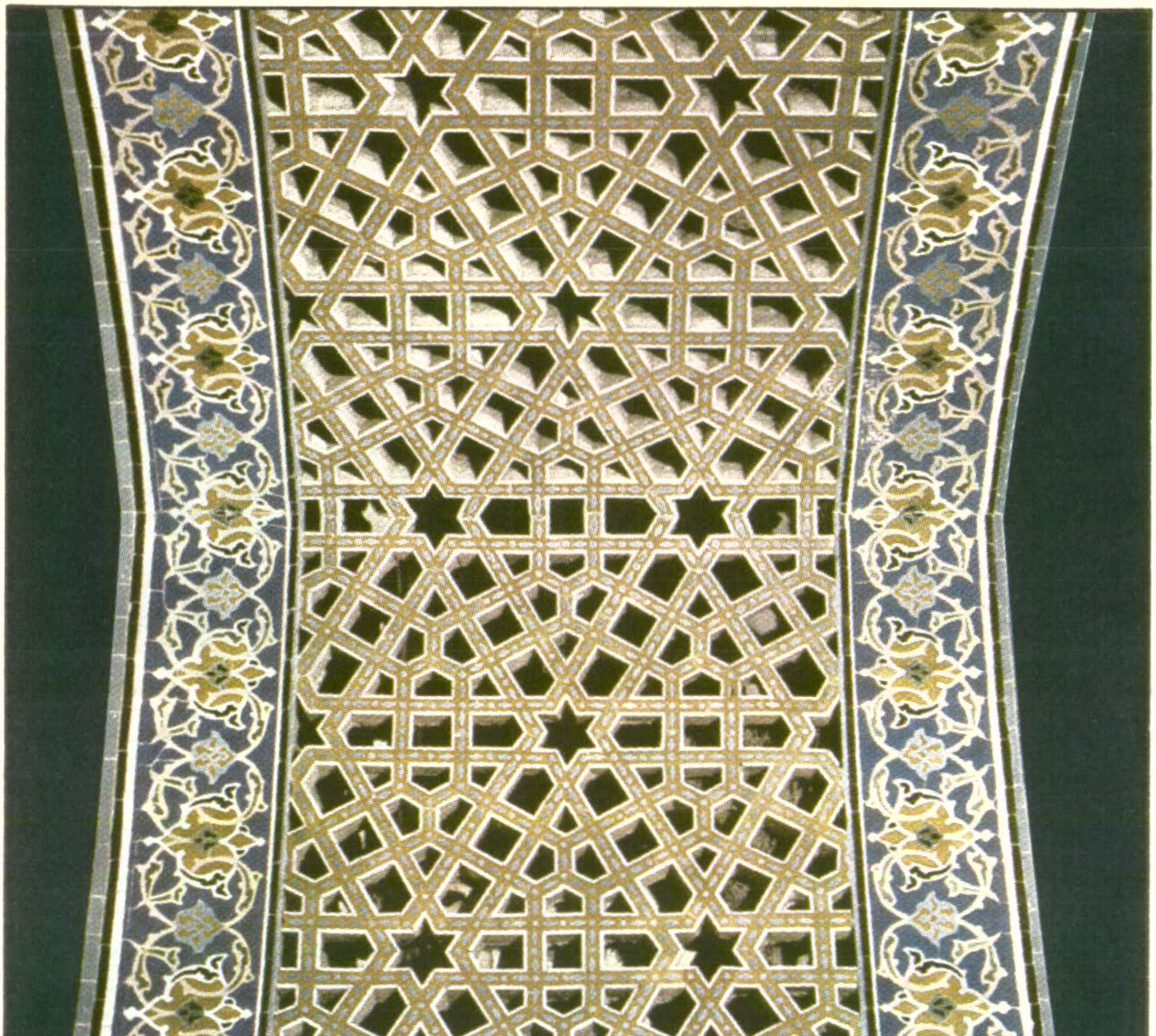
رشد آموزش ریاضی

سال پنجم ـ بهار ۱۳۶۷ شماره مسلسل ۱۷

بها ۱۰۰ ریال



مرحله نهائی پنجمین دورهٔ مسابقات
ریاضی دانش‌آموزان کشور.
«زیباکنار رشت»

رشد آموزش ریاضی

سال پنجم ـ بهار ۱۳۶۷ ـ شماره مسلسل ۱۷

نشریه گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نشانی: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ وزارت آموزش و پرورش تلفن ۴ ـ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۵۰)

سردبیر : دکتر علیرضا مدقالچی

تولید : واحد مجلات رشد تخصصی

صفحه‌آرا: محمد پریسای

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و آشنایی آنان با شیوه‌های صحیح تدریس ریاضی منتشر می‌شود.

فهرست

پیشگفتار		۳
ریاضیدانان دوره اسلامی (۵)	دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل	۴
زیبایی در ریاضیات	دکتر محمدحسن بیژن‌زاده	۶
زندگینامه جورج پولیا	دکتر علیرضا مدقالچی	۱۰
روشی ساده برای تدریس ریاضی	دکتر علی رجالی	۱۴
استقراء ریاضی	ابراهیم دارابی	۱۸
تحدب، تقعر و نقطه عطف	محمود نصیری	۲۵
بررسی معادلات درجه دوم دو مجهولی با استفاده‌از ماتریسها	هاشم پروانه مسیحا	۳۲
اهمیت زوایای °۳۰، °۴۵ و °۶۰	دکتر ارسلان شادمان	۳۸
توابع محدب	دکتر علیرضا مدقالچی	۴۲
حل چند مسأله مانده از شماره‌های قبل	جواد لالی	۴۸
حل دو مسأله	حسین غبور	۵۴
گزارش نوزدهمین کنفرانس ریاضی کشور		۵۸
معرفی مجله نشر ریاضی	دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل	۵۹
مسائل شماره ۱۷	دکتر حسین ذاکری	۶۲
گزارش پنجمین مسابقه ریاضی کشور	میرزا جلیلی	۶۴
معرفی مجله ماهنامه امریکا	دکتر محمدحسن بیژن‌زاده	۶۶
حل مسائل پنجمین مسابقه ریاضی دانش‌آموزان کشور		۶۷
نامه ها		۷۱

توضیح عکس روی جلد: هنر معماری اسلامی، حرم مطهر امام رضا (ع)

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

با درود و سپاس فراوان به پیشگاه ایزدمنان اینك هفدهمین شماره مجلهٔ رشد آموزش ریاضی در اختیار خوانندگان قرار می‌گیرد.

در سرمقالهٔ شماره ۴ این مجله اشاره شده است که عوامل متعددی از گرایش فعال دانش‌آموزان مستعد به رشته ریاضی می‌کاهد، و تذکر داده شده است که هرچه زودتر باید در پی اندیشه تنظیم برنامه‌ای به منظور سوق دادن دانش‌آموزان مستعد به سوی دانش ریاضی باشیم. ضمناً در شماره ۱۶، مقالهٔ مفصل و تحقیقی در مورد علل افت ریاضی از طرف گروه ریاضی دفتر تحقیقات چاپ شده است. دراین مقاله بعضی‌از علل افت ریاضی و راه‌حلهای مقابله باآن مورد بحث قرارگرفته است. غرض از اشاره به مطالب فوق، ذکر این نکته اساسی است که یکی ازوظایف عمده مسئولین آموزش‌وپرورش وآموزش‌عالی کشورشناخت و پرورش استعدادهای درخشان است. مسلماً، تشویق و ترغیب دانش‌آموزان به دانش ریاضی در این راستا قرار دارد. در هفته‌های اخیر شاهد خبرهای مسرت بخشی در این زمینه بوده‌ایم. پنجمین مرحله مسابقات ریاضی استانی و نهایی به عمل آمد و نفرات اول تا دهم این مسابقات انتخاب گردید. مسابقه نهایی به صورت متمرکز به عمل آمد که توسط کمیته مسابقه سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی انجام گرفت. به طوری که در مصاحبه مطبوعاتی ریاست محترم سازمان اشاره گردید شش‌نفر

بقیه در صفحه ۷۰

ریاضیدانان دورهٔ اسلامی (۵)

دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل

قرن چهارم هجری در تاریخ علوم دورهٔ اسلامی اهمیت خاصی دارد. علاوه برکرجی (یا کرخی) ــ که در شمارهٔ ۱۰ مجله به ذکر مختصر احوال و آثار او پرداختیم ــ دانشمندان دیگری در این دوره شهرت و اعتبار یافتند. از جملهٔ اینها ابن‌سینا، یا ابوعلی‌حسین بن‌عبدالله ابن‌سینا ملقب به شرف‌الملک و حجة‌الحق و شیخ الرئیس است. در سال ۳۷۰ هجری (۹۸۰ میلادی) در قریهٔ افشنه نزدیک بخارا چشم به جهان گشود و در سال ۴۲۸ هجری (۱۰۳۷ میلادی) در همدان وفات یافت.

ابوعلی‌سینا، دائرة‌المعارف‌نویس، فیلسوف، طبیب، ریاضیدان، و منجم بود. مشهورترین دانشمند اسلام و یکی از مشهورترین دانشمندان ازهرنژاد، هرمکان، وهرزمان بوده است[۷]. اهمیت ابن‌سینا در تاریخ فلسفه اسلامی بسیار است، زیرا تا عهد او هیچیک از حکمای مسلمین نتوانستند تمامی اجزای فلسفه را که در آن روزگار حکم دائرة‌المعارفی از همه علوم معقول داشت، درکتب متعدد و با سبك روشن بالتمام مورد بحث و تحقیق قرار دهند و او نخستین و بزرگترین کسی است که‌ازعهدهٔ این کار برآمده است[۲]. شهرت او در طب‌کمتر از شهرتش در فلسفه نیست. او ریاضیات را بیشتر در خدمت فلسفه به کارگرفته، مع‌هذا کار او در این رشتهٔ علمی تام او را در ردیف ریاضیدانان برجستهٔ دورهٔ اسلامی قرار داده است. ما عمدتاً به‌این موضوع بعداز شخصیت علمی او می‌پردازیم.

سرگذشت نخستین سی سال عمرش را خود به رشتهٔ تحریر درآورده و بقیهٔ شرح احوال او را شاگرد و مریدش عبدالواحد ابوعبید جوزجانی، که در سال ۴۰۳ (۱۰۱۲ م) به ابن‌سینا ملحق شد، نوشته است. ابوعلی‌سینا، بنابر روایت خود، پس‌ازآنکه در ده سالگی در صرف ونحو و ادبیات و حتی مقداری علم‌کلام تسلط می‌یابد و قرآن را ازبر می‌کند، برای یادگیری حساب هندی پیش مردی سبزی فروش‌که حساب هندی می‌دانسته، فرستاده می‌شود. پس‌از آن، پیش ابوعبدالله الناتلی به تحصیل منطق می‌پردازد و در این رشته بیش‌از استاد از خود زبر دستی نشان می‌دهد. سپس به‌گفتهٔ خود:

«بعداز این شروع کردم وکتابها را خود مطالعه کردم. و شروح آنها را نیز مطالعه می‌نمودم، تا علم منطق را نیك محکم ساختم. و همچنین کتاب اقلیدس را پنج‌یا شش شکل (≃ قضیه) از اولش بخواندم.

و بواقی را بـه مطالعه حل کـردم. و از آنجا انتقال نمودم به مجسطی و چون از مقدماتش فارغ گشتم، و به اشکال هندسه رسیدم، ناتلی گفت:

ــ خود متوجه حل آنها شو! بعدازآن بر من عرض مـی‌کن! تا صواب و خطای آن را بیان کنم!

و حال آن بود کـه مرد از عهدهٔ کتاب برنمی‌آمد. پس شروع کـردم در حـل مجسطی و بسا از مشکلات آن کتاب که او ندانسته بود، مگـر آنکه من بر وی عرض کردم».

در عنفوان شباب، نـوح بـن منصـور پادشاه سامانی را معالجه کرد و از کتابخانهٔ گرانبهای او بهره‌ها برد. درهجده سالگی بر همهٔ علوم زمـان خـویش تسلط یـافته بود. در پایان عمر خود نوشت که اکنون چیزی را می‌داند کـه در جوانی آمـوخته بوده است.

به علت تقلب احوال درآسیای میانه، و نیز به سبب مرگ پدر، ابن‌سینا زادگاه خود را ترك گفت و به گرگانج شتافت و ازآنجا به حکـم ضرورت به خراسان و سپس گـرگـان و ری و همدان و اصفهان رفت. در همدان به وزارت شمس‌الدولهٔ دیلمی رسید و سالهـای آخـر عمر را در اصفهان در حمایت عـلاءالدولهٔ کاکـویه گذراند و در سفری که همراه امیر مزبور به همدان مـی‌رفت در راه بیمار شد و در همدان درگذشت. آرامگاه او را درآنجا برپا داشته‌اند. بـه مناسبت هزارمین سال تولـد وی جشنی در سال ۱۳۳۱ هجری در همدان برپا شد.

ابن‌سینا مردی بسیار پر نیرو بود. با آنکه در دوره‌های آشوبناکی می‌زیست و غـالباً بـا امـور دولتی سروکار داشت، دویست‌وپنجـاه اثر بـه حجمهای مختلف نوشت که بعضی‌ازآنها در واقع بر پشت اسب، هنگام سفر جنگی به همراه امیری، املاء می‌کرد و دیگری می‌نوشت [۱].

از میان آثار مهـم وی دایرةالمعارف عظیمی است بـه نام کتاب الشفاء. این کتاب نمایندهٔ اوج فلسفهٔ مشائی در اسلام است و نیز فصلهایی در منطق و ریاضیات و تاریخ طبیعی دارد. قسمتهایـی از این کتاب در قرن ششم (دوازدهم میلادی) به لاتین ترجمه شده و به چاپ رسیده است. وی در ایـن کتاب، طبقه‌بندی فـارابـی (ابونصر فارابی ۲۵۸ـ۳۳۹ هجری) از علوم را، که در کتاب احصاءالعلوم[۳] به عمل آمده است، بـا اندك تغییری، مـورد پذیرش قرار مـی‌دهد و علوم ریاضی را، دراین طبقه‌بندی، شامل چهار شاخهٔ اصلی و چهار شاخهٔ فرعی می‌داند. شاخه‌هـای اصلی عبارت‌اند از:

۱ـ علم حساب، یـا ارثماطیقی (علم العدد)

۲ـ علم هندسه

۳ـ جغرافیا و نجوم

۴ـ علم موسیقی

توجه ابن‌سینا به ریاضیات بیشترازجنبهٔ فلسفی بود تا جنبهٔ فنی‌آن. وی طرح نه‌نه اعداد و مـورد استعمال آن را در صحت اعمال استخراج جذر و کعب بیان کرده و اصول‌اقلیدس‌را به‌عربی ترجمه کرده است، اما شهرت اودر عرصه ریاضیات به‌خاطر کارهایش درکاربرد ریاضیات در نجوم و فیزیك است[۸]. در اواخر عمر به رصد پرداخته و آلتی شبیه به ورنیهٔ کنونی برای به‌دست‌آوردن نتایج دقیقتر ازآلات رصد، اختراع کـرده است. او مفـاهیم عمـدهٔ فیزیکـی (حـرکت، نور، نیرو، خلاء، و حـرارت و غیره) را بدقت مـورد بحث قرار داده است.

ابوعبید جوزجانـی در رساله‌ای‌کـه دربارهٔ زندگینامهٔ او فراهم‌آورده مطالبی نوشته کـه از بابت بـررسی آثار ریاضی ابن‌سینا جالب توجه است:

«و تتمهٔ کتاب شفا را دراصفهان تصنیف نمود و از منطق و مجسطی فارغ گردید و قبل‌از ایـن، اختصار نمـوده بـودکتاب اقلیدس و ارثماطیقی و مـوسیقی را، و ایراد نموده بود درهرکتاب از ریاضیات زیادتها که محتاج الیه می‌دانست... و در اقلیدس شبهه‌ای چند ایـرادکـرد و در ارثماطیقی خواص حسنه استنباط نمود.»

این نقل‌قول از ابوعبید جوزجانی را ازکتاب زنـدگینامـهٔ ریـاضیدانان دورهٔ اسلامی [۴] آورده‌ایـم. اکنون شرح آثار ریاضی ابن‌سینا را بـه نقل از همین کتاب باختصار نقل می‌کنیم.

مهمترین اثرریاضی ابن‌سینا همان است که درکتاب شفا آورده‌که عبارت است‌از:

۱ـ ارثماطیقی یـا حساب نظری (فن دوم از ریاضیات کتاب شفا).

این بخش ازکتاب شفا جداگـانه در سال ۱۹۷۵ میلادی در مصر بـه چـاپ رسیده است و شامـل چهار مقالـه است (خواص‌العدد،احوال‌العدد من‌حیث اضافه الـی غیره، احـوال‌العدد مـن حیث کیفیة تـألیفه من الـوحدانیات و المتوالیات العشر).

دربعضی ازقسمتهای کتاب نکات جالبی دیده می‌شودکه البته بعضی‌ازآنها پیش‌از وی هم مورد بحث بوده است. از جملهٔ آنها می‌توان موارد زیر را ذکر کرد:

الف ـ دستور تشکیل عـددهـای مثلثی

عددهای مثلثی، عددهایی هستندکه از جمع‌کردن جمله‌های متوالی دنبالهٔ اعداد طبیعی به دست می‌آیند،

۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, ۲۱, ...

بقیه در صفحه ۱۷

مقالهٔ زیر متن سخنرانـی آقـای دکتر محمدحسن بیژن‌زاده عضو هیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم است که بنابه دعوت دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی درسی وزارت آموزش و پرورش در بهمن مـاه ۶۵ برای جمعی از دبیران ایراد شده است.

زیبایی در ریاضیات

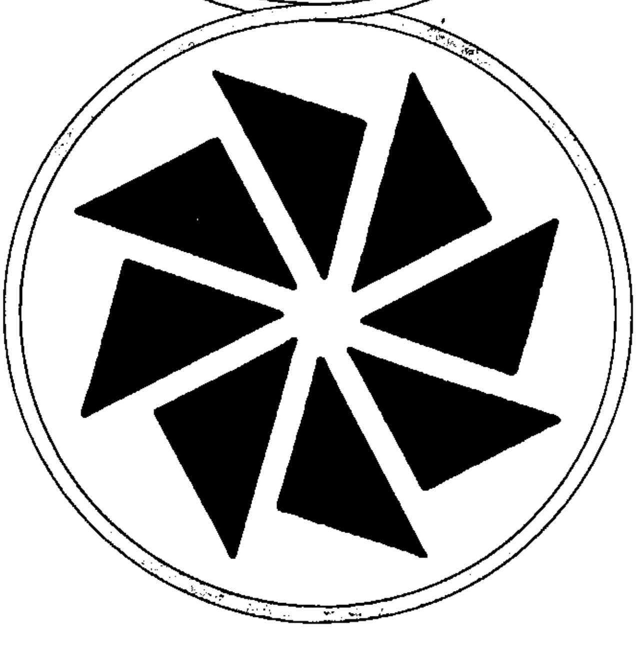
دکتر محمدحسن بیژن‌زاده
دانشیار دانشگاه تربیت معلم

«ما خیلی به ریاضیات می‌پردازیم و احکام آن را به‌خاطر زیبایی معنویشان تأیید می‌کنیم. زیرا اگر این شور و هیجان فراموش شود ما دیگر ریاضیات را نمی‌فهمیم، مفاهیم آن از هم می‌پاشند و برهانها استحکام خـود را از دست مـی‌دهند. ریاضیات بی معنی می‌شود و در انبوهی از مکرر گـوییهای پوچ فرو می‌رود.»

(مایکل پولانی در کتاب معرفت شخصی)

گو اینکه انگیزه پیدایش ریاضیات مسایل عملی بوده است ولی می‌توان گفت کـه در بسیاری از موارد نیز ریاضیات بـه خاطر زیبایی‌اش خلق و ابداع شده است و به خاطر آن به‌پیش مـی‌رود. وقتی یونانیان در چندین هزار سال پیش بـه بسط نظریه مقاطع مخروطی پرداختند هرگز تصور نمی‌کردند کـه این نظریه روزی کاربردی برای «تسخیر فضا» پیدا کند. البته منظور این نیست که کاربرد ریاضیات فراموش شود و یا کـم اهمیت‌جلوه کند. بلکه مقصود این است که ریاضیات را نباید فقط به خاطر کاربرد آن مطالعه کرد. به قول هیلبرت[1] **کاربرد نباید ملاك ارزش ریاضیات بـاشد.** خوشبختانه هردوی اینها موید یکدیگرند.

اما ملاك زیبایی یك قطعه ریاضی چیست؟ می‌دانیم یك قطعه ریاضی کـه محتوای یك حکـم و دلیلی بـرای آن است معمولاً قضیه نـامیده مـی‌شود. در هـر مبحثی از ریاضیات بعضی از قضایا به دلایلی از بعضی دیگر مهمتر هستند. از بیان محتوا و برهان آنها بیشتر خوشمان می‌آید. اگر از دید هنری بنگریم باید بگوییم که آنها را زیباتر از بقیه می‌بینیم. البته در سایر معارف بشری نیز چنین وضعی مشاهده می‌شود، در هنر، شعر و ادبیات و قس علیهذا.



حال ببینیم یك قضیه ریاضی را چه موقع مـی‌توان واجد مفهوم زیبایی دانست. برای‌آن‌که یك قضیه ریاضی زیبا باشد باید دارای پنج ویژگـی باشد. این ویژگـی‌ها عبارتند از: کلیت، عمق، غیر منتظره بودن، تلخیص و حتمیت. سه ویژگی نخست مربوط به محتوای قضیه و دوتای‌آخـر در مورد ارائه آن هستند. برای روشن‌تر شدن مطلب مثالهایی ذکر می‌کنیم. درانتخاب این مثالها سعی شده تا آنها برای اکثر خوانندگان آشنا باشند.

قضیه۱(اقلیدس). مجموعه‌اعداداول نامتناهی است.

توضیح. می‌دانیم عدد اول عددی است که به اعداد کوچکتر از تجزیه نشود. بنابراین هیچ یك از اعداد

$$۶ = ۲ \times ۳ \quad \text{و} \quad ۲۸ = ۲ \times ۲ \times ۷$$

و

$$۲۷۰ = ۲ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۵$$

اول نیستند ولـــی مثلاً اعـداد ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۹ و ۲۳ اول هستند. نقش اعداد اول در میان اعداد صحیح مثل نقش عناصر در شیمی است. تعریف عدد اول ممکن است بدواً این تصور را ایجادکندکـه اگـر عددی به قدر کافی بزرگ باشد قابل تجزیه به دو عددکـوچکتر بوده و لذا اول نیست؛ ولی قضیه اقلیدس خلاف این تصور را حکم می‌کند.

برهان. فرض‌کنیم (فرض خلف) تعداد اعداد اول متناهـی بوده و p بزرگترین عدد اول باشد. عدد

$$q = ۲ \times ۳ \times \cdots \times p + ۱$$

از p بزرگتر است، مثلاً $q > ۲p$. پس q باید غیر اول بـاشد. لـذا q قابل تجزیه بـه اعداد اول بوده و در نتیجه مقسوم‌علیه‌هایی در بین اعداد ۲، ۳، ...، p (همهٔ اعداد اول موجود) خـواهد داشت. لیکن هـر یك از این اعداد چون حاصلضرب $p \times \cdots \times ۳ \times ۲$ را عاد می‌کند. لذا باید ۱ را نیز عادکندکـه خلاف واقع است. لذا فرض خلف باطل بوده و مجموعه اعداد اول نامتناهی است.

هر یك از ویژگی‌های پنجگانه فوق را این قضیه داراست. پس یك قضیه‌کلی است. ارائه قضیه بـه طرزی خـلاصه بیان شده است و برهان‌آن‌که به روش برهان خلف ارائه شده است حتمیت قطعی‌قضیه‌را بیان می‌کند. عمق قضیه تا بدان حداست که می‌توان‌آن را آغازگر شاخه‌ای از ریاضیات به نام نظریه اعداد دانست. اگـر تعداد اعداد اول متناهی می‌بود دیگـر مسأله‌ای در میان این اعداد باقی نمی‌ماند. در حالی‌که اگر مسائل مربوط بـه اعداد اول، چه مسائل حل شده و چه مسائل حل نشده را فهرست‌وار بیان بکنیم خـود به اندازه یك‌کتاب قطور می‌شود. برای نمونه چند تا از مسائل حل شده و چند مسأله حل نشده این رشته را در اینجا ذکر می‌کنیم:

(آ) به ازاء هر عدد طبیعی n، عدد اولی بین n و $۲n$ وجود دارد $(n > ۱)$.

(ب) آیا به ازاء هر عدد طبیعی n $(n > ۱)$ عدد اولی بین $n^۲$ و $(n+۱)^۲$ وجود دارد؟ هیچکس نمی‌داند.

(ج) فاصله‌های دلخواه از اعداد طبیعی هست‌کـه از اعداد اول‌آزادند، یعنی دراین فاصله‌ها هیچ عدد اولی وجود ندارد.

(د) آیا هر عدد زوج حاصلجمع دو عدد اول است؟

دو عدد اول را که اختلاف‌آنها ۲ باشد اعداد اول دوقلو می‌نامیم مـانند ۱۷ و ۱۹ و یـــــا ۱۰,۰۰۶,۴۲۷ و ۱۰,۰۰۶,۴۲۹.

(ه) آیا تعداد اعداد اول دوقلو نامتناهی است؟

(و) بزرگترین عدد اول شناخته شده. تا سال ۱۹۷۹ عدد $۲^{۲۷۷۰۱} - ۱$ بزرگترین عدد اول شناخته شده بـود. در سال ۱۹۸۴ اسلوینسکی ثابت‌کـرد که عدد $۲^{۸۶۲۴۳} - ۱$ یك عدد اول است واین عدد بنام عدد اسلوینسکی شهرت یافت. برای اول بودن این عدد، اسلوینسکی ازکامپیوترغول پیکر کری ـ وان استفاده‌کـرد. برای‌آزمایش اول بودن این عددکه ۲۵۹۶۲ رقم دارد ۱ ساعت و ۳ دقیقه و ۲۲ ثانیه طول‌کشید تـا آنکه کامپیوتر محاسبات مربوطه را انجام داد!!

برای‌آنکه تصوری ازبزرگی عدد اسلوینسکی داشته باشید ستونی از سکه‌هـای ۲۰ ریالـی را تصورکنیدکـه تعداد این سکه‌ها به اندازه عدد اسلوینسکی باشد. فکر می‌کنید ارتفاع ستون چقدر خـواهد بـود؟ ۱۰۰۰ کیلومتر؟ ۱۰۰۰۰ کیلومتر؟ تا کره ماه؟ خیلی بیشتر از اینها. این ستون از ماه و خورشید خواهدگذشت از منظومه شمسی نیز خواهدگذشت و حتی قطر کهکشانی‌که منظومه شمسی ما جزیی ازآن است نیز کوچکتر از طول این ستون است!

(ز) مسئله توزیع اعداد اول. یکی از پیچیده‌ترین مسائل مربوط به‌اعداد اول مسئله توزیع‌این‌اعداد در میان اعداد طبیعی است. توزیع اعداد اول صورت نرمال نیست. برای مثال بین

۱ تا ۱۰ تعداد ۴ عدد اول وجود دارد درحالی‌که بین ۱ تا ۱۰۰ فقط ۲۵ عدد اول موجود است. درفاصله ۹,۹۹۹,۹۰۰ تا ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ نه عدد اول

۹,۹۹۹,۹۰۷   ۹,۹۹۹,۹۰۱

۹,۹۹۹,۹۳۱   ۹,۹۹۹,۹۲۷

۹,۹۹۹,۹۴۳   ۹,۹۹۹,۹۳۷

۹,۹۹۹,۹۷۳   ۹,۹۹۹,۹۷۱

و

۹,۹۹۹,۹۹۹

وجود دارند درحالی‌که در بین ۱۰۰ عدد بعدی یعنی درفاصله [۱۰,۰۰۰,۱۰۰ و $۱۰^{۷}$] فقط دو عدد اول یعنی:

۱۰,۰۰۰,۰۱۹ و ۱۰,۰۰۰,۰۷۹ وجود دارند!

برای بررسی و مطالعه دقیقتر این مسأله تابعی با حوزه تعریف N (مجموعه اعداد طبیعی) و با ضابطه

$\pi(n)=$ تعداد اعداد اول کوچکتر یا مساوی با n

تعریف می‌کنیم. بعضی‌از مقادیر این تابع به ازاء توانهای متوالی ۱۰ و نسبت $n/\pi(n)$ در جدول ذیل درج شده است.

n	π(n)	n/π(n)
۱۰	۴	۲/۵
۱۰۰	۲۵	۴/۰
۱۰۰۰	۱۶۸	۶/۰
۱۰۰۰۰	۱,۲۲۹	۸/۱
۱۰۰۰۰۰	۹,۵۹۲	۱۰/۴
۱,۰۰۰,۰۰۰	۷۸,۴۹۸	۱۲/۷
۱۰,۰۰۰,۰۰۰	۶۶۴,۵۷۹	۱۵/۰
۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰	۵,۷۶۱,۴۵۵	۱۷/۴
۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰	۵۰,۸۴۷,۵۲۴	۱۹/۷
۱۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰	۴۵۵,۰۵۲,۵۱۲	۲۲/۰

ملاحظه می‌کنیم که وقتی n به قدرکافی بزرگ باشد (از سطرهای آخر جدول به بعد) مقدار $n/\pi(n)$ به نسبت ۲/۳ اضافه می‌شود (۲/۳ = ۱۹/۷ − ۲۲/۰). می‌دانیم $۲/۳ \# \log_e ۱۰$ که e عدد نپر است. ثابت می‌شود که

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \frac{\pi(n)}{n/\log n}=۱$$

این قضیه که به قضیه اعداد اول مشهور است در سال ۱۷۹۲ برای اولین بار توسط گاوس[۳] حدس زده شده. جی. هادامارد[۴] در سال ۱۸۹۶ برهانی برای آن ارائه داد که متضمن ارتباط تابع $\pi(n)$ با تابع مختلط

$$\zeta(z)=۱+\frac{۱}{۲^{z}}+\frac{۱}{۳^{z}}+\cdots=\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-z}$$

است. تابع ζ به نام تابع زتای ریمان[۵] مشهور است و خود یکی از مباحث پیچیده و در عین حال جالب موضوع آنالیز مختلط می‌باشد. حل مسائل نظریه اعداد به‌کمک آنالیز مختلط موضوع شاخه‌ای از ریاضیات به نام نظریه تحلیلی اعداد می‌باشد.

قضیه ۲ (ارشمیدس). $\sqrt{۲}$ اصم است.

برهان. برای اثبات این قضیه باید ثابت کنیم که $\sqrt{۲}$ را نمی‌توانیم به‌صورت p/q، که درآن p و q دو عدد صحیح هستند، بنویسیم. فرض کنیم (فرض خلف) که $\sqrt{۲}$ اصم نباشد. پس (۱) $\sqrt{۲}=p/q$. می‌توان فرض کرد که $(p,q)=۱$، که (p,q) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك p و q است. پس

$$۲=p^{۲}/q^{۲}$$

و یا

$$(۲) \quad p^{۲}=۲q^{۲}$$

چون $۲|p^{۲}$ و ۲ اول است پس $۲|p$ یعنی $p=۲p'$. با قرار دادن این مقدار در (۲) خواهیم داشت:

$$۴p'^{۲}=۲q^{۲}$$

$$q^{۲}=۲p'^{۲}$$

و لذا $q=۲q'$. از اینجا نتیجه می‌شود که ۲ یك مقسوم‌علیه مشترك p و q است و این با فرض $(p,q)=۱$ متناقض است. پس فرض خلف باطل بوده و $\sqrt{۲}$ اصم است.

قضیه ارشمیدس نیز همه ویژگی‌های زیبایی را داراست. کلیت قضیه بدان جهت است که خودآغازگر معرفی مجموعه‌ای از اعداد اصم است. از نظر تاریخی $\sqrt{۲}$ اولین عدد اصم شناخته شده می‌باشد[۶]. می‌دانیم مجموعه اعداد اصم پایه آنالیز ریاضی است و از اینجا عمق این قضیه نیز آشکار می‌شود.

به عنوان مثال دیگر از قضیه فیثاغورس در هندسه یاد

می‌کنیم. این قضیه نیز مانند دو قضیه قبل قدمتی چند هزار ساله دارد. همهٔ ویژگیهای زیبایی نیز در این قضیهٔ نهفته است. برهانهای مختلفی درطول تاریخ برای اثبات این قضیهٔ ارائه‌شده است. ای. اس. لومیس درکتاب خود تحت عنوان قضیه فیثاغورس ۳۷۰ برهان از این قضیه را گردآوری کرده است. عمق این قضیه نیز برهمگان روشن است. پایه واساس مثلثات مسطحه که بر اتحاد اول مثلثاتی $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ استوار است از این قضیه ناشی می‌شود.

مثالهای بسیاری از قطعات زیبای ریاضی در سرتاسر شاخه‌های ریاضی از جمله جبروآنالیز به چشم می‌خوردکه در اینجا جهت احتراز از اطاله‌کلام از ذکر آنها خودداری می‌شود.

