{k\pi}\right), \end{cases}$$

که درآن k عدد صحیح نا صفر دلخواهی است. ثابت می‌کنیم که تابع فوق در $x=0$ دارای حد نیست. فرض کنیم که چنین نباشد، بنابراین، عددی مانند l وجود دارد که:

$$\lim_{x\to 0} g(f(x))=l.$$

با انتخاب $\varepsilon=\frac{1}{2}$، عددی مثبت مانند δ وجود دارد به طوری که به ازای هر x که $|x|<\delta$،

$$(*)\quad |g(f(x))-l|<\frac{1}{2}.$$

اینك عدد طبیعی فرد k را چنان درنظر می‌گیریم که $\frac{1}{k\pi}<\delta$. معلوم است که دراین صورت $\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}<\delta$.

بنابراین با توجه به $(*)$ خواهیم داشت،

$$\left|\left(g\left(f\left(\frac{1}{k\pi}\right)\right)-l\right|<\frac{1}{2}$$

و

$$\left|g\left(f\left(\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)\right)-l\right|<\frac{1}{2}$$

به عبارت دیگر،

$$|1-l|<\frac{1}{2} \text{ و } \left|-\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}-l\right|<\frac{1}{2}.$$

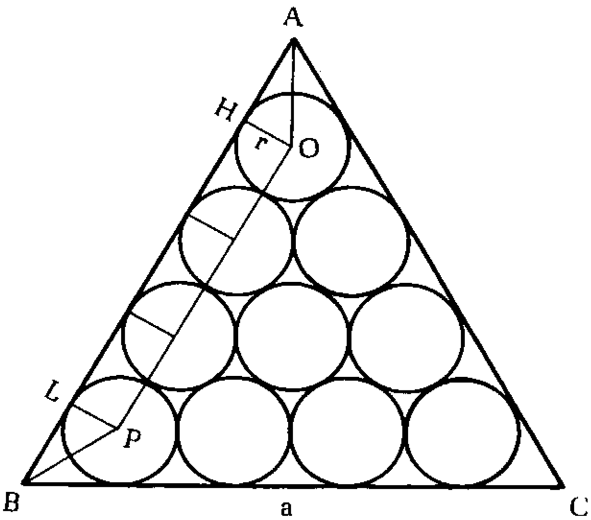
از اینجا،

$$1+\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1;$$

که یك تناقض است.

۱۰ فرض کنیم که k_n تعداد دایره‌هائی باشد که در n سطر واقعند و جملگی به صورتی که در شکل زیر نشان داده شده است، درمثلث متساوی‌الاضلاع مفروضی محاط‌اند. درصورتی که S مساحت این مثلث متساوی‌الاضلاع و S_{k_n} مساحت k_n دایرهٔ مذکور باشد، ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{k_n}}{S}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$



حل. معلوم است که تعداد دایره‌های فوق عبارتست از

$$1+2+3+\dots+n,$$

یعنی $\frac{n(n+1)}{2}$. بنابراین برای تعیین S_{k_n} کافی است مساحت یکی ازاین دایره‌ها را مشخص کنیم. برای این منظور، با توجه به شکل فوق، فرض می‌کنیم که $\overline{AB}=a$ و $\overline{OH}=r$. داریم

$$(*)\quad \overline{AB}=\overline{BL}+\overline{LH}+\overline{HA}.$$

ولی،

$$\overline{BL}=\overline{HA}=r\,cotg\,\frac{\pi}{6},$$

و

$$\overline{LH}=(n-1)(2r).$$

بنابراین به موجب $(*)$

$$a=2r\,cotg\,\frac{\pi}{6}+2r(n-1).$$

ازاینجا ، ·

$$r=\frac{a}{2(\sqrt{3}+n-1)}\,.$$

پس ، مساحت هریك از دایره‌های مذکور برابر می‌شود با $\frac{a^2\pi}{4(n+\sqrt{3}-1)^2}$. بالنتیجه ،

$$(1)\qquad S_{k_n}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{a^2\pi}{4(n+\sqrt{3}-1)^2}$$

ازطرف دیگر

$$(2)\qquad S=\frac{1}{2}a^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\,.$$

از (۱) و (۲) ،

$$\frac{S_{k_n}}{S}=\frac{n(n+1)\pi}{2\sqrt{3}(n+\sqrt{3}-1)^2}\,.$$

به حدگیری نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

۱۱ ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(1\times2^2\times3^3\times\dots\times n^n)^{4/n^2}}=e\,.$$

حل . ابتدا ملاحظه می‌کنید که

$$(n\times n^2\times n^3\times\dots\times n^n)^{4/n^2}\times n^{-2/n}=n^2\,;$$

پس ، بجای حکم مسئله ،کافی است ثابت کنیم که

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\times n^2\times n^3\times\dots\times n^n}{1\times2^2\times3^3\times\dots\times n^n}\right)^{4/n^2}\cdot\frac{1}{n^{2/n}}=e.$$

ولی می‌دانیم که

$$\lim_{n\to\infty}n^{2/n}=1\,.$$

بنابراین ، با فرض

$$P_n=\left(\frac{n\times n^2\times n^3\times\dots\times n^n}{1\times2^2\times3^3\times\dots\times n^n}\right)^{4/n^2}$$

باید ثابت شود که $\lim_{n\to\infty}P_n=e$. ازطرفین رابطهٔ فوق لگاریتم (طبیعی) می‌گیریم:

$$\log P_n=-\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\log\frac{k}{n}=-\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\log\frac{k}{n}\,.$$

ازاینجا ،

$$\lim_{n\to\infty}\log P_n=-4\int_0^1 x\log x\,dx=1\,,$$

بالنتیجه ،

$$\log(\lim_{n\to\infty}P_n)=1\,,$$

ونتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

۱۲ ثابت کنید که تابع

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq0)\,,\\ 0 & (x=0)\,,\end{cases}$$

درهمهٔ نقاط مشتق‌پذیر است. بعلاوه ، نشان دهید که تابع $f'(x)$ در نقطهٔ $x=0$ دارای مشتق نیست.

حل . وجود مشتق $f(x)$ در نقاط ناصفر بدیهی است. بعلاوه ، معلوم است که:

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\qquad(x\neq0).$$

برای بررسی مشتق تابع $f(x)$ در $x=0$ ، ملاحظه می‌کنیم که

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=x\sin\frac{1}{x}\qquad(x\neq0)\,.$$

گوئیم چون $\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$ ، خواهیم‌داشت $f'(0)=0$.

بنابراین،

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & (x\neq0)\\ 0 & (x=0).\end{cases}$$

برای اثبات عدم وجود مشتق تابع $f'(x)$ در نقطهٔ $x=0$ ، ملاحظه می‌کنیم که

$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=2\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\ (x\neq0)$$

ولی تابع $2\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ در $x=0$ دارای حد نیست (چرا ؟) بنابراین تابع $f'(x)$ در $x=0$ مشتق ندارد.

۱۳ فرض کنیم که n عدد طبیعی دلخواهی باشد. ثابت کنید کــه هرعدد طبیعی مانند k را که $k<n!$ ، می‌توان به صورت حاصلجمع تعدادی ازمقسوم‌علیه‌های متمایز $n!$ نوشت ؛ مشروط براین‌که این تعداد کمتراز n باشد.

حل . بدیهی است که حکم به ازای $n=2$ برقراراست. اینك فرض می‌کنیم که حکم به ازای هرعدد طبیعی n برقرار باشد ، وعدد طبیعی k از $(n+1)!$ کوچکتر باشد. به موجب قضیهٔ تقسیم ، $k=(n+1)q+r$ ؛ کــه در آن q و r اعداد صحیح نامنفی‌اند و $0\leqslant r<n+1$. معلوم است که $q<n!$ (چـرا ؟) بنابراین به موجب فرض استقراء q را می‌توان به صورت ذیل نوشت:

$$q=d_1+d_2+\dots+d_m,$$

که درآن $m<n$ و $d_i|n!$ و $d_i\neq d_j$ (هرگاه $i\neq j$) ،

بنابراین ،

$$k=(n+1)q+r=(n+1)d_1+(n+1)d_2+\dots+(n+1)d_m+r.$$

اینك گوئیم، $(n+1)d_i \mid (n+1)!$ و $r \mid (n+1)!$، پس k به صورت حاصلجمع $m+1$ مقسوم‌علیه $(n+1)!$ است. درصورتی که $i \neq j$، $(n+1)d_i \neq (n+1)d_j$؛ بنابراین، m مقسوم‌علیه $(n+1)d_i$ متمایزند. همچنین، از $r < n+1$ نتیجه می‌شود که $r < (n+1)d_i$ (به ازای $i=1,2,\dots,m$). بالنتیجه حکم به استقراء ثابت می‌شود.

۱۲ (مسئله دروغگوها) A می‌گوید که B به او گفته است که C دروغ می‌گوید. اگر احتمال راست گویی هریك از آنها p باشد، احتمال اینکه C واقعاً دروغ گفته باشد، چقدر است؟

حل: به خاطرسهولت بحث فرض می‌کنیم که اگـر قطعه کاغذی به C داده شود وی با احتمال p یك علامت باضافـه «+» و با احتمال $q=1-p$ یـك علامت منها «−» بر آن می‌نویسد و آن را به B می‌دهد. B با احتمال p علامت را بدون تغییربه A می‌دهد (یعنی راست می‌گوید). با احتمال q آن را تغییر مـی‌دهد (− را به + یا + را بـه − تبدیل می‌کند) وآن را به A می‌دهد و A هم نظیر B عمل‌می‌کند و کاغذ را به ما می‌دهد. احتمال مطلوب عبارت است از اینکه با چه احتمالی علامت − که از A دریافت کرده‌ایم دربدو امر هم − بوده است. به عبارت دیگر هرگاه

$X=$ علامت نهایی «−» است

$Y=$ علامت اولیه «−» است

می‌خواهیم $P(Y|X)$ را محاسبه کنیم. داریم

$$P(Y|X)=\frac{P(Y\cap X)}{P(X)}$$

اما

$$(1)\quad P(Y\cap X)=P\{(-,+,-),\ (-,-,-)\}$$

[$(-,+,-)$ به این معنی است که C دروغ گفته، B دروغ گفته، و A هم دروغ گفته است و علامت $(-,-,-)$ هم معنی مشابهی دارد.]

ولذا

$$P(Y\cap X)=q^3+pq^2$$

همچنین

$$(2)\quad P(X)=P\{(+,+,-),\ (-,+,-),\ (+,-,-),\ (-,-,-)\}$$
$$=p^2q+q^3+p^2q+qp^2$$
$$=3p^2q+q^3$$

ولذا

$$P(Y|X)=\frac{q^3+pq^2}{3p^2q+q^3}=\frac{q^2+p^2}{3pq+q^2}$$

تعمیم مسئله به n شخص کاملاً ساده است. از رابطهٔ (1) معلوم می‌شودکـه «−» اولیه موقعی به‌صورت − دریافت‌می‌شود که تعداد تغییرات داده شده (از − به + یا از + به −) زوج باشد یعنی از $n-1$ نفرغیرازاولین‌کس‌تعداد دروغگویان زوج باشد. یعنی دراین حالت

$$P(Y|X)=q\left[\binom{n-1}{0}p^0q^{n-1}+\binom{n-2}{2}p^2q^{n-2}+\dots\right]$$

(ازتوزیع‌دوجمله‌ای استفاده‌کنید). ازرابطهٔ (2) هم معلوم می‌شود که برای آنکه یك علامت − درآخرش داشته باشیم باید تعداد دروغگویان فرد باشد. بنابراین

$$P(X)=\binom{n}{1}p^1q^{n-1}+\binom{n}{3}p^3q^{n-3}+\dots$$

اما ازبسط دوجمله‌ای نیوتن داریم

$$1=(p+q)^n=\binom{n}{0}p^0q^n+\binom{n}{1}p^1q^{n-1}+\dots$$

$$(p-q)^n=\binom{n}{0}p^0q^n-\binom{n}{1}p^1q^{n-1}+\dots$$

ازجمع این دورابطه داریم

$$1+(p-q)^n=2\binom{n}{0}q^n+2\binom{n}{2}p^2q^{n-2}+\dots$$

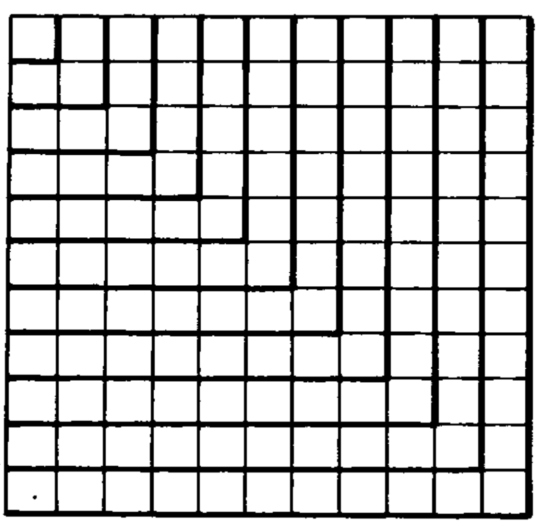
وازتفریق این دوداریم

$$1-(p-q)^n=2\binom{n}{1}pq^{n-1}+2\binom{n}{3}p^3q^{n-3}+\dots$$

درنتیجه

$$P(Y|X)=q\,\frac{1+(p-q)^{n-1}}{1-(p-q)^n}$$

●



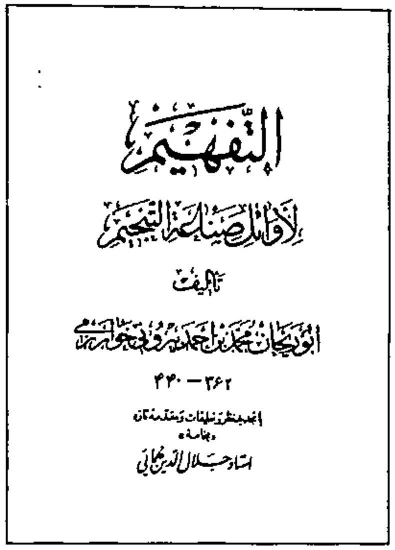
n

n

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

چند تعریف ریاضی از ابوریحان بیرونی

تنظیم: سید محمدکاظم نائینی


التفهیم
لاوائل صناعة التنجیم
تألیف
ابوریحان محمد بن احمد بیرونی خوارزمی
۳۶۲ — ۴۴۰
با تجدید نظر و تعلیقات و مقدمهٔ تازه
بخامهٔ
استاد جلال الدین همائی

اشاره. التفهیم [کتاب التفهیم لاوائل صناعة التنجیم]، کتابی در مقدمات هندسه و حساب و هیئت و نجوم، به طریق سؤال و جواب از **ابوریحان بیرونی**، در سال ۴۲۰ هـ ق (و به قولی ۴۲۱) تألیف شده است. ابوریحان این کتاب را به دو زبان فارسی و عربی نوشته، به این طریق که آنرا نخست به فارسی یا عربی نوشته است، و سپس به زبان دیگر ترجمه کرده، و این کار به طوری استادانه انجام گرفته که تمیز اصل از ترجمه و اینکه نخست به کدام زبان نوشته شده آسان نیست. متن فارسی آن یکی از آثار بسیار مهم زبان فارسی است (چاپ تهران، ۱۳۱۶–۱۸ هـ ش). از متن عربی نسخه‌های معدودی با وسائل چاپ دستی در لندن منتشر گردیده. [ماخوذ از دایرة المعارف فارسی، غلامحسین مصاحب].

چاپ اول این کتاب (۱۳۱۶–۱۳۱۸) به کوشش استاد علامه جلال الدین همائی در چاپخانهٔ مجلس به طبع رسید و مورد توجه دانشمندان و علاقه‌مندان به این گونه آثار گرانبها قرار گرفت و پس از مدتی نایاب شد. چاپ دوم آن با تجدید نظر و تعلیقات استاد، پس از مقابله با متن عربی کتاب، بعد از شانزده ماه به وسیله انجمن آثار ملی طبع و نشر گردید. چاپ سوم آن اخیراً (۱۳۶۲) توسط انتشارات بابک منتشر شده است.

(مجلهٔ رشد آموزش ریاضی)

یکی چیست :

آنست که یکانی بر او افتد و بدونام زده شود.
اما یکی حقیقی پاره نشود،
و منجمان این یکی را که درجه است، اندر صناعت خویش بشست پاره کردند، باریکتر از درجه‌ها و آن را دقیقه نام کردند. عادت مردمان بر این رفت تا درم را بشست پشیز کردند و گریب (جریب) ها را بشست پاره عشیر و آنگاه هر دقیقه را بشست ثانیه کردند یعنی دوم بار، ثانیه را بشست ثالثه و ثالثه را بشست رابعه و بر این قیاس . . . مگر که شمارگر نزدیك یکی بیینند بمراد خویش.

عدد چیست :

جمله‌ایست از یك‌ها گردآمده .
عددهای طبیعی کدامند ؟
آنند که ابتدا از یکی کنند و زیادت یك یك همی کنند چون ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و نیز آن را عددهای متوالی خوانند ای یك از پس دیگر .

عدد اول کدامست :

این آنست که او را جز یکی نشمرد و او را هیچ پاره نبود مگر آنک همنام او بود چون پنج که هیچ عدد اورا نشمرد و یکی او را پنج بار بشمرد و ... هفت نیز همچنانست .

شمار چیست :

بکار بردن عدد است و خاصیتهای او اندر بیرون آوردن چیزها اما بجمله کردن و اما بپراکندن یعنی بفزودن یا بکاستن.

ضرب چیست :

عدد را چند بار عدد دیگر کردن است و نموده او پنج اندر هفت . خواهی پنج را هفت بار کن تا سی و پنج گردد و گر خواهی هفت را پنج بار کن تا نیز سی و پنج گردد ، زیرا که معنی او آنست که پنج هفت بار یا هفت پنج بار.

قسمت چیست :

قسمت بیرون آوردن بهر یکی است از آن چیزها که قسمت همی

کنی و نمودهٔ او آنست‌که سی وپنج را خواهی‌که بر هفت‌ببخشی. آن را درم نام‌کن و این را مردم و حصت مردی‌را از آن پنج‌درم باشد و این را قسم‌خوانند و نیز جزوخوانند و آن‌را که‌همی‌بخشی مقسوم خوانند و آنك بر او بخشی مقسوم‌علیه .

منطق و اصم کدامند :

منطـق آنست‌کـه حقیقت او بـزبـان تـوان گفتن ، و او را منطوق به نیزخوانند و منطق ومفتوح یعنی‌گشاده همچون سه نه‌را و چهار شانزده را و اما اصم‌آنست که هرگز حقیقت او به زبان درنیاید چون جذر ده‌که هرگز عددی نتوان یافتن‌که او را اندر مثل خویش زنی ده‌آید و اصم‌کر بود زیراکه جواب ندهدجوینده را تا نیابدش مگر بتقریب و نزدیك شدن با او بس.

صفر :

و گـر صفر بایـد نبشتن بجـای فارغ از عـدد[1] زبر دایـرهٔ صفر خطی مماس کشیدن ، تا فرق بود میان او و میان ه فاما بمیان رقمهای هندوان این خط زیرصفر نبایدکشیدن که آنجا ه نیست .

جبر و مقابله چی باشد :

چون چیزهائـی باشند از گونه‌هـای مختلف به مقدار برابر با یکدیگرباشند همچنان‌باشندکه چون پلهٔ ترازو، زبانه‌ترازو راست شده، و عمود او راست‌ایستاده ، پیدا است که اگر از یك پلهٔ ترازو چیزی برداریم ازدیگر پله‌هم چندان بر بایـد داشتن باندازه تا عمود راست بماند.
اکنون چـون بـدو سو چیزهائـی بحاصل شود بانـدازه یکـ با دیگر برابر و بیك سوی کمی باشدآن‌کمی را تمام‌کنیم‌بدیگر سو همچندان بیفزائیم و این را جبر خوانند .
امـا مقابله‌آنست‌کـه بهر دو سو نگریـسم ، اگر آنجا چیزهـا بود از یك گونه‌کمترین بفکنیم و از آنك بیشتر است همچندان نیز بفکنیم[2].

هندسه چیست :

دانستن اندازه‌ها و چندی یك ازدیگر و خاصیت‌صورتهاو شکل‌ها که اندر جسم موجود است .

جسم چیست :

آن چیز استکـه یافته میشود ببسودن و قائم بـود بتن خویش و جایگاه خویش پرکرده دارد و چیز دیگر از آنك مانده او بود با وی اندر جایگاه او نتوان بودن .

بعدها چه چیزاند :

بعدهـای جایگاه سه گونه‌انـد یکـی درازا و دیگـر پهنا و سه ژرفا و چنان نیست کـه نام درازا بر بعدی اوفتد و بر دیگران نتواند اوفتادن . عادت مردمان چنان‌رفته است‌که درازترین بعدی را طول نام‌کنندای درازا وآنکـ از اوکمتر است او را عرض نام‌کنندای پهنا و سه دیگر را عمق نام‌کنندای ژرفا و اگر بلندی بود سمك‌گویندای بالا[3].

سطح چیست :

جسم نا چاره بی‌نهایت نبود به همه سوها و نهایت او سطح است و نیز او را بسیط گویند یعنی‌گستریده زیراکه سطح‌برجسم‌گسترده است .

خط چیست :

اگـر بسیط را نهـایت باشد آن نهـایت او ناچاره خطی بـاشد و آن خط طولی‌باشد بی‌عرض و به بعد یکی‌کمتر باشد از بعدهای سطح و صورت بستن این خط آسان شود بنگریستن از بـرون شیشه‌کدر وآب در روغن‌کرده باشند و نیز آن خط‌که میان‌آفتاب و سایه بود .

نقطه چیست :

چـون خط را نهایت بـاشد نهایت او لفظ بـود و نقطه کمتر از خط باشد به یك بعد و خط را جز طول نیست و بدانك نقطه را نه طول است و نه عرض و نه عمق و او نهایت همه نهایتهاست و از بهر این او را جزو نیست و صورتش بندد از محسوس بسر سوزن تیز و هر یك از سطح وخط ونقطه موجودند بجسم اما جدا ازجسم ایشان را وجود نیست مگر بوهم‌بس .

مأخوذ ازکتاب «التفهیم»

---

(۱) بجای خالی از عدد (صفر) پیشینیان در ارقام نجومی دائره کوچکی رسم‌کرده بالای آن خطی مماس‌کشیده‌اند (Ō) اما در بین ارقام هندسی فقط دائره خرد ○ رسم میشود .

(۲) افکندن استثناء و تکمیل از دوطرف معادله و افزودن‌مانند آن را در طرف دیگر جبر گویند از ماده جبران ، اسقاط مشترك را از دو طرف‌معادله مقابله خوانند .

(۳) لفظ سمك در هندسه مجسمه‌گاهی بجای‌عمق (ارتفاع) بکارمی‌رود و شکل مجسم را تعریف می‌کنند بـه چیزی‌کـه دارای طول و عرض و سمك باشد تفاوت سمك با عمق به اعتبار است زیرا امتداد جسمانی را اگـر از بالا بـه پائین اعتبارکنند عمق و اگر از پائین به بالا اعتبار کنند ، سمك نامیده میشود .
لفظ سمك‌گاهی مترادف مطلق بعد بکار رفته است و بعدهای‌سه‌گانه را خاصه چون جسم دارای سطوح متمایله باشد اسماك ثلاثه خوانند .

شگفتیهای اعداد

در شمارهٔ گذشته روابط شگفت‌انگیزی بین اعداد طبیعی آوردیم ، بسیاری از این روابط از قدیم الایام مکشوف و زیبائی خاص آنها مایهٔ حیرت متفکرین بوده است . بعضی از این گونه روابط بین اعداد ، توجیهشان ساده و برخی دشوار و به وسیلهٔ مباحث پیشرفتهٔ تئوری اعداد است . در اینجا ، به وسیلهٔ دستور دو جمله‌ای به‌کشف و توجیه چند شگفتانهٔ حسابی می‌پردازیم .

می‌دانیم که $(p+r)^2-(p-r)^2=4pr$.

از اینجا ،
$$\sum_{r=1}^{n}(p+r)^2=\sum_{r=1}^{n}(p-r)^2+2pn(n+1).$$

با فرض $p=2n(n+1)$ ، خواهیم داشت :
$$\sum_{r=1}^{n}(p+r)^2=\sum_{r=0}^{n}(p-r)^2,$$

یا
$$\sum_{r=0}^{n}[2n(n+1)-r]^2=\sum_{r=1}^{n}[2n(n+1)+r]^2.$$

به ازای $n=1,2,3,4,5$ ، بترتیب ، روابط زیر را بدست می‌آوریم :

$$3^2+4^2=5^2,$$
$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2,$$
$$21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2,$$
$$36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2,$$
$$55^2+56^2+57^2+58^2+59^2+60^2=61^2+62^2+63^2+64^2+65^2.$$

با ارقام ۱ تا ۹، ۱۰۰ بسازید

یك معمای ریاضی.