پاورقی‌ها

۱. D. Hilbert
۲. Cray -1
۳. Gauss ریاضیدان بزرگ آلمانی که او را امیر ریاضیات آلمان در قرن نوزدهم دانسته‌اند.
۴. J. Hadamard
۵. B. Reimann
۶. با کشف $\sqrt{2}$ همه قضایای نظریه فیثاغورسی تناسب باید به کمیتهای متوافق محدود می‌گردید و نظریه عمومی اشکال تشابه آنها از اعتبار افتاد. این «رسوایی منطقی» آن چنان عظیم بود که برای مدتی سعی شد موضوع مخفی نگهداشته شود، و افسانه‌ای با این مضمون وجود دارد که هیپاسوس از پیروان فیثاغورس به‌خاطر عدم تقوایش درافشای این راز نزد اجانب، در دریا به هلاکت رسید یا مطابق روایت دیگری از جامعهٔ فیثاغورسیان تبعید شد و قبری برای وی برپا کردندآنچنانکه گویی مرده است.

مراجع

1. G. H. Hardy, A mathemation apology.
۲. آشنایی با تاریخ ریاضیات، هاورد و. ایوز ترجمه دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل، مرکز نشر دانشگاهی.
۳. هندسه نااقلیدسی و اقلیدسی، ماروین جی‌گرینبرگ ترجمه دکتر محمد هادی‌شفیعها، مرکز نشر دانشگاهی.

زندگینامه جورج پولیا ریاضیدان برجسته معاصر

ترجمه و اقتباس
دکتر علیرضا مدقالچی

جورج پولیا در تاریخ ۱۳ دسامبر ۱۸۸۷ میلادی در شهر بوداپست به دنیا آمد. پدرش یاکوب (۱۸۴۴–۱۸۹۷) ومادرش آنا (۱۸۵۳–۱۹۳۹) نام داشت. پدر او در یك شرکت بیمه بین‌المللی در مجارستان سمت حقوقدان داشت. علاقهٔ اصلی یاکوب به‌اقتصاد وآمار بود. لذا او در این راستا ادامه می‌داد تا جایگاهی آکادمیك در اقتصاد به دست آورد. از اینرو تمام وقت خود را وقف تحقیق می‌کرد. در حالی که به وسیله وکالت امرارمعاش می‌کرد، چندین کتاب و مقاله نوشت. اوچندین زبان ازجمله انگلیسی‌را به اندازه کافی آموخت که کتاب ثروت ملل آدام اسمیت را به‌زبان مجارستانی ترجمه کرد. این ترجمه مدتها کتاب درسی مدارس در مجارستان بود. اندکی قبل‌از فوتش موفق شدکه به عنوان پریوات دوتسنت (استاد بدون کرسی) دانشگاه بوداپست انتخاب شود.

وقتی جورج ده ساله بود پدرش فوت کرد و همسر و دوبرادر و دو خواهر از خود به جای گذاشت. یك خواهر او در طفولیت درگذشت. برادر بزرگتر او وارد رشته پزشکی گردید و جراح برجسته و یکی از اساتید جراحی دانشگاه گردید. گرچه او یك روش جراحی معده که به نام او مشهور است ابداع کرد به ریاضیات عشق می‌ورزید و همواره از انتخاب رشتهٔ پزشکی متأسف بود. سالها بعد برادر کوچکتر جورج در جنگ جهانی اول کشته شد.

مادر او مصر بودکه جورج حرفهٔ پدرش را تعقیب کند. لذا او در سال ۱۹۰۵ در دانشگاه بوداپست در رشتهٔ حقوق ثبت‌نام نمود. ولی به علت عدم علاقه فقط یك نیمسال در این رشته ادامه داد سپس در رشتهٔ زبان و ادبیات به مدت دو سال تحصیل کردکه این ادامه تحصیل منجر به اخذگواهینامه تدریس در دوره‌های دبیرستان گردید ولی او از این مدرك هیچگاه استفاده نکرد. اوکه دوستدار ادبیات بود ــ در حالی که هنوز شاگرد دورهٔ اول دبیرستان بود اشعار هاینه را به زبان مجارستانی برگرداند ــ او به فلسفه هم علاقمند بود. یکی از استاتید فلسفه او را متقاعد کرد که مطالعه ریاضیات و فیزیك او را در درك مسائل فلسفی یاری می‌کند. لذا مطالعهٔ جدی ریاضیات را شروع کرد، موضوعی که او در سالهای اول تحصیلش چندان علاقه‌ای به آن نشان نداده بود.

در دانشگاه بوداپست استاد فیزیك او، فیزیکدان معروف لوراند اوتوس[1] بود. ولی کسی که تأثیر زیادی بروی گذاشت ریاضیدان معروف لئوپرلد فه‌یر[2] بود. او شخصیت‌جاذبی‌داشت. مکالمات گرم او با دانشجویانش، بسیاری را دور او جمع می‌کرد. به این ترتیب بودکه پولیا به سوی ریاضیات کشیده شد و از فیزیك و فلسفه دوری جست. در سالهای اخیر اودر این مورد چنین گفت: «فکر کردم من برای فیزیك چندان مناسب نیستم و برای فلسفه بسیار مناسب هستم. ریاضیات در بین این دو قرار دارد.»

پولیا سال‌تحصیلی ۱۱–۱۹۱۰ میلادی را در دانشگاه وین گذرانید، و از طریق تدریس به فرزندان اشراف محلی امرارمعاش می‌کرد درسال ۱۹۱۲ میلادی به بوداپست برگشت و دکتری خود را در ریاضیات اخذکرد. سالهای ۱۹۱۲و ۱۹۱۳ میلادی را درگوتینگن صرف کرد و درآنجا کلاین[3]، هیلبرت[4]، رونگه[5]، لانداو[6]، وایل[7]، هکه[8]، کوران[9] و توپلیش[10] را ملاقات کرد. درسال ۱۹۱۴ در انستیتوی تکنولوژی فدرال سویس (ETH)[11] شغلی قبول کردکه به‌وسیله هورویتس[12] پیشنهاد شده بود. رابطهٔ این دو بسیار صمیمی ولی کوتاه بود زیرا هورویتس در ۱۹۱۹ میلادی درگذشت. این دو فقط یك مقاله مشترك منتشر کردند [۱۹۳۷].

مدیر بخش ریاضی ETH آرتور هیرش[12] بود وازهمکاران او ریاضیدانان معروفی چون پلانچرال[13] هرمان وایل و حتی برنیس[14] که ازگوتینگن آمده بود، بودند. او با پلانچرال همکاری نزدیکی داشت و یك مقاله مشترك در زمینه انتگرال فوریه نوشتندکه دارای اهمیت ویژه‌ای است. مشترکات او و هرمان وایل بسیارکم بود. وایل به تعمیمهای گسترده علاقمندتراز پولیا بود. بااین حال رابطه شخصی‌آنها صمیمانه‌تر بود. او دو مقاله به افتخار هرمان وایل منتشر کرد، گرچه اظهار می‌کردکه از دیدگاه ریاضی هیچگاه همدیگر را درك نکردند.

در جنگ جهانی اول، علیرغم الزام خدمت سربازی برای همه، تحت‌تأثیر نفوذ برتراند راسل از بازگشت به مجارستان امتناع کرد و در سویس اقامت گزید.

در سال ۱۹۱۸ میلادی به عنوان شهروند سویس درآمد و در این سال ازدواج نمود.

او بین سالهای ۱۹۱۴ تا ۱۹۲۸ از

مقام پریوات دوتسنت تا استادی کامل را طی نمود. در سال ۱۹۲۴ با استفاده از بورس مؤسسه راکفلر به منظور تحقیق با هاردی[15] درکالجهای اکسفورد وکمبریج به‌انگلستان اعزام گردید. این بورس بنا به پیشنهاد هاردی در اختیار پولیا قرار گرفت. نتیجه این همکاری منجر به چاپ کتابی در مورد نامساویها[16] گردید که در سال ۱۹۳۴ به وسیله مرکز نشر دانشگاهی کمبریج به چاپ رسید. لازم به ذکر است که مؤلف این کتاب هاردی، لتیلوود[17] و پولیا می‌باشد که هنوز بعداز پنجاه سال جزو منابع استاندارد است ونامساوی‌های ویژهٔ این کتاب الهام‌بخش بسیاری از مقالات بعدی شده است.

درسال ۱۹۲۳ پولیا وهم‌میهن جوانتر او گابورسگو[18]، که او را از بوداپست می‌شناخت،همکاری خود را با امضاء قرار دادی با مؤسسه انتشاراتی اشپرینگر به امضاء رساندندکه نتیجه این قرار داد همکاری‌درازمدت برای‌جمع‌آوری مسائلی در زمینه‌آنالیز بود. این کتاب تحت‌عنوان مسائل و قضایای آنالیز می‌باشد. سگو دکترای خود را در سال ۱۹۱۸ از دانشگاه وین اخذکرد و در سال ۱۹۲۱ به استخدام دانشگاه برلین درآمد. پولیا ایدهٔ کتاب آنالیز فوق را در ذهن خود می‌پروراند ولی تشخیص دادکه برای انجام این کار نیاز به همکاری دارد، لذا به سگو پیشنهاد همکاری داد. پولیا زمانی متذکر گردیدکه دو جلد این‌کتاب نتیجه یك همکاری درستی بوده است زیرا هریك مباحثی را می‌دانستندکه برای دیگری بیگانه بود. اولین مقاله سگو حل مسأله‌ای بودکه توسط پولیا درسال ۱۹۱۳ عنوان شده بود. این تحقیق به‌کثیرالجمله‌ایهایی متعامد منجر گردیدکه مهمترین کار سگو به حساب می‌آید.

سالهای اقامت در زوریخ برای پولیا بطور باور نکردنی بارآور بود. در این زمان هر سال در حدود دوازده مقاله چاپ نمود. شگفت‌آورتر از تعداد، دامنهٔ وسیع آنها بود. در ۱۹۱۸ مقالاتی در مورد سریها، نظریه اعداد، ترکیبات، وسیستمهای رأی‌گیری و نیز در زمینه نجوم، احتمال و تعلیم وترتیب منتشر نمود. همه اینها زمانی انجام گردیدکه او مشغول‌کار بسیار اساسی خود یعنی توابع انتگرال بود، ودرقسمتی از این‌دوره، با سگو مشغول جمع‌آوری و نوشتن‌کتاب آنالیز فوق‌الذکر بود.

در دهه ۱۹۳۰ پولیابا گاستن ژولیا[19] در مورد تعدادی از مسائل همکاری نزدیك داشتند. این همکاری منجر به مسافرتهای منظم وی به پاریس گردید. قبلاً در سال ۱۹۱۴ در دیدار از پاریس او با پیکار[20] و آدامار[21] ملاقات‌کردکه با آدامار علاقه مشترك علمی داشت.

درسال ۱۹۳۳، پولیا دوباره به عنوان بورسیه راکفلر، برای دیدار یکساله از پرینستون، برگزیده شد. گرچه درآنجا ریاضیدانی نبودکه با او همکاری نزدیك داشته باشد، او مسائلی را با اسوالد وبلن[22] مورد بحث قرار می‌داد و سایر ریاضیدانان ایالات شرقی‌آمریکا، از جمله ج. د. بیرکوف را ملاقات کرد. در تابستان همان سال از استانفورد دیدار کرد، چند سال بعد در ۱۹۳۰، سگو که از برلین به‌گونیکبرگ رفته بود، تحت فشار نازیها مجبور به ترك آلمان گردید. او نخست به دانشگاه واشنگتن، سنت لوئیس، و سپس به استانفورد رفت و در آنجا سرپرست بخش ریاضی گردید. این امر در تعیین خطمشی زندگی پولیا بسیار مؤثر بود. اوضاع اروپا بسیار وحشتناك بود، لذا پولیا در سال ۱۹۴۰ از طریق لیسبون عازم‌آمریکا گردید و بعداز مدتی کار در دانشگاه براون و کالج اسمیت، در سال ۱۹۴۰ به استانفورد رفت. این عزیمت منجر به همکاری او وسگو گردید که نتیجه این‌همکاری،سبب انتشار مقالاتی در زمینهٔ فیزیك و ریاضی گردید، و همچنین کتاب نامساویهای همپیرامونی در فیزیك ریاضی از نتایج این همکاری است.

کمی قبل‌از عزیمت به‌آمریکا، پولیا در آلمان پیشنویس‌کتابی را در زمینهٔ حل مسائل به‌آلمانی نوشته بود و بعداً آنرا به انگلیسی نوشت و تحت عنوان«چگونه حل‌کنیم» منتشر نمود. این‌کتاب در سال ۱۹۴۵ منتشر گردید و تا به حال متجاوز از یك میلیون از نسخ‌آن به فروش رفته است. این‌کتاب به هفده زبان ترجمه شده است[23]. به دنبال‌آن او «ریاضیات و استدلالهای موجه[24]» را درسال ۱۹۶۲ و «اکتشات ریاضی[25]» را در سال ۱۹۶۵ منتشر نمود.

در دهه ۱۹۵۰ او اوقات قابل ملاحظه‌ای را وقف نشر و تدریس آموزش ریاضی نمود که سبب شهرت او در آموزش ریاضی نه تنها در آمریکا، بلکه در جهان گردید. بین سالهای ۱۹۵۵ تا ۱۹۷۴ متجاوز از هزار معلم را در انستیتوهای مختلف آموزش داد.

در ۱۹۴۶ سگو و پولیا از طرف دانشگاه استانفورد مسابقات دبیرستانی را به تقلید ازمسابقات اوتوس بنیانگذاری کردند. هر سال در این مسابقه ۱۲۰۰ نفر در ۱۵۱ مرکز در ایالات غربی رقابت می‌کردند. پولیا و کیلپاتریك[26] مسائل را جمع‌آوری‌کرده و در سال ۱۹۷۴ با حل منتشر کردند.

بعداز جنگ جهانی دوم پولیا و تیبور رادو[27] و اروینگ‌کاپلانسکی[28] کمیته‌ای برای‌آزمون پوتنم[29] بوجودآوردند. او از سال ۱۹۴۸ تا ۱۹۵۰ عضوکمیته

جایزه این مسابقه گردید.

از سال ۱۹۳۵ تا ۱۹۶۰ پولیا استاد راهنمایی رسالهٔ دکترای متجاوز از سی نفر دانشجو بود که اکثر آنها اکنون از ریاضیدانان معروف جهان هستند.

در سال ۱۹۸۰ در برکلی به عنوان رئیس افتخاری چهارمین کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی مفتخر گردید ولی به علت نقاهت قادر به شرکت در این کنگره نگردید. در این زمان بود که به همسرش گفت که او، نسبت به آنچه که در زندگیش انجام داده است، راضی است. بعد از این نقاهت، علیرغم ضعف شدید بینایی به ویراستاری و راهنمایی چندین پروژه تحقیقاتی ادامه داد. او در هفتم سپتامبر ۱۹۸۵ در اثر یك حمله قلبی در کالیفرنیا در گذشت.

در زمان مرگ، عضو انجمن ریاضی لندن به مدت ۶۵ سال و عضو افتخاری آن به مدت ۲۹ سال بود. در سال ۱۹۴۷ به عنوان عضو آکادمی علوم پاریس برگزیده شد که این جایگاه به پوسین[30]، کلاین، سیلوستر[31] و اشتاینر[32] تعلق داشت. پولیا همچنین عضو آکادمی ملی آمریکا (۱۹۷۶)، آکادمی علوم مجارستان (۱۹۷۶) آکادمی آمریکائی صنایع و علوم (۱۹۷۴)، آکادمی بین‌المللی فلسفه علوم بروکسل (۱۹۶۵)، عضو افتخاری انجمن ریاضی سویس (۱۹۵۷)، عضو آکادمی نیویورك (۱۹۷۶)، انجمن ریاضی بریتانیا (۱۹۷۲) و چند انجمن علمی دیگر بود. در ۱۹۶۳ مدال «خدمت برجسته» را از انجمن ریاضی آمریکا دریافت کرد. او به دریافت دکترای افتخاری از انستیتوی تکنولوژی فدرال سویس (Dr. Sc. ۱۹۴۷)، از دانشگاه آلبرتا (۱۹۶۱ LL. D.)، از دانشگاه ویسکانزاس (D. Sc. , ۱۹۶۹) و دانشگاه واترلو (Dr. Math, ۱۹۷۱) مفتخر گردید.

به خاطر پیشگامی او در آنالیز ترکیبی[33] انجمن ریاضی کاربردی و صنعتی جایزه‌ای تحت عنوان «جایزه پولیا» را در این نظریه ایجاد نمود. انجمن ریاضی آمریکا هر سال جایزه‌ای تحت عنوان «جایزه پولیا» به مقالات توصیفی ممتاز مندرج در مجله ریاضیات دبیرستانی[34] اعطاء می‌نماید. در ۱۹۸۷ انجمن ریاضی لندن اعلام کرد که برای تحقیقات برجسته به‌وسیله ریاضیدان انگلیسی «جایزه پولیا» اعطاء می‌شود.

شاید، مهمتر از این همه افتخارات او، این حقیقت باشد که او به وسیله همکاران، دانشجویان سابق، و بسیاری از دوستان خود در جهان مورد تحسین و احترام بی‌حد می‌باشد. در دیوار کتابخانه استانفورد فقط یك تمثال وجود دارد و آن متعلق به پولیا است.

یورگه لوئیس بورخس[35] زمانی گفت که «وقتی که نویسندگان می‌میرند، آنها تبدیل به کتاب می‌شوند» در سمپوزیوم بزرگداشت او اردش یکی از برجسته‌ترین ریاضیدانان معاصر جملهٔ فوق را چنین تکرار کرد «خدایا قضایای او (پولیا) را جاودان گردان!»

پولیا ریاضیدان و معلم

زمانی که از او سئوال شد که کدام یك از ریاضیدانان گذشته را مورد تحسین قرار می‌دهد او بدون تردیدی پاسخ داد اویلر، او می گفت: «در میان ریاضیدانان قدیمی، بیش از همه تحت تأثیر اویلر بوده‌ام و این بیشتر به این خاطر بود که او کارهایی را انجام داده است که هیچ یك از ریاضیدانان هم‌طراز او انجام نداده‌اند. اویلر تشریح می‌کند که چگونه نتایج خود را بدست آورده است و من عمیقاً به این موضوع علاقه‌مند هستم». او همچنین می گفت «اویلر بسیار نوشته است من با همهٔ کارهای او آشنا نیستم». اما او قسمت اعظم آنها را می‌دانست و در کتابخانه شخصی خود تعدادی از آثار اویلر را داشت.

علاقه او به اویلر به خاطر سازگاری کارش با اویلر بود. او به ریاضیاتی علاقه‌مند بود که به ریشه واقعی‌اش ارتباط نزدیکی داشته باشد. پولیا مجذوب مسائلی بود که از علوم فیزیکی و یا مهندسی نشأت می‌گرفت و بسیاری از ابداعات ریاضی او ملهم از این مسائل بود. پولیا می‌گفت که دانش ریاضی مجردترین دانشها است. لذا در تعلیم یا نوشتن آن، باید حتی‌المقدور آن را ملموس و شهودی کرد.

پولیا مسائل خوب ریاضی را در بسیاری از حوزه‌های مختلف مورد بررسی قرار می‌داد که به طور سنتی به دانش ریاضی نزدیك نبودند. او در سال ۱۹۷۸ اسامی افراد و مؤسساتی را که با آنها کار کرده بود، یادآوری می‌کند. علاوه‌بر ذکر اسامی ریاضیدانان معروفی چون — وایل، پلانچرال برنیس، گانسیت[36]، به اسامی سایر بخشهایی نظیر: معماری، شیمی، مهندسی و فیزیك اشاره می‌کند. «بخش معماری کتابخانه جالبی داشت، من در آنجا هنرتزئینی معماری را مطالعه می‌کردم و این منجر به مقاله‌ای تحت‌عنوان شباهت و تقارنهای کریستالها در صفحه گردید. فکر می‌کنم یك قسمت آن جدید است». این کار پولیا معروفترین کار او در مورد تقارن در صفحه است.

بعلاوه، او اشاره می‌کرد که به شیمیدانها هم تدریس کرده است و یکی از موفقترین مقالات او در زمینهٔ شمارش ترکیبات شیمیایی است. این کار منجر به مقاله برجسته‌ای در زمینه گروهها، گرافها

و ترکیبات شیمیایی گردید. و یکی از برجسته‌ترین مقالات در آنالیز ترکیبی است «این نظریه پولیا را نه تنها شالوده نظریه گراف و شمارش شیمیایی، بلکه در کل ریاضیات نامیده‌اند».

همکار دیگر او یك زیست‌شناس مشهور به نام پاول ژاکارد[37] در توزیع گیاهان مقاله‌ای چاپ کرد که منجر به کار بیشتر با پولیا گردید. در زمینه مهندسی ۱۹۳۶، در ETH هانس آلبرت انیشتین[38] پسر انیشتین معروف پایان‌نامهٔ خود را درزمینه حرکت گل‌ولای در رودخانه‌ها نوشت که پولیا یکی از مشاورین این رساله بود (خود پولیا بعداً در ۱۹۳۷ و ۱۹۳۸ در این مورد مقالاتی به‌چاپ رسانید). هانس استاد مهندسی هیدرولیك در دانشگاه برکلی گردید.

کارایی او در پیدا کردن مسائل خوب در زمینه‌های مختلف و تبدیل آنها به مسائل خوب ریاضی یکی از قوتهای پولیا بود. در نودمین سال جشن تولد او در ضیافت‌شام، اچ. ال. رویدن[39] خاطرنشان ساخت که پولیا نه تنها یك ریاضیدان برجسته بلکه یك معلم‌توانا هم بود. برای او کافی نبود که یك مسأله را حل کند بلکه اوآنقدر بایدآن راه‌حل را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌داد تا اینکه طبیعت راه‌حل را بسادگی دریابد وآنرا درشکل ساده‌ای قرار دهد تا برای خوانندگان و شنوندگان قابل فهم باشد. او مقالات خودرا درنهایت‌دقت‌و وضوح می‌نوشت. علاوه‌براین، در نوشتن مقالات خود عباراتی را انتخاب می‌کرد که در ذهن خواننده جای بگیرد و ایده‌های ریاضی را ساده‌تر بنمایاند وآنها را به صورت شهودی در می‌آورد.

کارهای ریاضی او شامل آنالیز حقیقی و مختلط، حساب تغییرات، احتمال، هندسه، نظریه اعداد، آنالیز ترکیبی و نظریه گراف می‌باشد. زمانی از او سؤال شد که چگونه است او در این چنین دامنه وسیع و متنوعی از ریاضیات کارکرده است. چیزی‌که حتی در بین ریاضیدانان برجسته هم نادر است. پولیا پاسخ داد: «اولاً من تحت‌تأثیر معلمان خود و ریاضیات‌آن دوره بوده‌ام، ثانیاً ابداعات خود من عامل مؤثری برای ادامه کار من بود. در برخورد با مسائل، فکر می‌کردم که چگونه می‌توان این نوع سؤالات را مطرح کرد.»

علاوه‌بر تألیفات او که در سطور فوق ذکر گردید، از او متجاوز از سیصد مقاله و کتاب در زمینه‌های مختلف منتشر شده است.

توضیحات. نوشتهٔ فوق از مقالهٔ زیر ترجمه و اقتباس شده است.

OBITUARY, GEORGE POLYA, Bull. London Math. Soc. 19 (1987) 559–608.

1. Lorand Eötvös
2. Leopold Fejér
3. Klein
4. Hilbert
5. Runge
6. Landau
7. Weyl
8. Hecke
9. Courant
10. Toeplitz
11. Eidgenössische Techniche Hochschule (Swiss Federal Institute of Technology)
12. Arthur Hirsch
13. Plancherel
14. Bernays
15. Hardy
16. Inequalities
17. J. E. Litlwood
18. Gabor Szegő
19. Gaston Julia
20. Picard
21. Hadamard
22. Oswald Veblen
23. How to Solve it
این کتاب توسط آقای احمد آرام به فارسی ترجمه شده است.
24. Mathematics & plausible reasoning
25. Mathematical discovery
این کتاب توسط آقای پرویز شهریاری از طرف انتشارات فاطمی منتشر شده است.
26. Kilpatrick
27. Tibor Rado
28. Irving Kaplansky
29. مسابقه ریاضی دانشجویی‌که برای اولین‌بار در سال ۱۹۳۳ در دانشگاه هاروارد برگزار شد و همه ساله برگزار می‌شود (Putnam).
30. Vallee – Poussin
31. Sylvester
32. Steiner
33. Combinatorics
34. College Mathematics Journal
35. Jorge Luis Borges
36. Gonseth
37. Paul Jaccard,
38. Hans Albert Einstein
39. H. L. Royden

روشی ساده برای تدریس ریاضی در دبیرستان

دکتر علی رجالی
عضو هیأت علمی دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان

بسیاری از دبیران و اساتید ریاضی در دوران تحصیل یا حین خدمت به مطالعاتی در زمینه‌های مختلف تعلیم و تربیت می‌پردازند. از طرف دیگر بیشتر آنان به مطالب و مفاهیم ریاضی تسلط کافی دارند ولی ارتباط این دو مسأله مهم به‌طور کلی در آموزش ریاضی مشهود نیست. اصطلاحاتی از قبیل تدریس به روشهای مجسم، نیمه مجسم و ... سایر مسایل آموزشی در میان ما معلمین رواج دارد. تجربه هفت ساله نگارنده که در تماس مستمر با معلمان ریاضی بوده و در خدمت دبیران محترم ریاضی استانهای اصفهان و چهارمحال بختیاری کسب فیض می‌نموده‌ام نشان می‌دهد که کمتر معلمی وجود دارد که بتواند ریاضی را ملموس و ساده برای دانش‌آموزان خود مطرح نماید. در این مقاله بسیار ساده و ابتدایی قصد دارم نتیجه این تجربیات و نیز مطالعاتی که در این رابطه در سالهای اخیر داشته و یا در زمان استفاده از فرصت مطالعاتی که در این رابطه در سالهای اخیر داشته و یا درزمان استفاده از فرصت مطالعاتی خود در دانشکده علوم تربیتی دانشگاه هاروارد کسب نموده‌ام با همکاران عزیز در میان گذارم و بسیار خوشحال خواهم شد که متخصصین، محققین و دبیران با تجربه مرا بیش از پیش راهنمایی نمایند.

برای بیان مطلب، از دو مثال متفاوت استفاده می‌نمایم:

۱ـ چگونه مفهوم «حد» را در دبیرستان تدریس کنیم.

بسیاری از ما مفهوم «حد» را با تعریف معروف ε و δ یا α و β شروع کرده و با آوردن مثالهای سنگین و تکیه بر نکات بسیار ظریف و نادر توجه دانش‌آموز را از مفهوم حد به طرف ارتباط ε و δ و یادگیری روشهای مختلف جهت حل مسایل مشکل منحرف می‌نمائیم. این مسأله باعث می‌شود که دانش‌آموز بدون درک مطلب سعی کند، تعریف آنرا به صورت مکانیکی مورد استفاده قرار داده و جهت آمادگی برای حل تستهای مربوطه به حل‌المسائلها پناه برده و خود را از مهلکه حد نجات دهد.

روش دیگری که وجود دارد اینست که توابعی را که در نقطه خاصی وضعیت حد آنها متفاوت است در جلسه قبل از تدریس «حد» به دانش‌آموزان داده و از آنها بخواهیم در نقاط اطراف و به فاصله بسیار کم آن نقطه مقادیر توابع مذکور را پیدا کرده و در جدولی نمایش دهند. مثلاً مقادیر توابع بسیار ساده:

$$f(x)=2x$$

$$g(x)=\frac{2x(x-1)}{x-1}$$

$$g_1(x)=\begin{cases} 2x & x\neq 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases} 2x & x>1 \\ x-1 & x<1 \\ 5 & x=1 \end{cases}$$

را بخواهیم در نقاط ۲، ۱/۵، ۱/۱، ۱/۰۱، ۱/۰۰۱، ۱/۰۰۰۱، ۱ (درصورت امکان) ۰/۹۹۹۹، ۰/۹۹۹، ۰/۹۹، ۰/۹، ۰/۵ و صفر و یا حتی نقاط نزدیکتر پیدا کند.

(ابتدا دانش‌آموزان از حل این تمرین ساده بسیار نگران می‌شوند. ولی اگر ما به طور جدی از آنان بخواهیم که مسأله را حل کنند و درجلسه بعد جدول

را برروی تخته‌سیاه نمایش دهیم، پس‌از درك بهتر مطلب نگرانی آنها برطرف خواهد شد.)

توضیح. مسأله را با تابع f می‌توان شروع کرد و به دانش‌آموزان فهماند که ما هر اندازه بخواهیم می‌توانیم توسط f به نقطهٔ ۲ نزدیك باشیم (یعنی در همسایگی نزدیك ۲ قرار گیریم) و وسیله کار نزدیك بودن به‌نقطهٔ ۱ می‌باشد.

رسم شکل و در نظر گرفتن فاصله دلخواهی اطراف نقطهٔ ۲ روی محور yها و پیدا کردن فاصله‌ای در اطراف نقطهٔ ۱ روی محور xها که تمام نقاط آن به‌فاصله اولی تصویر می‌شوند، می‌تواند کمك کننده باشد.

با استفاده از آن می‌توان مفهوم فوق‌را به صورت زیر بیان نمود:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$$
$$\forall x\,(|x-1| < \delta \Longrightarrow |f(x)-2| < \varepsilon).$$

حال از آنها می‌خواهیم به تابع g نگاه کنند، وضعیت تابع g در اطراف نقطهٔ ۱ مانند تابع f است، فقط این تابع در نقطهٔ ۱ تعریف نشده است و تابع g_1، اگر چه در نقطهٔ ۱ تعریف شده ولی در آن نقطه از استلزام فوق تبعیت نمی‌کند. حال می‌توان مسأله $x \neq 1$ و عدم اهمیت نقطه یك در مفهوم حد را توضیح داد و به طور کلی تعریف زیر را مجدداً با یك شکل کلی به‌صورت نیمه مجسم بیان نمود.

تعریف. می‌گوئیم $\lim_{x \to a} f(x) = l$، هرگاه به ازاء هر $\varepsilon > 0$، عدد حقیقی مثبتی مانند δ باشد به طوریکه هرگاه $0 < |x-a| < \delta$ آنگاه $|f(x)-l| < \varepsilon$. مسأله شرط $x \in D_f$ را هم به تدریج پس‌از بیان مثالهای دیگری مثل:

$$g_2(x)=\begin{cases} 2x & \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ x & x > \frac{3}{2} \text{ یا } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

می‌توان ذکر نمود.

مثالهای ساده‌ای مثل توابع ساده، همانی، خطی، سپس درجهٔ دوم، گویا (در نقاطی که حد دارند) وغیره ازمثالهاوتمرینهایی است که در این قسمت درس مناسب هستند. در این رابطه آشنایی معلمین با جنبه‌های تاریخی مسأله که مثلاً در مرجع شماره [۲] می‌توان ملاحظه نمود و نیز مطالعه کتب حساب دیفرانسیل و انتگرال مانند مراجع [۱] و [۳] توصیه می‌شود.

۲ـ چگونه مفهوم «گروه» را در دبیرستان تدریس کنیم.

بازهم «گروه» به‌طور معمول به‌صورت تعریف مجرد، یك مجموعه همراه با عملی که دارای خواص مشخصی می‌باشد بیان می‌شود و سپس با آوردن مثالهای متعدد سعی می‌کنیم با استفاده از قدرت حافظه دانش‌آموزان، مسایل مربوط به‌گروه را با حالت تجرد و خشك آنها حل نمائیم. دانش‌آموز هم که مسأله را درك نکرده سعی می‌کند مطالب ریاضی و مسائل آنرا با استفاده از حل‌المسائلها به محفوظات خود بیافزاید. این‌روش تدریس علاوه‌بر اینکه نمی‌تواند ریاضی را برای دانش‌آموزان محسوس نماید، آنها را به این فکر می‌اندازد که قدرت درك مطالب ریاضی را نداشته و بایستی مسائل ریاضی را از حفظ نموده و یا از شر ریاضی خود را راحت نمایند وعلاوه‌بر عوامل دیگری که متأسفانه جهت دفع دانش‌آموزان از رشته ریاضی وجود دارد، ما هم عامل دیگری را اضافه می‌کنیم.

برای تدریس «گروه»، با توجه به اینکه دانش‌آموزان در این سطح با مجموعه‌های اعداد حقیقی، اعدادگویا، اعداد صحیح و اعداد طبیعی و اعمال جمع وضرب روی اعداد حقیقی (جمع و ضرب معمولی) آشنایی دارند و نیز مجموعه ماتریسهای مربع 2×2 را نیز می‌شناسند و به اعمال جمع وضرب ماتریسها هم واقفند می‌توان جلسه قبل‌از تدریس «گروه» از دانش‌آموزان خواست خواص بسته بودن، شرکت پذیری، جابجائی، صفر داشتن و غیره را برای اعمال فوق روی مجموعه‌های مناسب بررسی کنند. به طور مثال می‌توان از آنها خواست به این سؤال‌ها فکر کنند:

۱ـ اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، آیا $a+b$ هم یك عدد طبیعی است؟ $a-b$ چطور؟ (مثلاً آیا $5+2$ و $5-2$ هر دو اعداد طبیعی هستند؟) و یا:

۲ـ آیا حاصلضرب دو ماتریس دو در دو یك ماتریس دو در دو است؟

۳ـ آیا ماتریسی می‌توانید پیدا کنید که اگر در هر ماتریسی ضرب شود، همان ماتریس دوم به دست آید؟

۴ـ می‌بینید:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

آیا این همواره صحیح است؟ (یعنی آیا به ازاء هردو ماتریس دو در دو A و B، $AB=BA$).