از مسائل معمائی جالب که شهرتی در بین این گونه مسائل دارد ، قرار دادن علائم ریاضی در هر جای دلخواه بین اعداد از ۱ تا ۹ است به‌طوری‌که عبارت حاصل ۱۰۰ شود. صدها جواب به این مسئله داده شده است ؛ شاید ساده‌ترین آنها

$$1+2+3+4+5+6+7+(8\times 9)=100$$

باشد. در صورتی‌که علائم ریاضی را به + و − محدود کنیم مسئله مشکلتر می‌شود . دراین حالت چند جواب به صورت زیرانند

$$1+2+34-5+67-8+9=100,$$
$$12+3-4+5+67+8+9=100,$$
$$123-4-5-6-7+8-9=100,$$
$$123+45-67+8-9=100,$$
$$123-45-67+89=100.$$

آیا جوابهای دیگری می‌توان برای این مسئله بدست آورد ؟

نتیجه تکرار یك عمل و عدد ۶۱۷۴

یك عدد چهار رقمی دلخواه را ، که حداقل دو رقم آن متمایز است ، در نظر بگیرید . تفاضل بزرگترین و کوچکترین عددی را که با ارقام این عدد می‌توان ساخت ، بدست آورده و با عدد حاصل نیز همان عمل را انجام دهید . اگر این کار را تکرار کنید ، حد اکثر پس از ۷ بار به‌عدد ۶۱۷۴ خواهید رسید. مثلاً عدد ۵۴۶۰ را اختیار می‌کنیم . بزرگترین و کوچکترین عددی را که با ارقام آن می‌توان ساخت ، عبارتند از ۶۵۴۰ و ۰۴۵۶ که تفاضل آنها چنین است :

$$6540-0456=6094.$$

این عمل را تکرار می‌کنیم :

$$9640-0469=9171,$$
$$9711-1179=8532,$$
$$8532-2358=6174.$$

همانگونه که ملاحظه می‌شود ، پس از چهار مرحله به‌عدد ۶۱۷۴ رسیدیم . در صورتی‌که با خود این عدد نیز عمل فوق را انجام دهیم ، خواهیم داشت :

$$7641-1467=6174.$$

```
* * * * ۷ *   |   * * ۷ * * * * * * *
-----------   |   * * * * * *
* * ۷ * *         -----------
                  * * * * * ۷ *
                  * * * * * * *
                  -------------
                    * ۷ * * * *
                    * ۷ * * * *
                  -------------
                    * * * * * * *
                    * * * * ۷ * *
                    -------------
                      * * * * * *
                      * * * * * *
```

مسئلهٔ

«هفت هفت» بریك[1]

این مسئلهٔ شگفت انگیز ، که حل آن مثالی بارز از قدرت حساب ابتدائی است ، جالبترین نمونهٔ مسائلی است که در آنها ارقامی از مراحل اعمالی که بر اعدادی انجام یافته‌است می‌دهند ، و آن اعداد را می‌طلبند . مسئله از یك معلم ریاضی انگلیسی به نام **بریك** است ، و نخستین بار در ۱۹۰۶ در نشریهٔ جهان مدرسه انتشاریافته . صورت مسئله اینست :

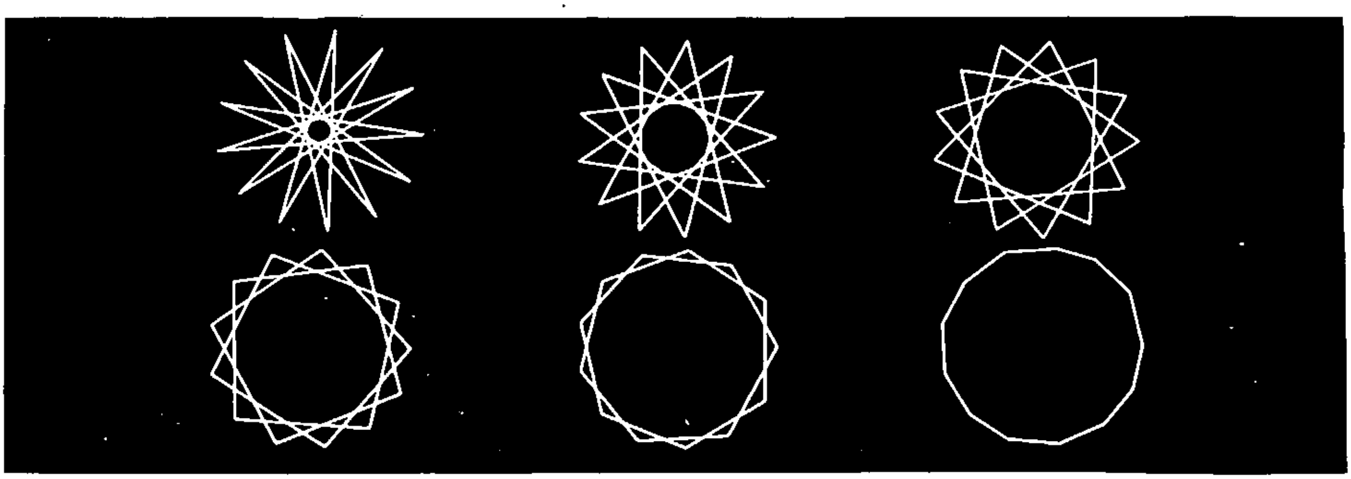
«در تقسیم بی‌باقیماندهٔ ذیل ستاره‌ها نمایش ارقامی (متمایز یانه) هستند . مقسوم، مقسوم علیه ، و خارج قسمت را تعیین کنید .»

(بطورکلی ، در این‌گونه مسائل ، ستاره‌ها نمایش ارقام متساوی نیستند . بعلاوه بر طبق روش عادی عدد نویسی ، اولین ستارهٔ سمت چپ هر عدد نمایش رقمی نا صفر است .)

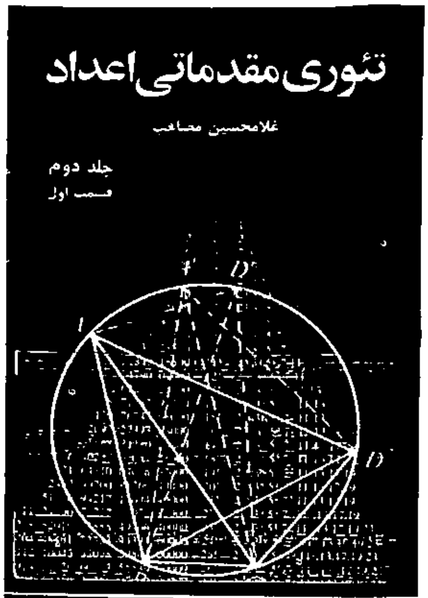
(۱) E. H. Berwick

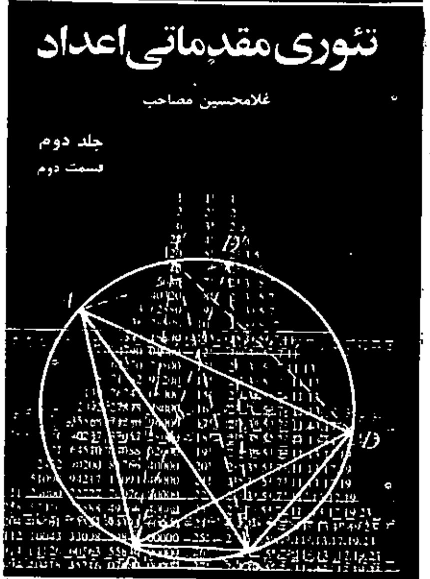
از کتاب
«تئوری مقدماتی اعداد»
جلد اول ، قسمت I تألیف
دکتر غلامحسین مصاحب

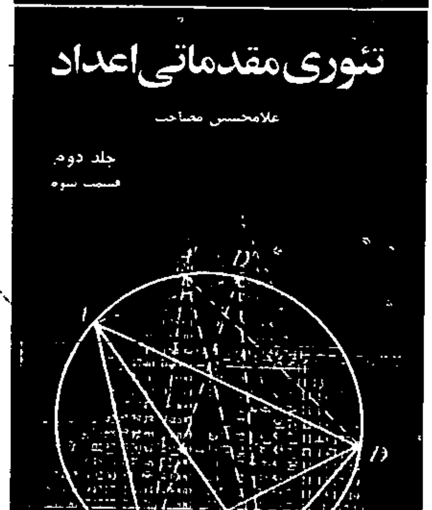
انواع سیزده ضلعی منتظم



• عدهٔ کثیرالاضلاعهای منتظم m ضلعی (اعم از محدب و مقعر) مساوی است با $\varphi(m)/2$. ($\varphi(m)$ یعنی عدهٔ اعداد طبیعی کوچکتر از m و متباین با آن).







بهترین کتاب سال

(دههٔ فجر ۱۳۶۲)
در زمینهٔ ریاضی

توضیح . کتاب تئوری مقدماتی اعداد (جلد دوم) تألیف مرحوم دکتر غلامحسین مصاحب از انتشارات سروش ، به عنوان بهترین کتاب سال (دههٔ فجر ۱۳۶۲) در زمینهٔ ریاضی انتخاب گردید. بهترین کتب درموضوعات مختلف، به وسیلهٔ وزارت ارشاد اسلامی، به منظور تقدیر و حمایت ازمؤلفین ، مترجمین ، و مصححین بر جستهٔ کشور برای اولین بار در دههٔ فجر ۱۳۶۲ صورت گرفته است .

در اینجا ، بدین مناسبت ، به معرفی و بررسی این کتاب (جلد اول و دوم) می پردازیم .

تئوری مقدماتی اعداد (دو جلد) ، تألیف غلامحسین مصاحب؛ جلد اول (در دو قسمت) ، از انتشارات کتابفروشی دهخدا، تهران ۱۳۵۵ ، در ۱۴۳۶ صفحه ؛

جلد دوم (در سه قسمت)، از انتشارات سروش، تهران ۱۳۵۸، در ۱۸۴۳ صفحه .

تئوری مقدماتی اعداد باید یکی از بهترین موضوعها برای تعلیم اولیهٔ ریاضیات باشد . چندان اطلاع قبلی نمی‌خواهد ، موضوعش ملموس و مأنوس است ؛ طریقه‌های استدلال که بکار می‌گیرد ساده ، کلی ، و تعدادشان کم است ؛ و از لحاظ تحریک کنجکاوی طبیعی آدمی در علوم ریاضی مانند ندارد . یک ماه تعلیم فهیمانه در تئوری اعداد دوبار آموزنده‌تر ، دوبار مفیدتر ، و حد اقل ده بار سرگرم‌کننده تر از همان مدت تعلیم « حسابان برای مهندسین » می باشد . ـــ هالدی

نقل از مقدمهٔ کتاب (جلد اول)

مؤلف کتاب در دیباچهٔ (جلد اول) اظهار می‌دارد که «کتاب حاضر جلد اول دوره‌ای است در سه مجلد در تئوری اعداد ، ...». متأسفانه با درگذشت مؤلف دانشمند کتاب در مهر ماه ۱۳۵۸ ، جلد سوم این کتاب که یادداشتهای آن نیز تنظیم شده بود ، به‌منصهٔ ظهور نرسید و تنها دو جلد این اثر گرانبها تقدیم مشتاقان تئوری اعداد و طالبان دانش ریاضی گردید . هدف مرحوم مصاحب از تألیف این دوره ، تدوین دایرةالمعارف گونهٔ مختصری در تئوری مقدماتی اعداد بوده است که از هر حیث کـــامل و خودکفا باشد. بنا به اظهار ایشـــــان در مقدمهٔ کتاب (جلد اول) «. . . جنبهٔ دایرةالمعارفی آن شاید گرهگشای بعضی از مسائل و مشکلاتی باشد که ممکن است خواستاران تئوری اعداد با آنها مواجه شوند.» . مؤلف به دلیل محدود بودن منابع و مآخذ علمی معتبر بـه زبان فارسی کتابی جامع و خودآموز با ضمائم و ملحقاتی، که مورد نیاز خوانندگان واقع خواهد شد ، پدید آورده است ؛ و آن را به صورتی تألیف کرده که خوانندهٔ مأنوس با ریاضیات ، بدون نیاز به معلم بتواند آن را بیاموزد .

جلد اول کتاب مشتمل بر یک مقاله در دو فصل (فصول ۰ و ۱) و ضمائم و ملحقات است. فصل ۰ ، در « مقدمات عمومی » است که در آن زبان بیان مطالب کتاب تثبیت شده است. فصل ۱ ، در بارهٔ « سیری در حساب مقدماتی » است که درضمن آن مطالب اساسی حساب مقدماتی از قبیل طرح استدلالی چهار عمل اصلی، طرح منظم و مستدل بعضی از روشهای اساسی تئوری اعداد، نظیر اصل حجره‌ها، اصل نزول نامتناهی ،چگونگی شمردن و بعضی از روشهای آن ، معادلات سیاله و غیره مورد بررسی قرار گرفته است. ضمائم این مجلد شامل مباحث ذیل است :

آشنائی با جبر نوین (نظری وسیع‌تر به علم حساب) ، جبر بسجمله‌ها، محاط کردن هفده ضلعی منتظم در دایره، سلسله‌های صحیح صوری ، استطراد در تئوری اعداد ، حساب تفاضلات متناهی ترکیبیات، و تأسیس دستگاه اعداد طبیعی بر اساس اصول موضوعهٔ پئانو و تعریفات استقرائی .

الحاق این ضمـائم به کتاب حـاکی از ایـن واقعیت است که تئوری اعداد حتی در سطح مقدماتی از رشته‌های گوناگون ریاضیات استفاده می‌کند .

مجلد اخیر شامل بیش از ۵۵۰ مثال و ۱۹۰۰ تمرین است که با در نظر گرفتن و سنجیدن همهٔ جوانب انتخاب شده‌اند. مثالها تقریباً به تفصیل حل شده‌اند و منظور این بوده است کـه راهنمای متعلمین در حل تمرینات باشند .

ملحقات این مجلد عبارتند از زندگینامهٔ بعضی از ریاضیدانها و دو فرهنگ اصطلاحات انگلیسی به فارسی و فارسی به انگلیسی. در زندگینامه‌ها علاوه بر اینکه به کارهـای علمی اشخاص اشاره شده ، از سرگذشت و احوال آنها نیز سخن به میان آمده است و بنا بر عقیدهٔ مؤلف ، این بـدان جهت بوده کـه تأمل در زندگی دانشمندان بزرگ خود درسی است برای طالبان علم . زندگینامهٔ مذکور اثر تحقیقی دقیقی است که حاکی از اطلاعات وسیع مؤلف ، و تسلط او بر تاریخ ریاضی است .