سؤالاتی ازاین قبیل که هم با معلومات دانش‌آموزان ارتباط مستقیم دارد و هم به نحوی تنظیم شده که همراه راهنمایی برای‌همه دانش‌آموزان باشد کمك بزرگی به فهم و درك عمل نموده و وقتی که در جلسه بعد مفهوم «گروه» و خواص آن مورد بحث قرار گیرد، دانش‌آموزان این خواص را بهتر درك خواهند کرد.

در اینجا باید سعی شود سؤالات زیاد و خسته‌کننده نبوده و تکراری نباشند، در

ضمن هر مثال با هدف خاصی و به منظور مشخصی مطرح شده وهمراه راهنمایی‌های لازم باشد.

در جلسه بعد می‌توان مجموعه‌های مورد نظر را درکلاس مطرح و سؤالات روز قبل یا سؤالات مشابه آنها را باتوجه به درك وفهم دانش‌آموزان و مجموعه‌های مشخص بیان نمود و با کمك به دانش‌آموزان، به آنها اجازه داد خود، خواص اعمال روی مجموعه‌ها را بررسی کنند. در اینجا گروه را تعریف می‌کنیم. بقیه مثالها توسط خود دانش‌آموزان و یا از طریق حل تمرینها قابل ارائه می‌باشند.

لازم است حداقل در روز اول از آوردن مثالهایی که خود مطلب مهم دیگری غیراز مفهوم گروه را دربر دارد خودداری نمود چون به طور اصولی مثال در جهت درك مطلب است، نه دشوار ساختن موضوع، مثلاً اگر درکلاسی دانش‌آموزان مفهوم ضرب ماتریسها را خوب نمی‌دانند ارائه سؤالات فوق مضر بوده و بهتر است از همان مجموعه‌های اعداد استفاده نمود.

در خاتمه چند نکته مهم وکلی را بار دیگر یادآور می‌شویم:

۱ـ ما معتقدیم که مسایل اجتماعی و اقتصادی یکی از عوامل اصلی گریز دانش‌آموزان از رشته ریاضی است ولی اگر دانش‌آموزان بتوانند حداقل ریاضی را درك نمایند و خود درکلاس درس سهیم شوند، به این رشته مفید و مورد نیاز مملکت روی می‌آورند.

۲ـ اگر چه‌کتابهای درسی ریاضی اشکالاتی دارند و به طور مثال در رابطه با حد، جدول مندرج درکتاب جبر وآنالیز چهارم ریاضی ـ فیزیك برخلاف اصول تدریس ریاضی‌آورده شده است، ولی نقش معلم خوب درآموزش ریاضی را نمی‌توان نادیده‌گرفت. همانطوریکه اطلاع دارید دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی درسی وزارت آموزش‌وپرورش در جهت رفع نواقص‌کتب ریاضی اقداماتی را انجام می‌دهد ولی معلمان باید به روشهای صحیح عادت‌کرده و خود، کتاب زنده برای دانش‌آموزان باشند.

۳ـ متأسفانه به دلیل وجود سؤالات تستی و رقابت معلمان در ارائه مسائل مشکل و لاینحل درکلاسهای درس و یا مسایلی‌که فقط از یك راه خاص قابل حل بوده و هرگز دانش‌آموزان موفق به حل آنها نشده و فقط مجبور به‌گنجاندن آنها در حافظه محدود خود هستند، از هدف طرح مثال به دور افتاده و مثالهای خود را منطبق با مطالب درسی و درجهت فهم بهتر مطلب آماده نمی‌کنیم. بجاست که در این زمینه هم دقت بیشتر معمول گردد و مثالها جهت درك دانش‌آموزان طرح شود به طوریکه معلم و دانش‌آموز به همراه هم مطلب را کشف و بررسی نمایند.

۴ـ اگرچه واقفیم‌که معلمان با گرفتاریهای فراوان دست بگریبان بوده و مشکلات اجتماعی و حتی اقتصادی به آنها اجازه نمی‌دهدکه طرح درس تهیه نمایند ولی به هرحال برای موفق شدن در امرتدریس لازم است قبل‌از رفتن به‌کلاس به مطالب درس فکرکرد و مثالهایی را برای ارائه مطلب تهیه نمود. امید است که مسئولین آموزش‌وپرورش‌هم پیشنهادات ما را در رابطه با رفع مسائل و مشکلات معلمان مورد توجه قرار دهند.

۵ـ اگر چه منابع مطالعه برای دبیران بسیارمحدود است ولی باتوجه به‌امکاناتی که اخیراً در این زمینه به وجودآمده و کتابخانه‌هایی‌که وجود دارد، بجاست ما معلمان هم مدتی از وقت خود را صرف مطالعه‌کتب ریاضی، وعلوم تربیتی و گفتگو با مجربین بنمائیم. به امید اینکه زمانی همه معلمان ما بتوانند ازکتابخانه‌های موجود استفاده نمایند.

۶ـ چه خوبست اگردرکلاسهای‌درس به‌جای‌گذراندن وقت روی حل مسایل مشکل و تکراری، جهت فهم مطلب و حل مثالهایی در زمینه درس اقدام نموده و با طرح سؤالات تشویق‌کننده و مفید، دانش‌آموزان را به ریاضی علاقمند سازیم.

۷ـ بیان ریشه‌های تاریخی و نیز کاربردهای مسائل تا آنجا که به فهم دانش‌آموزان‌کمك‌کند بسیار مفید هستند ولی باید این نکته را هم به‌دانش‌آموزان فهماند‌که بعضی‌از کاربردها در مسائل ساده قابل بیان نیستند و اگر بخواهند به طور مثال کاربردگروه را بدانند لازم است اطلاعاتی در زمینه‌های مختلفی از قبیل گروههای متقارن، مسائل فیزیك وغیره داشته باشند و باطرح مسائل کلی‌کاربردی می‌توان‌آنها را به اهمیت مسایل ذکر شده واقف ساخت.

مراجع

۱ـ Apostol Tom. M., Calculus (Volume 1).
ترجمه آقای علی‌رضا ذکایی و دیگران از انتشارات مرکز نشر دانشگاهی.

۲ـ Edward C. H., Historical Developments of Calculus.

۳ـ Thomas G. B., Calculus with Analytic Geometry.
ترجمه آقایان دکتر علی‌اکبر جعفریان و دکتر ابوالقاسم میامئی از انتشارات مرکز نشر دانشگاهی.

بقیه از صفحه ۵

دستور تشکیل این اعداد چنین است:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

ابن‌سینا، این دستور را به روال قدما، که با نمادگذاری در ریاضیات چندان آشنایی نداشته‌اند، با عبارات عربی زیر بیان کرده است:

«وکل مثلث فانه نصف مضرب مرتبته فی الأزید منه ابواحد».

ب ـ مجموع هر عدد مثلث و عدد ماقبل آن مساوی است با مربع مرتبهٔ آن یعنی

$$T_{n-1}+T_n=n^2.$$

ابن‌سینا این مطلب را با عبارت عربی زیر بیان کرده است:

«فیکون کل مربع من مثلث فی درجته و مثلث انقص من درجته ابواحد».

ج ـ دستور تشکیل عددهای مخمسی

عددهای مخمسی عددهایی هستند که از جمع کردن جمله‌های متوالی تصاعدحسابی زیر حاصل می‌شود:

۱, ۴, ۷, ۱۰, ۱۳, ۱۶, ۱۹, ...

عددهای مخمسی ابتدا ازواحد، عبارت‌اند از:

۱, ۵, ۱۲, ۲۲, ۳۵, ۵۱, ...

دستور تشکیل دادن این عددها این است:

$$P_n = n^2 + T_{n-1} = \frac{(3n-1)n}{2}.$$

ابن‌سینا این دستور را با عبارات عربی زیر بیان کرده است:

«و قد تنشأ من جمیع المربعات کل مع المثلث الذی دونه فی المرتبه.»

(برای اطلاع بیشتر دربارهٔ اعداد مثلثی و مخمسی و به‌طورکلی اعداد مصور، رجوع کنید، مثلاً، به [۶].)

د ـ به کاربردن روش طرح نه‌نه اعداد برای امتحان عددهای مربعی و مکعبی که ابن‌سینا آن را تحت عنوانهای زیر بیان کرده است:

«و امتحان المربعات فی الطریق الهندی» و «و مع خواص المکعبات ان امتحانها الذی عمل الحساب الهندی».

۲ـ اصول الهندسه (فن اول از ریاضیات شفا).

این قسمت ازکتاب شفا نیز جداگانه در سال ۱۹۷۷ میلادی در مصر به چاپ رسیده است. اصول الهندسه مثل تحریر اقلیدس خواجه نصیرالدین طوسی در پانزده مقاله است. ظاهراً ابن‌سینا ابتدا این‌کتاب را با مختصر کردن مطالب سیزده مقالهٔ اصول اقلیدس و دو مقاله‌ای‌که بعداً به عنوان مقالات چهاردهم و پانزدهم به آن اضافه شده، فراهم‌آورده و بعداً آن را درکتاب شفا قرار داده است.

۳ـ رسالة فی تحقیق الزاویه

۴ـ رسالة فی تحقیق مبادی الهندسه

۵ـ مختصر مجسطی

برای اطلاع از سایر ابعاد شخصیت علمی ابن‌سینا، می‌توان از مآخذ زیر یا از مراجع مذکور درآنها سودجست.

مآخذ

۱) نصر، سید حسین، علم و تمدن در اسلام، ترجمهٔ احمدآرام، انتشارات‌خوارزمی تهران، ۱۳۵۰.

۲) صفا، ذبیح‌الله، تاریخ علوم عقلی در تمدن اسلامی، چاپ چهارم، انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۵۶. (افکار فلسفی ابن‌سینا در این کتاب بتفصیل مورد بحث قرارگرفته است.)

۳) فارابی، ابونصر محمدبن محمد، احصاءالعلوم، ترجمهٔ‌حسین خدیوجم، انتشارات بنیاد فرهنگ ایران، شمارهٔ ۹۴، تهران، ۱۳۴۸.

۴) قربانی، ابوالقاسم، زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۵. (این کتاب زندگینامه یک‌صدوشصت‌وهفت نفر از ریاضیدانانی است که از اواخر سدهٔ سوم تا اوایل سدهٔ دوازدهم هجری در یکی‌از کشورهای اسلامی می‌زیسته و کتاب یا رساله یا مقاله‌ای در بارهٔ ریاضیات خالص، یعنی حساب و هندسه و جبر و مثلثات و نظریهٔ مقدماتی اعداد پدید آورده‌اند. این کتاب ابزاری است بسیار ضروری برای کسانی‌که بخواهند در ریاضیات دورهٔ اسلامی و یاآثار برخی‌از ریاضیدانان‌آن دوره تحقیق‌کنند.)

۵) ریاضیدانان ایرانی، نشریهٔ شمارهٔ ۱۴، مدرسهٔ عالی دختران، تهران، ۱۳۵۰.

۶) ایوز، هاورد، آشنایی با تاریخ ریاضیات، ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی‌اصل، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۳.

۷) Sorton, George, *Introduction to the History of Science*, Volume 1, New York, 1975.

۸) Boyer, Carl, B. *A History of Mathematics*, New York, John Wiley and Sons, 1968.

روش استقراء ریاضی

ترجمه و تنظیم از: ابراهیم دارابی

مقدمه.

احکام دو گونه‌اند، کلی و جزیی.

مثالهایی از احکام کلی چنین است.

تمام کودکان کشور ما حق تحصیل دارند.

اقطار هر متوازی‌الاضلاع در نقطه تقاطع، یکدیگر را نصف می‌کنند.

تمام اعداد مختوم به‌صفر، به‌پنج بخش‌پذیر هستند.

اکنون مثالهایی برای احکام جزئی بیان می‌کنیم.

احمد حق تحصیل دارد.

اقطار متوازی‌الاضلاع $ABCD$ در یك نقطه یکدیگر را نصف می‌کنند.

۱۲۰ بر ۵ بخش‌پذیر است.

از احکام کلی به‌احکام جزئی رسیدن را «قیاس» می‌نامند.

برای نمونه داریم:

۱ــ تمام کودکان کشور ما حق تحصیل دارند.

۲ــ احمد یکی از کودکان کشور ما است.

۳ــ احمد حق تحصیل دارد.

حکم جزیی ۳ از حکم کلی ۱، به‌کمك حکم کمکی ۲ به‌دست آمده است.

از احکام جزیی به‌حکم کلی رسیدن را، «استقراء» می‌نامند.

استقراء ممکن است بــه نتیجه درست یا غلط منجــر شود. این موضوع را با مثالهای زیر روشن می‌کنیم:

۱ــ ۱۴۰ به ۵ بخش‌پذیر است.

۲ــ تمام اعداد مختوم به‌صفر بر پنج بخش‌پذیرند.

حکم کلی ۲، از حکــم جزیی ۱ استنتاج شده است و حکم ۲ درست است.

۱ــ ۱۴۵ بر ۵ بخش‌پذیر است،

۲ــ تمام اعداد سه رقمی بر ۵ بخش‌پذیر است.

حکم کلی ۲ از حکم جزیی ۱ استنتاج شده، اما حکم ۲ غلط است.

حالا سؤال ما اینست که چگونه استقراء را به‌کار بریم تا نتیجه درست به‌دست آید.

در این مقاله، به‌این سؤال پاسخ داده می‌شود.

۱) ابتدا به‌دو مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱ــ.

$$S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$$

به‌آسانی می‌توان دید که

$$S_1=\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}$$

$$S_2=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}=\frac{2}{3}$$

$$S_3=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}=\frac{3}{4}$$

$$S_4=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}=\frac{4}{5}$$

بر این اساس حکم می‌کنیم که به‌ازاء هر عدد طبیعی n داریم:

$$S_n=\frac{n}{n+1}$$

مثال ۲ــ سه جمله‌ای x^2+x+41 را که مورد توجه اویلر بوده به L نشان می‌دهیم. این سه جمله‌ای بــه‌ازاء $x=0$، ۴۱ می‌شود که عدد اول است. به‌ازاء $x=1$، ۴۳ می‌شود که باز اول است.

اگر به‌این روند ادامه‌دهیم به‌ازاء اعداد ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ اعداد ۴۷، ۵۳، ۶۱، ۷۱، ۸۳، ۹۷، ۱۱۳، ۱۳۱، ۱۵۱

حاصل می‌شود که همه اول هستند. بر این اساس حکم می‌کنیم به ازاء هر مقدار صحیح و نامنفی x سه جمله‌ای مفروض یك عدد اول را مشخص می‌کند.

چه سفسطه‌ای در این نتیجه‌گیری مستتر است؟

مسئله در این است که در هر یك از این دو مثال، در رابطه با n (درمثال دوم با x) تنها بر اساس اینکه حکم برای مقادیر معینی از n (یا x) درست است حکم می‌کنیم.

استقراء کاربرد وسیعی درریاضیات دارد. اما باید ماهرانه آنرا به‌کار برد.

یك اغماض جزیی درآن ممکن است کار را به‌نتیجه غلط منجر کند.

به‌هرحال، حکم کلی درمورد مثال ۱ تصادفاً درست است. (در مثال ۹ آنرا اثبات خواهیم کرد.) اما حکم کلی در مورد مثال ۲ غلط است.

در واقع اگر به‌سه جمله‌ای x^2+x+41 دقیق بشویم خواهیم دید که این‌سه‌جمله‌ای به‌ازاء مقادیر $x=0,1,2,\ldots,39$ اعداد اول را مشخص می‌کند. اما به‌ازاء $x=40$ سه جمله‌ای بصورت $(41)^2$ نوشته می‌شود که اول نیست.

۳) درمثال ۲ برای حالتی که استثنائاً در ۴۰مورد، درست بوده حکم کلی بیان کرده‌ایم درحالیکه نتیجه غلط است.

مثالهای بیشتری می‌توان ارائه داد که در حالات خاص درست هستند اما در حالت کلی غلطند.

مثال ۳ـ دوجمله‌ای x^n-1 که درآن n عدد طبیعی می‌باشد، مورد توجه ویژه ریاضیدانان بوده است. کافی است گفته شود که در هندسه، در ارتباط با تقسیم دایره به n جزء مساوی، از آن استفاده می‌شود. بنابراین غیر مترقبه نیست که در ریاضیات این دوجمله‌ای به‌طورکامل مورد مطالعه قرار گرفته است. بخصوص ریاضیدانان به بسط این دوجمله‌ای به‌صورت عوامل با ضرایب صحیح، علاقه بیشتری از خود نشان‌داده‌اند. آنها دربسط دوجمله‌ای مفروض متوجه شده‌اند که به‌ازاءمقادیر خاصی از n، هیچ یك از ضرایب بسط، از نظر قدرمطلق از یك تجاوز نمی‌کند. مثلاً داریم:

$$x-1=x-1$$
$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$
$$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$$
$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$
$$x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

درجدول بالا، همه ضرایب از چنین خصوصیاتی برخوردار هستند. کوشش برای اثبات این موضوع به ازاء جمیع مقادیر n، به‌نتیجه نرسید تا اینکه درسال ۱۹۳۸ مجله «یوزپخی‌مات، نائوك» (شماره چهارم) ازطرف ن. گ. چبوتاریف، ریاضیدان برجسته شوروی سندی منتشر کرد که درآن خبرمی‌داد این مسئله توسط ایوانف حل شده و ویژگی‌های موردبحث تنها درمورد دوجمله‌ای‌هایی از نوع x^n-1 که درجه‌آنها از ۱۰۵ کمتر باشد، صدق می‌کند. مثلاً یکی از عوامل بسط $x^{105}-1$، کثیرالجمله زیر است:

$$x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-2x^{41}-x^{40}-x^{39}+x^{36}$$
$$+x^{35}+x^{34}+x^{33}+x^{32}+x^{31}-x^{28}-x^{26}-x^{24}-$$
$$-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}-$$
$$-x^{9}-x^{8}-2x^{7}-x^{6}-x^{5}+x^{2}+x+1$$

به‌این ترتیب کوشش در این راه به‌یاس مبدل می‌شود.

مثال ۴ ـ

اعداد $2^{2^n}+1$ را به ازاء $n=0,1,2,3,4$ مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$2^{2^0}+1=3$$
$$2^{2^1}+1=5$$
$$2^{2^2}+1=17$$
$$2^{2^3}+1=257$$
$$2^{2^4}+1=65537$$

که همه اول هستند.

پیردوفرما، ریاضیدان شهیر قرن هفدهم فرانسه، گمان می‌کرد تمام اعدادی که به‌شکل بالا نوشته شوند، اول هستند. تا اینکه در قرن هیجدهم، اویلر متوجه شد که عدد

$$2^{2^5}+1=4294\ 967\ 297=641\times6700417$$

اول نیست.

مثال ۵ـ گ. و. لایب‌نتز، یکی از ریاضیدانان مشهور قرن هفدهم آلمان و از ابداع‌کنندگان بنام حساب دیفرانسیل و انتگرال ثابت‌کرد برای مقادیر صحیح n، n^3-n بر ۳ و n^5-n بر ۵ و n^7-n بر ۷ بخش‌پذیر است.

بر این اساس، به‌این‌گمان نزدیك شده بود که به‌ازاء هر عدد فرد k و هرعدد دلخواه طبیعی n، n^k-n بر k بخش‌پذیر است. اما به زودی متوجه شد که $2^9-2=510$ بر ۹ بخش‌پذیر نیست.

مثال ۶ ـ

د. آ. گراوه، ریاضیدان شهیرشوروی، به‌این گمان بی‌اساس رسیده بود که $2^{p-1}-1$ به‌ازاء هیچ یك از مقادیر اول p، بر p^2 بخش‌پذیر نیست. بررسی مستقیم به‌ازاء مقادیر کوچکتر از ۱۰۰۰ برای p این‌گمان را تقویت می‌کرد. تا اینکه ثابت‌شد

که $2^{1092}-1$ بر 1093^2 (۱۰۹۳ اول است) بخش‌پذیر است. در نتیجه تصور گراوه باطل گردید.

مثال ۷ —

n صفحه مسطح که از یك نقطهٔ گذشته باشند، فضا را به‌چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟ درصورتیکه هیچ سه صفحه‌ای، در یك خط مشترك نباشند.

ساده‌ترین حالت خاص را درنظر می‌گیریم: یك صفحه، فضا را به‌دو ناحیه تقسیم می‌کند. دوصفحه‌ای که از یك نقطه بگذرند، فضا را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند. سه صفحه که از یك نقطه‌گذشته و در یك خط مشترك نباشند؛ فضا را به ۸ ناحیه تقسیم می‌کنند.

به‌نظرمی‌رسد که اگر تعداد صفحات را یك واحداضافه کنیم؛ تعداد نواحی دو برابر می‌شود و برای چهار صفحه، فضا به ۱۶ ناحیه و برای پنج صفحه، به ۳۲ ناحیه و برای n صفحه، به 2^n ناحیه تقسیم خواهد شد. اما واضح است که چنین نیست.

در واقع چهارصفحه؛ فضا را به‌۱۴ ناحیه، و پنج صفحه آنرا به‌۲۲ ناحیه قسمت می‌کند. می‌توان ثابت‌کرد که n صفحه، فضا را به $n(n-1)+2$ ناحیه تقسیم می‌کنند.

مثال ۸. —

اکنون یك مثال نسبتاً اقناع‌کننده ارائه می‌دهیم:

اگر در عبارت $991n^2+1$، به‌جای n اعداد ۱، ۲، ۳، . . . را قرار دهیم. هرگز عددی به‌دست نمی‌آید که مربع کامل باشد. حتی اگر این بررسی، روزها و حتی سالها طول بکشد. حال اگر به‌این‌کار ادامه داده ونتیجه می‌گرفتیم که هیچ یك‌ازاعدادی‌که به‌شکل بالانوشته می‌شوند مربع‌کامل نیستند، دچار اشتباه شده بودیم. در واقع در بین اعدادی که به‌شکل $991n^2+1$ نوشته می‌شوند، مربع کامل وجود دارد؛ منتها کمترین مقدار nای که $991n^2+1$ را مربع‌کامل می‌کند، عدد بسیار بزرگی است که در زیر نشان داده شده است:

$n = 12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767$

مثالهایی که ملاحظه شد، امکان می‌دهد به نتایج ساده، و درعین حال مهم برسیم.

یك‌حکم ممکن‌است دریك سری ازحالات خاص‌درست باشد؛ اما در حالت کلی درست نباشد.

۳) حالا این سؤال پیش می‌آید

حکمی وجود دارد که درچند حالت خاص درست‌است. امکان بررسی‌تمام حالات برای‌ما مقدور نیست، چگونه‌می‌توانیم تعیین‌کنیم‌که آیا این حکم در حالت‌کلی درست است یا خیر؟

برای پاسخ دادن به‌این سؤال، از روش بخصوصی استفاده می‌کنند که استقراء ریاضی نام دارد.

اساس این روش که بر پایه استقراء ریاضی‌بناشده‌چنین است:

یك حکم، به‌ازاء جمع مقادیر n درست خواهدبود اگر.

۱— به‌ازاء $n=1$ درست باشد.

۲— با فرض درست بودن آن به‌ازاء $n=k$؛ ثابت شود که به‌ازاء $n=k+1$ هم درست است.

اثبات. فرض می‌کنیم چنین نباشد. یعنی به‌فرض به ازاء جمیع مقادیر n حکم درست نباشد. درآن صورت عدد طبیعی مانند m وجود خواهد داشت به‌قسمی که

۱— به‌ازاء $n=m$ حکم درست نیست.

۲— به‌ازاءهر n کمتراز m حکم درست است. (به‌عبارت دیگر m اولین عدد طبیعی می‌باشد که به‌ازاء آن حکم غلط شده است).

واضح است که $m>1$، زیرابه‌ازاء $n=1$ حکم‌درست است. (شرط اول) بنابراین $m-1$ یك عدد طبیعی می‌باشد و ازآنجا نتیجه‌می‌شود که به‌ازاء عددطبیعی $m-1$ حکم‌درست است اما به‌ازاء عدد طبیعی بعدی؛ یعنی m حکم درست نیست و این خلاف شرط دوم استقراء می‌باشد.

برهانی‌که براساس استقراء ریاضی بناشده باشد؛برهان به‌روش استقراء ریاضی نامیده می‌شود. ازآنچه که گفته شد معلوم می‌گردد که هر برهان اجباراً از دو قسمت مستقل‌تشکیل می‌شود:

۱— حکم به‌ازاء $n=1$ درست باشد.

۲— صحت حکم به‌ازاء $n=k$ پذیرفته شده و به ازاء $n=k+1$ اثبات شود. (kعدد طبیعی است) با اثبات‌هردوی این قضایا، به‌ازاء جمیع مقادیر n حکم درست است.

مثال ۹— مجموع زیر را حساب‌کنید.

$$S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

می‌دانیم:

$$S_1=\frac{1}{2},\ S_2=\frac{2}{3},\ S_3=\frac{3}{4},\ S_4=\frac{4}{5}$$

حالا اشتباه دیگری راکه درمثال (۱) مرتکب شدیم؛ نخواهیم شد. یعنی بلافاصله نتیجه‌نخواهیم گرفت که به‌ازاء جمیع‌مقادیر n $S_n=\frac{n}{n+1}$ درست است.

با آزمون S_1, S_2, S_3, S_4 حدس می‌زنیم که $S_n=\frac{n}{n+1}$ به‌ازاء جمیع مقادیر n درست است. قبلاً دیدیم

که این تساوی به‌ازاء $n=1, 2, 3, 4$ درست می‌باشد.

برای اینکه صحت حدس خودرا ارزیابی کنیم، ازروش استقراء استفاده می‌کنیم:

۱ــ به‌ازاء $n=1$ تساوی برقرار است.

۲ــ فرض کنیم فرمول به‌ازاء $n=k$ درست باشد یعنی

$$S_k=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

(k عدد طبیعی است.)

درستی تساوی را به‌ازاء $n=k+1$ موردبررسی قرار می‌دهیم:

$$S_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}$$

در واقع داریم،

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

بنابر فرض داریم:

$$S_{k+1}=\frac{k}{1+k}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

هر دو قضیه به‌اثبات رسیده‌اند پس بنابر اصل استقراء ریاضی $S_n=\frac{n}{n+1}$ به‌ازاء جمیع مقادیر n برقرار است.

تاکیدمی‌کنیم که برهان استقراء ریاضی ازنتایج بلافصل قضایای (۱) و (۲) می‌باشد. قبلاً مشاهده کردیم که چگونه‌یك برخورد اغماض‌گرایانه نسبت به قضیه (۲) ممکن است ما را به نتایج مثال (۲) برساند. نشان خواهیم داد که قضیه (۱) را هم نمی‌توان نادیده انگاشت. مثالهای زیر این موضوع را روشن می‌کنند.

مثال ۱۰ــ هر عدد طبیعی، با عدد طبیعی مابعد خود برابر است.

حل: از روش استقراء استفاده می‌کنیم:

$$k=k+1 \qquad (1)$$

ثابت می‌کنیم:

$$k+1=k+2 \qquad (2)$$

درواقع با افزودن واحد به‌طرفین تساوی، به‌تساوی(۲) می‌رسیم. پس معلوم می‌شود اگر حکم به‌ازاء $n=k$ درست باشد، به‌ازاء $n=k+1$ هم درست است. یعنی قضیه ثابت شده است. نتیجه: تمام اعداد طبیعی باهم برابرند.

اشتباه درکجاست؟ درواقع اشتباه دراین امر نهفته‌است، که قسمت‌اول استقراء را اثبات نکرده‌ایم وتنها به‌اثبات قسمت دوم بسنده کرده‌ایم.

قسمت‌های ۱ و ۲ از ویژگی‌های خاصی برخوردارند. قسمت ۱ اساس استقراء را تشکیل می‌دهد، اگر بتوان چنین چیزی را گفت. وقسمت۲ نوعی روش تعمیم خودکار نامحدود در اختیار ما قرار می‌دهد تا بتوانیم از مرحله‌ای به‌مرحله دیگر ــ از n به $n+1$ عبور کنیم. اگرقسمت ۱ اثبات‌نشده‌باشد، و تنها قسمت ۲ اثبات شود (مثال ۱۰) درآن صورت یکی از ارکان اصلی استقراء نادیده انگاشته خواهد شد. و قسمت ۲ به‌خودی خود معنایی نخواهد داشت، زیرا در آن صورت در واقع چیزی برای بسط وجود ندارد.

اگرقسمت ۲ اثبات نشود وتنها به‌اثبات قسمت ۱ اکتفا گردد، گرچه مبنایی برای انجام استقراء ایجاد شده است اما صحت چنین بسطی بر پایه محکمی استوار نخواهد بود.

تا حالا روش استقراء ریاضی را در ساده‌ترین حالات خود در نظر گرفته‌ایم. در بسیاری از موارد بغرنج، شرایط ایجادمی‌کند تا درفرمول‌بندی قسمتهای ۱ و ۲ تغییراتی بدهیم. مثلاً، گاهی‌اوقات قسمت دوم برهان تنها براساس صحت $n=k$ مورد مطالعه قرار نمی‌گیرد، بلکه به $n=k-1$ نیازمند است. دراین حالت قسمت اول حکم را باید به‌ازاء دو مقدارمتوالی n مورد رسیدگی قرار داد. گاهی هم، اینکه قسمت دوم برهان برای بعضی مقادیر n درست فرض شده‌اند، برای همه مقادیر $k<n$ نیز شرایط مورد نیاز را ایجاد می‌کند. خوانندگان چنین حالتی را در مثال (۱۵) ملاحظه خواهدکرد.

بعضی‌اوقات برهان‌به‌ازاءجمیع مقادیر n اثبات‌نمی‌شود، بلکه به‌ازاء هر مقدار صحیح n که بزرگتر از عدد صحیح ومعین m باشد اثبات می‌گردد. در این صورت قسمت اول برهان به ازاء $n=m+1$ اثبات می‌شود و اگر لازم باشد، برای چند مقدار متوالی n هم اثبات می‌گردد.

اکنون برای روشن شدن مطلب، دوباره به مثال ۱ بر گردیم:

مجموع زیر را حساب کنید.

$$S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

به‌ازاء مقادیر مختلف n داریم:

$$S_1=\frac{1}{2},\ S_2=\frac{2}{3},\ S_3=\frac{3}{4},\ S_4=\frac{4}{5}$$

حالا به‌این گمان نزدیك می‌شویم که به‌ازاء جمیع مقادیر n تساوی

$S_n=\frac{n}{n+1}$ برقرار است. برای بررسی صحت این حدس و گمان از استقراء کمك می‌گیریم. خوشبختانه این بار حدس ما درست است درغیر اینصورت می‌توان با کوشش در اثبات قضیه ۲ استقراء باطل بودن حدس را برملا ساخت.

مثال ۱۱–

مجموع زیر را بررسی کنید:

$$S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$$

فرض کنیم با تحلیل S_n به‌این گمان رسیده باشیم که به‌ازاء جمیع‌مقادیر n، $S_n=\frac{n+1}{3n+1}$ (۱). فرمول(۱) به‌ازاء $n=1$ درست است. زیرا $S_1=\frac{1}{2}$.

فرض کنیم فرمول (۱) به‌ازاء $n=k$ درست باشدیعنی، $S_k=\frac{k+1}{3k+1}$.

اکنون سعی می‌کنیم ثابت کنیم فرمول (۱) بـه‌ازاء $n=k+1$ هم درست است. داریم:

$$S_{k+1}=\frac{k+2}{3k+4}$$

و

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^3+4k^2+8k+2}{(k+1)(k+2)(3k+1)}$$

دیده‌می‌شود که با مشکل‌مواجه شده‌ایم. یعنی صحت فرمول(۱) بازاء $n=k+1$ ازصحت $n+k$ نتیجه نمی‌شود. باین‌ترتیب فرمول (۱) درست نیست.

ازآنچه که گفته شد،معلوم می‌شودکه‌روش استقراءریاضی امکان می‌دهد تا با بررسی (تست کردن) در یك فرمول کلی، به درست و یا نادرست بودن یك حدس پی برد.

اکنون در ارتباط با این مطالب، مسائل چندی رامطرح و حل می‌کنیم. بـرای اجتناب از تکرار عبارت قسمت۱ و۲ ازاین پس این‌دوعبارت را باعلامت ۱ و ۲ نشان‌خواهیم داد.

مثال ۱۲– اعداد فردمثبت ۱، ۳، ۵، ... را به ترتیب با u_1 و u_2 و ... نشان می‌دهیم. یعنی:

$$u_1=1,\ u_2=3,\ u_3=5,\ u_4=7$$

فرمولی پیدا کنید که عددفرد u_n را برحسب اندیس n بیان کند.

حل. اولین عددفرد مثبت که با u_1 نشان داده شده چنین نوشته خواهد شد:

$$u_1=2\times 1-1 \qquad (1)$$

دومین عدد چنین نوشته می‌شود:

$$u_2=2\times 2-1 \qquad (2)$$

و سومین عدد:

$$u_3=2\times 3-1 \qquad (3)$$

با ملاحظه روابط (۱) و (۲) و (۳) حدس می‌زنیم که در این دستور کافیست از دو برابر اندیس، یك واحد کم کنیم. پس nامین عدد فرد از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$u_n=2n-1 \qquad (4)$$

ثابت می‌کنیم که این فرمول درست است،

۱– رابطه (۱) نشان‌می‌دهد که فرمول (۴) به‌ازاء $n=1$ درست است.

۲– فرض می‌کنیم فرمول (۴) بـه ازاء $n=k$ درست باشد. یعنی برای kامین عدد فرد داشته باشیم

$$u_k=2k-1$$

ثابت‌می‌کنیم فرمول (۴) برای $(k+1)$امین عددفردهم صحیح است. یعنی $(k+1)$امین عدد فرد به‌شکل زیر نوشته می‌شود:

$$u_{k+1}=2(k+1)-1$$

و یا

$$u_{k+1}=2k+1$$

در واقع برای به‌دست‌آوردن $(k+1)$امین عدد فردکافیست۲ واحد به kامین عدد فرد اضافه کنیم:

$$u_{k+1}=u_k+2$$

اما بنا به‌فرض داریم: $u_k=2k-1$ پس

$$u_{k+1}=(2k-1)+2=2k+1$$

و یا

$$u_n=2n-1$$

مثال ۱۳– ثابت کنید

$$S_n=1-2^2+3^2-4^2+\dots+(-1)^{n-1}n^2=$$
$$=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

حل ۱– به‌ازاء $n=1$ صحت مسئله آشکار است.

۲– اگر

$$S_k=1-2^2+3^2-\dots+(-1)^{k-1}n^2=(-1)^{k-1}\cdot\frac{k(k+1)}{2}$$

باید ثابت‌کنیم

$$S_{k+1}=1-2^2+3^2-\dots+(-1)^{k-1}k^2+(-1)^k(k+1)^2=(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

در واقع داریم،

$$S_{k+1}=S_k+(-1)^k(k+1)^2=(-1)^{k-1}\times$$

$$\times\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^k(k+1)^2=(-1)^k\times$$
$$\left[(k+1)-\frac{k}{2}\right]\cdot(k+1)=(-1)^k\cdot\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

مثال ۱۴ـ ثابت کنید

$$1\times2+2\times3+3\times4+\dots+(n-1)n=$$
$$=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

حل.

۱ـ $$1\times2=\frac{1\times2\times3}{3}$$

۲ـ اگر:

$$1\times2+2\times3+3\times4+\dots+(n-1)n=$$
$$=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

آنگاه

$$1\times2+2\times3+3\times4+\dots+(n-1)n+$$
$$+n(n+1)=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}+n(n+1)=$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

حل این‌مثال را می‌توان از نتایج مثالهای (۳) و(۴)هم به‌دست آورد. اگر دقت کنیم:

$$1\times2+2\times3+3\times4+\dots+(n-1)n=$$
$$=1(1+1)+2(2+1)+3(3+1)+\dots+$$
$$=(n-1)[n-1)+1]=[1^2+2^2+\dots+$$
$$+(n-1)^2]+[1+2+\dots+(n-1)]$$

مثال ۱۵ـ ثابت کنید اگر $v_0=2$ و $v_1=3$ و به‌ازاء هر عدد طبیعی k داشته باشیم، $v_{k+1}=3v_k-2v_{k-1}$ در آن صورت:

$$v_n=2^n+1$$

حل. به‌ازاء $n=0$ و $n=1$ حکم درست است.

۲ـ فرض می‌کنیم $v_k=2^k+1$ ، $v_{k-1}=2^{k-1}+1$

پس،

$$v_{k+1}=3(2^k+1)-2(2^{k-1}+1)=2^{k+1}+1$$

مثال ۱۶ـ مطلوب است محاسبه،

$$S_n=1\times1!+2\times2!+3\times3!+\dots+n\times n!$$

حل.

$$S_1=1\times1!=1\text{ ، }S_2=1\times1!+2\times2!=5$$
$$S_3=1\times1!+2\times2!+3\times3!=23$$
$$S_4=1\times1!+2\times2!+3\times3!+4\times4!=119$$

با آزمون این نتایج ملاحظه می‌شود که:

$$S_1=2!-1,\ S_2=3!-1,\ S_3=4!-1,\ S_4=5!-1$$

در نتیجه این امکان به‌وجود می‌آید که حدس بزنیم،

$$S_n=(n+1)!-1$$

این حدس را ثابت می‌کنیم.

۱ـ به‌ازاء $n=1$ این حدس درست است زیرا

$$S_1=1\times1!=2!-1$$

۲ـ اگر،

$$S_k=1\times1!+2\times2!+\dots+k\times k!=(k+1)!-1$$

نشان می‌دهیم،

$$S_{k+1}=1\times1!+2\times2!+\dots+k\times k!+(k+1)$$
$$\times(k+1)!=(k+2)!-1$$

در واقع داریم:

$$S_{k+1}=S_k+(k+1)(k+1)!=[(k+1)!-1]+$$
$$+(k+1)(k+1)!=(k+1)![1+(k+1)]-1=$$
$$=(k+1)!(k+2)-1=(k+2)!-1$$

مثال ۱۷ـ اگر

$$A_2=m-\frac{a}{m-1},\ \alpha\beta=a,\ \alpha+\beta=m,$$

$$A_3=m-\frac{a}{m-\frac{a}{m-1}}\ ,\quad A_4=m-\frac{a}{m-\frac{a}{m-\frac{\alpha}{m-1}}}\ \text{و...}$$

و به‌ازاء $k>1$ داشته باشیم،

$$A_{k+1}=m\frac{a}{A_k},\ (m\neq1,\ \alpha\neq\beta)$$

ثابت کنید،

$$A_n=\frac{(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})-(\alpha^n-\beta^n)}{(\alpha^n-\beta^n)-(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})}\quad(1)$$

حل. اولاً ثابت می‌کنیم فرمول (۱) به‌ازاء $n=2$ درست است. داریم:

$$A_2=m-\frac{a}{m-1}=(\alpha+\beta)-\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)-1}=$$
$$=\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-\alpha-\beta}{\alpha+\beta-1}$$

بنا بر فرمول (۱)

$$A_2=\frac{(\alpha^3-\beta^3)-(\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha-\beta)}$$

با حذف $(\alpha-\beta)$ از صورت و مخرج کسر داریم

$$A_2=\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta+\alpha-\beta}{\alpha+\beta-1}$$

فرض می‌کنیم فرمول (۱) به‌ازاء $n=k$ درست باشد، یعنی

$$A_k=\frac{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}{(\alpha^k-\beta^k)-(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})} \qquad (2)$$

ثابت می‌کنیم به‌ازاء $n=k+1$ هم درست است. داریم،

$$A_{k+1}=\frac{(\alpha^{k+2}-\beta^{k+2})-(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})}{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}$$

در واقع داریم،

$$A_{k+1}=m-\frac{a}{A_k} \quad ، \quad A_{k+1}=(\alpha+\beta)-\frac{\alpha\beta}{A_k}$$

با استفاده از تساوی (۲) داریم،

$$A_{k+1}=(\alpha+\beta)-\frac{\alpha\beta[(\alpha^k-\beta^k)-(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})]}{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}$$
$$=\frac{(\alpha^{k+2}-\beta^{k+2})-(\beta^{k+1}-\beta^{k+1})}{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}$$

و قضیه ثابت است

مثال ۱۸ـ ثابت کنید به‌ازاء $x>0$ و هر عدد طبیعی n داریم:

$$x^n+x^{n-2}+x^{n-4}+\dots+\frac{1}{x^{n-4}}+\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{1}{x^n}\geqslant n+1 \qquad (1)$$

حل. a) به‌ازاء $n=1$ نامساوی (۱) به‌صورت

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2 \qquad (2)$$

نوشته می‌شود که همواره درست است. زیرا می‌توان درستی آن را از $(x-1)^2\geqslant 0$ نتیجه گرفت.

b) به‌ازاء $n=2$ نامساوی (۱) به‌صورت،

$$x^2+1+\frac{1}{x^2}\geqslant 3 \qquad (3)$$

نوشته می‌شود که بازهم صحیح است زیرا ثابت کردیم نامساوی (۲) به‌ازاء $x>0$ درست است اکنون با تبدیل x به x^2 خواهیم داشت،

$$x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2$$

و با افزودن یك واحد به‌طرفین آن، نامساوی (۳) هم ثابت می‌شود.

۲ـ فرض می‌کنیم نامساوی (۱) به ازاء $n=k$ که در آن k عدد طبیعی می‌باشد درست است یعنی داشته باشیم.

$$x^k+x^{k-2}+x^{k-4}+\dots+\frac{1}{x^{k-4}}+\frac{1}{x^{k-2}}+\frac{1}{x^k}\geqslant k+1 \qquad (4)$$

ثابت می‌کنیم نامساوی (۱) به‌ازاء $n=k+2$ هم درست است:

$$x^{k+2}+x^k+x^{k-2}+\dots+\frac{1}{x^{k-2}}+\frac{1}{x^k}+\frac{1}{x^{k+2}}\geqslant k+3 \qquad (5)$$

با تعویض x و x^{k+2} در نامساوی (۳) خواهیم داشت،

$$x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}}\geqslant 2$$

با جمع کردن طرفین نامساوی (۴) و (۶)، نامساوی (۵) به‌دست می‌آید.

اکنون نتایج آنچه را که گذشت جمع‌بندی می‌کنیم.

درحالت‌های (a) و (b) و ۱، ثابت کردیم نامساوی (۱) به ازاء $n=1$ و $n=2$ درست است.

در ۲، ثابت کردیم اگر نامساوی (۲) به‌ازاء $n=k$ درست باشد به‌ازاء $n=k+2$ هم درست است. به‌عبارت دیگر ۲، امکان می‌دهد تا از $n=k$ به $n=k+2$ برسیم.

با توجه به نتایج ۱، در حالت (a) و ۲، ثابت می‌شود نامساوی (۱) به‌ازاء جمیع مقادیر فرد n درست است. به‌طریق مشابه نتایج حاصل از ۱، در حالت (b) و ۲، نشان می‌دهد که نامساوی (۱) به‌ازاء جمیع مقادیر زوج n هم درست است. پس نامساوی (۱) به‌ازاء جمیع مقادیر n درست خواهد بود.

تمرین‌ـ ثابت کنید:

$$\sin x+\sin 2x+\dots+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{nx}{2}$$

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\dots+\cos nx=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\dots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

در شماره‌های (۱) و (۴) مجله رشد دو مقالـه دیگـر در این مورد درج گردیده است.

منبع

Saminsky, I. S. The Method of Mathematical Inductioan, Mir Publisher, 1975, Moscow.

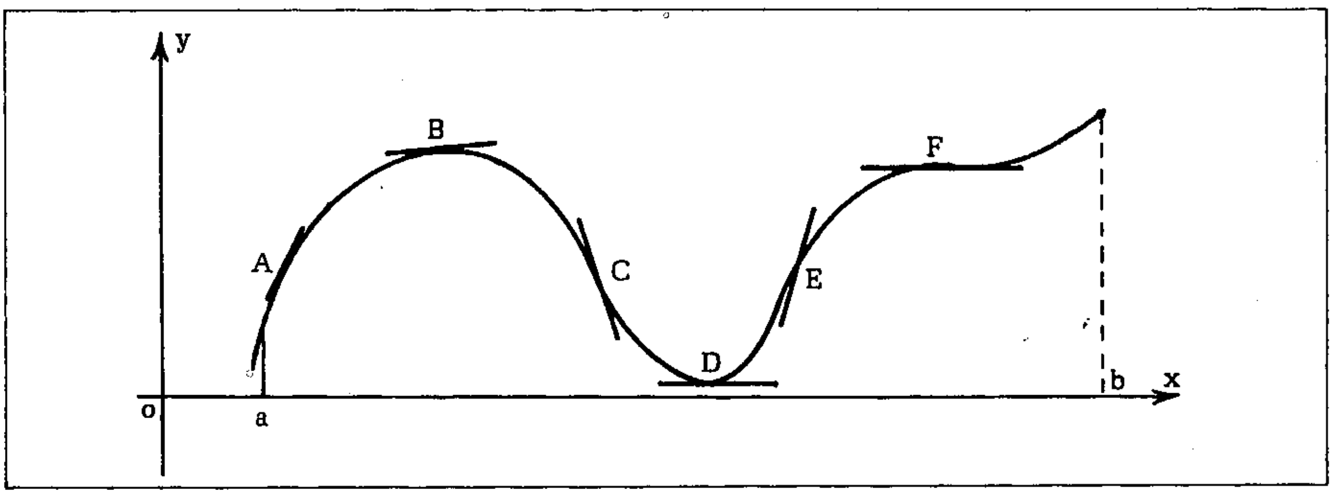
تحدب، تقعر و نقطهٔ عطف

محمود نصیری

شکل زیر (ش ۱) نمودار تابع f را که بر بازهٔ [a, b] دارای مشتق اول و دوم می‌باشد نشان می‌دهد. توابع f و f′ هر دو بر بازهٔ فوق مشتق پذیرند، پس پیوسته هستند.

تغییرات ضریب زاویه مماس بر منحنی وقتی نقطه‌ای مانند P(x, y) روی نمودار تابع از A تا F حرکت می‌کند، به صورت زیر می‌باشد.

وقتی P از A تا B تغییر کند ضریب زاویه خط مماس همواره مثبت بوده و کاهش می‌یابد. در این حالت خط مماس در جهت عقربه‌های ساعت چرخش می‌کند و نمودار منحنی از



A تا B زیر خط مماس قرار دارد. وقتی نقطه P بر B منطبق می‌شود ضریب زاویه خط مماس برابر صفر است. وقتی P از B تا C حرکت می‌کند ضریب زاویه خط مماس منفی و هنوز کاهش می‌یابد و خط مماس بازهم در جهت گردش عقربه‌های ساعت می‌چرخد و نمودار زیر خط مماس است.

در این صورت گوئیم از A تا C تقعر نمودار تابع رو به پائین یا تحدب آن به سمت بالا است.

وقتی P در روی نمودار f از C تا D تغییر می‌کند ضریب زاویه مماس منفی است ولی افزایش می‌یابد در این حالت خط مماس در خلاف جهت گردش عقربه‌های ساعت می‌چرخد، و نمودار بالای خط مماس قرار دارد. در نقطه D ضریب زاویه خط مماس صفر و از D تا E ضریب زاویه خط مماس مثبت و در حال افزایش است. و خط مماس بازهم در خلاف جهت گردش عقربه‌های ساعت می‌چرخد و نمودار بالای خط مماس است. در این صورت گوئیم از C تا E تقعر نمودار رو به بالا یا تحدب آن رو به پائین است. نقطه

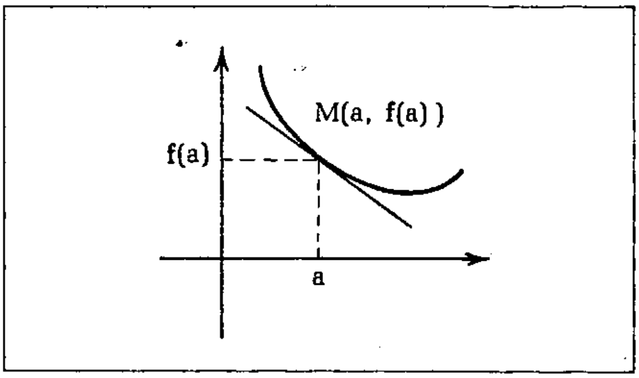
C را کـه در این نمودار جهت تقعر یـا تحدب عـوض شده **نقطه عطف** می‌نامیم.

هر گـاه تقعر در نقطه‌ای به سمت بـالا باشد تحدب درآن نقطه بـه سمت پائین است. از این به بعد فقط یکـی از این مفاهیم مثلاً تقعر را بـه کار می‌بریم اکنون تعاریف زیـر را می‌آوریم.

تعریف۱. تابع $y=f(x)$ را درنقطه $(a,\ f(a))$ به‌سمت بالا مقعر گوئیم، هر گاه.

۱ـ $f'(a)$ موجود باشد (متناهی)؛

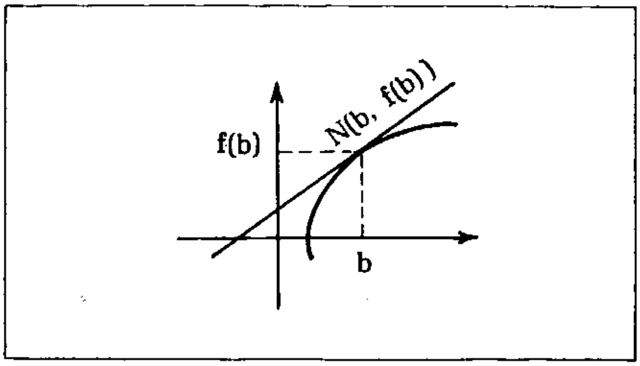
۲ـ یك همسایگی سفته a وجود داشته باشد بـه طوری‌کـه به ازاء هـر x از این همسایگی، نقطه $(x,\ f(x))$ در بالای خط مماس بر منحنی در نقطه $(a,\ f(a))$ واقع باشد.



تعریف۲. تابع ضابطه $y=f(x)$ را درنقطه $(b,\ f(b))$ به سمت پائین مقعر گوئیم، هر گاه.

۱ـ $f'(b)$ وجود داشته باشد (متناهی)؛

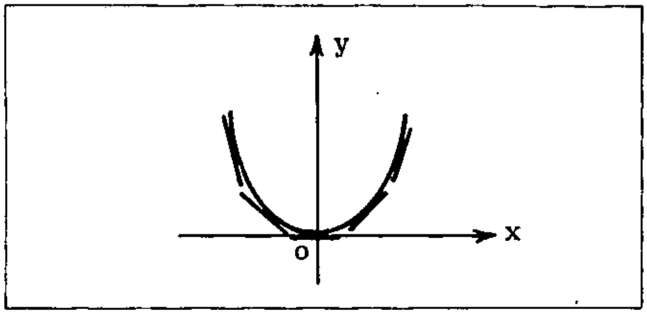
۲ـ یك همسایگـی سفته b وجود داشته باشد به طوری‌کـه به ازاء هـر x از این همسایگـی نقطه $(x,\ f(x))$ روی نمودار تابع پائین خط مماس بـر نمودار منحنی در نقطه $(b,\ f(b))$ باشد.



مثال ۱. تـابع f بـا ضابطه $f(x)=|x^3|$ را در نظـر می‌گیریم. به ازاه هر x،

$$f'(x)=3x|x| \quad و \quad f''(x)=6|x|$$

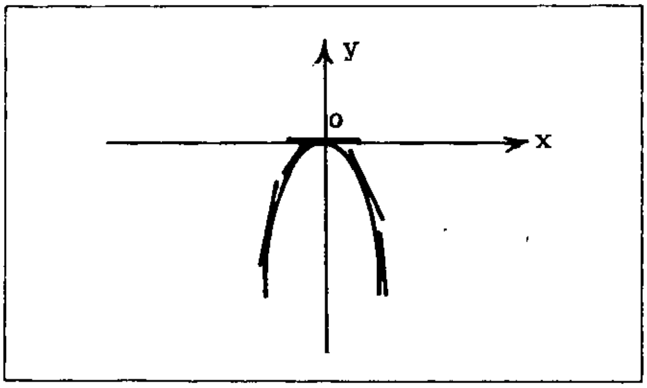
پس به ازاه جمیع مقادیـر x، $f''(x)\geqslant 0$. بعلاوه، نمودار f، که درشکل نشان داده شده است، در بالای هر خط مماسش قرار مـی‌گیرد. بنابراین تقعر نمودار f در تمام نقاط رو به بالا است.



مثال ۲. تابع f بـا ضابطه $f(x)=-x^4$ رادر نظر می‌گیریم.

$$f'(x)=-4x^3 \quad و \quad f''(x)=-12x^2$$

پس به ازاء هر x، $f''(x)\leqslant 0$. بعلاوه، نمودار f همواره در پائین هر خط مماسش قرار می‌گیرد. بنابراین تعقر نمودار f در تمام نقاط رو به پائین است.



اکنون فرض مـی‌کنیم تابع f در نقطه $x=c$ مشتق پذیر باشد معادله خط مماس بر تابع در این نقطه:

$$y=f(c)+f'(c)(x-c)$$

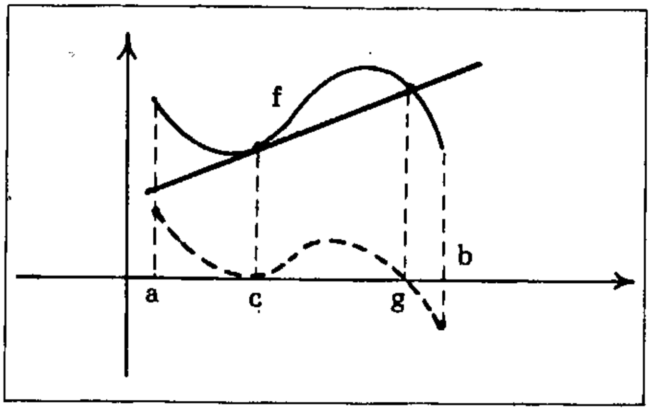
می‌باشد.

در نقطه x تفاضل عرضهای منحنی و خط مماس را در یك همسایگی نقطه c، $g(x)$ می‌نامیم. پس،

$$(1)\quad g(x)=f(x)-f(c)-f'(c)(x-c)$$

در این صورت:

$$g(c)=0 \quad \text{و} \quad g'(c)=0$$



حال با توجه به تعریف ۱ اگر به ازاء هر x از یك همسایگی سفته c، $g(x)$ مثبت باشد نمودار g در این همسایگی بالای خط مماس بوده ودر نتیجه نمودار تابع f در c به بالا مقعر است.

به همین ترتیب با رسم نموداری دیگر می‌توان نشان داد که هرگاه تابع g در یك همسایگی سفته c منفی باشد نمودار تابع g در این همسایگی پائین خط مماس بوده و در نتیجه نمودار تابع f در c به پائین مقعر است.

اکنون برای توضیح بیشتر و اثبات یك قضیه تعریف زیر را یادآوری می‌کنیم.

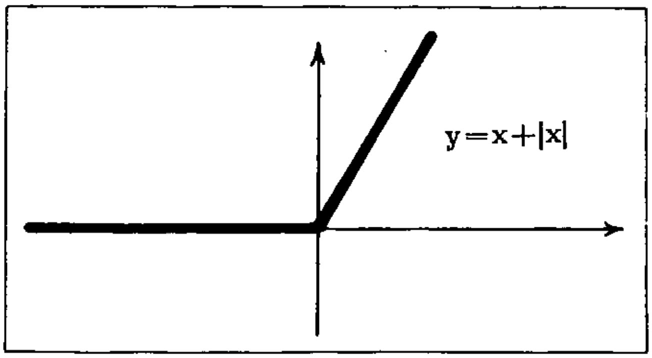
تعریف ۳. گوئیم تابع f در نقطه x_0 ماکزیمم نسبی (می‌نیموم نسبی) دارد هرگاه یك همسایگی از x_0 وجود داشته باشدکه f روی آن تعریف شده و به ازاء هر x از این همسایگی،

$$(f(x)\geqslant f(x_0))\,f(x)\leqslant f(x_0)$$

حال اگر در یك همسایگی سفته x_0،

$$(f(x)>f(x_0))\,f(x)<f(x_0)$$

گوئیم x_0 یك نقطه **ماکزیمم (می‌نیموم) نسبی اکید** f است.



مثلاً، تابع مثال ۱ در نقطه $x=0$ می‌نیموم نسبی اکید و تابع مثال ۲ در نقطه $x=0$ ماکزیمم نسبی اکید دارد. اما تابع f با ضابطه $f(x)=x+|x|$ به ازاء هر $x\leqslant 0$، می‌نیموم نسبی دارد ولی می‌نیموم نسبی اکید ندارد.

همچنین می‌دانیم اگر تابع f در نقطه x_0 ماکزیمم (می‌نیموم) نسبی یا اکید داشته باشد و $f'(x_0)$ موجود و متناهی باشدآنگاه $f'(x_0)=0$. با توجه به تذکراتی‌که در بالا داده شد می‌توان گفت:

هرگاه f در c می‌نیموم (ماکزیمم) نسبی اکید داشته باشد و $f'(c)$ موجود و متناهی باشد، f در c به بالا (پائین) مقعر است:

زیرا $f'(c)=0$ و در نتیجه بنابه رابطه (۱):

$$g(x)=f(x)-f(c)$$

اما چون c نقطه می‌نیموم (ماکزیمم) نسبی اکید است پس به ازاء هر x از یك همسایگی سفته c،

$$(f(x)<f(c))\,f(x)>f(c)$$

و در نتیجه $(g(x)<0)\,g(x)>0$. بنابراین f در c به بالا (پائین) مقعر است.

حال فرض‌کنیم $f'(c)$ و $f''(c)$ موجود و متناهی و $f''(c)$ ناصفر باشد.

طبق قضیه‌آزمون مشتق دوم اگر c یك نقطه می‌نیموم (ماکزیمم) نسبی اکید باشد $f''(c)>0$ $(f''(c)<0)$. همچنین $f'(c)=0$ وبنابه‌آنچه در بالا بیان شد نمودار f در c به بالا (پائین) مقعر است.

لذا می‌توان قضیه زیر را بیان‌کرد.

قضیه ۱. فرض‌کنیم تابع f بر یك بازهٔ باز شامل c مشتق پذیر و $f''(c)$ موجود، متناهی و ناصفر باشد.

۱. اگر $f''(c)>0$ آنگاه تقعر نمودار f در $(c, f(c))$ رو به بالا است.

۲. اگر $f''(c)<0$ آنگاه تقعر نمودار f در $(c, f(c))$ رو به پائین است.

این آزمون در حالتی‌که $f''(x_0)=0$ کار ساز نیست، مثلاً اگر $f(x)=-x^4$ مشاهده‌کردیم‌که $f''(0)=0$ و تقعر در $(0, 0)$ رو به پائین است بدون‌آنکه $f''(0)$ بزرگتر یا کوچکتر از صفر باشد. به طریق مشابه در مورد تابع $f(x)=|x|^3$ نیز در صفر همین طور است.

مثال ۳. توابع f و g با ضابطه‌های:

$$g(x)=x|x| \quad \text{و} \quad f(x)=x^3$$

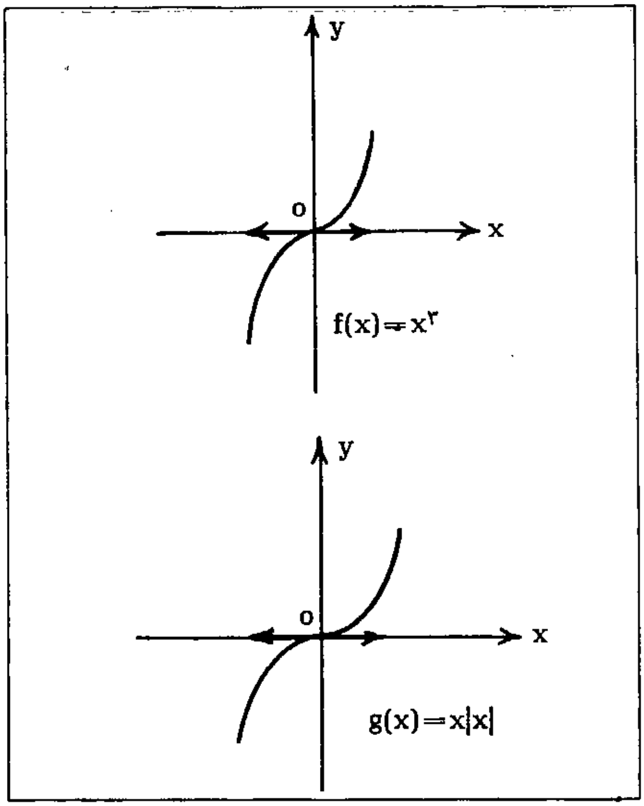
را در نظر می‌گیریم. به ازاء هر x حقیقی،

$$g'(x)=2|x| \quad \text{و} \quad f'(x)=3x^2$$

همچنین به ازاء هر x حقیقی،

$$g''(x)=\begin{cases} 2 & x>0 \\ -2 & x<0 \end{cases} \quad \text{و} \quad f''(x)=6x$$

بنابراین به ازاء هر $x>0$، f و g هردو به بالا مقعر هستند و به ازاء هر $x<0$ هر دو به پائین مقعر می‌باشند.



در نقطه $(0, 0)$ مشتق اول هر دو تابع موجود و متناهی است. دراین نقطه مشتق‌دوم f موجود ومتناهی و $f''(0)=0$ ولی مشتق دوم g در صفر موجود نیست و نمودار هر دو تابع دراین نقطه نه به بالا مقعر هستند و نه به پائین.

در واقع خط مماس در این نقطه نمودار دو تابع را قطع کرده است.

و جهت تقعر در این نقطه در هر دو تابع تغییر کرده است. چنین نقطه‌ای را در این دو تابع یك **نقطه عطف** می‌نامیم.

تعریف ۴. نقطه $(a, f(a))$ را یك **نقطه عطف تابع** f می‌نامیم هرگاه،

۱ـ مشتق اول تابع در نقطه a وجود داشته باشد (متناهی یا نامتناهی).

۲ـ یك همسایگی بدون مرکز a وجود داشته باشد که f'' حول نقطه به طول a تغییر علامت دهد. یعنی،

اگر $x>a$، $f''(x)>0$ و اگر $x<a$، $f''(x)<0$

یا:

اگر $x>a$، $f''(x)<0$ و اگر $x<a$، $f''(x)>0$

شرط اول بیان می‌کند **که در نقطه عطف یك خط مماس کامل بر منحنی وجود دارد.** چون مشتق تابع در $x=a$ وجود دارد (متناهی یا نامتناهی) نتیجه می‌شود که تابع در $x=a$ پیوسته نیز می‌باشد.

(لازم به تذکر است که هرگاه تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته و $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نامتناهی باشد گوئیم تابع در a دارای مشتق نامتناهی است).

(در این حالت فرض می‌کنم f در a پیوسته است).

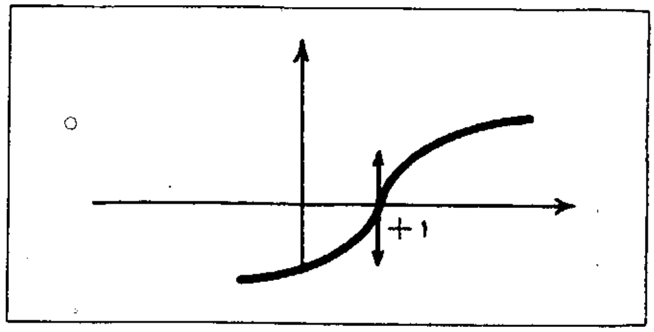
از شرط دوم نتیجه می‌گیریم که در $x=a$ **جهت تقعر منحنی تغییر می‌کند یعنی در نقطه عطف خط مماس بر منحنی از آن عبور می‌کند** همچنین از این تعریف نتیجه می‌گیریم که نقاط **گوشه‌دار یا زاویه‌دار** منحنی جزء نقاط عطف تابع محسوب نمی‌شوند.

باید توجه کرد که **در نقاط عطف لازم نیست مشتق دوم برابر صفر باشد، وحتی ممکن است مشتق دوم در نقطه عطف وجود نداشته باشد.**

مثال ۴. تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ را در نظر می‌گیریم.

این تابع بر R تعریف شده و پیوسته می‌باشد. به ازاء هر $x\neq 1$ $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ و در $x=1$ مشتق نامتناهی وجود دارد و خط مماس در این نقطه موازی محور yها به معادله $x=1$ می‌باشد پس شرط اول نقطه عطف برقرار است همچنین به ازاء هر $x\neq 1$، $f''(x)=\frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}$. و مشخص است که اگر $x>1$ آنگاه $f''(x)<0$ و تقعر منحنی به سمت پائین، و اگر $x<1$ آنگاه $f''(x)>0$ و تقعر منحنی به سمت بالا است، و مشتق دوم در همسایگی سفته $x=1$ تغییر علامت داده است. در نتیجه نقطه $(1, 0)$ نقطه عطف تابع است. و

مشتق دوم در $x=۱$ وجود ندارد.



همچنین ممکن است در تابعی مشتق دوم درنقطه $x_۰$ موجود و $f''(x_۰)=۰$، امـا نقطه $x_۰$ نقطـه عطف نباشد. در این حـالت مشتق دوم در $x_۰$ تغییر علامت نـداده است. مـانند $f(x)=x^۴$ یا $f(x)=|x|^۳$ که قبلاً بررسی شد.

قضیه ۲. فرض‌کنیم تابع f بر یك بازهٔ باز شامل a مشتق پذیر، و $(a, f(a))$ یك نقطه عطف نمودار f باشد. آنگاه اگر $f''(a)$ موجود باشدآنگاه، $f''(a)=۰$.

اثبات. تـابع g را بـه صورت $g(x)=f'(x)$ تعریف می‌کنیم، پس $g'(x)=f''(x)$ چـون $(a, f(a))$ یك نقطه عطف نمودار f است پس f'' در a تغییر عـلامت مـی‌دهد و در نتیجه g' نیز در a تغییر علامت مـی‌دهد و چـون g در a پیوسته نیز مـی‌باشد پس a یك نقطه اکترمم نسبی تـابع g است در نتیجه در این نقطه اکترمم نسبی $g'(a)=۰$ و لـذا $f''(a)=۰$ و قضیه ثابت است.

چنانچـه قبلاً نیز بیان شد عکس این قضیه بـرقرار نیست یعنی ممکن است $f''(a)=۰$ اما نقطه a نقطه عطف نباشد.