اصطلاحات کتاب ، دردو فرهنگ انگلیسی به فارسی و فارسی به انگلیسی درمجلد اول آمده است ، و درمجلد دوم چیزی درج نشده و مؤلف اظهار امیدواری نموده که درمجلد سوم فرهنگی نسبةً جامع‌تر عرضه کند. مؤلف کتاب کـه در وضع اصطلاحات ریاضی از پیشقدمان و صاحبنظران بوده ، اصطلاحات فارسی مناسب و دقیقی به‌جای اصطلاحات خارجی انتخاب نموده، ودراین کار دشوار موفق بوده است. (برای وضع اصطلاحات ، و نظر مؤلف دربارهٔ آن ، به کتاب آنالیز ریاضی وی جلد اول، مقدمهٔ کتاب ، رجوع کنید.)

جلد دوم کتاب گذشته از ملحقات ، به دو بخش تقسیم شده است : بخش اول مشتمل بر یک مقاله (فصول ۲ـ۱۹) است و بخش دوم از یک «مقالهٔ الحاقی» کـه یک دورهٔ مختصر در تئوری اعداد می‌باشد ، تشکیل شده است. در ۱۸ فصل بخش اول مباحث ذیل بترتیب مورد بحث قرار گرفته‌اند:

مقدمات فصـــــول آتیه ، تأسیس تئوری اعداد ، مقسوم‌علیه‌ها و قابلیت تقسیم ، اعداد منطق و اصم ، تابع جزء صحیح و توابع وابسته ، مباحثی در شمردن ، اصول همنهشتیهای عددی ، بعضی اعداد مشهور، توابع حسابی ، سیری در اعداد اول (توزیع اعداد اول) ، کسور مسلسل ، ضمائم مقاله سوم ، کلیات درمعادلات سیاله ، معادلات سیالهٔ خطی ، معادلهٔ فیثاغورس ، معادلهٔ پل ، معادلات سیالهٔ مختلف.

این بخش حاوی مسائل مهم تاریخی درباب تئوری اعداد است که هریک از آنها با ملاحظات تاریخی مورد بحث وبررسی قرار گرفته‌اند. ضمناً بخش حاضر مشتمل بر ۵۰۰ مثال و مسئلهٔ حل شده است و ۱۵۰۰ تمرین در آن آمده است.

مقالهٔ الحاقی یک دورهٔ فشرده ومختصر تئوری مقدماتی اعداد است که مؤلف آن را برای بعضی از دوره‌های ریاضیات در سطح لیسانس ، به‌صورت مستقل از سایر فصول کتاب (مگر در بعضی از موارد استثنائی) ، تدوین کـرده است. به این مقالهٔ الحاقی ضمیمه‌ای منضم است که جواب یا راهنمای حل مسائل منتخب می‌باشد.

ملحقات مجلد دوم عبارتند ازجداول عددی و زندگینامه‌ها. زندگینامه‌ها در مورد کسانی است که در مجلد اول به آنان اشاره نشده است (درمورد اشخاصی که زندگینامهٔ آنان درمجلد اول آمده ، به نام وتاریخ تولد ووفات یا حدود دورهٔ زندگی آنان اکتفا شده است).

کتاب با انشائی روان ومتین وبا سبک خاصی کـه مختص استاد بوده ، به رشتهٔ تحریر درآمده و در آن (به قول مؤلف) از انشاء تلگرافی پرهیز شده است : زبان آن طبیعی ، رسا، وگویاست، بطوری که خواننده بی هیچ مشکلی موضوع مورد بحث را درست وبه وضوح درمی‌یابد. براهین اقامه شده برای قضایا واحکام سخت استوار است و مناسبتهای تاریخی آنها ، درموارد مقتضی ، مذکـور است. تدوین این کتاب با حجمی وسیع (درحدود ۳۳۰۰ صفحه)

کاری دشوار و مستلزم اطلاعات دقیق و وسیع در تئوری اعداد بوده که مؤلف با احاطهٔ کامل بر موضوع، از عهدهٔ آن به نحو احسن برآمده است. این اثر ارزشمند مرحوم مصاحب مانند سایر آثار وی دارای ارزش علمی و تحقیقی گرانبهائی است و مایهٔ مباهات جامعهٔ ریاضی کشور است.

چاپ کتاب وزین و برطبق استاندهٔ مطبوعات ریاضی خوب خارجی، وتقریباً عاری از اغلاط چاپی، است. این کتاب می‌تواند مورد استفادهٔ قشر وسیعی از علاقه مندان دانش ریاضی، اعم از استادان، معلمین ریاضی، ودانشجویان، وغیره واقع گردد.

درخاتمه بی مناسبت نمی‌دانیم تا یاد این دانشمند فقید را گرامی بداریم و از خدمات ارزشمند وی به جامعهٔ علمی وفرهنگی، صمیمانه قدردانی کنیم. استاد فقید درزمانی که فترت وسستی همه جا حتی بعضی ازمراکز علمی کشور را فراگرفته بود، بافکر نو، تلاشی مداوم، وبا پشتکاری زایدالوصف، زندگی خود را وقف اعتلاء دانش (ریاضی) کرد و دراین راه متحمل زحمات طاقت فرسائی گردید. آخرین اثر وی درزمینهٔ ریاضی کتاب مذکور است که دراواخر عمر ودردوران کهولت، باوجود اشتغال به سایر کارهای تعلیمی و تألیفی، با دقتی کم‌نظیر صورت تألیف یافته است. وی مبتکر وبانی سبکی نو درانشاء ریاضی به‌زبان فارسی وواضع برخی اصطلاحات ریاضی به این زبان است. امید است زندگی علمی وفرهنگی وی سرمشقی باشد برای پویندگان راه علم و دانشطلبان مشتاقی که بی هیچ چشمداشت مادی، طالبین واقعی علم‌اند.

زندگینامهٔ مؤلف کتاب تئوری مقدماتی اعداد،

مرحوم دکتر غلامحسین مصاحب

غلامحسین مصاحب درسال ۱۲۸۹ هجری شمسی در تهران متولد شد. تحصیلات خود را در تهران، فرانسه وانگلستان انجام داد ودرسال ۱۳۲۷ به اخذ درجهٔ دکتری ازدانشگاه کمبریج، وبه عضویت انجمن ریاضیدانان لندن و انجمن فلسفی کمبریج نایل شد.

درسال ۱۳۰۶ وارد خدمت فرهنگ شد و تا سال ۱۳۳۲ درسمتهای رئیس کل تعلیمات عالیه، مدیر کل فنی ومعاون فنی آن وزارتخانه مشغول کار بود. درسال ۱۳۴۵ مؤسسهٔ ریاضیات را در دانشگاه تربیت معلم تأسیس کرد وتا آخرین روزحیات خود (۲۱ مهر ۱۳۵۸) درآن مؤسسه اشتغال داشت.

مصاحب در ۶۹ سال عمر پربرکتش دمی ازتعلیم وتعلم غافل نماند وبه راستی معشوقی جزعلم نداشت. وی زبانهای فارسی، فرانسه، انگلیسی، وعربی را خوب می‌دانست وبا زبان آلمانی نیز برای رفع احتیاج ترجمه‌های ریاضی آشنا بود؛ وسعت اطلاعات علمی قدیم وجدید وی کم‌نظیر بود، به همین جهت آثار علمی وی حتی آنهاکه مربوط به دوران جوانی اوست هنوزهم معادل ندارد. با اینهمه، مطلقاً اهل ادعا نبود وفوق‌العاده فروتن وآزاده بود.

اهم آثار دکتر مصاحب بترتیب تاریخ انتشار به شرح ذیل است:

ـ مجلهٔ ریاضیات عالی و مقدماتی (۱۳۱۵-۱۳۰۹).

ـ جبر و مقابلهٔ خیام (تهران ۱۳۱۷، ۲۹۰ صفحه) مشتمل برمتن عربی وترجمهٔ فارسی رسالهٔ خیام درجبر که درآن برای نخستین بارمقام علمی خیام درریاضیات فارسی به طورمستند به فارسی زبانان شناسانیده شده است؛ به انضمام تاریخ ریاضیات تا زمان خیام.

ـ رسالهٔ

On Differentiation and Denjoy – Behaviour of Functions on Two Real Variables

که درجلد چهل وششم (سال ۱۹۵۰) مجلهٔ انجمن فلسفی کمبریج به طبع رسیده است.

ـ مدخل منطق صورت (از انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۳۴، ۷۰۰ صفحه) که نخستین کتاب فارسی دراین علم است و درمجلهٔ مشهور Journal of Symbolic Logic برآن تقریظ نوشته‌اند (شمارهٔ چهارم، جلد بیست ودوم، ۱۹۵۷).

ـ حکیم عمر خیام به عنوان عالم جبر (انجمن آثار ملی، ۱۳۳۹، ۳۰۰ صفحه) مشتمل براثری ناشناخته از خیام در ریاضیات.

ـ دایرةالمعارف فارسی (جلد اول، ۱۳۴۵) که عدهٔ زیادی از اساتید و محققین ایرانی و مستشرقین معروف برآن تقریظ نوشته‌اند.

ـ آنالیز ریاضی (۹۳۰ صفحه، چاپهای ۱۳۴۸، ۱۳۵۰، ۱۳۵۲).

ـ تئوری مقدماتی اعداد (جلد اول، دوقسمت، ۱۴۳۶ صفحه، انتشارات کتابفروشی دهخدا، تهران ۱۳۵۵) (جلد دوم، سه‌قسمت، ۱۸۴۳ صفحه، انتشارات سروش، تهران ۱۳۵۸).

دکترمصاحب به ریاضیات علاقهٔ عمیقی داشت و در اشاعهٔ آن، چه ازطریق تعلیم و تدریس وچه از طریق تألیف، زحمات فراوانی کشید؛ وی در روز شنبهٔ ۲۱ مهر ۱۳۵۸ درحالی‌که پشت میزمطالعه سرگرم تنظیم و مطالعهٔ یادداشتهای ریاضی خود بود، دفعةً، چشم از جهان فروبست و به سرای باقی شتافت. روانش شاد باد.

هماهنگیها و زیبائیهای

روابط بین اعداد طبیعی

۷·۷ = ۴۹

۶۷·۶۷ = ۴۴۸۹

۶۶۷·۶۶۷ = ۴۴۴۸۸۹

۶۶۶۷·۶۶۶۷ = ۴۴۴۴۸۸۸۹

۶۶۶۶۷·۶۶۶۶۷ = ۴۴۴۴۴۸۸۸۸۹

۶۶۶۶۶۷·۶۶۶۶۶۷ = ۴۴۴۴۴۴۸۸۸۸۸۹

۶۶۶۶۶۶۷·۶۶۶۶۶۶۷ = ۴۴۴۴۴۴۴۸۸۸۸۸۸۹

. . . .

۹·۹ = ۸۱

۹۹·۹۹ = ۹۸۰۱

۹۹۹·۹۹۹ = ۹۹۸۰۰۱

۹۹۹۹·۹۹۹۹ = ۹۹۹۸۰۰۰۱

۹۹۹۹۹·۹۹۹۹۹ = ۹۹۹۹۸۰۰۰۰۱

۹۹۹۹۹۹·۹۹۹۹۹۹ = ۹۹۹۹۹۸۰۰۰۰۰۱

. . . .

۴·۴ = ۱۶

۳۴·۳۴ = ۱۱۵۶

۳۳۴·۳۳۴ = ۱۱۱۵۵۶

۳۳۳۴·۳۳۳۴ = ۱۱۱۱۵۵۵۶

۳۳۳۳۴·۳۳۳۳۴ = ۱۱۱۱۱۵۵۵۵۶

. . . .

۷·۹ = ۶۳

۷۷·۹۹ = ۷۶۲۳

۷۷۷·۹۹۹ = ۷۷۶۲۲۳

۷۷۷۷·۹۹۹۹ = ۷۷۷۶۲۲۲۳

۷۷۷۷۷·۹۹۹۹۹ = ۷۷۷۷۶۲۲۲۲۳

۷۷۷۷۷۷·۹۹۹۹۹۹ = ۷۷۷۷۷۶۲۲۲۲۲۳

. . . .

۱·۷ + ۳ = ۱۰

۱۴·۷ + ۲ = ۱۰۰

۱۴۲·۷ + ۶ = ۱۰۰۰

۱۴۲۸·۷ + ۴ = ۱۰۰۰۰

۱۴۲۸۵·۷ + ۵ = ۱۰۰۰۰۰

۱۴۲۸۵۷·۷ + ۱ = ۱۰۰۰۰۰۰

۱۴۲۸۵۷۱·۷ + ۳ = ۱۰۰۰۰۰۰۰

۱۴۲۸۵۷۱۴·۷ + ۲ = ۱۰۰۰۰۰۰۰۰

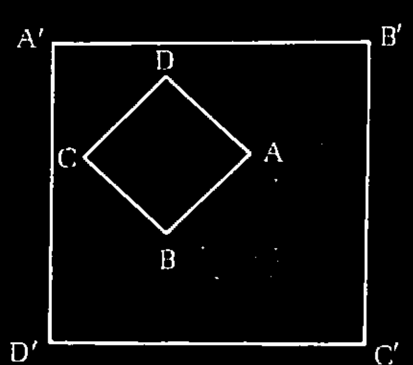
۱۴۲۸۵۷۱۴۲·۷ + ۶ = ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰

۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸·۷ + ۴ = ۲۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵·۷ + ۵ = ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷·۷ + ۱ = ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

نقل از کتاب «تئوری مقدماتی اعداد»
تألیف غلامحسین مصاحب



ABCD و A′B′C′D′ نقشه‌های مربعی‌شکل ناحیه‌ای از یک کشوراند که با مقیاسهای متفاوت رسم شده و رویهم قرار گرفته‌اند (شکل). ثابت کنید تنها یک نقطه مانند O روی نقشهٔ کوچک وجود دارد که درست منطبق بر نقطه‌ای از نقشهٔ بزرگ مانند O′ است به‌طوری که هر یک از O و O′ مشخص‌کنندهٔ یک محل از کشور مذکورند. به‌وسیلهٔ پرگار و خط‌کش نیز، نقطهٔ O را تعیین کنید.

اولین مسابقهٔ سراسری ریاضی بین دانش‌آموزان ممتاز دبیرستانهای کشور

پانزدهمین کنفرانس ریاضی کشور از ۸ تا ۱۱ فروردین ۱۳۶۳ با شرکت جمعی از استادان و دبیران ریاضی کشور و چند ریاضیدان مدعو خارجی در شیراز برگزار گردید. جلسات این کنفرانس به سخنرانیهای عمومی و تخصصی در زمینهٔ ریاضیات اختصاص داشت. درجلسهٔ افتتاحیهٔ این کنفرانس پیام آقای سید اکبر پرورش وزیر محترم آموزش و پرورش قرائت گردید (متن کامل این پیام در شمارهٔ حاضر آمده است).

از اقدامات ارزندهٔ وزارت آموزش و پرورش ، ترتیب یك مسابقهٔ ریاضی میان دانش‌آموزان ممتاز رشتهٔ ریاضی دبیرستانهای کشور بود که با همکاری انجمن ریاضی و سازمان پژوهش وزارت آموزش و پرورش در تاریخ جمعه ۶۳/۱/۱۰ برگزار شد. در این مسابقه ۱۰۰ نفر از دانش‌آموزان ممتاز کلاس چهارم ریاضی فیزیك دبیرستانهای کشور به انتخاب ادارات آموزش و پرورش استانها ومناطق شرکت داشتند. سؤالات این مسابقه از بین سؤالاتی که توسط عده‌ای از اعضای انجمن ریاضی ایران و گروهی از دبیران ریاضی کشور به انجمن ارسال شده بود، به وسیلهٔ هیئتی از اعضای انجمن ریاضی ایران و دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی وزارت آموزش و پرورش انتخاب گردید.

اسامی ۱۰۰ تن شرکت‌کنندهٔ این مسابقه و ۱۰ نفر اول آن، همراه با سؤالات، ذیلاً می‌آید. توضیح اینکه زمان مسابقه ۳ ساعت تعیین شده بود.

اسامی ۱۰ نفر اول مسابقه

نام	دبیرستان	شهرستان	نمره (از ۱۰۰)
۱ـ محمد خرمی	علامهٔ حلی	تهران	۸۳
۲ـ شهرام یزدانی	علامهٔ حلی	تهران	۷۸
۳ـ همایون‌اسماعیل‌پور استکانچی	موسی صدر	تهران	۶۱
۴ـ بابك حسیبی	سروش آزادی	تهران	۶۰/۷۵
۵ـ داریوش دبیری	توحید	شیراز	۵۹
۶ـ جلیل کمالی	ابومسلم	مشهد	۵۸
۶ـ علی‌رضا برادران رفیعی	شهید جباریان	مشهد	۵۸
۷ـ بهین مشهدی فراهانی	احمدیه	تهران	۵۵/۵
۸ـ سعید رشیدی	البرز	تهران	۵۰/۵
۹ـ علی شیخ‌الاسلامی	ابوذر غفاری	مشهد	۴۵/۵
۹ـ مژگان صدر	فراست	تهران	۴۵/۵
۱۰ـ محمود مدرس هاشمی	ادب	اصفهان	۴۵
۱۰ـ محمدرضا صدری	امام خمینی	اقلید	۴۵
۱۰ـ علی‌اکبر زارع بیدکی	زرگران	یزد	۴۵

اسامی ۱۰۰ نفر شرکت‌کنندهٔ مسابقه

نام	دبیرستان	شهرستان	استان
۱- ناهید نیکپور	توحید	بهشهر	مازندران
۲- مهدی کمالی	شهید جباریان	مشهد	خراسان
۳- مهران مهران‌پور	علی‌بن موسی‌الرضا	تهران	تهران
۴- محمد رضائی	امام خمینی	الیگودرز	لرستان
۵- فرهاد لالوئی	طالقانی	فردوس	خراسان
۶- مهدی کرمی	شهدای ادب	اصفهان	اصفهان
۷- غلامرضا جرمساز	سعادت	بوشهر	بوشهر
۸- علی اکبر زارع بیدکی	زرگران	یزد	یزد
۹- مسعود نژاد منصوری	شهید ترابی	شیراز	فارس
۱۰- بهین مشهدی فراهانی	احمدیه	تهران	تهران
۱۱- علی حسین اکبری زرین	مدرس	اهر	آذربایجان شرقی
۱۲- اکبر بزرگ امین	شهید چمران	ارومیه	آذربایجان غربی
۱۳- کیوان کرامیان	شهدای ادب	اصفهان	اصفهان
۱۴- مهرداد ایرانفر	شهید حداد عادل	تهران	تهران
۱۵- بهزاد سلیمی	شهید بهشتی	خلخال	آذربایجان شرقی
۱۶- سعید رشیدی	البرز	تهران	تهران
۱۷- واحد رجائی	خواجه نصیر	جهرم	فارس
۱۸- جلیل کمالی	ابومسلم	مشهد	خراسان
۱۹- میر اسلام تیموری	محمدجعفر عنصری	ارومیه	آذربایجان غربی
۲۰- مهراب جسمانی	امام جعفر صادق	قائم‌شهر	مازندران
۲۱- محمدرضا صدری	امام خمینی	اقلید	فارس
۲۲- محمود اوکاتی صادق	شهید کنجا	زابل	سیستان و بلوچستان
۲۳- مسعود محسن‌پور	دکتر شریعتی	اهواز	خوزستان
۲۴- مهشید امیرخانی	زینبیه	تهران	تهران
۲۵- شهرام یزدانی	آموزش تیزهوشان علامه حلی	تهران	تهران
۲۶- سعید حاجی آقاجانی	۲۲ بهمن	تهران	تهران
۲۷- محمد خرمی	علامه حلی	تهران	تهران
۲۸- بیژن وثوق	علامه طباطبائی	نیشابور	خراسان
۲۹- بابک خان‌پور	البرز	تهران	تهران
۳۰- محمد ایران‌منش	شریعتی	کرمان	کرمان
۳۱- اسماعیل ربیعی	شهدای فتح	بروجن	چهارمحال بختیاری
۳۲- علی محمدی	شهید مطهری	تهران	تهران
۳۳- شهربانو دادور	فاطمیه	قائم‌شهر	مازندران
۳۴- آرش ریحانی ماسوله	شهید قدمی	تهران	تهران
۳۵- لیدا مرادی	شریعتی	باختران	باختران
۳۶- سعید ملاحاجیان	شهید مصطفی خمینی	تهران	تهران
۳۷- سید محمدعلی آزاد	شهید شرافتیان	شیراز	فارس
۳۸- سید حمیدرضا جدی	امام خمینی	کاشان	اصفهان
۳۹- پری فرضی	فاطمه زهرا	بوشهر	بوشهر
۴۰- علیرضا برادران رفیعی	شهید جباریان	مشهد	خراسان
۴۱- رسول کاظم‌زاده	شهید اندرزگو	اردبیل	آذربایجان شرقی

نام	دبیرستان	شهرستان	استان
۴۲- محمود مدرس هاشمی	ادب	اصفهان	اصفهان
۴۳- مهردار سلامی	ملاصدرا	شیراز	فارس
۴۴- مجید شهریاری	امیرکبیر	زنجان	زنجان
۴۵- همایون عالی‌پور استکانچی	موسی صدر	تهران	تهران
۴۶- همایون عالی‌پور	هفده شهریور	مسجدسلیمان	خوزستان
۴۷- کامیار معتمدی دسارز	ابن‌سینا	بندر عباس	هرمزگان
۴۸- صفور محمدی حمیدآباد	شهید مطهری	یاسوج	کهکیلویه و بویراحمد
۴۹- شهاب‌لایقی	شهید منتظری	تهران	تهران
۵۰- محسن پاک نژاد	شریعتی	تهران	تهران
۵۱- رسول جعفریان اصل	مطهری	تبریز	آذربایجان شرقی
۵۲- سید قهرمان طاهریان	بهشتی	شهرکرد	چهارمحال بختیاری
۵۳- نسرین حجت	شهدای هفتم تیر	تهران	تهران
۵۴- ناهید اشرفی	نرجس	شهرکرد	چهارمحال بختیاری
۵۵- فریده حاج‌اسماعیلی بیگی	نواب	تهران	تهران
۵۶- الهام یعقوبی‌فرد خمسه	ارشاد	تهران	تهران
۵۷- محسن روزبهانی	امام خمینی	خرم‌آباد	لرستان
۵۸- امیر فرهادی	ابن‌سینا	نهاوند	همدان
۵۹- جمال مشتاق	شهید قصری	سنندج	کردستان
۶۰- میرعزیز قدوسی	شهید مطهری	ماکو	آذربایجان شرقی
۶۱- ناصر صفائیان	شهید باهنر	مهدشهر	سمنان
۶۲- محمدرضا صاحبی	شهید مدرس	ری	تهران
۶۳- ناصر ندا	طالقانی	بیرجند	خراسان
۶۴- علیرضا محمدی فرد	شهدا	خمینی شهر	اصفهان
۶۵- داریوش دبیری	توحید	شیراز	فارس
۶۶- امیرحسین بهروش	فلسفی	تهران	تهران
۶۷- محمدرضا شاکری	قدس	دامغان	سمنان
۶۸- آرش فروزان	شهدای شمارهٔ ۱	کرمان	کرمان
۶۹- حسن بیدار	شهید بهشتی	تهران	تهران
۷۰- غدیرالله نوری	شریعتی	ابهر	زنجان
۷۱- بهرام صادقپور گیلده	یاسر	تهران	تهران
۷۲- علی ضامن قربانی	بهشتی	خمین	مرکزی
۷۳- فرزاد تنها	امام خمینی	رامسر	مازندران
۷۴- علی شیخ‌الاسلامی	ابوذر غفاری	مشهد	خراسان
۷۵- کادرس نوری‌مند	سعیدی	فسا	فارس
۷۶- حمید جوادی	شریعتی	رودسر	گیلان
۷۷- مهرزاد نایبی	پاسداران	قزوین	زنجان
۷۸- منصور قطبی	شهید قصری	سنندج	کردستان
۷۹- غلامحسین شیخ‌الاسلامی‌صفهانی	۲۲ بهمن	تهران	تهران
۸۰- گیتی ربیعی	نرجس	شهرکرد	چهارمحال بختیاری
۸۱- حسن یعقوبی	دانشمند	تهران	تهران
۸۲- عبدالحسن امیرغلامی	امام خمینی	دزفول	خوزستان
۸۳- کامران چلوویان	شریعتی	سمنان	سمنان
۸۴- عبدالعلی عبدی پور	امام خمینی	خرم‌آباد	لرستان

۸۵- میترا پولادی	۲۲ بهمن	اصفهان	اصفهان
۸۶- شایان فروشی	شهید باهنر	تهران	تهران
۸۷- مژگان صدر	فراست	تهران	تهران
۸۸- سیامك سپهری	امام خمینی	سراب	آذربایجان شرقی
۸۹- هدیه ایرانی	هدایت	تهران	تهران
۹۰- علی برقعی رضوی	امام صادق	قم	مرکزی
۹۱- حمیرا رضائی صدقیانی	توحید	تبریز	آذربایجان شرقی
۹۲- سهیلا خاقانی	نواب	تهران	تهران
۹۳- مهرداد روغنی	بهشتی	شهرکرد	چهارمحال بختیاری
۹۴- مهدی مظفری	شریعتی	رودسر	گیلان
۹۵- مجتبی زرگر	شهدا	اهواز	خوزستان
۹۶- کاظم میرزایی	بهشتی	محلات	مرکزی
۹۷- فرشید قدسیان	ابوذر	شیراز	فارس
۹۸- احمدرضا شمسی‌پور	سید جمال‌الدین اسدآبادی	شهرکرد	چهارمحال بختیاری
۹۹- اعظم منیعی	جلال آل احمد	باختران	باختران
۱۰۰- بابك حسینی	سروش آزادی	تهران	تهران

سؤالات مسابقه

۱ هرگاه $gof: R \longrightarrow R$ یك به یك باشد ، ثابت‌کنید $f: R \longrightarrow R$ نیز یك به‌یك‌است. (۵ نمره)

۲ ثابت کنید عدد $x = \sqrt{1+\sqrt{۲}}$ اصم است .
(۵ نمره)

۳ ماتریس (۲×۲) A را چنان بیابید که داشته‌باشیم ،

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

(۵ نمره)

۴ نقطهٔ M چنـان حرکت می‌کند که مجموع مربعات فواصل‌آن از وجوه مکعب مقداری است ثابت . مکان هندسی نقطهٔ M را بدست‌آورید (از راه تحلیلی). (۱۰ نمره)

۵ با استفاده از حروف لغت «احتمال» چندکلمهٔ۴حرفی (با معنی یا بدون معنی) می‌توان ساخت . (۱۰ نمره)