در قضیه تقعر بیان‌کردیم‌که اگر $f''(c)>۰$ آنگاه جهت تقعر به سمت yهـای مثبت و اگر $f''(c)<۰$ آنگـاه جهت تقعر به‌سمت yهای منفی یا به پائین است. اما اگر $f''(c)=۰$ باشد، از این‌آزمون نمی‌توان جهت تقعر f را تعیین‌کـرد، در این حالت مشتقات بعدی را تشکیل مـی‌دهیم. اگـر مشتقات بعدی به ازاء $x=c$ صفر شوند و اولین مشتق مخالف صفر و مثبت از مرتبه زوج بـاشد تقعر منحنی در این نقطه بـه سمت بالا است و اگر منفی باشد جهت تقعر به سمت پائین است.

اگـر اولین مشتق مخالف صفر از مرتبه فرد باشد نقطه به طول $x=c$ نقطه عطف تابع است. مثلاً در تابع بـاضابطه $f(x)=x^۴$ داریم:

$$f'(x)=۴x^۳ \quad و \quad f''(x)=۱۲x^۲$$

و

$$f^{(۳)}(x)=۲۴x \quad و \quad f^{(۴)}(x)=۲۴$$

چون $f''(۰)=۰$ و اولین مشتق مخالف صفر از مرتبه چهارم و مثبت است پس تقعر در $x=۰$ به سمت بالا می‌باشد.

اما در تابع f با ضابطه $f(x)=x^۵+۲x+۳$ داریم:

$$f'(x)=۵x^۴+۲ \quad و \quad f''(x)=۲۰x^۳$$

و

$$f^{(۳)}(x)=۶۰x^۲ \quad و \quad f^{(۴)}(x)=۱۲۰x$$

و

$$f^{(۵)}(x)=۱۲۰$$

مشاهده می‌کنیم‌که $f''(۰)=۰$ و اولین مشتق مخالف صفر از مرتبه فرد ومشتق پنجم‌است پس $x=۰$ یك نقطه عطف نمودار تابع است.

همچنین ممکن است تـابعی در یك نقطه پیوسته و مشتق دوم در همسایگـی سفته‌آن نقطه تغییر علامت بدهد امـا آن نقطه، نقطه عطف نباشد. به بیان دیگر، ممکن است در نقطه‌ای تابع پیوسته و جهت تقعر درآن نقطه تغییرکند اما آن نقطه یك نقطه عطف نباشد.

مثال ۵. تابع f بـا ضابطه $f(x)=|x^۲-۱|$ را درنظر می‌گیریم.

این تابع بر R پیوسته است و:

$$f(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & |x|\geqslant ۱ \\ ۱-x^۲ & |x|<۱ \end{cases}$$

تابع f در نقاط $x=\pm ۱$ مشتق‌پذیر نیست ولی:

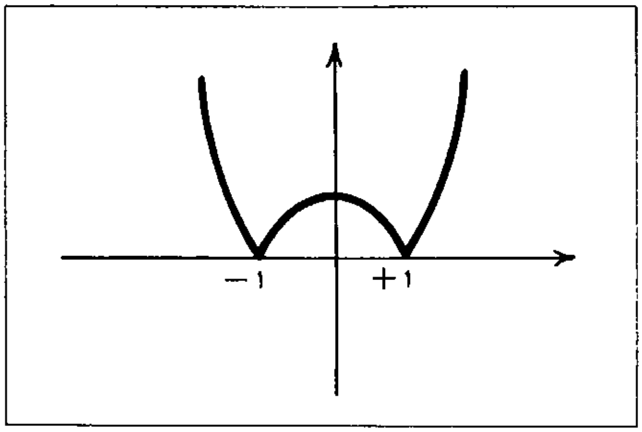
$$f'(x)=\begin{cases} ۲x & |x|>۱ \\ -۲x & |x|<۱ \end{cases}$$

اما مشتقات چپ و راست متناهـی در $x=۱$ و $x=-۱$ وجود دارندکه برابر نیستند $f'_-(۱)=-۲$ و $f'_+(۱)=۲$ همچنین $f'_+(-۱)=-۲$ و $f'_-(-۱)=۲$ به‌همین‌ترتیب:

$$f''(x)=\begin{cases} ۲ & |x|>۱ \\ -۲ & |x|<۱ \end{cases}$$

به‌ازاء $x>۱$، $f''(x)>۰$ وبه‌ازاء $x<۱$، $f''(x)<۰$ و نیز بـه ازاء $x>-۱$، $f''(x)<۰$ و بـه ازاء $x<-۱$، $f''(x)>۰$. یعنی‌دربازه‌های $(-\infty, -۱)$ و $(۱, +\infty)$ تقعر به سمت بالا و در بازه $(-۱, ۱)$ تقعر به سمت پائین است، امـا نقاط $x=\pm ۱$ نقاط عطف تابع

نمی‌باشد زیرا، علیرغم پیوستگی تابع در نقاط $x=\pm ۱$، مشتق اول تابع و در نتیجه خط مماس در این دو نقطه وجود ندارد.



مثال ۶. تابع f با ضابطهٔ

$$f(x)=|x-۱|\sqrt[۳]{x}$$

را در نظر می‌گیریم.

این تابع بر R پیوسته است و مشتق‌آن به جز نقاط $x=۰$ و $x=۱$ به صورت

$$f'(x)=\frac{(x-۱)(۴x-۱)}{۳|x-۱|\sqrt[۳]{x^{۲}}}$$

می‌باشد.

این تابع در نقطه $x=۰$ دارای مشتق نامتناهی و در $x=۱$ مشتق پذیر نیست

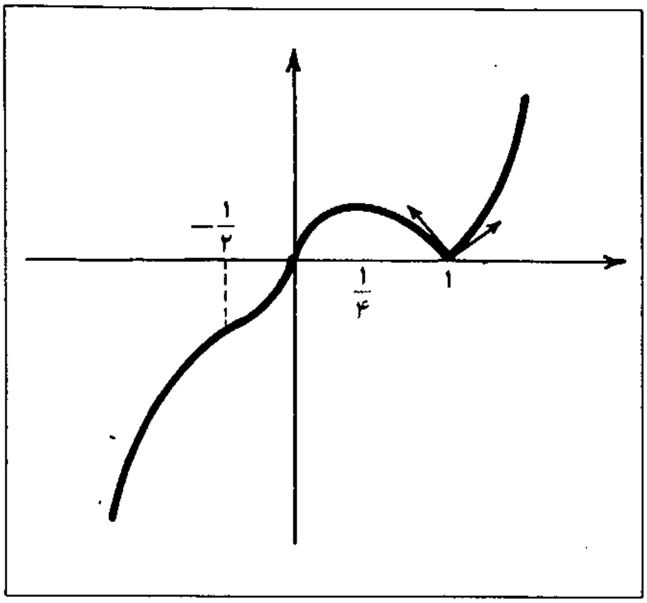
$$f'_-(۱)=-۱ \quad \text{و} \quad f'_+(۱)=+۱$$

و

$$f''(x)=\frac{۲(x-۱)(۲x+۱)}{۳|x-۱|x\sqrt[۳]{x^{۲}}}$$

و مشتق دوم در $x=۱$ و $x=۰$ وجود ندارد اما نقطه $x=۰$ یك نقطه عطف‌است. زیرا دراین‌نقطه مشتق‌اول‌نامتناهی و مشتق دوم در یك همسایگی سفته صفر تغییر علامت می‌دهد. همچنین $x=-\frac{۱}{۲}$ نیز یك نقطه عطف می‌باشد زیرا مشتق اول در این نقطه متناهی است و مشتق دوم در $x=-\frac{۱}{۲}$ تغییر علامت می‌دهد و $f''\left(-\frac{۱}{۲}\right)=۱$. و درنقطه $x=۱$ جهت تقعر تغییر می‌کند اما این نقطه یك نقطه عطف نمی‌باشد زیرا مشتق اول در این نقطه موجود نیست این نقطه یك نقطه

زاویه‌دار f است.



قضیه ۳. هرگاه تابع f بر بازه [a, b] به‌بالا مقعر باشد، f' بر [a, b] صعودی است. همچنین هرگاه f بر [a, b] به پائین مقعر باشد، f' بر [a, b] نزولی است.

اثبات. فرض‌کنیم f بر [a, b] به بالا مقعر باشد دونقطه α و β را در [a, b] درنظر می‌گیریم. بنابه‌آنچه قبلاً[۴] بیان شد اگر تابع f در نقطه α به بالا مقعر باشد به ازاء هر x از [a, b]، $g(x)=f(x)-f(\alpha)-f'(\alpha)(x-\alpha)>۰$ و در نتیجه به ازاء $x=\beta$ نیز داریم.

$$(۱)\quad f(\beta)>f(\alpha)+f'(\alpha)(\beta-\alpha)$$

با تعویض نقشهای α و β داریم

$$(۲)\quad f(\alpha)>f(\beta)+f'(\beta)(\alpha-\beta)$$

روابط (۱) و (۲) را جمع می‌کنیم:

$$f(\alpha)(\beta-\alpha)+f'(\beta)(\alpha-\beta)<۰$$

یعنی،

$$(f'(\alpha)-f'(\beta))(\alpha-\beta)>۰$$

حال اگر $\alpha>\beta$ آنگاه $f'(\alpha)>f'(\beta)$ و اگر $\alpha<\beta$ آنگاه $f'(\alpha)<f'(\beta)$ در نتیجه چون α و β در [a, b] دلخواه می‌باشند، f' بر [a, b] صعودی است. حالت دیگر به طریق مشابه ثابت می‌شود.

مثال ۷. جهت تقعر و نقاط عطف تابع با ضابطه

$$f(x)=\mathrm{Max}\{\sin x,\ \cos x\}$$

را بر بازهٔ $[0, 2\pi]$ تعیین کنید.

حل. می‌توان تابع f را با ضابطه زیر بیان کرد.

$$f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{2}+\frac{|\sin x-\cos x|}{2}$$

یا

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \text{ یا } \frac{5\pi}{4} \leqslant x \leqslant 2\pi \\ \sin x & \frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}\end{cases}$$

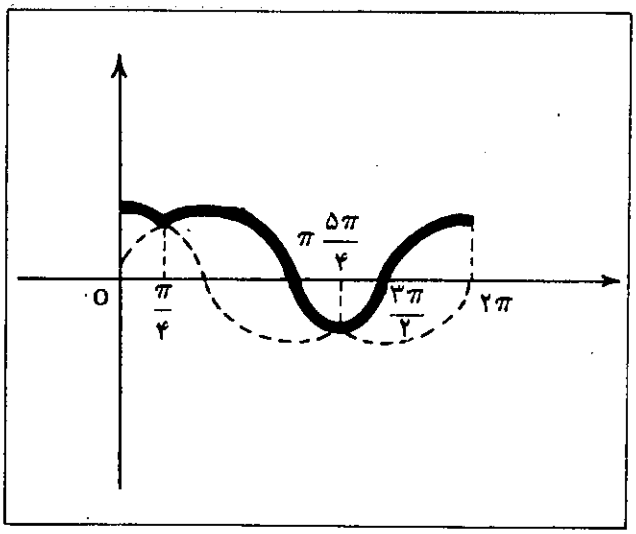
پس:

$$f'(x)=\begin{cases}-\sin x & 0 \leqslant x < \frac{\pi}{4} \text{ یا } \frac{5\pi}{4} < x \leqslant 2\pi \\ \cos x & \frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}\end{cases}$$

این تابع در نقاط $x=\frac{\pi}{4}$ و $x=\frac{5\pi}{4}$ مشتق‌پذیر نیست.

$$f''(x)=\begin{cases}-\cos x & 0 < x < \frac{\pi}{4} \text{ یا } \frac{5\pi}{4} < x < 2\pi \\ -\sin x & \frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}\end{cases}$$

بنابراین مشتق دوم در نقاط $x=\pi$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ برابر صفر و تغییر علامت می‌دهد و بعلاوه، دراین دونقطه مشتق اول موجود است پس این دو نقطه نقاط عطف تابع می‌باشند. چنین در نقطه $x=\frac{\pi}{4}$ جهت تقعر عوض می‌شود. اما چون مشتق اول موجود نیست این نقطه، نقطه عطف نمی‌باشد. در بازه‌های $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ و $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$ و $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ تغییر به سمت پائین و در بازه‌های $\left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$ و $\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$ تقعر به سمت بالا می‌باشد. در نقطه $x=\frac{5\pi}{4}$ مشتق اول و دوم‌هیچ یك موجود نیست و این نقطه یك نقطه زاویه‌دار بوده و جهت تقعر نه به بالا و نه به پائین است.



منابع

۱ــ حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی (لوئیس لیتهلد) ترجمه مهدی بهزاد انتشارات مرکز نشر دانشگاهی.

۲ــ حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی (سیلورمن) ترجمه علی‌اکبر عالم‌زاده، انتشارات علمی و فنی.

بررسی معادلات درجه دوم دو مجهولی با استفاده از ماتریس‌ها

هاشم پروانه مسیحا
دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی دانشگاه شیراز

مقدمه. هدف بررسی معادلات درجه دوم و به دست آوردن معادله مقاطع مخروطی استاندارد به‌وسیله تکنیکهای ماتریس‌ها از معادلهٔ درجهٔ دوم

$$(1)\quad ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

می‌باشد. در روش تحلیلی معادلـه دو متغیره درجه دوم بالا را در مرحله اول با انتقال و دورانی مناسب به فرم ناقص درمی‌آوریم (ضریب جمله xy را صفر مـی‌کنیم.) سپس بـا تبدیل معادلهٔ ناقص به مجموع مربعات کامل، فرم استاندارد را تعیین می‌کنیم. اما در روشی که اکنون شرح داده می‌شود، تمام مراحل فوق با استفاده از تکنیکهای ماتریس‌ها انجام مـی‌گیرد روش کار بدین صورت است که:

۱ــ گروهی همراه با اثرش روی ماتریس‌های متقارن تعریف کرده و سپس سه چند جمله‌ای τ و δ و Δ را تعریف مـی‌کنیم، و نشان می‌دهیم که پایا هستند؛

۲ــ با استفاده از مقادیر ویژه و فرمهای منطقی، مدارات اثر مورد نظر را مورد بررسی قرار می‌دهیم؛

۳ــ با داشتن این اطلاعـات، مقاطع مخروطـی را مدنظر قرار می‌دهیم.

۱. گروه عملگر.

۱.۱ گروه اقلیدسی

تعریف. ماتریس 2×2 مربعی N با همنه‌هایی در R را متعامد مخصوص (Special orthogonal) گویند هر گاه

$$\det N=1 \quad \text{و} \quad {}^tNN=1$$

هر ماتریس متعامد مخصوص را می‌توان بـا ماتریس دوران به اندازه زاویه θ متناظر کرد. یعنی

$$N=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longleftrightarrow N=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

گروه اقلیدسی. مجموعه G شامـل تمام مـاتریس‌هـای حقیقی 3×3 به فرم $\left[\begin{array}{c:c} N & B \\ \hdashline 0\ \ 0 & 1 \end{array}\right]^{(*)}$ که درآن N ماتریس

۲×۲ متعامد مخصوص و B ماتریس ستونی ۱×۲ می‌باشد، با عمل ضرب ماتریس‌ها تشکیل یك گروه می‌دهد که به آن گروه اقلیدسی (Euclidean group) گویند. در بررسی گروه بودن G کافیست نشان دهیم که هر عضو G وارون پذیر است.

$$g \in G, \quad g=\left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{N} & B \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \det g = \det N = 1 \neq 0$$

بنابراین g وارون پذیر است و وارون آن عبارت است از

$$g^{-1}=\left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{{}^tN} & -{}^tNB \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

تعریف. فرض کنید V مجموعه‌ای دلخواه باشد. اثر G روی V نگاشتی است از $G \times V$ به V که

$$(g, v) \longrightarrow g \cdot v \text{ ،}$$

بطوری‌که به ازاء هر g و $h \in G$ وهر $v \in V$ داشته باشیم:

(i) $(gh) \cdot v = g \cdot (h \cdot v)$

(ii) $I \cdot v = v$

۱.۲ مدارات G روی V

تعریف. مدار (orbit) عضو v از V عبارت است از مجموعه

$$G \cdot v = \{g \cdot v : g \in G\}$$

فرض کنید V فضای برداری ماتریس‌های حقیقی ۳×۳ متقارن باشد. به ازاء $g \in G$ و $Q \in V$ تعریف می‌کنیم:

(۲) $g \cdot Q = {}^tg^{-1}Qg^{-1}$

به سادگی می‌توان نشان داد که (۲) یك اثر G روی V را نتیجه میدهد.

اکنون، مدار عضو Q از V تحت G را بررسی می‌کنیم. بدین منظور فرض $Q \in V$ دارای فرم کلی زیر می‌باشد:

$$(۳) \quad Q=\begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c} A(Q) & D(Q) \\ \hline {}^tD(Q) & f(Q) \end{array}\right]$$

که در آن

$$A(Q)=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \text{ و } D(Q)=\begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} \text{ و } f(Q)=f$$

و در آن ${}^tD(Q)$ ترانهاده ماتریس $D(Q)$ می‌باشد.

و برای راحتی کار فرض کنید g^{-1} دارای فرم (*) باشد. بنابراین

$$Q' \in G \cdot Q \Longrightarrow Q' = g \cdot Q = {}^tg^{-1}Qg^{-1} \text{ و } g^{-1} \in G.$$

و داریم:

$${}^tg^{-1}Qg^{-1}=\left[\begin{array}{c|c} {}^tN & \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline {}^tB & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} A(Q) & D(Q) \\ \hline {}^tD(Q) & f(Q) \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{N} & B \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

یعنی

$$(۴) \quad \begin{cases} A(Q') = {}^tNA(Q)N \\ D(Q') = {}^tNA(Q)B + {}^tND(Q) \\ f(Q') = {}^tBA(Q)B + 2\,{}^tD(Q)B + f(Q) \end{cases}$$

معادلات (۴)، معادلات کلیدی در این مقاله می‌باشد.

۱.۳ چند جمله‌ایهای پایا

فرض کنید K حلقه چند جمله‌ای با شش متغیر x_1 و x_2 و ... و x_6 روی اعداد حقیقی باشد یعنی

$$K = R[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6].$$

آنگاه می‌توان انطباقی بین K و V فضای برداری ماتریس‌های متقارن حقیقی ۳×۳ در نظر گرفت. بدین‌ترتیب که برای $P(x_1, \cdots, x_6) = P \in K$ و Q در V به فرم (۳) قرار می‌دهیم

$$P(Q) = P(a, b, c, d, e, f).$$

تعریف. چند جمله‌ای P در K را پایا (Invariant) نسبت به اثر گروه اقلیدسی گویند اگر

$$P(g \cdot Q) = P(Q) \qquad (g \in G,\ Q \in V)$$

حال سه چند جمله τ و δ و Δ را با ضابطه‌های

$$\tau(x_1, \cdots, x_6) = x_1 + x_3$$

$$\delta(x_1, \cdots, x_6) = x_1x_3 - x_2^2$$

$$\Delta(x_1, \cdots, x_6) = x_1x_3x_6 - x_1x_5^2 - x_2^2x_6 + 2x_2x_4x_5 - x_3x_4^2$$

در نظر می‌گیریم. آنگاه:

$$\tau(Q)=a+c=\mathrm{trac}A(Q)$$

$$(5)\quad \delta(Q)=ac-b^2=\det A(Q)$$

$$\Delta(Q)=\det(Q)$$

بسادگی می‌توان نشان داد که چند جمله‌ایهای τ و δ و Δ چند جمله‌ایهای پایا بوده و در نتیجه متعلق به J مجموعه تمام چند جمله‌ایهای پایا می‌باشند.

۴. فرم‌های منطقی

فرض می‌کنیم Q به فرم (۳) باشد و $P(x)$ چند جمله‌ای مشخصه (Characteristic poly) $A(Q)$ باشد یعنی

$$A(Q)=\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}\Longrightarrow P(x)=\det(A(Q)-xI)$$
$$=x^2-\tau(Q)x+\delta(Q)$$

و λ و μ مقادیر ویژه $A(Q)$ باشند. در نتیجه ماترس متعامد مخصوص N وجود دارد بطوری‌که ${}^tNA(Q)N$ ماتریس قطری با هسته‌های روی قطر λ و μ است. ماتریس N را می‌توان با انتخاب زاویه θ بطوری‌که $\cot 2\theta=\frac{a-c}{2b}$ باشد، به دست آورد.

فرض می‌کنیم g^{-1} ماتریس به‌فرم (۱) با N به دست‌آمده در بالا و $B=0$ باشد آنگاه طبق‌روابط (۴) در مدار Q ماتریسی به فرم:

$$(6)\quad Q'={}^tg^{-1}Qg^{-1}=\begin{bmatrix}\lambda&0&d'\\0&\mu&e'\\d'&e'&f\end{bmatrix}$$

وجود دارد که در آن:

$$D(Q')=\begin{pmatrix}d'\\e'\end{pmatrix}$$

$$(7)\quad D(Q')={}^tNA(Q)B+{}^tND(Q)={}^tND(Q)$$

و از طرفی $(d')^2+(e')^2=d^2+e^2$ زیرا:

$$(d'\ \ e')\begin{pmatrix}d'\\e'\end{pmatrix}=(d')^2+(e')^2={}^tD(Q')D(Q')$$
$$={}^tD(Q)D(Q)=d^2+e^2$$

همچنین می‌توان بدون کاستن از کلیت فرض کرد که $e'\geqslant 0$ زیرا اگر $e'<0$ آنگاه $-e'>0$ و به جای g^{-1} در بالا، $(hg)^{-1}$ را قرار می‌دهیم که ماتریس به فرم (۱) است بطوری‌که N در آن ماتریس دوران به اندازه $\theta+\pi$ با $\cot 2\theta=\frac{a-c}{2b}$ می‌باشد. به عبارت دیگر:

$$Q''={}^th^{-1}Q'h^{-1}={}^th^{-1}({}^tg^{-1}Qg^{-1})h^{-1}$$
$$={}^t(hg)^{-1}Q(hg)^{-1}$$

که:

$$h^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\pi&-\sin\pi&0\\\sin\pi&\cos\pi&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

و داریم:

$${}^th^{-1}Q'h^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda&0&d'\\0&\mu&e'\\d'&e'&f\end{bmatrix}$$
$$\times\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\lambda&0&d'\\0&\mu&-e'\\-d'&-e'&f\end{bmatrix}$$

بنابراین فرض می‌کنیم که $e'\geqslant 0$ و نسبت به‌ضرایب ماتریس Q' در (۶) بحث می‌نمائیم و فرم‌های مخصوص برحسب چند جمله‌ایی‌های $\tau(Q)$ و $\delta(Q)$ و $\Delta(Q)$ به دست آوردیم.

حالت ۱. اگر $\delta(Q)\neq 0$ آنگاه مدار Q شامل ماتریس A می‌باشد وماتریس قطری فوق نسبت به λ و μ منحصر به‌فرد است.

$$A=\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&\mu&0\\0&0&A(Q)/\delta(Q)\end{bmatrix}$$

اثبات.

$$Q'={}^tg^{-1}Qg^{-1}$$
$$\delta(Q)=\det A(Q)=\det A(Q')$$
$$=\delta(g\cdot Q)=\delta(Q')\Rightarrow\delta(Q)=\mu\lambda\neq 0$$

$$\Rightarrow \lambda \neq 0,\ \mu \neq 0 \Rightarrow \exists s,\ t \in R$$
$$\ni: \lambda s + d' = 0,\ \mu t + e' = 0$$

فرض کنید $g^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} N & B \\ \hline 0\ \ 0 & 1 \end{array}\right]$ که ${}^{t}B = (s\ \ t)$ آنگاه:

$$Q'' = g \cdot Q' = {}^{t}g^{-1} Q' g^{-1}$$

و از معادلات (۴) داریم:

$$A(Q'') = {}^{t}I A(Q) I = A(Q') = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$D(Q'') = A(Q')B + D(Q') = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(Q'') = {}^{t}BA(Q')B + 2\,{}^{t}D(Q')B + f(Q')$$
$$= d's + e't + f = f''$$

و با توجه به اینکه $\Delta(Q'') = \Delta(Q)$ و:

$$\Delta(Q'') = \det Q'' = \det({}^{t}g^{-1} Q' g^{-1}) = \det Q'$$
$$= \lambda\mu(f + e't + d's) = \lambda\mu f'' = \delta(Q') f''$$
$$\Longrightarrow f'' = \frac{\Delta(Q'')}{\delta(Q')} = \frac{\Delta(Q)}{\delta(Q)}$$

و حکم تمام است. منحصربه‌فرد بودن با توجه به معادلات(۴) نتیجه می‌گردد.

حالت ۲. اگر $\delta(Q) = 0$ و $\tau(Q) \neq 0$ و $\Delta(Q) \neq 0$ آنگاه مدار Q شامل ماتریس به فرم

$$A = \begin{bmatrix} \tau(Q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e'' \\ 0 & e'' & 0 \end{bmatrix}$$

است که $(e'')^2 = \dfrac{-\Delta(Q)}{\tau(Q)}$

اثبات.

$$\delta(Q) = 0 \Rightarrow \lambda\mu = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ یا } \mu = 0$$
$$\tau(Q) \neq 0 \Rightarrow \lambda + \mu \neq 0 \Longrightarrow$$
$$\lambda = \tau(Q) \text{ و } \mu = 0$$

(فرض $\mu = 0$ و $\lambda = \tau(Q)$) با توجه بـه اینکه $\mu = 0$ و $\Delta(Q) = \Delta(Q') \neq 0$ و Q' ماتریسی به فرم (۶) می‌باشد، بنابراین $e' \neq 0$ زیرا:

$$\Delta(Q) = -\tau(Q)\,(e')^2$$

فرض کنید $Q'' = g \cdot O' = {}^{t}g^{-1} Q' g^{-1}$ کـه درآن g^{-1} ماتریسی به فرم(*) است با $N = I$ و ${}^{t}B = (s,\ t)$ (t, s در حالت ۱ شرح داده شده‌اند.) از معادلات (۴) داریم:

$$A(Q'') = \begin{bmatrix} \tau(Q) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } D(Q'') = \begin{bmatrix} 0 \\ e' \end{bmatrix}$$

$$f(Q'') = d's + 2e't + f$$

حال بـا انتخاب $t = -\dfrac{f + d's}{2e'}$ داریـم $f(Q'') = 0$

بنابراین:

$$Q'' = \begin{bmatrix} \tau(Q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e' \\ 0 & e' & 0 \end{bmatrix}$$

که درآن

$$\Delta(Q) = \Delta(Q'') = -e'(e'\tau(Q)) \Longrightarrow$$
$$(e')^2 = -\frac{\Delta(Q)}{\delta(Q)}$$

حالت ۳. اگر $\delta(Q) = 0$ و $\tau(Q) \neq 0$ و $\Delta(Q) = 0$ آنگاه مدار Q شامل ماتریسی به فرم زیر می‌باشدکه درآن:

$$f' = f - \frac{d^2 + e^2}{\tau(Q)}$$

$$A = \begin{bmatrix} \tau(Q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f' \end{bmatrix}$$

اثبات. چـون $\delta(Q) = 0$ پس $\delta(Q) = \delta(Q') = 0$ و در نتیجه $\lambda\mu = 0$ واز اینکه $\tau(Q) \neq 0$ پس λ و μ هردو باهم صفر نیستند. فرض $\mu = 0$ و $\lambda = \tau(Q)$:

$$\Delta(Q) = \Delta(Q') = -(e')^2 \tau(Q) = 0 \Longrightarrow e' = 0$$

قرار میدهیم $Q'' = g \cdot Q'$ که درآن g^{-1} عبارت است از ماتریس بـه فـرم (*) کـه درآن $N = I$ و ${}^{t}B(s,\ 0)$ و $\lambda s + d' = 0$ از معادلات (۴) داریم:

$$A(Q'') = \begin{bmatrix} \tau(Q) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } D(Q'') = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و:

$$f'=f(Q'')=f=\frac{d^2+e^2}{\lambda}$$

$$\Longrightarrow Q''=\begin{bmatrix} \tau(Q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f' \end{bmatrix}$$

حالت ۴. اگر $\Delta(Q)=\delta(Q)=\tau(Q)=0$ آنگاه مدار Q شامل یکی از دو ماتریس زیر است.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & d' \\ 0 & 0 & 0 \\ d' & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

که در آن $d^2+e^2=(d')^2$.

اثبات.

$$\left.\begin{array}{l} \delta(Q)=0 \Longrightarrow \lambda\mu=0 \\ \tau(Q)=0 \Longrightarrow \lambda+\mu=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda=\mu=0$$

$$\Longrightarrow A(Q)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فرض $e'=0$:

$$D(Q')={}^tND(Q)$$

اگر $d'\neq 0$ آنگاه:

$$Q'=\begin{bmatrix} 0 & 0 & d' \\ 0 & 0 & 0 \\ d' & 0 & f \end{bmatrix}$$

با فرض.

$$g^{-1}=\begin{bmatrix} I & & s \\ & & t \\ s & t & 1 \end{bmatrix}$$

داریم:

$$Q''=g\cdot Q'={}^tg^{-1}Q'g^{-1}$$

با توجه به معادلات (۴):

$$A(Q'')=0 \quad \text{و} \quad D(Q'')=\begin{bmatrix} d' \\ 0 \end{bmatrix}$$

و:

$$f(Q'')=2(d's)+f$$

حال s را چنان انتخاب می‌کنیم که $f(Q'')=0$ پس

$$Q'=\begin{bmatrix} 0 & 0 & d' \\ 0 & 0 & 0 \\ d' & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اگر $d'=0$ آنگاه

$$D(Q'')=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

و

$$f(Q'')=2d's+f=f$$

و ماتریس Q'' به فرم زیر می‌باشد.

$$Q''=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

۳. حرکت صلب مقاطع مخروطی

با تبدیل مناسبی صفحه xy را به صفحه $z=1$ متناظر می‌کنیم:

$$p=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Longleftrightarrow P=\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

آنگاه اگر

$$Y(p)=Q(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$$

و Q به فرم (۳) باشد داریم:

$$Q(p)=Q(x,y)={}^tPQP$$

حال فرض می‌کنیم که ماتریس g به فرم (*) باشد آنگاه تحت گروه اقلیدسی صفحه $Z=1$ به خودش برده می‌شود. یعنی، اگر

$$g=\left[\begin{array}{cc|c} N & & B \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{و} \quad p=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$gP=\begin{bmatrix} Np+B \\ 1 \end{bmatrix}$$

حال g توسط تبدیلی که طولها و زوایا را حفظ می‌کند(حرکت صلب) بـه سؤال مورد نظر در اول بحث پاسخ خـواهد داد. بدین طریق که هرگاه F_g چنان باشد که

$$F_g(p)=gP=\begin{bmatrix} Np+B \\ ۱ \end{bmatrix}$$

و فرض $Q'=g\cdot Q$ و C و C' مقاطع مخروطی متناظر با Q و Q' باشند،

$$C=\{p: Q(p)=۰\}$$

$$C'=\{p: (p)=۰\}$$

آنگاه معادله

$${}^tPQP={}^tP\,{}^tgQ'gP={}^t(gP)Q'(gP)$$

نشان مـی‌دهدکـه نقطه p روی C است اگـر و فقط اگـر $gP=F_g(p)$ روی C' باشد. بنابراین F_g منحنی C را به منحنی C' خواهد برد.

اکنون بـا شرح حالتهای قبل راهی برای به دست‌آوردن مقاطع مخروطی از معادله (**) دست خواهیم یافت.

$$ax^{۲}+۲bxy+cy^{۲}+۲dx+۲ey+f=۰ \qquad (**)$$

حالت ۱. اگر $\delta(Q)\neq ۰$ و λ و μ ریشه‌های معادله:

$$x^{۲}-\tau(Q)x+\delta(Q)=۰$$

باشد. آنگاه فرم استاندارد مقطع مخروطی‌که از (**) نتیجه می‌شود به وسیله تبدمل F_g متناظر است با:

$$\lambda x^{۲}+\mu y^{۲}+\Delta(Q)/\delta(Q)=۰$$

زیرا دراین حالت نشان دادیم‌که مدار Q شامل ماتریسی به‌فرم $\begin{bmatrix} \lambda & ۰ & ۰ \\ ۰ & \mu & ۰ \\ ۰ & ۰ & \Delta(Q)/\delta(Q) \end{bmatrix}$ است. بنابر رابطه:

$${}^tPQP=۰ \iff {}^tF_g(p)Q'F_g(p)$$
$$={}^t(gP)Q'(gP)=۰$$

داریم:

$$[x\ \ y\ \ ۱]\begin{bmatrix} \lambda & ۰ & ۰ \\ ۰ & \mu & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{\Delta(Q)}{\delta(Q)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$=\lambda x^{۲}+\mu y^{۲}+\frac{\Delta(Q)}{\delta(Q)}=۰$$

حالت ۲. اگر $\delta(Q)=۰$ و $\tau(Q)\neq ۰$ و $\Delta(Q)\neq ۰$

فرض مـی‌کنیم e' ریشه مثبت $-\frac{\Delta(Q)}{\tau(Q)}$ بـاشد آنگاه فـرم استاندارد مقطع مخروطی عبارت است از:

$$\tau(Q)x^{۲}+۲e'y=۰$$

زیرا در این حالت مدار Q شامل ماتریس به فرم:

$$Q'=\begin{bmatrix} \tau(Q) & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & e' \\ ۰ & e' & ۰ \end{bmatrix}$$

است‌که $e'=\left(\frac{-\Delta(Q)}{\tau(Q)}\right)^{\frac{۱}{۲}}$ و داریم:

$${}^tPQP=۰ \iff {}^t(gP)Q'(gP)=۰$$

$$\Longrightarrow [x\ \ y\ \ ۱]\begin{bmatrix} \tau(Q) & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & e' \\ ۰ & e' & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$=x^{۲}\tau(Q)+۲e'y=۰$$

حالت ۳. اگر $\delta(Q)=۰$ و $\tau(Q)\neq ۰$ و $\Delta(Q)=۰$ آنگاه فرم استاندارد قطع مخروطی عبارت است از:

$$\tau(Q)x^{۲}+f-\frac{d^{۲}+e^{۲}}{\tau(Q)}=۰$$

زیرا:

$$[x\ \ y\ \ ۱]\begin{bmatrix} \tau(Q) & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$=\tau(Q)x^{۲}+f-\frac{d^{۲}+e^{۲}}{\tau(Q)}=۰$$

حالت ۴. اگـــر $\Delta(Q)=\tau(Q)=\delta(Q)=۰$ امـا $d^{۲}+e^{۲}\neq ۰$ فرم استاندارد مقطع مخروطی‌عبارت است‌از $(d^{۲}+e^{۲})^{\frac{۱}{۲}}x=۰$ زیرا:

$$[x\ \ y\ \ ۲]\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & d' \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ d' & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ ۱ \end{bmatrix}$$

بقیه در صفحه ۷۰

اهمیت زوایای ۳۰، ۴۵، ۶۰ درجه در نظریهٔ اعداد

دکتر ارسلان شادمان
عضو هیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه تهران

مقدمه

شاید این پرسش برای شما پیش‌آمده باشد که چرا در دبیرستان زوایای حادهٔ ۳۰، ۴۵ و ۶۰ درجه بیش‌از سایر زوایا مورد گفتگو است. از دیدگاه نظریهٔ اعداد، جواب آن است که این زوایا یگانه زوایای حاده‌ای هستند که برحسب درجه اندازهٔ گویا دارند و به علاوه یکی از خطوط مثلثاتی آنها نیز گویا است. این مطلب ساده و قابل بیان در سطح دبیرستان است و قضیهٔ اساسی راجع به کسینوسها است. در واقع به ازاء هر $n \geqslant ۱$، $۲\cos n\alpha$ برحسب توانهای $۲\cos\alpha$ بسط داده می‌شود. برای رسیدن به این بسط از اتحاد اساسی کسینوسها، یعنی

$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=۲\cos a\cos b$$

استفاده می‌شود. دیده می‌شود که بسط به شکل یک چند جمله‌ای تکین درجه n ظاهر می‌شود که ضرایب آن همگی عدد صحیح‌هستند. پس می‌توان مطالب‌راجع به‌ریشه‌های‌گویای چند جمله‌ایهای تکین با ضرایب صحیح را به کار برد. اما می‌دانیم قضیهٔ گاوس در این مورد می‌گوید‌که چنین ریشه‌هائی همگی عدد صحیح هستند. از اینجا مسأله برای کسینوس حل می‌شود. در مورد سایر خطوط مثلثاتی از دستورهای

$$\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)$$

و

$$\cos ۲\alpha=\frac{۱-tg^{۲}\alpha}{۱+tg^{۲}\alpha}$$

مطلب به کسینوس برمی‌گردد. از آنجا که اتحاد اساسی کسینوسها، مبنای کار ما است، معادلهٔ تابعی

$$f(a+b)+f(a-b)=۲f(a)f(b)$$

را مورد بحث قرار می‌دهیم و خواهیم دید که تحت شرایطی فقط کسینوسها در این معادله صدق می‌کنند. از اینرو آنرا معادلهٔ تابعی کسینوسها نامگذاری می‌کنیم.

در انشای اولیه‌ای که تحویل مجله داده بودیم، شرح و بسط بیشتری در مورد آموزش روش تحقیق و یافتن ضرایب دقیق بسط $\cos(n\alpha)$ برحسب $\cos\alpha$ آمده بود. اما هیأت محترم تحریریه چنین تشخیص دادندکه «...$\sum$ها بسیار پیچیده به نظر می‌آید این قسمت را تلخیص فرموده بدون اثبات بیاورند». خاطر نشان می‌سازیم‌که $\cos n\alpha$ به‌شکل $T_n(\cos\alpha)$ است، T_n چند جمله‌ای چبیشف است و از اهمیت خاصی برخوردار است.

۱ـ چند جمله‌ایهای تکین و کسینوسها

تعریف. یك چند جمله‌ای P با ضرایب متعلق به یك حلقهٔ یکدار را «تکین» گوئیم هرگاه ضریب بزرگترین درجه‌اش برابر ۱ باشد.

قضیه ۱. به‌ازاء هر عدد طبیعی $n \geqslant 1$، یك چند جمله‌ای تکین با ضرایب صحیح و درجهٔ n مانند

$$P_n(x)=x^n+R_n(x)$$

وجود دارد بقسمی که به ازاء هر $\alpha \in R$، داریم:

$$2\cos(n\alpha)=P_n(2\cos\alpha)$$

برهان. برابری آشکار $2\cos\alpha=2\cos\alpha$ و برابری سادهٔ $2\cos 2\alpha=(2\cos\alpha)^2-2$ نشان می‌دهد که حکم قضیه برای $n=1$ و $n=2$ صحیح است:

$$P_1(x)=x \quad \text{و} \quad R_1(x)=0$$

و

$$P_2(x)=x^2-2 \quad \text{و} \quad R_2(x)=-2 .$$

روش استقراء با دو مقدمه را به کار می‌بریم. فرض می‌کنیم $n \geqslant 2$ و حکم قضیه را برای $n-1$ و n بپذیریم. پس، با قرار دادن $x=2\cos\alpha$، داریم:

$$2\cos((n-1)\alpha)=x^{n-1}+R_{n-1}(x)=P_{n-1}(x)$$
$$2\cos(n\alpha)=x^n+R_n(x)$$

که $R_n(x)$ یك چند جمله‌ای بادرجهٔ کوچکتر یا مساوی $n-1$ و ضرایب صحیح است، درجهٔ P_{n-1} نیز دقیقاً برابر $n-1$ است. اکنون از اتحاد:

$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b$$

استفاده می‌کنیم. به ازاء $a=n\alpha$ و $b=\alpha$، داریم:

$$\begin{aligned}2\cos((n+1)\alpha)&=(2\cos\alpha)(2\cos n\alpha)\\&\quad-2\cos((n-1)\alpha)\\&=xP_n(x)-P_{n-1}(x)\\&=x^{n+1}+xR_n(x)-P_{n-1}(x)\end{aligned}$$

با قرار دادن

$$R_{n+1}(x)=xR_n(x)-R_{n-1}(x)$$

آشکار است که چند جمله‌ای R_{n+1} با ضرایب صحیح است زیرا از جمع وضرب چند جمله‌ایهای با ضرایب صحیح به دست آمده است. بعلاوه، درجهٔ R_{n+1} کوچکتر یا مساوی n است، زیرا حداکثر یك واحد از ماکزیموم درجهٔ P_{n-1} و R_n بیشتر است، و برهان تمام است.

تمرین. ثابت کنید به ازاء $n \geqslant 2$، درجهٔ R_n حداکثر $n-2$ است.

تذکر. عبارت دقیق P_n در پایان مقاله‌آمده است. اثبات آن به توصیهٔ هیأت تحریریه حذف شد.

قضیه ۲. اگر P یك چند جمله‌ای تکین با ضرایب صحیح باشد، آنگاه هر ریشهٔ گویای P یك عدد صحیح است.

برهان. فرض‌کنیم a یك ریشهٔ گویای چند جمله‌ای تکین

$$P(x)=x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_{n-1}x+c_n$$

باشدکه ضرایب c_i عضو Z اند. عددگویای a را به شکل کسر تحویل ناپذیر $a=\frac{s}{q}$ می‌نویسیم، s و q نسبت به هم اولند، $s \in Z$، $q \in N$. با ضرب q^n در $P(a)$ داریم:

$$\begin{aligned}q^n&=s^n+qc_1s^{n-1}+\cdots\\&\quad+q^{n-1}c_{n-1}s+q^nc_n=0\end{aligned}$$

از اینجا، لازم می‌آیدکه s^n بر q بخشپذیر باشد. اما q و s نسبت به هم اولند، پس $q=1$ یعنی $a \in Z$.

تذکر. قضیهٔ ۲ از قضایای معروف گاوس در نظریهٔ مقدماتی اعداد است.

۲ـ کاربرد در اصم بودن خطوط مثلثاتی زوایای گویا

پیش‌از بیان قضیهٔ مورد بحث و نتایج آن،تصریح می‌کنیم منظور از زاویهٔ گویا و زاویهٔ حاده چیست.

تعریف. عدد حقیقی α را یك «زاویهٔ گویا» می‌نامیم هر گاه نسبت $\frac{\alpha}{\pi}$ یك عددگویا باشد. عدد حقیقی α را یك زاویهٔ «حاده» می‌نامیم هرگاه $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

قضیه ۳. اگر α یك زاویهٔ حادهٔ گویا باشد، آنگاه $\cos\alpha$ فقط وقتی گویا است که $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

برهان. زاویهٔ حادهٔ گویای α را درنظر می‌گیریم و اعداد طبیعی m و n را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$0<\alpha=\frac{2m\pi}{n}<\frac{\pi}{2}$$

پس $n\alpha=2m\pi$ و در نتیجه $\cos n\alpha=1$. بنابر قضیهٔ ۱، یك چند جمله‌ای تکین با ضرایب درست P هست بقسمی‌که $P(2\cos\alpha)=1$. پس عـدد $2\cos\alpha$ یـك ریشهٔ چند جمله‌ای تکین $P-1$ بـا ضرایب صحیح است. عدد $\cos\alpha$ فقط وقتی گویاست کـه $2\cos\alpha$ عدد صحیح بـاشد. امـا با توجه بـه $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$، داریم $2>2\cos\alpha>0$ و یگـانه امکان برای آنکه $2\cos\alpha$ عدد صحیح باشد، آن است که $2\cos\alpha=1$. یعنی $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ و یا $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

از این قضیه، به سادگی نتایج زیر به‌دست می‌آید (اثبات به خواننده واگذار می‌شود).

نتیجه ۱. اگر α یك زاویهٔ حادهٔ گویا باشد و $\alpha\neq\frac{\pi}{3}$، آنگاه $\cos\alpha$ یك عدد اصم جبری است.

نتیجه ۲. اگر α یك زاویهٔ حادهٔ گویا باشد و $\alpha\neq\frac{\pi}{6}$، آنگاه $\sin\alpha$ یك عدد اصم جبری است.

نتیجه ۳. اگر α یك زاویهٔ حادهٔ گویا باشد و $\alpha\neq\frac{\pi}{4}$، آنگاه $tg\alpha$ یك عدد اصم جبری است.

نتیجه ۴. اگر α یك زاویهٔ حادهٔ گویا غیر از $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{3}$ باشد، آنگاه همهٔ خطوط مثلثاتی α اعداد اصم جبری‌اند.

۳ـ معادلهٔ تابعی کسینوسها

هدف ما در این بخش آن است که همهٔ توابع

$$f: R \longrightarrow R$$

را که در معادلهٔ تابعی

$$(1)\quad f(a+b)+f(a-b)=2f(a)f(b)$$

صدق می‌کنند بیابیم. این مسأله را باشرایط اضافی مشتقپذیری حل مـی‌کنیم. فعلاً مـی‌دانیم علاوه‌بر تابع ثابت صفر، تابع $f(x)=\cos x$ و تـابـع $f(x)=ch x$ نیز در (۱) صدق می‌کنند. همچنین بدیهی است کـه اگر f در (۱) صدق کند و $g(x)=f(\omega x)$ کـه ω ثابت دلخواهی است، آنگاه g نیز در (۱) صدق خـواهد کرد. قضیهٔ زیر بیان می‌کند که معادلهٔ (۱) جـواب دیگری جز ثابت صفر و «کسینوسها» ندارد. این قسمت مقاله، برای کسانی مفید است کـه با ریاضیات عمومـی آشنایی داشته باشند.

قضیه ۴. فـرض‌کنید $f: R \to R$ تابعی دو بار مشتقپذیـر باشد و در معادلهٔ تابعی (۱) صدق‌کند. در این صورت، فقط یکی از سه حالت زیر ممکن است:

حالت ۱. تابع f ثابت صفر است؛

حالت ۲. یك ثابت ω هست بقسمی‌که $f(x)=\cos\omega x$؛

حالت ۳. یك ثابت ω هست بقسمی‌که $f(x)=ch\omega x$.

برهان. فـرض‌کنیم f ثابت صفر نیست. $a\in R$ را چنان در نظر می‌گیریم که $f(a)\neq 0$. با استفاده از (۱)، می‌بینیم که:

$$f(a+0)+f(a-0)=2f(a)f(0)$$

$$2f(a)=2f(a)f(0)$$

پس $f(0)=1$. همچنین، با قرار دادن 0 به جای a در (۱) و x به جای b داریم:

$$f(x)+f(-x)=2f(0)f(x)$$

پس $f(x)=f(-x)$ و از اینجا:

$$f'(x)=-f'(-x)$$

بویژه، $f'(0)=0$. اکنون از طرفین برابری:

$$f(x+b)+f(x-b)=2f(x)f(b)$$

دو بار نسبت به x مشتق بگیریم. داریم:

$$(2)\quad f''(x+b)+f''(x-b)=2f''(x)f(b)$$

همچنین، از طرفین برابری:

$$f(a+x)+f(a-x)=2f(a)f(x)$$

دوبار نسبت به x مشتق بگیریم. حاصل می‌شود:

$$f''(a+x)+f''(a-x)=2f(a)f''(x)$$

اگر در برابری اخیر، a را به x و x را به b تبدیل‌کنیم، خواهیم داشت:

$$(3)\quad f''(x+b)+f''(x-b)=2f(x)f''(b)$$

با مقایسهٔ (۲) و (۳)، به دست می‌آید:

$$f''(x)f(b)=f''(b)f(x)$$

چنانچه قرار دهیم $b=0$، خواهیم داشت (با توجه به $f(0)=1$):

$$f''(x)=f''(0)f(x)$$

قرار دهیم $K=f''(0)$ به دست می‌آید

$$f''(x)=Kf(x)\ .$$

یعنی f در معادلهٔ دیفرانسیل

$$(4)\quad f''=Kf$$

با شرایط اولیهٔ $f(0)=1$ و $f'(0)=0$ صدق می‌کند. اگر $K=-\omega^2\leqslant 0$، آنگاه درحالت ۲ واگر $K=\omega^2\geqslant 0$، آنگاه در حالت ۳ هستیم.

تذکر ۱. معادلهٔ تابعی (۱) را به دلیل ملاحظات نامبرده، می‌توان «اتحاد اساسی کسینوسها» نامید. بدنیست اشاره‌ای هم به متغیرهـای مختلط (در سطح ریاضیات عمومی) بنماییم، زیرا آنجا است که ارتباط $\cos$ و ch روشن می‌شود و می‌بینیم که نه تنها این دو از یك قماش‌اند بلکه یکی برحسب دیگری قابل تحویل است به‌گونه‌ای که اتحاد اساسی کسینوسها با متغیرهای مختلط a و b در مورد تابع $\cos$ موجب همین اتحاد در مورد تابع ch می‌شود و برعکس. راه‌کوتاه ومنطقی مطلب، با استفاده از سریها و تابع نمایی است:

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots,\quad z\in C$$

$$2\,ch z=e^z+e^{-z}$$

$$2\cos z=e^{iz}+e^{-iz},\quad i^2=-1$$

در نتیجه، خواننده می‌تواند با پذیرفتن اتحاد $e^{z+z'}=e^ze^{z'}$، مستقیماً بررسی کندکه ch و $\cos$ در معادلهٔ (۱) با $a\in C$ و $b\in C$ صدق می‌کنند. همچنین، می‌توانید از دستورهای

$$\cos z=ch(iz),\quad ch(z)=\cos(-iz)$$

ببینیدکه اتحاد (۱) در مورد هر یك موجب اتحاد (۱) برای دیگری می‌شود.

تذکر ۲. شیوه‌ای‌که در اثبات قضیهٔ ۴ پیش‌گرفتیم، یك شیوهٔ متداول بررسی معادلات تابعی است، بدین معنی‌که با فرضهای مشتقپذیری مسأله را به یك معادلهٔ دیفرانسیل تبدیل می‌کنند. مثلاً، با این شیوه معادلهٔ تابعی

$$f(a+b)=f(a)f(b)$$

را می‌توان حل‌کرد (به عنوان تمرین، به خواننده واگذار می‌شود).

۴ـ ضرایب چند جمله‌ای چبیشف

همانطور که در مقدمه‌آمد، اثبات دستورهای زیر به توصیهٔ هیأت تحریریه حذف شد. از نظر ما روش یافتن ضرایب، مهمتر از خودآنها بود، زیرا این ضرایب را پس‌ازآنکه یافتیم در منابع دیگری هم دیدیم. منجمله در ض ۱۶۸۴ کتاب تئوری مقدماتی اعداد [مصاحب ۱۳۵۸] به چشم می‌خورد. ضرایب چند جمله‌ای P_n و به تبع‌آن چند جمله‌ای T_n را بیان‌کنیم:

$$P_n(x)=\sum_{0<2k<n}(-1)^k\frac{n}{k!}\,\frac{(n-k-1)!}{(n-2k)!}\,x^{n-2k}=\sum_{0<2k<n}(-1)^k\,\frac{n(n-k-1)(n-k-2)\cdots(n-2k+1)}{k!}\,x^{n-2k}$$

$$T_n(x)=\sum_{0<2k<n}(-1)^k2^{n-2k-1}\frac{n}{k!}\,\frac{(n-k-1)!}{(n-2k)!}x^{n-2k}=\sum_{0<2k<n}(-1)^k2^{n-1}\frac{n(n-k-1)\cdots(n-2k+1)}{k!}\,\frac{x^{n-2k}}{2^{2k}}$$

منابع

[۱] سیمونز، معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها با یادداشتهای تاریخی، ترجمهٔ بابائی‌و میامئی، مرکز دانشگاهی، ۱۳۶۴.

[۲] مصاحب، آنالیز ریاضی، ۱۳۴۸.

[۳] مصاحب، تئوری مقدماتی اعداد، جلد دوم، قسمت سوم، ۱۳۵۸.

[4] Niven, I. Nambers, Rational and Irrational, The MAA. New Mathematical Library, 1964.

[۴] نیون اعداد، گویا وگنگ به‌زبان انگلیسی چاپ یکم ۱۹۶۱. نسخهٔ استفاده شده به چاپ دوازدهم که مسلماً پس‌از ۱۹۷۹ به طبع رسیده است.

توابع محدب

دکتر علیرضا مدقالچی

مقدمه. ازنقطه نظر تاریخی مطالعه توابع محدب از توابع حقیقی یك متغیر حقیقی شروع شده است. بسیاری از مسائل این نوع توابع، از نقطه‌نظر درك شهودی، بسیار روشن و واضح هستند ولی درعین حال ازنظر ارائه برهان ریاضی چندان بدیهی نیستند. توابع محدب کاربردهای زیادی در آنالیز مقدماتی و آنالیز پیشرفته دارند. اکثر نامساویهای ریاضی را می‌توان به‌وسیله توابع محدب ثابت کرد. در این مقاله به‌بعضی از این نامساویها و روش حل آنها اشاره خواهد شد.

بطوری که خوانندگان مجله می‌دانند اگر تابع پیوسته f دارای این خاصیت باشد که دز فاصله هردونقطه تابع زیر وتر بین ایـن دو نقطه باشد در این حالت گوئیم تحدب تابع f به طرف بالا است این تشریح مستلزم تعریف دقیق ریاضی است که ذیلا این تعریف را می آوریم:

تعریف ۱. فرض می‌کنیم $-\infty \leqslant a<b \leqslant \infty$، تابع $f:(a,b) \to R$ را محدب می‌نامیم در صورتی‌که به ازاء هر دو عدد $x,y\in(a,b)$ و بر λ، $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$، داشته باشیم:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

نتیجهٔ بدیهی این تعریف قضیهٔ زیر است:

قضیه ۱. شرط لازم و کافی برای آنکه تابع f بر بازهٔ (a,b) محدب باشد آنستکه به‌ازاء هر s و t و u که

$$a<s<t<u<b$$

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s} \leqslant \frac{f(u)-f(t)}{u-t} \qquad (1)$$

برهان. با فرض $\lambda=\frac{u-t}{u-s}$ می‌توان t را به‌صورت زیر نوشت:

$$t=\lambda s+(1-\lambda)u$$

$$f(t) \leqslant \frac{u-t}{u-s}f(s)+\frac{t-s}{u-s}f(u)$$

$$\frac{u-t}{u-s}(f(t)-f(s)) \leqslant \left(\frac{u-t}{u-s}-1\right)f(t)+\frac{t-s}{u-s}f(u)$$

$$\frac{u-t}{u-s}(f(t)-f(s)) \leqslant \frac{-t+s}{u-s}f(t)+\frac{t-s}{u-s}f(u)$$

$$\frac{u-t}{u-s}(f(t)-f(s)) \leqslant \frac{s-t}{u-s}f(t)+\frac{t-s}{u-s}f(u)$$

$$\frac{u-t}{u-s}(f(t)-f(s))\frac{t-s}{u-s}(f(u)-f(t))$$

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s} \leqslant \frac{f(u)-f(t)}{u-t}$$

بعکس، اگر رابطه (۱) برقرار باشد و λ یك عدد حقیقی دلخواه بین صفر و یك باشد و $x,y\in(a,b)$. بی آنکه به کلیت خللی وارد شود می‌توان فرض کرد که $y>x$. حال داریم $x \leqslant \lambda x+(1-\lambda)y \leqslant y$، لذا، بنا به (۱)

$$\frac{f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(x)}{\lambda x+(1-\lambda)y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(\lambda x+(1-\lambda)y)}{y-\lambda x-(1-\lambda)y}$$

بالنتیجه،

$$\frac{f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(x)}{(1-\lambda)(y-x)} \leqslant \frac{f(y)-f(\lambda x+(1-\lambda)x)}{\lambda(y-x)}$$

با حذف $y-x$ از طرفین خواهیم داشت:

$$f(\lambda x+(۱-\lambda)y)\leqslant \lambda f(x)+(۱-\lambda)f(y)$$

یعنی f بر (a,b) محدب و برهان تمام است.

با توجه به اینکه طرف چپ و راست نامساوی (۱) به‌ترتیب شیب‌خطوط‌ماربر $(t,f(t))$ ، $(s,f(s))$ و $(t,f(t))$، $(u,f(u))$ هستند لهذا f محدب است اگر و فقط اگر شیب خط اول نابیشتر از شیب خط دوم باشد.

تعریف ۲. گوئیم تابع f بر بازه $[c,d]$ در شرط لیپشتیز صدق می‌کند اگر عدد مثبتی مانند K باشد بطوری‌که بهازاء هر $x,y\in[c,d]$،

$$|f(x)-y(y)|\leqslant K|x-y|$$

واضح است‌که هر تابعی‌که در شرط لیپشتیز صدق کند پیوسته است. مسلماً عکس این حکم درست نیست! (چرا؟).

قضیه ۲. اگر تابع f بر (a,b) محدب باشد، آنگاه f برهر بازهٔ بسته $[c,d]\subseteq(a,b)$ در شرط لیپشتیز صدق می‌کند.

برهان. ابتدا ثابت‌می‌کنیم‌که‌تابع f بر $[c,d]$ از بالاو پایین‌محدود (کراندار) است. فرض می‌کنیم $M=Max(f(c),f(d))$، بهازاء $x\in[c,d]$ داریم

$$x=\lambda c+(۱-\lambda)d$$

که $\lambda=\dfrac{d-x}{d-c}$. بالنتیجه،

$$f(x)\leqslant\lambda f(c)+(۱-\lambda)f(d)$$
$$\leqslant\lambda M+(۱-\lambda)M=M$$

پس f از بالا کراندار است. حال ثابت می‌کنیم f از پائین کراندار است. اگر $x\in(c,d)$ دلخواه باشد، فرض می‌کنیم $t=x-\dfrac{c+d}{۲}$ واضح‌است‌که $\dfrac{c+d}{۲}+t$ و $\dfrac{c+d}{۲}-t$ متعلق‌به $[c,d]$ هستند لهذا بنا به محدب بودن f نتیجه می‌شود:

$$f\left(\frac{c+d}{۲}\right)\leqslant\tfrac{۱}{۲}f\left(\frac{c+d}{۲}+t\right)+\tfrac{۱}{۲}f\left(\frac{c+d}{۲}-t\right)$$
$$=\tfrac{۱}{۲}f(x)+\tfrac{۱}{۲}f\left(\frac{c+d}{۲}-t\right)$$
$$\leqslant\tfrac{۱}{۲}f(x)+\tfrac{۱}{۲}M$$

بالنتیجه،

$$f(x)\geqslant ۲f\left(\frac{c+d}{۲}\right)-M=m\,.$$

حال اگر $c\leqslant x<y\leqslant d$ دلخواه باشد. فرض می‌کنیم p و q دو عدد ثابتی باشند بطوری‌که

$$a<q<c\leqslant x<y\leqslant d<p<b$$

حال‌اگر نامساوی (۱) را بهازاء x ، y ، p و q ، x ، y به‌کار بریم خواهیم داشت:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leqslant\frac{f(p)-f(y)}{p-y}\leqslant\frac{M-m}{p-d}$$

$$\frac{m-M}{p-q}\leqslant\frac{f(x)-f(q)}{x-q}\leqslant\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

حال اگر $K=\dfrac{M-m}{p-d}$ واضح است که

$$|f(y)-f(x)|\leqslant K|y-x|$$

یعنی f در لیپشتیز صدق‌می‌کند لهذا، f بر (a,b) پیوسته‌است.

تذکر. اگر f بر (a,b) محدب باشد و a و b اعداد حقیقی باشند آنگاه لازم نیست f در a و b از راست یا چپ پیوسته باشد حتی اگر در a و b تعریف شود.

تعریف ۳. تابع f را بر بازهٔ $[c,d]$ پیوسته‌مطلق‌می‌نامیم در صورتی که: بهازاء هر $\varepsilon>۰$ ، δای هست که بهازاء هر خانوادهٔ $\{(a_i,b_i)\}_{i=۱}^{n}$ از بازه‌های باز دو به دوجدا از هم‌از $[c,d]$، اگر $\sum_{i=۱}^{n}(b_i-a_i)<\delta$ ، آنگاه

$$\sum_{i=۱}^{n}|f(b_i)-(a_i)|<\varepsilon$$

واضح است که اگر f درشرط لیپشتیز صدق‌کند آنگاه‌بافرض $\delta=\varepsilon/K$ ، f در پیوستگی مطلق صدق می‌کند.

اگر درشرط فوق، شرط دو به دو جدا ازهم بودن‌بازه‌ها را حذف‌کنیم. شرط به‌دست آمده معادل شرط لیپشتیز است. به عبارت دقیقتر، تابع f بر $[c,d]$ در شرط لیپشتیز صدق می‌کند اگر و فقط اگر بهازای هر $\varepsilon>۰$، $\delta>۰$ ای هست که به ازاء هر خانواده $\{(a_i,b_i)\}_{i=۱}^{n}$ از زیر بازه‌های $[c,d]$، اگر $\sum_{i=۱}^{n}(b_i-a_i)<\delta$ آنگاه

$$\sum_{i=۱}^{n}|f(b_i)-f[a_i)|<\varepsilon\quad([۳]\text{، }[۸])$$

اخیراً تعمیم جالبی ازقضیه فوق‌الذکر انجام‌گرفته‌است که طالبین اطلاعات بیشتر می‌توانند به مقاله مندرج در [۳] مراجعه کنند.

تعریف۴. اگر درتعریف (۱) تساوی را برداریم آنگاه

f را اکیداً محدب می‌نامیم

تعریف۵. اگر تابع f در یک همسایگی نقطه c تعریف شود و اگر

$$\lim_{x\to c+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

موجود باشد گوئیم f در c دارای مشتق راست است و آنرا با $f'_+(c)$ نمایش می‌دهیم. بطریق مشابه اگر

$$\lim_{x\to c-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

موجود باشد گوئیم f در c دارای مشتق چپ است و آنرا با $f'(c)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه۳. اگر تابع f بر (a,b) محدب (اکیداً محدب) باشد و $x_\circ \varepsilon (a,b)$ آنگاه $f'_+(x_\circ)$ و $f'_-(x_\circ)$ موجود و صعودی‌اند [۸]

برهان. فرض کنید $a<x_\circ<y<z<b$، با فرض $\lambda=\frac{z-y}{z-x_\circ}$ ومحدب بودن f داریم:

$$f(y)\leqslant\lambda f(x_\circ)+(1-\lambda)f(z)$$

یعنی،

$$f(y)-f(x_\circ)\leqslant(1-\lambda)\{f(x_\circ)\}$$

لذا،

$$\frac{f(y)-f(x_\circ)}{y-x_\circ}\leqslant\frac{f(z)-f(x_\circ)}{z-x_\circ}$$

رابطهٔ فوق نشان می‌دهد که تابع $\phi(x)=\frac{f(x)-(x_\circ)}{x-x_\circ}$ بر $(x_\circ,b)$ صعودی است لذا، $\lim_{x\to x_\circ+}\phi(x)$ موجود است، یعنی $f'_+(x_\circ)$ موجود است. بطریق مشابه $f'_-(x_\circ)$ موجود است. حال اگر $a<x_1<x_\circ<x_2<b$، بنابه نامساوی (۱) داریم

$$\frac{f(x_1)-f(x_\circ)}{x_1-x_\circ}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_\circ)}{x_2-x_\circ}.$$

ازحدگیری ازطرفین وقتی که $x_1\to x_\circ$ و $x_2\to x_\circ$ نتیجه می‌گیریم.

$$f'_-(x_\circ)\leqslant f'_+(x_\circ)$$

حال ثابت می‌کنیم f'_- صعودی است، اگر $t<x<y$ آنگاه بنابه نامساوی (۱) داریم

$$\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\leqslant\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

یعنی،

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\leqslant\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\leqslant f'_-(x)$$

حال اگر $t\to x$ نتیجه می‌گیریم

$$f'_-(x)\leqslant f'_-(y)$$

یعنی f'_- صعودی است. بطریق مشابه می‌شود که f'_+ صعودی است. احکام فوق با تبدیل محدب به اکیداً محدب عیناً به‌دست می‌آید.

نتیجه۱. اگر f بر (a,b) مشتقپذیر باشد آنگاه مشتق چپ و راست باهم برابرند. لذا، تابع مشتقپذیر f بر (a,b) محدب است اگر و فقط اگر f' صعودی است. واضح است اگر f بر (a,b) مشتقپذیر ومحدب باشد قضیه فوق نشان می‌دهد که f' صعودی است. برعکس اگر f' بر (a,b) صعودی باشد و $a<s<t<u<b$، آنگاه بنابه قضیه میانه داریم

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s}=f'(c_1)\quad s<c_1<t$$

$$\frac{f(u)-f(t)}{u-t}=f'(c_2)\quad t<c_2<u$$

ازصعودی f' نامساوی (۱) به‌دست می‌آید که معادل محدب بودن f است.

نتیجه۲. اگر f بر (a,b) دارای مشتق دوم باشد آنگاه f بر (a,b) محدب است اگر وفقط اگر f'' بر (a,b) مثبت باشد. واضح است که اگر f'' بر (a,b) مثبت باشد آنگاه f' بر (a,b) صعودی است.

قضیه۴. (نامساوی ینسن). اگر f بر (a,b) محدب و $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ اعداد حقیقی نامنفی باشند بطوری که $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$، آنگاه

$$f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_nf(x_n)$$

برهان. اثبات به‌استقراء روی n است. به‌ازاء $n=1,2$ حکم برقرار است. حال به‌ازاء $n-1$ فرض می‌کنیم و به‌ازاء n ثابت می‌کنیم. بنا به‌فرض استقراء با فرض $\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}=1$

$$f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_{n-1}x_{n-1})\leqslant\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_{n-1}f(x_{n-1})$$

حال اگر $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1$ و اگر $\alpha_n=1$ آنگاه واضح است بقیه α_iها برابر صفر است ولذا، حکم استقراء برقرار است. $0\leqslant\alpha_n<1$ آنگاه

$$\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_{n-1}x_{n-1}+\alpha_nx_n=$$

$$=\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_n}x_1+\cdots\times\frac{\alpha_n-1}{1-\alpha_n}\right)(1-\alpha_n)+\alpha_n x_n$$

چون $(1-\alpha_n)+\alpha_n=1$، بنابه محدب بودن f داریم

$$f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)\leqslant(1-\alpha_n)$$
$$f\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_n}x_1+\cdots+\frac{\alpha_{n-1}}{1-\alpha_n}x_{n-1}\right)+\alpha_nf(x_n)$$

حال باتوجه به‌اینکه $\frac{\alpha_1}{1-\alpha_n}+\cdots+\frac{\alpha_n-1}{1-\alpha_n}=1$، بنا به‌ استقراء

$$f\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_n}x_1+\cdots+\frac{\alpha_{n-1}}{1-\alpha_n}x_{n-1}\right)\leqslant(1-\alpha_n)$$

$$\left\{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_n}f(x_1)+\cdots+\frac{\alpha_{n-1}}{1-\alpha_n}f(x_{n-1})\right\}=$$
$$=\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_{n-1}(x_{n-1})$$

بالنتیجه، حکم به‌دست می‌آید.