۶ ده کیسه از گلوله‌های هم شکل داریم که وزن هر یك از گلوله‌های ۹ کیسه از ۱۰ کیسه هر یك ۱۰ گرم است ولـی وزن هر یک از گلوله‌های یکی ازکیسه‌ها ۹ گرم می‌باشد . با یك بار توزین تعیین‌کنیدکدام یک از کیسه‌ها از گلوله‌های ۹ گرمی تشکیل شده است . (۱۰ نمره)

۷ حاصل عبارت

$$S_n = \mathrm{Arctg}\frac{1}{۲} + \mathrm{Arctg}\frac{1}{۸} + \cdots + \mathrm{Arctg}\frac{1}{۲n^۲}$$

را بدست‌آورید . $\lim_{n\to\infty} S_n$ را نیز پیداکنید . (۱۰ نمره)

۸ فرض‌کنید

$$f(x) = \begin{cases} n & (x = \frac{1}{n},\ n\in N), \\ x & (\text{در غیر این صورت}), \end{cases}$$

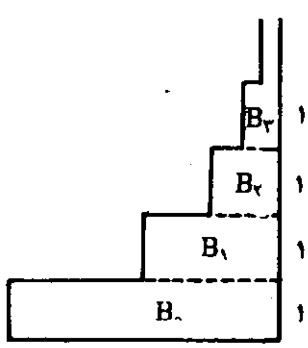
الف) تابع فوق در چه نقـاطی دارای حد است .(فقط ذکر کنید) .
ب) نشان‌دهید حد تابع f درصفر موجود نیست. (۱۵ نمره)

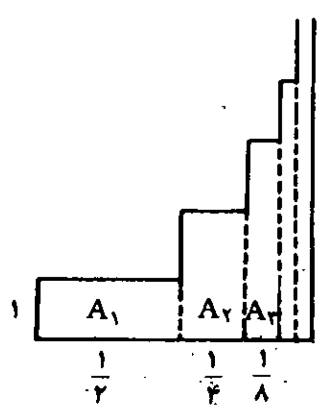
۹ سه نقطهٔ A ، B ، و C را به‌ترتیب بر خط مفروض l اختیار می‌کنیم $(AB \neq BC)$. دایرهٔ متغیری در نقطهٔ B بر خط l همواره مماس است . از نقاط A و C مماسهائی بر این دوایر رسم می‌کنیم . مکان هندسی نقطـهٔ M محل تلاقی این مماسها را تعیین‌کنید . (۱۵ نمره)

۱۰ با الهام‌گرفتن از اشکال زیر مجموع

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۴} + \frac{۳}{۸} + \frac{۴}{۱۶} + \cdots$$

را بدست‌آورید . (۱۵ نمره)





اخبار گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف

● از طرف شورای برنامه‌ریزی ریاضی برادران محمود مهدیزاده، نادر دیلمقانی، و ابراهیم دادابی، دبیران ریاضی دبیرستانهای تهران، به عنوان همکاران برنامه‌ریز شورای برنامه ریزی ریاضی دورهٔ دبیرستان انتخاب شدند. این برادران به طور رسمی از اول اردیبهشت ماه ۶۳ در شورای ریاضی شرکت نمودند.

● مراسم پایان دورهٔ کلاسهای بازآموزی ریاضی پنجم دبستان (کتاب آزمایشی) با حضور آموزگاران ۵۵ کلاس آزمایشی و کارشناسان در سالن شهید رجائی سازمان پژوهش تشکیل گردید. پس از قرائت آیاتی از کلام‌ا.. مجید، برادر دکتر حداد عادل معاون وزیر و سرپرست دفتر تحقیقات ضمن تشکر از زحمات یك سالهٔ معلمان، سخنانی در بارهٔ اهمیت آموزش ریاضی ایراد نمودند، در پایان جلسه گواهی‌نامه‌های پایان‌دوره به شرکت‌کنندگان اعطاء گردید.

● کلاسهای بازآموزی قریب به ۶۰۰ نفر از مدرس راهنماهای ریاضی (لیسانسیه‌های ریاضی یا آموزش ابتدائی که ابتدا زیر نظر مؤلفین‌دوره دیده وسپس‌در مناطق‌خود به‌آموزگاران آموزش می‌دهند) با همکاری دفتر آموزش ضمن خدمت و شورای ریاضی دفتر تحقیقات در چهار نوبت در مراکز تبریز و تهران برگزار گردید.

- نوبت اول از تاریخ ۶۳/۴/۲۳ الی ۶۳/۵/۲ : استانهای گیلان، زنجان، آذربایجان شرقی، آذربایجان غربی، همدان، اراك، و لرستان (در تبریز).
- نوبت دوم از تاریخ ۶۳/۵/۶ الی ۶۳/۵/۱۶ : استانهای فارس، کرمان، کهکیلویه و بویر احمد، بوشهر، هرمزگان، یزد، بلوچستان، ایلام، چهارمحال بختیاری، کردستان، و باختران (در تبریز).
- نوبت سوم از تاریخ ۶۳/۵/۲۰ الی ۶۳/۵/۳۰ : استانهای خراسان، سمنان، مازندران، اصفهان، و خوزستان (در تبریز).
- نوبت چهارم از تاریخ ۶۳/۶/۱۷ الی ۶۳/۶/۲۷ : استان تهران (در تهران).

● شورای برنامه‌ریزی دبیرستان که از ۶۲/۸/۷ کارخود را آغاز کرده بود از اول تیرماه تعطیل گردید. این شورا فعالیت مجدد خود را از آغاز سال تحصیلی از سرخواهد گرفت.

● در سال تحصیلی ۶۴ـ۶۳ در تهران و حومه بین ۴۰ تا ۵۰ کلاس اول راهنمائی آزمایشی انتخاب خواهد شد. در این کلاسها ریاضی سال اول راهنمائی به‌طور آزمایشی تدریس خواهد گردید. دبیران این کلاسها در طول سال تحصیلی زیر نظر مؤلفین، کلاسهای بازآموزی خواهند داشت تا با نحوهٔ آموزش این کتابها آشنا شوند.

● تغییرات کتابهای درسی ریاضی

۱ـ کتاب ریاضی پنجم دبستان در سال تحصیلی ۶۴ـ۶۳ تغییر پیدا می‌کند و کتاب جدیدالتألیف درمدارس کشور تدریس خواهد شد.

۲ـ کتابهای ریاضی اول، دوم، و سوم راهنمائی برمبنای نظرات و پیشنهادات رسیده از طرف دبیران راهنمائی، بازسازی کامل شده است.

۳ـ در کتاب ریاضیات جدید سال چهارم رشتهٔ ریاضی فیزیك، بخش نظریهٔ اعداد با تجدید نظر به فصل بعد از منطق منتقل شد؛ و در سایر فصول نیز تغییراتی انجام داده شده است.

۴ـ در قسمت آخر کتابهای حساب و جبر سال اول رشتهٔ علوم تجربی و حساب و جبر سال دوم رشتهٔ ریاضی فیزیك، و ریاضیات جدید سالهای دوم و سوم تعدادی مسئلهٔ جدید برای دانش‌آموزان علاقمند اضافه شده است.

● انتشار کتاب

کتاب «بازآموزی و بازشناخت هندسه»، تألیف ه. س. م کوکسر تیر ـ س. ل. گرتیز، ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی، توسط انتشارات دفتر امور کمك آموزشی و کتابخانه‌ها (وزارت آموزش و پرورش) منتشر گردید. این کتاب برای دانش‌آموزان و معلمان دبیرستانها و سایر علاقمندان به دانش هندسه، کتاب قابل‌استفاده و باارزشی است. در شمارهٔ بعد، در قسمت معرفی‌کتاب، به نقد و بررسی آن مبادرت خواهد شد.

ریز مواد ریاضی دورهٔ سه سالهٔ راهنمایی

برنامه‌ریزی ریاضی دورهٔ سه سالهٔ راهنمایی در پائیز سال ۱۳۶۱ درشورای برنامه‌ریزی دفتر تحقیقات (گروه ریاضی) شروع شد. در این شورا عده‌ای از اساتید ریاضی دانشگاهها و مدرسین ریاضی مراکز تربیت معلم ودبیران ریاضی دورهٔ متوسطه و راهنمایی شرکت داشتند. کار برنامه‌ریزی شورای مذکور تا اواخر پائیز سال ۱۳۶۲ ادامه داشت. ریز مواد ریاضی دورهٔ سه سالهٔ راهنمایی که توسط این شورا تهیه شده بود، طی نشریهٔ شمارهٔ ۱۲۷ به اطلاع همهٔ گروههای آموزشی ریاضی ودبیران دورهٔ راهنمایی رسید. پس ازبررسی نظرات و پیشنهادات رسیده ازطرف گروهها، کار تألیف کتابهای ریاضی راهنمایی آغاز شد.

ریز مواد حساب و جبر دورهٔ سه سالهٔ راهنمایی (بدون تفکیك به سال) جهت اطلاع و اظهار نظر علاقمندان درج می‌شود. در شمارهٔ بعد ریز مواد هندسه و آمار به اطلاع خواهد رسید.

ریز مواد حساب دورهٔ راهنمائی

۱ـ یادآوری تقسیم.

قابلیت تقسیم و خواص آن، قواعد قابلیت تقسیم.

۲ـ اعداد اول.

تشخیص اول بودن یك عدد، پیداکردن اعداد اول به‌روش آراتستن (روش حذفی). تجزیهٔ یك عدد به عوامل اول.

۳ـ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك.

(به عنوان بزرگترین عضومجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های مشترك). محاسبهٔ بزرگترین مقسوم علیه مشترك (نردبانی ـ تجزیه) کاربرد بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عدد در رابطه با ساده‌کردن.

۴ـ کوچکترین مضرب مشترك و کاربرد آن در رابطه باجمع کسرها.

(یادداشت. مطالب بندهای فوق بطور ساده و با مثالهائی با استفاده از اعدادکوچك ارائه می‌شود).

۵ـ اعداد اعشاری.

ـ یادآوری اعداد اعشاری با تکیه برارزش مکانی بااستفاده از روش معرفی آنها دردورهٔ ابتدائی.

ـ یادآوری چهارعمل اصلی روی اعداد اعشاری (بااستفاده از روشهای بکار رفته درکتابهای ابتدائی جدید).

ـ محاسبهٔ تقریبی یك عددکسری بصورت یك عدد اعشاری. معرفی تقریب نقصانی و اضافی.

۶ـ توان اعداد.

ـ مجذور یا مربع یك عدد، مکعب یک عدد و توانهای ۴، ۵، ...

ـ نمایش اعداد بزرگ، مثلاً فاصله زمین تا خورشید برابر با ۱۵×۱۰^{۷} کیلومتر و یا ۱۵×۱۰^{۱۰} متر می‌باشد.

۷ـ جذر.

ـ جذر اعداد مربع‌کامل (درست و اعشاری) با استفاده از روش آزمایش و خطا درمورد اعداد اعشاری، مثالهای ملموس نیز ارائه گردد.

ـ جذر تقریبی نقصانی و اضافی یك عدد طبیعی تا یک واحد تقریب. مثلاً برای محاسبهٔ جذر ۷۶ به صورت زیرمی‌توان عمل کرد:

$$۶^{۲}=۳۶ \;,\; ۷^{۲}=۴۹ \;,\; ۸^{۲}=۶۴ \;,\; ۹^{۲}=۸۱$$

بنابراین، $۸<\sqrt{۷۶}<۹$. لذا عدد ۹ جذر تقریبی اضافی و ۸ جذر تقریبی نقصانی عدد ۷۶ تا یك واحد تقریب است.

ـ جذر نقصانی و اضافی یك عدد با تقریب یك‌دهم واحد. بطور مثال، برای محاسبهٔ جذر ۷۶ بصورت زیر عمل می‌کنیم:

$$۸/۱^{۲}=۶۵/۶۱ ،\ \ldots ،\ ۸/۷^{۲}=۷۵/۶۹ ،\ ۸/۸^{۲}=۷۷/۴۴$$

چون $۸/۷<\sqrt{۷۶}<۸/۸$، پس ۸/۸ جذر تقریبی‌اضافی و ۸/۷ جذر تقریبی نقصانی عدد ۷۶ تا یك دهم واحد است.

ـ حالت خاص (جذر اعدادی‌که از یك بزرگتر و از دو کوچکترند).

جذر تقریبی (اضافی) اینگونه اعداد عبارت است از یک بعلاوه نصف مازاد بر یك. این روش با ذکر مثالهائی بصورت جدول زیر به دانش‌آموزان تفهیم می‌گردد.

جذر تقریبی	۱ + نصف مازاد	نصف مازاد	مازاد به یك	عدد
۱/۲۵	۱+۰/۲۵	۰/۲۵	۰/۵	۱/۵
۱/۰۱	۱+۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۲	۱/۰۲

با استفاده از روش فوق می‌توان از اعداد بزرگتر از ۱ نیز جذر گرفت، بطور مثال، برای جذرگیری تقریبی از عدد ۵ ابتدا عدد مربع کامل بلافاصله‌کوچکتر از ۵ را پیدا می‌کنیم (عدد ۴)، و می‌نویسیم:

$$\sqrt{۵}=\sqrt{۴\times\frac{۵}{۴}}=۲\sqrt{۱/۲۵}=۲(۱+۰/۱۲)$$
$$=۲/۲۴$$

ـ معرفی اعداد منفی و Z و اعمال جبری روی‌آن.
ـ معرفی Q و اعمال جبری روی‌آن.
ـ بکار بردن حروف بجای اعداد بطوریکه دانش‌آموزان توانائی بیان دستورهای کلی ریاضی را پیداکنند و بعلاوه بتوانند مسائل ساده را به صورت مدل ریاضی بیان‌کرده و حل‌کنند.