تعریف۶. تابع‌مثبت f بربازه (a,b) را با لگاریتم‌محدب می‌نامیم درصورتی که $\log f$ محدب باشد. یعنی به‌ازاء هر دو عدد حقیقتی مثبت α، β و هر x، $y\varepsilon(a,b)$ داشته باشیم

$$f(\alpha x+\beta y)\leqslant f^{\alpha}(x)f^{\beta}(y)$$

حال موارد استعمال توابع محدب را برای اثبات چند نامساوی مهم بیان می‌کنیم. گفته می‌شود که آنالیزمطالعهٔ نامساویها است، اگر در این بیان اغراقی باشد، ولی‌آنچه که واقعیت‌دارد اینست که نامساویها نقش مهمی‌درآنالیز،ریاضیات کاربردی (به‌ویژه تحقیق درعملیات،بهینه سازی) وحتی جبر و هندسه دارد [۸]. کارهای‌اولیه درموردنامساویها توسط‌هاردی، لیتلوود. پولیا [۲] انجام‌گرفت سپس‌باکارهای بنچن‌باخ وبلمن [۱]مرکس‌ومینك [۵]کازارینوف و [۴] میترینویك [۶]تکمیل گردید. این‌کتابها منابعی مناسبی برای کسب اطلاعات عمیقتر درمودنامساویهااست. ذیلاً،بطوراجمال، بعضی‌ازنامساویها را بررسی‌می کنیم.

قضیه۵. اگر $x_i\geqslant 0$، $\alpha_i>0$ و $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$، آنگاه

$$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}\leqslant\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n$$

برهان. اگریکی از x_iها صفرباشد حکم برقراراست. لذا، فرض می‌کنیم به‌ازاء هر i، $x_i>0$، حال تابع $f(t)=e^t$ بر R دارای مشتق مثبت است لذا، بنابه نامساوی ینس(قضیه۴)

$$e^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_iy_i}\leqslant\sum^{n}\alpha_ie^{y_i}$$

با فرض $y_i=\log x_i$ داریم:

$$\prod_{i=1}^{n}x_i\alpha_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i$$

نتیجه. اگر

$$n=2،\ \alpha_1=\frac{1}{p}\ \text{و}\ \alpha_2=\frac{1}{q}\ \text{و}\ x_1=x^p\ \text{و}\ x_2=y^q$$

خواهیم داشت:

$$xy\leqslant\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q$$

قضیه ۶. اگر $x_i\geqslant 0$، $y_i\geqslant 0$، $p>1$، $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{1/q}$$

این نامساوی را هلدر می‌نامند. بدازاء $p=2$ نامساوی کوشی می‌نامیم.

برهان. می‌توان فرض‌کرد که حداقل یکی‌از x_i و y_iها ناصفر است. لهذا

$$v=\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{1/q},\quad u=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p}$$

ناصفرند. مقادیر $x=\frac{x_i}{u}$ و $y=\frac{y_i}{v}$ را در نتیجهٔ قضیه ۵ قرار می‌دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{x_i}{u}\cdot\frac{y_i}{v}\leqslant\frac{1}{p}\left(\frac{x_i}{u}\right)^p+\frac{1}{q}\left(\frac{y_i}{v}\right)^q$$

لهذا،

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{u}\cdot\frac{y_i}{v}\leqslant\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{u}\right)^p+\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{v}\right)^q$$
$$=\frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^p}{u^p}+\frac{1}{q}\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^q}{v^q}$$
$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

بالنتیجه

$$\sum_{i=2}^{n}x_iy_i\leqslant uv=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{1/q}$$

قضیه ۷ (نامساوی مینکوفسکی). اگر $x_i \geqslant 0$ ، $y_i \geqslant 0$ و $q \geqslant 1$ ، آنگاه

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right]^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{1/p}$$

برهان. اگر $p=1$ تساوی برقرار است. فرض کنیم $p>1$ و $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. لهذا،

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p = \sum_{i=1}^{n}x_i(x_i+y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n}y_i(x_i+y_i)^{p-1}$$

حال قضیه ۶ را در مورد طرف دوم برقرار می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

واضح است که $q(p-1)=p$. بالنتیجه،

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1/q}$$

طرفین نامساوی فوق را بـه $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1/q}$ تقسیم می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1-1/q} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{1/p}$$

که همان نامساوی مطلوب است.

قضیه ۸. اگر $x_i \geqslant 0$ ، $y_i \geqslant 0$ و k یك عدد طبیعی باشد، آنگاه

$$\left(\prod_{i=1}^{k}(x_i+y_i)\right)^{1/k} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{k}x_i\right)^{1/k} + \left(\prod_{i=1}^{k}y_i\right)^{1/k}$$

برهان. می‌توان فرض کرد که $x_i+y_i>0$ $(i=1,2,\dots,k)$ آنگاه

$$\frac{\left(\prod_{i=1}^{k}x_i\right)^{1/k}+\left(\prod_{i=1}^{k}y_i\right)^{1/k}}{\left(\prod_{i=1}^{k}(x_i+y_i)\right)^{1/k}} =$$

$$= \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{x_i}{x_i+y_i}\right) + \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{y_i}{x_i+y_i}\right)^{1/k}$$

$$\leqslant \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{x_i+y_i} + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{y_i}{x_i+y_i}$$

$$= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i+y_i}{x_i+y_i} = 1$$

تذکر. مشابه قضایای ۵ و ۶ را می‌توان درمورد انتگرالها ثابت کرد.

قضیه ۹. اگر تابع φ بر R محدب و f بر $[0,1]$ پیوسته باشد. آنگاه

$$\int_0^1 \varphi(f(t))dt \geqslant \varphi\left[\int_0^1 f(t)dt\right] \quad ([10],[9])$$

برهان. بنابه قضیه ۱ داریم: اگر $a<s<t<u<b$

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leqslant \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$$

فرض می‌کنیم t ثابت و $\beta = \sup \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}$ واضح است که

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leqslant \beta$$

$$\varphi(t)-\varphi(s) \leqslant \beta(t-s)$$

بالنتیجه

$$\varphi(s) \geqslant \varphi(t)+\beta(s-t)$$

همچنین از نامساوی فوق داریم:

$$\beta \leqslant \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t} \qquad t<u<b$$

و بالنتیجه،

$$\beta(u-t)+\varphi(t) \leqslant \varphi(u)$$

نامساوی اخیر همان نامساوی فوق‌الذکر است که u به‌جای s

قرار گرفته است. لهذا، به‌ازاء هر $s\in(a,b)$ ،

$$\varphi(s)\geqslant\varphi(t)+\beta(s-t)$$

لهذا، با فرض $s=f(x)$ داریم

$$\varphi(f(x))\geqslant\varphi(t)+\beta(f(x)-t)\quad (x\in([0,1])$$

حال اگر $t=\int_0^1 f(x)dx$ قرار دهیم. خواهیم داشت:

$$\varphi(f(x))\geqslant\varphi\left(\int_0^1 f(x)dx\right)+$$

$$\beta\left(f(x)-\int_0^1 f(x)dx\right)$$

از طرفین این رابطه انتگرال می‌گیریم، خواهیم داشت:

$$\int_0^1\varphi(f(x))dx\geqslant\int_0^1\varphi\Big(\int_0^1 f(x)dx\Big)dx+$$

$$+\beta f(x)dx-\beta\int_0^1 f(x)dx\Big)=\varphi\left(\int_0^1 f(x)dx\right)$$

بالنتیجه،

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\leqslant\int_0^1\varphi(f(x))dx$$

نتیجه. با فرض $\varphi(t)=e^t$ خواهیم داشت

$$e^{\int_0^1 f(x)dx}\leqslant\int_0^1 e^{f(x)}dx$$

در پایان این مقاله مختصری درمورد مجموعه‌های محدب صحبت می‌کنیم. مطالعه مجموعه‌های محدب شاخه‌ای ازهندسه، آنالیز و جبرخطی است. ضرورةً حوزه‌تعریف یك تابع‌محدب، مجموعه‌ای است محدب. لهذا، اختصاراً مجموعه‌های محدب را در R^2 مورد بررسی قـرار می‌دهیم. مثلاً مجموعـه نقاط محصور به یك‌دایره یعنی $\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ مجموعه‌ای است محدب. یکی از مواردی که از مجموعه‌های محدب در هندسه نمودپیدا می کند، چندضلعی‌های محدب‌است. بدون‌شك یك چندضلعی محدب مجموعه‌ای است محدب.

ذیلاً مسائلی در مورد چندوجهی‌های محدب می‌آوریم. [۱۱]

۱) الف. نشان‌دهید هرچندضلعی‌محدب بامساحت‌واحد را می‌توان درداخل متوازی‌الاضلاع با مساحت دو قرار دارد.

ب. نشان دهیدکه یك مثلث بامساحت واحد رانمی‌توان در متوازی‌الاضلاع با مساحت کمتر از دو قرار داد.

۲) الف. نشان دهیدکه هر چندضلعی محدب با مساحت واحد را می‌توان در مثلث با مساحت دو قرار داد.

ب. نشان دهیدکه یك متوازی‌الاضلاع با مساحت واحد را نمی‌توان در یك مثلث با مساحت کمتر از دو قرار داد.

تذکر. به‌جای چندضلعی محدب می‌توان مجموعه‌محدب قرار داد. [۱۱]

۳) آیا هرمجموعهٔ محدب با قطرواحد در R^n رامی‌توان با $(n+1)$ مجموعه بـا قطر کمتر از واحد پوشاند. (به‌ازاء $n>3$ مسأله هنوز حل نشده است)[۸].

مراجع

1) Beckenbach .E.F. & Bellman.R. Inequalities. 2 th rev. printing. Springer-Verlag. 1963.

2) Hardy.H..Little wood. J.E.. & Polya. Inequalities. Universiy. pless 1952.

3) Julian. W. & Phillips. K. Construtive Boanded Sequences and Lipschitz Functiois. J. London Math. Soc. vol 31. Port 3. yune 1985.

4) Kazarinoff.N.D.. Analytic Inequalities. 1961.

5) Mareus. M.. & Ming. H.. A Survey of Matrix Theory and Matrix Inepuality. 1964.

6) Mitrinovic. D. S.. Analytic Inequalitiey. Springer Verlag. 1970.

7) Roberts. A. W.. The Derivative as a Linear Transformation. Amer. Math. Monthly 76.632-688. 1969.

8) Varberg. D. E.. Covex Functions. Academic Press. 1978.

9) Royden. H. L.. Real Analysis. 1963.

10) Rudin. W.real and Conplex Analysis. third Edition. 1986.

11) Yaglom. A.M.. and Yaglom. I.M.. Challenging Mathematical Problems. With Elementry Solutions. Volume II. 1967.

حل چند مسأله از شماره‌های قبل

تهیه و تنظیم از: جواد لالی

چندی پیش آقای محمدحسین آبادی از گرگان، ضمن ارسال حل دو مسأله مانده از شماره‌های قبل، خواستار درج حل کلیهٔ مسائل مانده از شماره‌های گذشته را داشتند. نامه ایشان ما را بر آن داشت که بعضی از مسائل مانده را حل کنیم یادآوری می کنیم که در ابتدای انتشار مجله، بنا نبود که همه مسائل را حل کنیم. بلکه، برخی از آنها، و آنهم مسائلی که راه حل آنها به وسیله خوانندگان ارسال می گردد، درج شوند. در اینجا، مسأله اول، یکی از مشکلترین و جالبترین مسائل مانده از شماره‌های قبل است. برای این مسأله، آقای جواد عسگری از اصفهان برهانی ارسال داشتند که از قضیه بوئر استفاده می‌شد. از آنجائیکه قضیه مذکور نیاز به مقدمات بیشتری داشت، و بالاتر از سطح معلومات دبیرستانی بود، از آن صرفنظر شد. همکار ارجمند آقای دکتر نارنجانی، عضو هیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه مشهد، طی نامه‌ای منبع مسأله را به صورت ذیل ذکر کرده‌اند:

«این مسأله درواقع مسأله‌ای است که توسط جیمز ا. دسموند و ویلیام ر. هستینگر، در مجله ماهانه ریاضی امریکا، جلد ۸۴، شماره ۲، فوریه ۱۹۷۷، به شماره ۲۶۴۵ آمده است و برهان آن در جلد ۸۵، شماره ۵، سال ۱۹۷۸ درج گردیده است...»

راه حلی که برای این مسأله انتخاب شده همان راه حلی است که فوقاً اشاره گردید. درضمن، در تهیه و تدوین این راه حل، سعی شده است با توضیحات بیشتر درك آن را برای دانش‌آموزان آسان‌تر گردانیم. موقع را مغتنم شمرده ازهمکاری صمیمانه و ارزنده آقای دکتر نارنجانی، که در تهیه و ارزیابی مقالات نظریه‌اعداد کمك شایانی به مجله می کنند تشکر نمائیم.

سال اول، شماره ۱، بهار ۶۳، مسئله ۱۶

ثابت کنید که بزرگترین قوه‌ای از ۲ که عبارت $(n > ۱)$ $\binom{۲^{n+۱}}{۲^{n}} - \binom{۲^{n}}{۲^{n-۱}}$ را عاد می کند $۳n$ است.

توضیح. در ابتدا، شاید چنین تصور شود که به‌کمك استقراء ریاضی، با رابطه‌ای که بین ضرایب دو جمله‌ای نیوتن موجود است: می‌توان مسأله را حل کرد. ولی، عملاً چنین نیست. اگر به ازاء مقادیر مختلف n، تعدادی از جملات آن را محاسبه

کنیم، در می‌یابیم که رابطه مشخص، و یا ضابطه معینی که بتوان در اثبات حکم به ما کمک کند، پیدا نمی‌کنیم. مثلاً اگر n برابر ۲ یا ۳ و یا ۴ باشد، خواهیم داشت:

$$\binom{۸}{۴}-\binom{۴}{۲}=۷۰-۶=۲^{۶},$$

$$\binom{۱۶}{۸}-\binom{۸}{۴}=۱۲۸۷۰-۷۰=۲^{۹}\times ۵,$$

$$\binom{۳۲}{۱۶}-\binom{۱۶}{۸}=۶۰۱۰۸۰۳۹۰-۱۲۸۷۰$$
$$=۲^{۱۲}\times ۳^{۳}\times ۵\times ۱۰۸۷$$

حاصل عددی عبارت، به ازاء $n=۲$ یك عدد دو رقمی، به ازاء $n=۳$ یك عدد ۵ رقمی، و بالاخره به ازاء $n=۴$ یك عدد ۹ رقمی می‌گردد. با مشاهده ارقام فوق در می‌یابیم که اگر عمل را به همین ترتیب ادامه دهیم، اعداد بزرگ حاصل، ما را از ادامهٔ کار منصرف می‌کند. جالب این است که هریك از ضرایب دو جمله‌ای تنها بر ۲ بخشپذیر است، و ضریب $۲^{۳n}$ وقتی ظاهر می‌شود که آخرین عمل محاسبه، یعنی عمل تفریق، انجام می‌گیرد. این موضوع اثبات مسأله را پیچیده می‌سازد. اصولاً، درنظریه اعداد مسائلی که دراحکام آن اعمال جمع یا تفریق ظاهر می‌شوند مشکلتر از مسائلی است که در احکام‌آن اعمال ضرب و یا تقسیم به کار می‌روند. شاید این بدین خاطر باشد که هر عدد صحیح نمایش منحصر بفردی به صورت حاصلضرب عوامل اول دارد که چنین نمایشی با اعمال جمع یا تفریق امکانپذیر نیست. در اثبات این مسأله جهت جلوگیری از پیچیدگی برهان، بعضی احکام را به عنوان لم ثابت می‌کنیم.

لم ۱. به ازاء دو عدد طبیعی n و k، که $۱\leqslant k\leqslant n$، فرض کنید:

$$P_k=۱\times ۳\times \cdots\times (۲^k-۱)$$

در این صورت:

$$(۲^n)!=۲^{۲^n-۱}P_۱P_۲\cdots P_n$$

برهان: برقراری حکم فوق را $F(n)$ می‌نامیم. بدیهی است که $F(۱)$ برقرار است. فرض کنید $F(n)$ برقرار باشد. $F(n+۱)$ را ثابت می‌کنیم؛

$$(۲^{n+۱})!=۱\times ۲\times\cdots\times(۲^{n+۱}-۱)۲^{n+۱}$$
$$=[۲\times ۴\times\cdots\times ۲^{n+۱}][۱\times ۳\times\cdots\times(۲^{n+۱}-۱)]$$
$$=۲^{۲^n}(۲^n!)P_{n+۱}=۲^{۲^{n+۱}-۱}P_۱P_۲\cdots P_{n+۱},$$

و این اثبات لم است.

تعریف. فرض کنید $x_۱$ ، $x_۲$ ، … ، x_n متغیرهای مستقل باشند. به‌ازاء هر r، که $۰\leqslant r\leqslant n$ ، S_r را چنین تعریف می‌کنیم: $S_۰=۱$،

$$S_۱=x_۱+x_۲+\cdots+x_n=\sum_{k=۱}^{n}x_k,$$

$$S_۲=x_۱x_۲+x_۲x_۳+\cdots+x_{n-۱}x_n=\sum_{۱\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$$

. . . .

اگر حاصلضرب r عامل از متغیرهای فوق را یك حاصلضرب r به r بخوانیم آنگاه S_r برابر مجموع همهٔ حاصلضربهای r به r از متغیرهای فوق است.

لم ۲. اگر $x_۱$، $x_۲$، … ، x_n متغیرهای مفروض باشند آنگاه

$$(x-x_۱)(x-x_۲)\cdots(x-x_n)$$
$$=S_۰x^n-S_۱x^{n-۱}+\cdots+(-۱)^rS_rx^{n-r}+\cdots$$
$$+(-۱)^nS_n$$

برهان این لم به استقراء است و از بیان‌آن می‌گذریم.

قضیه. بزرگترین قوه ۲ که عبارت $\binom{۲^{n+۱}}{۲^n}-\binom{۲^n}{۲^{n-۱}}$ را عاد می‌کند $۳n$ است.

برهان. بنابر لم ۱،

$$(۲^n)!=۲^{۲^n}P_۱P_۲\cdots P_n$$

بنابراین،

$$\binom{۲^n}{۲^{n-۱}}=\frac{(۲^n)!}{(۲^{n-۱})!\,(۲^{n-۱})!}=\frac{۲P_n}{P_۱P_۲\cdots P_{n-۱}}$$

$$\binom{۲^{n+۱}}{۲^n}-\binom{۲^n}{۲^{n-۱}}=\frac{۲(P_{n+۱}-P_n^۲)}{P_۱P_۲\cdots P_n}$$

عبارت سمت راست یك عدد طبیعی است، وچون P_kها فردند، پس مخرج‌آن نیز فرد است. بالنتیجه، در مخرج عامل ۲ ظاهر

نمی‌شود. بنابراین، حکم مطلوب همان بزرگترین قوه ۲ در عبارت $2(P_{n+1}-P_n^2)$ است که صورت کسر را تشکیل می‌دهد. از طرفی،

$$P_{n+1}=1\times3\times\cdots\times(2^{n+1}-1)$$
$$=(2^n-(2^n-1))\cdots(2^n-1)(2^n+1)\cdots(2^n+(2^n-1)).$$

با نگاهی به عوامل ضرب، در می‌یابیم که هر عامل مزدوج عامل دیگری است. بنابراین، با فرض $a=2^n$، خواهیم داشت:

$$P_{n+1}=(a^2-1^2)(a^2-3^2)\cdots(a^2-(2^n-1)^2)$$

تعداد عوامل ضرب، در عبارت فوق، 2^{n-1} است. فرض کنید $m=2^{n-1}$. بنابر لم۲، که در آن، با انتخاب $x_k=(2k-1)^2$، خواهیم داشت:

$$P_{n+1}=(a^2)^m-S_1(a^2)^{m-1}+\cdots$$
$$+(-1)^{m-1}S_{m-1}(a^2)+(-1)^mS_m.$$

m عددی زوج است. بنابراین،

$$(-1)^mS_m=S_m=1^2\times3^2\times\cdots$$
$$\times(2m-1)^2=P_n^2.$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$P_{n+1}-P_n^2=(a^2)^m-S_1(a^2)^{m-1}+\cdots$$
$$-S_{m-1}(a^2)$$
$$=[(a^2)^{m-1}-S_1(a^2)^{m-2}+\cdots$$
$$+S_{m-2}(a^2)-S_{m-1}]a^2$$
$$=(Ka^2-S_{m-1}]a^2$$

که در آن،

$$K=(a^2)^{m-2}+\cdots+S_{m-2}$$

به سادگی ثابت می‌شود که

$$S_{m-1}=\frac{P_n^2}{1^2}+\frac{P_n^2}{3^2}+\cdots+\frac{P_n^2}{(2^n-1)^2}$$

از طرفی، دسته اعداد

$$\frac{P_n}{1} \text{ و } \frac{P_n}{3} \text{ و } \ldots \text{ و } \frac{P_n}{2^n-1}$$

تشکیل یک دستگاه مخفف مانده‌ها به هنگ $a=2^n$ می‌دهند.

پس،

$$S_{m-1}=\frac{P_n^2}{1^2}+\frac{P_n^2}{3^2}+\cdots+\frac{P_n^2}{(2^n-1)^2}$$
$$\equiv 1^2+3^2+\cdots+(2^n-1)^2$$
$$=2^{n-1}\left(\frac{4^n-1}{3}\right)\pmod a$$

حال اگر $l=\frac{4^n-1}{3}$ آنگاه l فرد است و

$$S_{m-1}=K'a+2^{n-1}l$$

با توجه به اینکه $a=2^n$،

$$2(P_{n+1}-P_n^2)=2[Ka^2-S_{m-1}]a^2$$
$$=[2Ka^2-2K'a-2^{n-1}l]a^2$$
$$=[2Ka-2K'-l]a^3$$

عبارت داخل پرانتز عددی فرد است. زیرا l فرد است. بنابراین، بزرگترین قوه ۲ در $2(P_{n+1}-P_n^2)$ عدد $3n$ است.

سال اول، شماره ۲، تابستان ۶۳، مسئله ۱۵.

تابع f با ضابطه ذیل تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases} x & x\notin Q \\ P\sin\frac{1}{q} & x=\frac{P}{q} \text{ و } (P,q)=1 \text{ و } q>0 \end{cases}$$

(Q مجموعه اعدادگویاست) مطلوبست تعیین نقاط پیوستگی و نقاط ناپیوستگی تابع f.

حل. حکم ذیل را می‌توان در مورد این تابع ثابت کرد.

(الف) درنقطه صفر تابع تعریف نشده است، (طبیعی است که اگر در نقطه صفر مقدار تابع صفر شودآنگاه تابع پیوسته می گردد).

(ب) در نقاط اصم (گنگ) پیوسته است.

(ج) در نقاط گویا ناپیوسته است.

برای اثبات حکم (ب)، ابتدا لم ذیل را ثابت می‌کنیم.

لم. فرض کنید که N یک عدد طبیعی و a و b دو عدد حقیقی باشند به طوری‌که $a<b$. دراین صورت، مجموعه، $A=\left\{\frac{m}{n}\,\middle|\, 1\leqslant n\leqslant N \text{ و } \frac{m}{n}\in(a,b)\right\}$ متناهی

است.

برهان. فرض کنید k عدد ثابتی باشد که $1 \leqslant k \leqslant N$ و $\frac{m}{k} \in (a, b)$. بنابراین، $a < \frac{m}{k} < b$، یا $ak < m < bk$. از اینجا نتیجه می‌شود که تعداد اعداد صحیحی، مانند m، که در این نامساوی صدق می‌کند حداکثر برابر $[bk]-[ak]$ است، که در آن، [ ] به معنی جزء صحیح است؛ یعنی، مجموعه

$$A_k=\left\{\frac{m}{k}\,\middle|\,\frac{m}{k}\in (a, b)\right\}$$

مجموعه متناهی است. چون اجتماع متناهی از مجموعه‌های متناهی مجموعه‌ای متناهی است، پس، مجموعه $A=\bigcup_{k=1}^{N} A_k$ متناهی است.

اینك حکم (ب) را ثابت می‌کنیم.

فرض کنیم که ε یك عدد مثبت دلخواهی باشد. می‌دانیم که $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. بنابراین، اگر $x=\frac{1}{q}$ آنگاه $\lim_{q\to\infty} q\sin\frac{1}{q}=1$. ابتدا، فرض کنید که x_0 یك عدد اصم (گنگ) باشد و $x=\frac{p}{q}$. در این صورت:

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)| &= \left|p\sin\frac{1}{q}-x_0\right|\\ &= \left|xq\sin\frac{1}{q}-x_0\right|\\ &= \left|(x-x_0)q\sin\frac{1}{q}+x_0\left(q\sin\frac{1}{q}-1\right)\right|\\ &\leqslant |x-x_0|+|x_0|\left|q\sin\frac{1}{q}-1\right|. \qquad (1)\end{aligned}$$

بنابراین، متناظر $\frac{\varepsilon}{2|x_0|}$، عددی طبیعی مانند N هست که به ازاء هر q اگر $q>N$، آنگاه

$$\left|q\sin\frac{1}{q}-1\right|<\frac{\varepsilon}{2|x_0|} \qquad (2)$$

از طرفی، مجموعه

$$A=\left\{\frac{m}{n}\,\middle|\,1\leqslant n\leqslant N:\ \frac{m}{n}\in\left(x_0-\frac{\varepsilon}{2},\ x_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}$$

مجموعه‌ای متناهی است. فرض کنید:

$$\delta=\min\{|x_0-a|\ |a\in A\}.$$

واضح است که $0<\delta<\frac{\varepsilon}{2}$. اینك ثابت می‌کنیم که δ در شرط پیوستگی صدق می‌کند. فرض کنید که x عدد حقیقی دلخواهی باشد به طوری که $|x-x_0|<\delta$. اگر x اصم باشد آنگاه

$$|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\delta\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

ولی اگر $x=\frac{p}{q}$، که $(p, q)=1$ بمم، آنگاه چون $|x-x_0|<\delta$، پس $x\notin A$. بنابراین، $q>N$. با توجه به نامساویهای (۱) و (۲)،

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)| &\leqslant |x-x_0|+|x_0|\left|q\sin\frac{1}{q}-1\right|\\ &<\delta+|x_0|\times\frac{\varepsilon}{2|x_0|}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

حکم (ج). ثابت می‌کنیم که f در نقطه $x_0=\frac{p_0}{q_0}$ ناپیوسته است. فرض کنید f که در این نقطه پیوسته باشد (برهان خلف). بنابراین، متناظر هر ε مثبت. بالاخص،

$$\varepsilon_0=\frac{1}{2}\left|x_0-p_0\sin\frac{1}{q_0}\right|$$

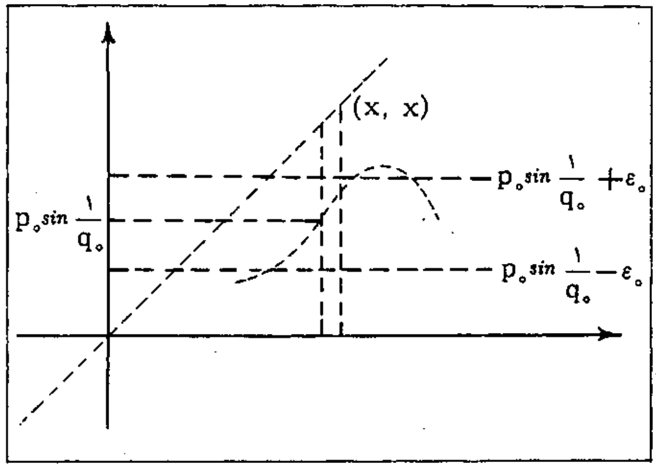
عددی مانند δ هست که به ازاء هر x، اگر $|x-x_0|<\delta$ آنگاه $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon_0$ (شکل را ببینید)، می‌توان این قید را بر δ گذاشت که $\delta<\varepsilon_0$. حال اگر x عدد اصمی باشد که $|x-x_0|<\delta$ آنگاه

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|x-p_0\sin\frac{1}{q_0}\right|<\varepsilon_0$$

از طرفی

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)| &= \left|\left(x_0-p_0\sin\frac{1}{q_0}\right)+(x-x_0)\right|\\ &\geqslant\left|x_0-p_0\sin\frac{1}{q_0}\right|-|x-x_0|\\ &>2\varepsilon_0-\varepsilon_0=\varepsilon_0\end{aligned}$$

و این یك تناقض است.



سال اول، شماره ۱۴ زمستان ۶۳، مسئله ۱۹.

مطلوبست تعیین دو رقم آخر اعداد $14^{(14^{14})}$.

حل. چون دو رقم سمت راست مورد نظر است، پس قوای ۱۴ را به هنگ ۱۰۰ محاسبه می‌کنیم:

$$1)\quad 14^2=196\equiv -4 \pmod{100}$$

$$2)\quad 14^3=44 \pmod{100}$$

$$3)\quad 14^4\equiv 16 \pmod{100}$$

$$4)\quad 14^5\equiv 24 \pmod{100}$$

$$5)\quad 14^{10}\equiv 76 \pmod{100}$$

از طرفی، به ازاء هرعدد طبیعی n، $76^n\equiv 76 \pmod{100}$.
زیرا، اگر $n=1$، حکم برقرار است و اگر $n=2$ آنگاه

$$76^2-76=76(76-1)=76\times 75=5700$$

بنابراین،

$$76^2\equiv 76 \pmod{100}$$

حال اگر n یك عدد طبیعی دلخواه باشد و:

$$76^n\equiv 76 \pmod{100}$$

آنگاه:

$$76^{n+1}=76\times 76^n\equiv 76\times 76\equiv 76 \pmod{100}$$

بنابراین، ابتدا رقم یکان 14^{14} را محاسبه می‌کنیم. از (۳) و (۵) نتیجه می‌شود که:

$$14^{10}\equiv 6 \pmod{10}$$

و:

$$14^4\equiv 6 \pmod{10}$$

بنابراین،

$$14^{14}=14^{10}\times 14^4\equiv 6\times 6\equiv 6 \pmod{10}$$

بالنتیجه،

$$14^{14}=10n+6$$

بنابراین،

$$14^{(14^{14})}=14^{10n+6}=(14^{10})^n\times 14^6\equiv 76^n\times 36$$
$$\equiv 76\times 36\equiv 36 \pmod{100}$$

بنابراین، دو رقم سمت راست به ۳۶ ختم می‌شود.

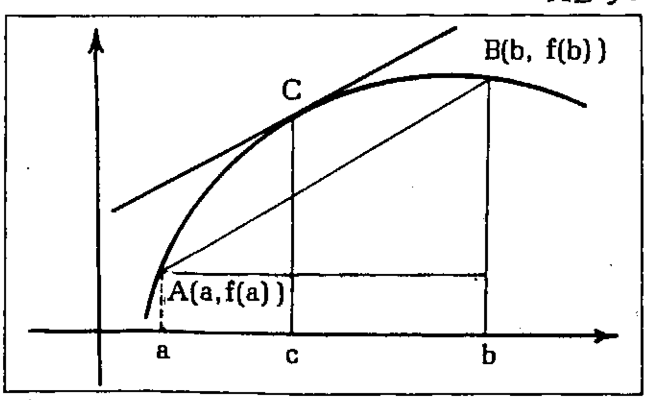
سال دوم، شماره ۵ و ۶، بهار و تابستان ۶۴. مسئله ۱۹.

فرض کنید که f بر R تعریف شده باشد و در هر نقطه دارای مشتق متناهی. بنابرآنکه $f(0)=0$ و به ازاء هر x از R، $|f'(x)|\leqslant |f(x)|$؛ ثابت کنید که به ازاء هر x از R، $f(x)=0$.

حل: برای اثبات این مسأله از قضیه میانگین در مشتق استفاده می‌کنیم. تعبیر هندسی قضیه میانگین در مشتق چنین است. اگر f بربازه بسته $[b, b]$ پیوسته و بر بازه باز (a, b) مشتقپذیر باشد آنگاه حداقل نقطه‌ای، مانند c، از بازه باز (a, b) موجود است که

$$f(b)-f(a)=f'(c)\,(b-a)$$

این مطلب از جنبه شهودی امکانپذیر است. زیرا، بنابر شکل ذیل، اگر خط AB به موازات خود به طرف بالا حرکت کند زمانی منحنی را در دو نقطه، زمانی در یك نقطه، و زمان دیگری درهیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند. درحالتی که خط منحنی را در یك نقطه، مانند C، قطع کند، مماس دراین نقطه موازی وتر AB است.



مسأله را در چند مرحله ثابت می‌کنیم.