۱ـ دستگاه اعداد صحیح Z و ترتیب‌آن

ـ توجیه اعداد منفی با مثالهای عینی از قبیل حرکت به چپ نسبت به حرکت بـه راست یا حرکت بسوی پایین نسبت بـه حرکت بسوی بالا یا قرضی نسبت به موجودی و ...
ـ نمایش اعداد منفی بـه‌کمك محور اعداد با حرکت از مبدأ به سمت چپ.
ـ معرفی مجموعهٔ اعـداد صحیح و ترتیب‌آن با استفاده از محور اعداد.
ـ قرینهٔ یك عدد صحیح و بیان این خاصیت که‌قرینهٔ قرینهٔ یك عدد صحیح برابر با خودآن عدد است.

۲ـ اعمال جبری روی Z

آ ـ جمع و تفریق در Z.

ـ تعمیم جمع و تفریق در اعداد طبیعی با استفاده ازمحور اعداد به جمع و تفریق در Z.
مثلاً برای بدست‌آوردن حاصل ۵ + ۴ یا ۵ـ ۹ چنین عمل می‌کردیم:

$$۰ \quad ۴ \quad ۴ \quad ۵ \quad ۹ \qquad ۴+۵=۹$$
$$۰ \quad ۹ \quad ۴ \quad ۵ \quad ۹ \qquad ۹-۵=۴$$

اینك برای بدست آوردن حاصل (۹)+(۵ـ) یا (۱۲)ـ(۷) یا (۵)ـ(۳ـ) چنین عمل می‌کنیم:

$$-۵ \quad ۰ \quad ۴ \qquad (-۵)+(۹)=۴$$
$$-۵ \quad ۰ \quad ۷ \qquad (۷)-(۱۲)=-۵$$
$$-۸ \quad -۳ \quad ۰ \qquad (-۳)-(۵)=-۸$$

و تعمیم اعمال فوق به عنوان مثال،

$$a-(-b)=a+b \;,\; a+(-b)=a-b$$

به کمك الگوها. مثلاً، برای توجیـه $۳+(-۲) = ۳-۲$ و $۳+۲ = (-۲)-۳$ و $(-۳)+(-۲) = (-۳)-(۲)$ و $(۲)+(-۳) = (-۲)-(-۳)$ چنین عمل می‌کنیم.

$۳-(۲)=۱$	$۳+(۲)=۵$
$۳-(۱)=۲$	$۳+(۱)=۴$
$۳-(۰)=۳$	$۳+(۰)=۳$
$۳-(-۱)=۴=۳+۱$	$۳+(-۱)=۲=۳-۱$
$۳-(-۲)=۵=۳+۲$	$۳+(-۲)=۱=۳-۲$

$-۳-(۲)=-۵$	$-۳+(۲)=-۱$
$-۳-(۱)=-۴$	$-۳+(۱)=-۲$
$-۳-(۰)=-۳$	$-۳+(۰)=-۳$

$$-۳+(-۱)=-۴=-۳-(۱)$$
$$-۳-(-۱)=-۲=-۳+(۱)$$
$$-۳+(-۲)=-۵=-۳-(۲)$$
$$-۳-(-۲)=-۱=-۳+(۲)$$

ب ـ ضرب در Z

ـ یادآوری ضرب در N با استفاده از محور اعداد مثلاً

$$۰ \quad ۴ \quad ۸ \quad ۱۲ \qquad ۳\times۴=۱۲$$

ـ تعمیم ضرب بالا در مورد ضرب یك عدد طبیعی در یك عدد منفی، مثلاً

$$-۶ \quad -۳ \quad ۰ \qquad ۴\times(-۳)=-۱۲$$
$$-۱۲ \quad -۹$$

و توجیه‌آن با استفاده از تعمیم توزیعپذیری ضرب بر جمع‌وتفریق در N به صورتهای:

$$\begin{aligned}۴\times(-۳)&=۴\times(۲-۵)\\&=۴\times۲-۴\times۵\\&=۸-۲۰\\&=-۱۲\end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned}۴\times(-۳)&=۴\times(۰-۳)\\&=۴\times۰-۴\times۳\\&=۰-۱۲\\&=-۱۲\end{aligned}$$

ـ تعمیم حالت بالا به ضرب دو عدد منفی مانند $(-۳)\times(-۴)$ به صورتهای زیر:

$$\begin{aligned}(-۴)\times(-۳)&=(۳-۷)\times(-۳)\\&=۳\times(-۳)-۷\times(-۳)\\&=-۹-(-۲۱)\\&=-۹+۲۱\\&=۱۲\end{aligned}$$

یا:

$$\begin{aligned}(-۴)\times(-۳)&=(۰-۴)\times(-۳)\\&=۰\times(-۳)-۴\times(-۳)\\&=۰-(-۱۲)\\&=۰+۱۲\\&=۱۲\end{aligned}$$

و یا با استفاده از الگوهایی نظیر

$$۲\times(-۳)=-۶$$
$$۱\times(-۳)=-۳$$
$$۰\times(-۳)=۰$$
$$(-۱)\times(-۳)=۳$$
$$(-۲)\times(-۳)=۶$$
$$(-۳)\times(-۳)=۹$$
$$(-۴)\times(-۳)=۱۲$$

— بیان خواص شرکتپذیری و تعویضپذیری ضرب در Z .

— توان طبیعی یك عدد صحیح با استفاده از تعمیم توان طبیعی یك عدد طبیعی.

۳ـ مجموعهٔ اعداد گویا، Q .

آ ـ ساختن اعدادگویا

— یادآوری کسرهای متعارفی از ابتدائی (حتماً روش ارائه از کتب جدیدالتألیف مأخوذ گردد.)

— ساختن اعداد گویای منفی با استفاده از قرینه سازی مثلاً قرینهٔ $\frac{۳}{۴}$ ، $-\frac{۳}{۴}$ می‌باشد.

— بیان مفهوم کسرهائی نظیر $\frac{-۱}{۴}$ با استفاده از تقسیم $۱-$ به ۴ قسمت مساوی و بیان تساوی $\frac{-۱}{۴}=-\frac{۱}{۴}$ و تعمیم آن به کسرهائی نظیر $\frac{-۳}{۴}$ و غیره هم.

— برابری اعدادگویا (نظیر کسرهای متعارفی معادل با یادآوری مطالب از ابتدائی).

ب ـ جمع و تفریق در Q.

— یادآوری جمع و تفریق کسرهای متعارفی از ابتدائی.

— تعریف جمع و تفریق در Q با استفاده از جمع و تفریق در Z و بندهای بالا مثلاً:

$$\frac{-۳}{۷}-\frac{۵}{۷}=\frac{-۳}{۷}+\left(\frac{-۵}{۷}\right)=\frac{-۳+(-۵)}{۷}$$
$$=\frac{-۸}{۷}=-\frac{۸}{۷}$$

ج ـ ضرب در Q.

— یادآوری ضرب کسرهای متعارفی.

— تعریف ضرب Q با استفاده از ضرب در Z و ضرب کسرهای متعارفی مثلاً:

$$-\frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۵}=-\left(\frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۵}\right)=-\frac{۶}{۳۵}$$

۴ـ معرفی حروف به عنوان جایبان اعداد

— همانطورکه در ابتدائی آمده است با مثالهایی از قبیل

$۵=۲+\square$ و $۶=\square\times۳$ و یا $۱۳=۵+۴\times\square$ می‌توان به جای $\square$ از حروفی مانند a ، b ، x ، و یا y استفاده کرد و آنها را ساده تر چنین نوشت:

$$a+۲=۵\ ،\ ۳\times x=۶\ ،\ \text{و یا}\ y\times۴+۵=۱۳$$

— معنی عباراتی نظیر $۴a$ روشن شود:

$$۴\times a=a+a+a+a=۴a$$

و سپس تفهیم عباراتی مانند $۴a+۵$ با استفاده از فوق و نیز چارت زیر:

۴a+۵	−۳	۱	۱۳	۹	
۴a	−۸	−۴	۸	۴	+۵
a	−۲	−۱	۲	۱	×۴

— بیان دستورهای کلی ریاضی که تاکنون خوانده است (با بکارگیری حروف) مثلاً محیط مربع که یك ضلع آن a باشد برابر است با $۴a$:

$$P=۴a$$

و خلاصه کردن عبارات خطی شامل یك حرف:

$$۳a+۴a=\underbrace{a+a+a}_{\text{۳ بار}}+\underbrace{a+a+a+a}_{\text{۴ بار}}=۷a$$
$$۳a+۱+۷a+۱۲=۳a+۷a+۱+۱۲=۱۰a+۱۳$$

و روش خلاصه کردن عبارات خطی شامل دو حرف مانند:

$$۲a+۳b+۵a+۲b=۲a+۵a+۳b+۲b$$
$$=۷a+۵b$$

— بیان مفهوم $a-b$ با استفاده از مثالهای عددی

$$۵+(-۳)=۵-۳$$

و تعمیم آن به قانون کلی

$$a+(-b)=a-b$$

— توجیه دستورهای کلی زیر با استفاده از مثالهای عددی

$$a-a=۰\qquad (-a)+(-a)=-a-a=-۲a$$
$$a=۱\times a=a\times۱\qquad -a=-۱\times a$$
$$-(-a)=a$$

و

$$\overbrace{(-a)+(-a)+\dots+(-a)}^{n\ \text{بار}}=-na\ .$$

— خلاصه کردن عبارات خطی به طور کلی مانند:

$$۵a-۸b-۹a+۲b=۵a-۹a-۸b+۲b$$
$$=-۴a-۶b$$

— معرفی مفهوم ab ، ac ، ... ، با استفاده از قسمتهای قبل و مثالهای عملی و مساحت اشکال هندسی.

— بیان کلی قوانین شرکتپذیری و تعویضپذیری ضرب و محاسبات ساده‌ای از قبیل:

$$۲\times(-۳a)\ ,\ (-۲a)\times(-۳b)\ ,\ ۲c\times(-b)$$

— بیان کلی قانون توزیعپذیری ضرب نسبت به جمع و محاسبات ساده از قبیل:

$5(2a+3)\ ,\ 5(x+y)\ ,\ b(2a+3c)$

و استفاده ازآن در فاکتورگیری

$ax+ay=a(x+y)$.

ـ معرفی قوانین توان (m و $n \in Z$) با استفاده از مثالهای عددی

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}\ ,\ a^1 = a$

$a^n \cdot b^n = (ab)^n$

توان a^{-n} و بیان $n \in Z$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

قوانین تقسیم :

$$a^n \div a^m = a^{n-m}\ ,\ a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n ,\ a^0 = 1$$

(توان منطق یك عدد در این دوره گفته نمی‌شود).

۵ـ معادله‌های خطی یك‌مجهولی و حل آنها

ـ استفاده ازنمودارهایی به‌صورت زیر برای $4x+5=9$

شروع $\boxed{x} \xrightarrow{\times 4} \boxed{4x} \xrightarrow{+5} \boxed{9}$ خاتمه

و عمل معکوس برای یافتن جواب معادلهٔ $4x+5=9$

شروع $\boxed{1} \xleftarrow{\div 4} \boxed{4} \xleftarrow{-5} \boxed{9}$ خاتمه

ـ حل کلی معادله خطی با استفاده از خلاصه‌کردن معلوم و مجهول.

ـ حل دستگاههای معادلات خطی، مجهولی به‌صورت‌جبری و نیز با استفاده از دستگاه مختصات.

ـ حل مسأله‌های سادهٔ حساب با استفاده ازمعادلات ودستگاه معادلات دو مجهولی.

اعطاء جوائز به برندگان مسابقه

اولین مسابقهٔ سراسری ریاضی

نفرات اول تا دهم این مسابقـه در ساعت ۱۱ صبح روز چهارشنبه ۶۳/۴/۲۰ به اتفاق برادر حـداد عادل معاونت محترم پژوهشی و کارشناسان ریاضی دفتر تحقیقات به حضور حجت‌الاسلام خامنه‌ای ریاست محترم جمهوری رسیده و جوائز خود را دریافت داشتند. ضمناً از طرف بنیاد فرهنگی البرز نیز به نفرات اول تا پنجم درصورت موفقیت در کنکور سراسری و ادامـهٔ تحصیل در دانشگاههای‌کشور، بورسهای تحصیلی زیر اعطاء می‌گردد.

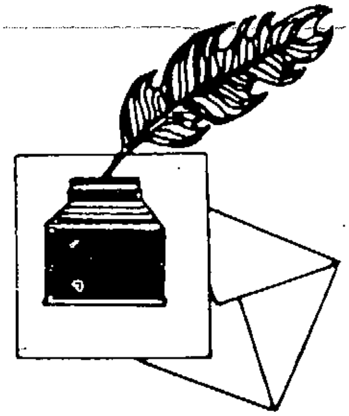
نفر اول: بـرادر محمد خرمی از دبیرستان عـلامهٔ حلی تهران‌بمدت۳۶ماه، ماهیانه /۵۰۰۰ ریال جمعاً /۱۸۰۰۰۰ ریال.

نفر دوم: برادر شهرام یزدانی از دبیرستان عـلامه حلی تهران بمدت ۲۷ ماه، ماهیانه /۵۰۰۰ ریال‌جمعاً /۱۳۵۰۰۰ ریال.

نفر سوم: برادر همایون اسماعیل پور استکانچی‌ازدبیرستان موسی صدر تهـران ۱۸ ماه، ماهیـانـه /۵۰۰۰ ریال جمعـاً /۹۰۰۰۰ ریال.

نفر چهارم: برادر بابك حسیبی ازدبیرستان سروش‌آزادی تهران بمدت ۹ ماه، ماهیانه /۵۰۰۰ ریال جمعاً /۴۵۰۰۰ ریال

نفرپنجم: برادر داریوش دبیری از دبیرستان توحیدشیراز بمدت ۹ ماه، ماهیانه /۵۰۰۰ ریال جمعاً /۴۵۰۰۰ ریال.



نامه‌ها

■ آقای علی‌اکبر ابوطالبی (معلم ریاضی)، نائین

از ابراز خرسندی شما نسبت به انتشار مجلهٔ رشد آموزش ریاضی و اظهار امتنان از مسئولین این مجله سپاسگزاریم. انتشار مجله به صورت ماهانه فعلاً مقدور نیست، ولی امیدواریم که بزودی تعداد شماره‌های آن را در سال از چهار شماره به شش شماره افزایش دهیم. ضمناً لازم به توضیح است که از یک مجله ریاضی نباید انتظار داشت که بجای پرداختن به موضوعات و مباحث‌مختلف ریاضی مبادرت به درج مطالب متعارف و معمولی در زمینه‌های خاص ریاضی نماید.

■ آقای محسن روزبهانی (دانش‌آموز)، تهران

قضیهٔ ارشمیدس راجع به وتر موازی با خط هادی سهمی است که قطعه‌ای از سهمی جدا می‌کند که مساحت آن برابر با وتر ضربدر $\frac{2}{3}$ فاصله راس سهمی از وتر است. ارشمیدس قبل از کشف حساب جامعه و فاضله به وسیله لایبنیتز و نیوتن آن را با وضع تحت مماس و تحت قائم در سهمی پیدا کرده‌است. در وترهای مایل که یک محور مماس بر سهمی و محور دیگر راستای خط مزدوج آن مماس است، معادلهٔ سهمی از نظر شکل تغییر نمی‌کند، و ممکن است قضیهٔ قطعهٔ سهمی ارشمیدس تعمیم پیدا کند. برای این گونه محورها به کتاب هندسهٔ تحلیلی تالیف حسین غیور و محسن غیور (صفحات ۲۸۴—۲۸۵) مراجعه کنید. امید است بعد از مطالعهٔ کتاب در فراغت راه حلها و کارهائی را که کرده‌اید مشروحاً" برای مجله بفرستید.

■ آقای سیدمحمد حسینی (دانش‌آموز)، تهران

مسائل تشریحی کنکور از مسائل تستی آن آموزنده‌تر و از نظر آموزشی مفیدتر است. پیداست دانش‌آموزی که مفاهیم ریاضی را به درستی درک کرده و ضمناً" مبادرت به حل تمرینات متعدد در دروس ریاضی نموده، بسادگی از عهدهٔ حل مسائل تستی برخواهد آمد. بنابراین بهتر است بجای مسائل تستی توجه بیشتری به مسائل تشریحی کنکور مبذول داشت. همچنین به اطلاع می‌رسانیم که مسئولین محترم وزارت آموزش و پرورش در دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی به تاسیس مجلات تخصصی رشد از قبیل فیزیک، شیمی، و غیره همت گمارده‌اند که انشاءا... بزودی در اختیار علاقه‌مندان قرار خواهد گرفت.

■ آقای نوبرپور (دانش‌آموز)، تبریز

تذکر چند مورد غلط چاپی در شماره اول حاکی از دقت شماست. ضمن تشکر، توضیح می‌دهیم که معمولاً" این گونه اغلاط چاپی جزئی اجتناب ناپذیر است.

امیدواریم شماره‌های آتیه حتی‌المقدور عاری از این قبیل خطاهای چاپی باشد. ضمناً" مسائل ریاضی کنکورهای تشریحی را متدرجاً" چاپ خواهیم کرد.

■ خانم معصومه ظهرابی (دانش‌آموز)، خرم‌آباد

از اظهار لطف شما نسبت به مسئولین این مجله تشکر می‌کنیم. توضیح اینکه کتابهای مفید ریاضی را جهت اطلاع علاقه‌مندان به تدریج معرفی خواهیم کرد. امیدواریم با بذل توجه مسئولین کتابخانه‌های عمومی مشکلات شما که ناشی از کمبود کتابهای کمک درسی مفید است مرتفع شود.

■ آقای محمود بهروش (دبیر ریاضی)، بروجرد

تذکرات مفیدی که داده بودید مورد توجه قرار گرفت. چنانکه می‌دانید به دلیل محدودیتی که در مورد تعداد صفحات مجله وجود دارد و مسائل مربوط به مشکلات چاپ نمی‌توان مشروحاً" به بررسی موضوعات مختلف ریاضی پرداخت. همچنین به علت اولویتهای خاصی که در انتخاب مقالات موجودست نمی‌توان سلسله مقالات دنباله‌دار متعدد در آن درج کرد. خوانندهٔ راغب در صورت ملاحظهٔ مطلب مورد علاقهٔ خود، به منظور بحثی مشروحتر می‌تواند به منابع و مراجعی که معمولاً" ذیل مقالات مندرج است مراجعه کند. ضمناً" ایراد شما بر شکل مربوط به مقالهٔ "یک روش مقدماتی برای اثبات دستور محاسبهٔ مساحت دایره" وارد است. از مطالب ارسالی شما عنداللزوم استفاده خواهد شد.

■ آقای بهروز عابدی (دانش‌آموز)، میانه

کارهائی که در ریاضیات مقدماتی انجام داده‌اید، به دلیل اینکه نتیجهٔ تفکرات ریاضی شما بوده حائز اهمیت است. باید تذکر داد که بعضی از روشها و نتایجی که بدست آورده‌اید، در طول تاریخ ریاضی، قبلاً" مورد مباحثه قرار گرفته‌اند. همانگونه که خودتان هم توضیح داده‌اید به علت کمبود منابع معتبر علمی از پیشرفتهای دانش ریاضی بی‌خبر مانده‌اید. در هر صورت آنچه که مهم است بکار انداختن نیروی تفکر و تعقل است و نباید دلسرد شد. با مطالعهٔ کتابهای عمومی ریاضی به معلومات خود بیفزائید. توفیق شما را خواستاریم.

نشریهٔ گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی سازمان پژوهش
نشانی : خیابان ایرانشهر شمالی ساختمان شمارهٔ ۴ تلفن ۸۲۵۹۶۴

بسمه تعالی

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی نشریهٔ گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی سازمان پژوهش وزارت آموزش و پرورش است که با همکاری فنی و هنری دفتر امور کمک آموزشی هر سه ماه یکبار منتشر می‌شود . هدف از انتشار این مجله در وهلهٔ اول ایجاد ارتباط متقابل بین معلمین ریاضی و دفتر مذکور ، به منظور تبادل تجارب و مطالب جنبی و مفید درسی به منظور ارتقاء سطح معلومات معلمین ریاضی است . مجله از مشارکت و همکاری معلمین ریاضی در ارائهٔ مقالاتی ناظر بر اهداف فوق ، بالاخص در زمینهٔ آموزش ریاضی ، استقبال می‌کند .

دبیران و علاقمندان به اشتراک این مجله می‌توانند مبلغ لازم را به حساب ۱۹ خزانه بانک مرکزی قابل پرداخت در کلیه شعب بانک ملی ، واریز و فیش آن را به همراه فرم ذیل به‌آدرس: تهران– خیابان ایرانشهر شمالی – ساختمان شهید موسوی (شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش)– دفتر امور کمک آموزشی – مرکز توزیع ارسال دارند .

اینجانب .... شمارهٔ اول مجلهٔ رشد آموزش ریاضی را (دریافت کردم ☐ / دریافت نکردم ☐)

و بدینوسیله با ارسال فیش واریز مبلغ ۴۰۰/– ریال به حساب شمارهٔ ۱۹ خزانه بانک مرکزی متقاضی اشتراک یکساله مجلهٔ مزبور هستم .

نشانی دقیق متقاضی :

محل فروش آزاد :

خیابان ایرانشهر شمالی ، ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش، کتابفروشی شهید موسوی

دعوت به همکاری

خواستارانی کـه مایل بـه همکاری با این مجله هستند، می‌توانند پیشنهادات و مقالات خود را در هر یك از زمینه‌های ذیل به آدرس مجله، تهران: خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شهید موسوی (شمارهٔ ۴) وزارت آموزش و پرورش، دفتر مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، ارسال دارند.

(آ) آموزش ریاضی (طرح و بررسی مسائل آموزش ریاضی به طور اعم، و آموزش ریاضی در مدارس کشور به‌طور اخص)،

(ب) تاریخ ریاضیات (مشتمل بر ملاحظات تاریخی مفاهیم ریاضی و سیر تطوری و تکاملی آنهـا، شرح احوال ریاضیون و کارهای علمی آنها، به ویژه ریاضیدانان اسلامی و ایرانی).

(پ) فلسفهٔ ریاضی (ریاضیات چیست، موقعیت کنونـی ریاضیات، معرفی و بررسی مکاتب فلسفی مختلف ریاضی، و...).

(ت) سایر مباحث و مسائل ریاضی (ناظر به معرفـی مفاهیمی بنیادی در شعبات مختلف ریاضی، ارائهٔ مسائل نمونه در ریاضیات، و ...).

تبصره

۱ـ مقالات باید حتی‌المقدور در سطحی عرضه شوند کـه قابل فهم و استفادهٔ دبیران ریاضی، دانشجویـان، و دانش‌آموزان ریاضی بوده، در عین حال از کیفیت مطلوبی نیز برخوردار باشند (این مقالات باید ناظر بـه اهداف آموزشی بوده و از جنبه‌های بدآموزی ریاضیات تکنیکی و ماشینی مبرا باشند)

۲ـ مقالات باید روی کاغذ سفید به قطع A۴ (حداکثر در ۱۵ صفحه) با خط خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) به صورت یك سطر درمیان و با رعایت فاصلهٔ مناسب از طرفین کاغذ (۳ سانتیمتر) نوشته و ارسال شود. زیر عناوین، لمها، قضیه‌ها، خط ممتد، و زیر کلمات و جملاتی که مورد تأکید است، خط مقطع کشیده شود.

۳ـ صفحات بـه طور دقیق شماره‌گذاری شود، صفحهٔ اول صرفا به نام و نشانـی مؤلف یا مؤلفین (مترجم یا مترجمین) اختصاص یابد و درصفحهٔ دوم فقط عنوان مقاله درج شود. اشکال، جداول، نمودارها، ... به دقت رسم و علامتگذاری شده و مواضع آنها در مقاله دقیقاً مشخص شود.

۴ـ فهرست منابع و مآخذی که در تدوین مقاله مورد استفاده واقع شده در دو قسمت فارسی و بیگانه به ترتیب قاموسی مشخص شده و ضمیمه مقاله گردد.

۴ـ مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور چاپ شده باشد.

۶ـ مقالات ترجمه شده از زبانهای بیگانه باید همراه با متن اصلی ارسال شود.

۷ـ رد یا قبول مقاله و همچنین ویراستاری آن بـه عهدهٔ هیئت تحریریهٔ مجله است.

Roshd, Magazine of Mathematical Education. Vol. 1. No. 2. Summer 1984.

Mathematics Section, 274 BLDG No. 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave., Tehran, Iran.

A Publication of Ministry of Education, Islamic Republic of Iran

معلمان پس از فراغت از تحصیل، ارتباط منظم و مستمری با رشته تحصیلی سابق خود که رشته تدریسی فعلی آنان است ندارند. بسیاری از آنها به‌حکم وظیفه و شوق خدمت به‌شهرها و حتی بخشهای دور افتاده می‌روند و به‌بحث و درس و استاد و کتاب و کتابخانه و کتابفروشی دسترسی ندارند. تنها کتابی که ناچار در دست آنهاست، غالباً همان کتاب درسی آنهاست که در آن نیز هرساله، تغییراتی کلی و جزئی روی می‌دهد بی‌آنکه آنان دلیل آن تغییرات را شنیده و دانسته باشند. گاهی بخشنامه‌ای که موفق شده خود را از لابلای مقررات و موانع اداری تا دفتر مدرسه برساند بدست معلمان می‌رسد که آن هم لحنی اداری و خشک و کوتاه دارد. کلاسهای آموزش ضمن خدمت نیز اگر تشکیل شود، کافی نیست و همچون باران بهاری کوتاهی است که تند می‌بارد و زود می‌ایستد و دوباره گرمای سخت و تشنگی آغاز می‌شود. اما این صدها هزار معلمی که برای سربلندی و نجات جامعهٔ خود در روستاهای مهجور و شهرهای دور میهن خود خدمت می‌کنند محتاج یک جویبار جاری مداومی هستند که آب زلال سرچشمه‌های علم و تجربه را آهسته و پیوسته همواره در دسترس آنان قرار دهد. آیا «رشد آموزش ریاضی» می‌تواند آن جویبار جاری همیشگی باشد؟ امید ما این است، تا خدا چه خواهد.