مرحله ۱. f دربازه $[0, 1]$ تابعی صفر است. برای اثبات این حکم، فرض کنید $0<x<1$. ابتدا، به

استقراء، ثابت می‌کنیم کـه به ازاء هر عدد طبیعی n، نقطه‌ای مانند x_n در بازه $[0, x]$ موجود است به طوری‌که

$$|f(x)| \leqslant |f(x_n)|x^n$$

اگر $n=1$، بنابـر قضیه میانگین، عددی مـانند x_1 موجود است‌که $0 < x_1 < x$ و:

$$f(x)-f(0)=f'(x_1)\,(x-0).$$

بنابراین،

$$|f(x)|=|f'(x_1)|x \leqslant |f(x_1)|x.$$

بالنتیجه، شروع استقراء برقرار است. حـال فرض‌کنیدکـه فرض استقراء برقرار بـاشد. یعنی، x_nی در بازه $[0, x]$ موجود باشد به‌طوری‌که $|f(x)| \leqslant |f(x_n)|x^n$. بار دیگر قضیه میانگین را در بازه $[0, x_n]$ به کار می‌گیریم. در این صورت، عددی مانند x_{n+1} موجود است‌که:

$$f(x_n)=f'(x_{n+1})x_n \quad \text{و} \quad 0 < x_{n+1} < x_n$$

با توجه به فرض استقراء و مسأله،

$$|f(x)| \leqslant |f(x_n)|x^n=|f'(x_{n+1})|x_n x^n \leqslant |f(x_n)|x^{n+1},$$

و این اثبات حکم استقراء است. حال، چون f بربازه $[0, 1]$ پیوسته است، پس عدد مثبتی مانند M موجود است‌که به ازاء هر x از $[0, 1]$، $|f(x)| \leqslant M$. بنابراین،

$$|f(x)| \leqslant |f(x_n)|x^n \leqslant Mx^n$$

بـا توجه بـه اینکه $0 < x < 1$، پس $\lim_{n\to\infty} x^n=0$. از اینجا نتیجه می‌شود که به ازاء هر x در $[0, 1)$، $f(x)=0$. تـابع f تـابعی پیوسته است. پس $f(1)=0$. بنابراین، f بربازه $[0, 1]$ تابع ثابت صفر است، و این اثبات مرحله ۱ است.

مرحله ۲. به استقراء ثابت می‌کنیم که به‌ازاء هرعدد طبیعی n، تابع f بر بازه $[0, n]$ تابع صفر است. به ازاء $n=1$ حکم برقرار است. فرض‌کنیدکه فرض استقراء برقرار باشد. یعنی، به ازاء هر x از $[0, n]$، $f(x)=0$. ثابت مـی‌کنیم که به ازاء هر x از $[0, n+1]$، $f(x)=0$.

تابع g را بـر بازه $[0, 1]$ چنین تعریف می‌کنیم؛ اگـر $x \in [0, 1]$ آنگاه $g(x)=f(x+n)$ بنابراین،

$$g(0)=f(n)=0$$

اگر $u=n+x$ آنگاه، بنابر مشتق توابع مرکب،

$$g'(x)=f'(u)\times u'_x=f'(u)\times 1=f'(x+n)$$

بنابراین g بربازه $[0, 1]$ در شرایط مسألـه صدق مـی‌کند. بنابر مـرحله ۱، بـه ازاء هـر x از $[0, 1]$، $g(x)=0$. بنابراین، اگر $y\in[n, n+1]$ آنگاه $0 \leqslant x=y-n < 1$

$$0=g(x)=f(x+n)=f(y)$$

یعنی، f بـر بـازه $[n, n+1]$ تـابعی صفر است. چـون $[0, n+1]=[0, n]\cup[n, n+1]$، پس، به‌ازاء هر x از $[0, n+1]$، $f(x)=0$.

مرحله ۳. ثابت می‌کنیم که به ازاء هر x از $[-n, 0]$، $f(x)=0$. تابع h را بربازه $[0, n]$ چنین تعریف می‌کنیم؛ به ازاء هر x از $[0, n]$، $h(x)=f(-x)$. بدیهی است کـه $h'(x)=-f'(-x)$ بنابراین، تـابع h در شرایط مسأله صدق مـی‌کند. بنابر مـرحله ۲، بـه ازاء هـر x از $[0, n]$، $h(x)=0$. حال اگـر $x\in[-n, 0]$ آنگـاه $-x\in[0, n]$. بنابراین،

$$0=h(-x)=f(-(-x))=f(x)$$

بالنتیجه، به ازاء هر x از $[-n, 0]$، $f(x)=0$.

مرحله ۴. فرض‌کنیدکه x یك عدد حقیقی‌باشد. بنابراین، اگر جزء صحیح x برابر n باشدآنگاه

$$x\in[-n-1, n+1]$$

بنابر مرحله ۲ و ۳، $f(x)=0$.

سال دوم، شماره ۸، زمستان ۶۴، مسئله ۲۵.

انتگرال زیر را محاسبه‌کنید

$$\int\frac{dx}{x(x+1)\,(x+2)\,\cdots\,(x+m)}$$

حل این مسئله در مجله شماره ۱۵، بخش نامه‌هـا، آمده است. جهت یادآوری وکسانیکـه این شماره را در اختیار ندارند، متذکر می‌شویم که عبارت تحت انتگرال را تجزیه به‌کسرهای ساده می‌کنیم، سپس، انتگرال می‌گیریم. جواب آن چنین است:

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{k!(m-k)!}\,\mathrm{Ln}|x+k|+c$$

اثبات و حل دو مسئلهٔ هندسه از المپیاد ریاضی

(لهستان ورشو تیرماه ٦۵
مندرج در مجله رشد ۱۲، صفحه ۵۴)

حسین غیور

۱ــ مثلث $A_1A_2A_3$ و نقطهٔ P_0 در یک صفحه مفروضند؛ برای هر عدد طبیعی s $(s \geqslant 4)$ $A_s = A_{s-3}$ دنبالهٔ نقاط «P_1 و P_2 و P_3 و ...» را طوری در نظر می‌گیریم که نقطهٔ P_{k+1} تصویر نقطهٔ P_k در دوران به مرکز A_{k+1} به اندازهٔ زاویهٔ $120°$ در جهت عقربه‌های ساعت باشد $(K=0, 1, 2, 3, \ldots)$. ثابت کنید اگر $P_{1986}=P_0$ باشد مثلث $A_1A_2A_3$ متساوی‌الاضلاع است.

برهان. جهت عقربه‌های ساعت را جهت مثبت اختیار می‌کنیم ودوران را با نماد (I) $P_{k+1}=RA_{k+1,120°}P_k$ نشان می‌دهیم و ازآن رابطه برداری

(II) $R\overrightarrow{A_{k+1}P_k}=\overrightarrow{A_{k+1}P_{k+1}}$

را نتیجه می‌گیریم. فرض $(s \geqslant 4)A_s=A_{s-3}$ نتیجه می‌دهد که مرکز دورانها همواره منطبق بر رأسهای مثلث $A_1A_2A_3$ است. به جای فرض $P_{1986}=P_0$ که درآن اندیس P مضرب ۳ است فرض $P_{3n}=P_0$ را که درآن n عدد طبیعی است به کار می‌بریم و قضیه را در حالت کلی ثابت می‌کنیم. از تساوی II به ازاء $(k=0, 1, 2, \ldots, 3n)$ تساویهای برداری ذیل به دست می‌آید.

۱) $R\overrightarrow{A_1P_0}=\overrightarrow{A_1P_1}$

۲) $R\overrightarrow{A_2P_1}=\overrightarrow{A_2P_2}$

۳) $R\overrightarrow{A_3P_2}=\overrightarrow{A_3P_3}$

۴) $R\overrightarrow{A_1P_3}=\overrightarrow{A_1P_4}$

۵) $R\overrightarrow{A_2P_4}=\overrightarrow{A_2P_5}$

۶) $R\overrightarrow{A_3P_5}=\overrightarrow{A_3P_6}$

. . . .

. . . .

$3n-2)$ $R\overrightarrow{A_1P_{3n-3}}=\overrightarrow{A_1P_{3n-2}}$

$$3n-1)\quad R\overrightarrow{A_2P_{3n-2}}=\overrightarrow{A_2P_{3n-1}}$$

$$3n)\quad R\overrightarrow{A_3P_{3n-1}}=\overrightarrow{A_3P_{3n}}$$

دو طرف تساوی برداری ۱ را از تساوی ۴ و ۲ را از ۵ و ۳ را از ۶ و بالاخره دوطرف تساوی ۳ − ۳n را از ۳n تفریق می‌کنیم تا تساویهای ذیل به تعداد ۳ − n به دست آید. این تساوی‌ها را ابتدا از ′۱ تا آخر با دسته‌های سه‌تایی در نظر می‌گیریم:

$$1')\quad R\overrightarrow{P_0P_3}=\overrightarrow{P_1P_4}$$

$$2')\quad R\overrightarrow{P_1P_4}=\overrightarrow{P_2P_5}$$

$$3')\quad R\overrightarrow{P_2P_5}=\overrightarrow{P_3P_6}$$

$$4')\quad R\overrightarrow{P_3P_6}=\overrightarrow{P_4P_7}$$

$$5')\quad R\overrightarrow{P_4P_7}=\overrightarrow{P_5P_8}$$

$$6')\quad R\overrightarrow{P_5P_8}=\overrightarrow{P_6P_9}$$

درسه تساوی ′۱ و ′۲ و ′۳ دو طرف تساوی ′۱ را دوبار و دو طرف تساوی ۲ را یك‌بار باندازهٔ °۱۲۰ دوران می‌دهیم.

$$R_{120}R_{120}R_{120}\overrightarrow{P_0P_3}=R_{120}R_{120}\overrightarrow{P_1P_4}$$

و

$$R_{120}R_{120}\overrightarrow{P_1P_4}=R_{120}\overrightarrow{P_2P_5}$$

و

$$R_{120}\overrightarrow{P_2P_5}=\overrightarrow{P_3P_6}\implies\overrightarrow{P_0P_3}=\overrightarrow{P_3P_6}$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد:

$$\overrightarrow{P_3P_6}=\overrightarrow{P_6P_9}\quad و \quad\overrightarrow{P_6P_9}=\overrightarrow{P_9P_{12}}$$

و

$$\overrightarrow{P_{3n-6}P_{3n-3}}=\overrightarrow{P_{3n-3}P_{3n}}$$

با توجهٔ به فرض $P_{3n}=P_0$ و جمع بردارها داریم:

$$\overrightarrow{P_0P_3}+\overrightarrow{P_3P_6}+\cdots\overrightarrow{P_{3n-3}P_{3n}}=\overrightarrow{P_0P_{3n}}=0$$

از دو تساوی قبل نتیجه می‌شود:

$$\overrightarrow{P_0P_3}=\overrightarrow{P_3P_6}=\cdots=\overrightarrow{P_{3n-3}P_{3n}}\implies P_0=P_3=P_6\cdots=P_{3n-3}=P_{3n}$$

(معنی تساوی‌های اخیر اینست که P_{3n} به ازاء جمیع اعداد طبیعی از ۱ تا n بر P_0 منطبق است). ازآنچه گفته شد از تساوی‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود به ازاء هر k، اگر $1\leqslant k\leqslant n$، P_{3k-2} و P_{3k-1} بر P_1 و P_2 منطبق‌اند و به طور کلی، نقاط P_k به ازاء جمیع اعداد طبیعی از ۱ تا n بر یکی از سه نقطه P_0 و P_1 و P_2 منطبق است.

برای اینکه ثابت کنیم مثلث $A_1A_2A_3$ متساوی‌الاضلاع است. از تساوی‌های برداری ۱ و ۲ و ۳ رابطه برداری به شرح ذیل بین ضلع‌های آن مثلث به‌دست می‌آوریم. تساوی ۲ $(R\overrightarrow{A_1P_1}=\overrightarrow{A_2P_2})$ را با استفاده از تساوی یک $(R\overrightarrow{A_1P_0}=\overrightarrow{A_1P_1})$ به این شکل در می‌آوریم:

$$R(\overrightarrow{A_2A_1}+\overrightarrow{A_1P_1})=\overrightarrow{A_2P_2}\implies$$

$$R\overrightarrow{A_2A_1}+RR\overrightarrow{A_1P_0}=\overrightarrow{A_2P_2}$$

پس

$$(a)\quad R_{120}\overrightarrow{A_2A_1}+R_{-120}\overrightarrow{A_1P_0}=\overrightarrow{A_2P_2}$$

تساوی ۳ را $(R\overrightarrow{A_3P_2}=\overrightarrow{A_3P_3}=\overrightarrow{A_3P_0})$ با استفاده از تساوی (a) به این صورت در می‌آوریم.

$$R(\overrightarrow{A_3A_2}+\overrightarrow{A_2P_2})=\overrightarrow{A_3P_0}\implies$$

$$R\overrightarrow{A_3A_2}+R_{-120}\overrightarrow{A_2A_1}+\overrightarrow{A_1P_0}=\overrightarrow{A_3P_0}$$

پس

$$(b)\quad R_{-120}\overrightarrow{A_2A_1}-\overrightarrow{A_2A_1}=R_{120}\overrightarrow{A_2A_3}-\overrightarrow{A_2A_3}$$

چون بردارهای دو طرف تساوی (b) را در خودآنها ضرب اسکالر کنیم نتیجه می‌شود $A_2A_1=A_2A_3$. چون بردارهای اجزای تساوی (b) را به مبدأ A_1 بنویسیم تساوی (b) به شکل ذیل در می‌آید:

$$(b')\quad R_{120}\overrightarrow{A_1A_2}-\overrightarrow{A_1A_2}=R_{-120}\overrightarrow{A_1A_3}-\overrightarrow{A_1A_3}$$

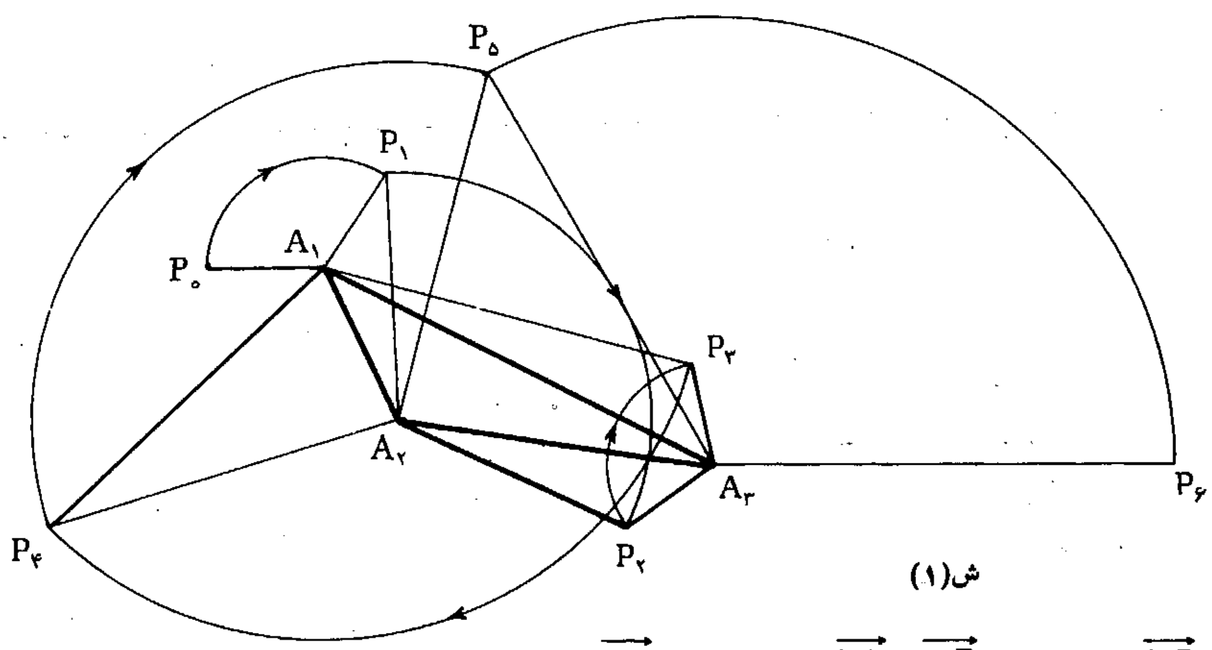
از تساوی (b′) به شرحی که گفته شد نتیجه می‌شود $A_1A_2=A_1A_3$.[1]

تبصره. اثبات اینکه مثلث $A_1A_2A_3$ یك مثلث

۱ــ با رسم شکل تساوی (b) به سادگی ثابت می‌شود مثلث $A_1A_2A_3$ متساوی‌الاضلاع است.

متساوی‌الاضلاع است در صفحات ۳۸ و ۳۹ شماره ۱ با دو روش هندسی و در صفحه ۸۰ شماره ۵ـ۶ به صورت دیگری مطرح و با روش برداری آمده است. راه حل اول از کتاب بازآموزی و باز شناخت هندسه، ترجمهٔ آقای مصحفی و اثبات دوم و سوم از اینجانب است. برهانی که در متن به کار رفته از نظر ارتباط با برهان فرض دیگر مسأله طبیعی‌تر و مناسبتر است.

است. در این چهارضلعی به‌طوری که در شکل مشاهده می‌شود، $\hat{Y}_1=\hat{B}_1$ و $Z_1=B_2$ است پس $\hat{B}_1$ مساوی B_2 و XB نیمساز زاویهٔ $\widehat{ABC}$ است. مرکز O روی BX می‌باشد. یعنی X در امتداد نیمساز زاویهٔ B از چند ضلعی منتظم است. فرض می‌کنیم $\widehat{BYZ}=\widehat{BXZ}=x$ باشد در مثلث BYZ عطف به قضیهٔ سینوسها،



ش(۱)

$$\overrightarrow{A_1P_1}=R_{A_1,120^\circ}\overrightarrow{A_1P} \quad , \overrightarrow{A_2P_2}=R_{A^2,120^\circ}\overrightarrow{A_2P_1},\ldots$$

۲ـ A و B دو رأس مجاور یك n ضلعی منتظم $(n \geqslant 5)$ در صفحه به مرکز O می‌باشد. مثلث XYZ که با مثلث OAB مساوی و در ابتدا بر آن منطبق است (X روی O و Y روی A و Z روی B) طوری تغییرمکان می‌دهد که Y و Z محیط چند ضلعی و نقطه X در داخل آن است مکان هندسی نقطه Y' را پیدا کند.

حل. چهار ضلعی XYBZ محاطی است، زیرا

$$\widehat{CBL}=\frac{360^\circ}{n} \quad \text{و} \quad \widehat{YXZ}=\frac{360^\circ}{n}$$

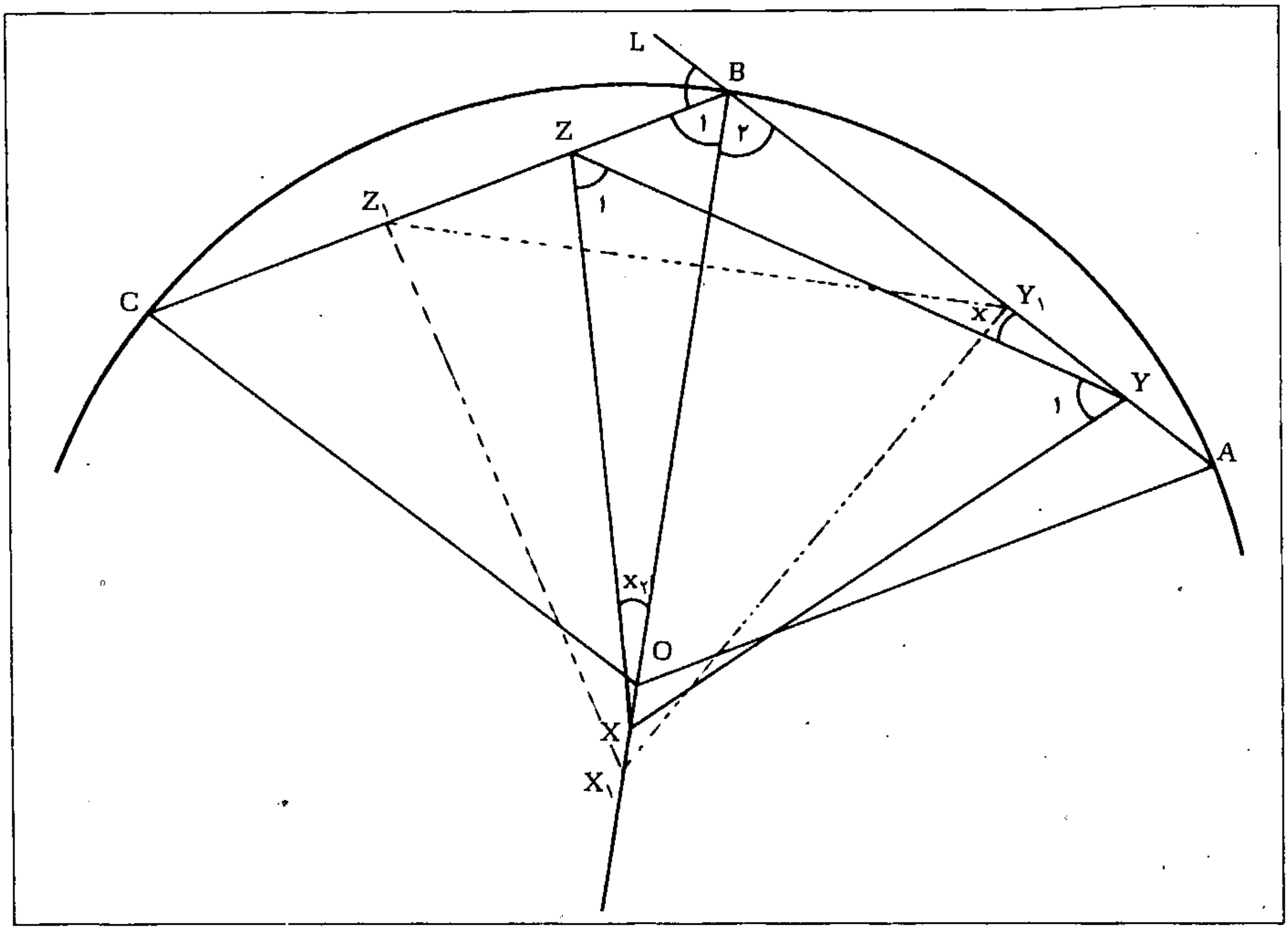
$$\frac{BZ}{\sin x}=\frac{YZ}{\sin\frac{360^\circ}{n}}$$

در مثلث BXZ

$$\frac{BZ}{\sin x}=\frac{BX}{\sin(x+B_1)}$$

پس

$$\frac{BX}{\sin(x+B_1)}=\frac{YZ}{\sin\frac{360^\circ}{n}} \qquad (1)$$



در تساوی (۱) چون YZ ضلع n ضلعی منتظم است:

$$YZ = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$$

و

$$B_1 = \frac{180^\circ - \frac{360^\circ}{n}}{2} = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$$

است

$$(2)\quad BX = R\,\frac{\cos\left(\frac{180^\circ}{n} - x\right)}{\cos\frac{180^\circ}{n}}$$

از تساوی ۲ نتیجه می‌گیریم $BX > R$ است. BX در حالتی ماگزیمم است که صورت کسر تساوی (۲) ماگزیمم یعنی مساوی ۱+ شود، در این حالت $x=\frac{180^\circ}{n}$ است در نتیجه مثلث BYZ متساوی‌الساقین است و YZ موازی AC و ماگزیمم OX که به OX_1 نشان داده شده برابر است با

$$OX_1 = \frac{R}{\cos\frac{180^\circ}{n}} - R = R\left(\sec\frac{180^\circ}{n} - 1\right).$$

از آنچه گفته شد مکان X پاره خط OX_1 است که در امتداد ابتدا از مرکز دایره O روی نیمساز زاویه B واقع شده است. بنابراین مکان هندسی X قسمتی از نیمساز زاویه‌های n ضلعی منتظم است ابتدا از مرکز دایره به طول $R\left(\sec\frac{180^\circ}{n} - 1\right)$ یعنی مجموعهٔ n پاره خطی است به شرحی که گفته شد.

گزارش نوزدهمین کنفرانس ریاضی کشور

نوزدهمین کنفرانس ریاضی کشور از تاریخ ۸ تا ۱۱ فروردین ماه ۱۳۶۷ در دانشگاه گیلان و به مناسبت هزاره کوشیار گیلانی ریاضیدان قرن سوم تشکیل گردید. این کنفرانس توسط وزیر محترم فرهنگ و آموزش عالی آقای دکتر فرهادی افتتاح گردید. در این کنفرانس نه سخنرانی عمومی و پنجاه سخنرانی تخصصی در زمینه‌های مختلف ریاضی ایراد گردید. بعضی ازسخنرانیهای عمومی اختصاص بر بررسی شرح حال کوشیار گیلانی داشت.

در دومین روز کنفرانس میزگرد انجمن ریاضی تشکیل جلسه داد در این میزگرد مسائل وموضوعات مربوط به علل افت ریاضی، دوره‌های کارشناسی ارشد و دکتری ریاضی مورد بحث و بررسی قرار گرفت.

در سومین روز کنفرانس مجمع عمومی انجمن ریاضی تشکیل و انتخابات اعضاء اصلی وعلی‌البدل و بلمزرس به عمل آمد و در مجموع یازده نفر انتخاب شدند در این مجمع گزارش مالی خزانه‌دار انجمن ریاضی قرائت گردیدو مورد تصویب قرار گرفت.

قطعنامه نوزدهمین کنفرانس در پنج ماده به شرح زیر توسط دبیر انجمن قرائت و به تصویب مجمع رسید:

قطعنامه نوزدهمین کنفرانس ریاضی کشور

به شکرانه الطاف الهی نوزدهمین کنفرانس ریاضی کشور علیرغم شرایط حاد جنگ تحمیلی، با شرکت فعال علاقمندان ریاضی کشور و با حضور وزیر محترم فرهنگ وآموزش عالی و تعدادی از مقامات استان و نمایندگان مجلس شورای اسلامی و با زحمات بیدریغ اولیای دانشگاه گیلان در رشت برگزار گردید. بدینوسیله شرکت کنندگان کنفرانس ازکلیه مقامات جمهوری اسلامی ایران که به نحوی در حسن برگزاری این کنفرانس نقشی داشته‌اند، سپاسگزاری می‌نماید.

متن قطعنامه

۱ـ شرکت کنندگان در نوزدهمین کنفرانس ریاضی و بزرگداشت هزاره کوشیار گیلانی ریاضیدان قرن چهارم ضمن اعتقاد راسخ وپشتیبانی قاطع از موضع جمهوری اسلامی در مقابله با تهدیدات و توطئه‌های مذبوحانه استکبار جهانی ومحکوم کردن اعمال جنایتکارانه رژیم بعثی عراق در بمباران مناطق مسکونی کشور بخصوص بمباران شیمیائی مردم مظلوم شهر حلبچه و دیگر نقاط مسکونی همبستگی خود را با رزمندگان اسلام در رزم بی امانشان با دشمن بعثی صهیونیستی اعلام می‌دارند.

۲ـ با تقدیر ازگامهای ارزنده وزارت فرهنگ وآموزش عالی در تشکیل دوره‌های کارشناسی ارشد و دکتری رشته‌های مختلف، ازآنجا که در آئین‌نامه طرح تمام وقتی (طرح استفاده از خدمت خارج از وقت اداری)اعضای هیأت علمی‌دانشگاهها به امر پژوهش و تأمین نیازهای آموزشی کشور در سطوح بالا توجه شده است، از مسئولین ذیربط وزارت فرهنگ وآموزش عالی و دانشگاهها موکداً انتظار داردکه تنگناهای موجود دراجرای مناسب این‌آئین‌نامه را رفع نموده و برای طرحهای تحقیقاتی علوم پایه و تدریس در دوره‌های کارشناسی ارشد و دکترا در جهت رفع نیازهای میهن اسلامی‌مان، ارزش ویژه‌ای قائل شوند.

۳ـ با توجه به افت علمی داوطلبان رشته ریاضی دانشگاهها، که بخشی ازآن ناشی از ورود دیپلمه‌های غیر ریاضی به این رشته می‌باشد، از مسئولین آزمون ورودی سراسری دانشگاهها

موکداً در خواست می‌شود ترتیبی اتخاذ شود که اینگونه داوطلبان به فراخور نوع دیپلم خود در رشته‌های مناسب جذب شوند.

۴ـ شرکت‌کنندگان در کنفرانس تقاضا دارند که مسئولین محترم نظام جمهوری اسلامی ایران بیش‌ازپیش در جهت تأمین مادی و معنوی معلمین، این قشر زحمتکش، کوشش نمایند. در ضمن به منظور ارتقاء کیفیت آموزش ریاضی در سطوح مختلف دبیرستان دوره‌های بازآموزی معلمین را به طور گسترده‌تر و با امکانات مناسب در سطح کشور برگزار نمایند.

۵ـ به مسئولین برنامه‌ریزی وزارت آموزش و پرورش و وزارت فرهنگ و آموزش عالی توصیه می‌شود که در تجدید نظر برنامه‌های آموزشی ریاضی، از حجم مطالب و تعدد موضوعات درسی کاسته و به عمق و تفکر ریاضی توجه بیشتری معطوف دارند.

در خاتمه شرکت‌کنندگان در کنفرانس از کمیته برگزارکننده نوزدهمین کنفرانس ریاضی کشور و مدیریت محترم دانشگاه گیلان و کلیه کارکنانی که صمیمانه در جهت حسن برگزاری کنفرانس، نهایت همکاری را نموده‌اند، سپاسگزاری نموده و توفیق آنها را در پیشبرد اهداف انقلاب فرهنگی کشورمان از درگاه احدیت مسئلت دارند.

معرفی مجله نشر ریاضی

دکتر محمدقاسم وحیدی

گروه ریاضی مرکز نشر دانشگاهی اولین شمارهٔ مجلهٔ «نشر ریاضی» را که خبر آن در شمارهٔ ۱۶ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی درج شد، انتشار داده است. جا دارد که دربارهٔ فعالیتها و خدمات ارزندهٔ «گروه ریاضی، آمار، و کامپیوتر» که در چارچوب مرکز نشر دانشگاهی تاکنون به چاپ و نشر دست‌کم ۳۰ جلد کتاب ریاضی دانشگاهی و کمك دانشگاهی در کیفیتی خوب و استانده پرداخته و برای اولین بار در ایران، ویرایش کتابهای ترجمه شده را با ضوابط دقیق و اصولی معمول کرده است، در مقال و مجالی دیگر سخن گفته شود. انتشار این مجله و همسویی کلی اهداف آن با اهداف مجلهٔ ما اقتضا می‌کند که بحث را به تذکر چند نکتهٔ کلی دربارهٔ مجلات علمی و بالاخص مجلات ریاضی محدود کنیم و دست آخر به معرفی «نشر ریاضی» بپردازیم.

خوشبختانه مقالهٔ:

جای خالی ریاضیات: مروری بر نشریات ادواری در ایران؛[1] نوشته غلامرضا برادران خسروشاهی دستمایهٔ خوبی برای ما در انجام این مقصود است. در این مقاله، جایگاه مجلات علمی در بسط و نشر دانش در سطح جهان مورد بررسی قرار گرفته، آمار و ارقام جالب و تکان دهنده‌ای ارائه شده و نتیجه‌گیریهایی کلی به عمل آمده است. مجلات ریاضی ادواری ایران هم از اولین مورد آن تا به امروز ــ البته در حدی نامتوازن ــ مرور و معرفی شده‌اند.

بنابر این مقاله، تعداد مجلات علمی در سال ۱۹۶۸ میلادی در سطح جهان به ۲۰۰،۰۰۰ عنوان بالغ شده است و آمار توزیعی این مجلات نشان می‌دهد که در سال ۱۹۷۳ میلادی، ۸۳/۹۲ درصد

نشریات علمی در ده کشوری منتشر می‌شوند که از لحاظ علمی (و طبعاً صنعتی) در بالاترین سطوح قرار دارند. جوایز نوبل و مدالهای فیلدز (که معتبرترین جایزه و به تعبیری همتای جایزهٔ نوبل در ریاضیات است) به پژوهشگران این کشورها تعلق می‌گیرد. نویسنده مقاله با عنایت به این ارقام و واقعیتها به این نتیجه (که آن را گزارهٔ ۱ می‌نامد) می‌رسد که:

«در جهان امروز کشورهایی که وضع علمی آنها خوب است، وضع نشریات علمی‌شان هم خوب است.»

حال این سؤال را از خود می‌کنیم: آیا واقعاً یك رابطهٔ علت و معلولی بین تعداد نشریات علمی وسطح علمی کشورها وجود دارد؟ به عبارت دیگر آیا اگر تعداد نشریات علمی را زیادتر کنیم، سطح علمی بالاتر می‌رود وبالعکس؟ قاعدتاً نمی‌تواند چنین باشد. به نظر می‌رسد که تعداد نشریات علمی و سطح علمی هردو معلول عامل مهمتر دیگری هستند وآن چیزی جز مناسب بودن شرایط نیست. حال ببینیم که این شرایط چیستند. می‌دانیم که مجلات علمی تحقیقی مبادرت به چاپ مقالاتی می‌کنند که حاصل پژوهش استادان دانشگاهها یا پژوهشگران مؤسسات تحقیقی است. در پذیرش این مقالات، محدودیت جغرافیایی و سیاسی وجود ندارد ولی با توجه به اینکه این مجلات وابسته به دانشگاهها یا مؤسسات علمی مختلف‌اند یا حداقل کار نظارت علمی برانتشار آنها را استادان دانشگاهها یا پژوهشگران مؤسسات تحقیقی انجام می‌دهند، دانشگاه یا مؤسسه‌ای به چاپ نشریه دست می‌زند یا سرپرستی نشریه‌ای را به عهده می‌گیرد که لااقل قسمتی از مقالات را خود میزبانی کند؛ یا با تعبیری دیگر کارهای تحقیقی در آن مؤسسه به اندازه‌ای باشد که نیاز به‌تأسیس چنین مجله‌ای را ایجاب کند. به بیان دیگر وجود تحقیقات در کمیتی قابل ملاحظه، ضرورت ایجاد مجلات تحقیقی را پیش می‌آورد و از آن طرف، ایجاد و ابقای این مجلات به اعتلای سطح تحقیقات و تقویت بنیهٔ علمی نهادهای آموزشی و پژوهشی کمك می‌رساند. یعنی اینکه اگر می‌خواهیم سطح علمی بالا رود و به تبع آن نشریات علمی پا گیرند (که البته این خود، جنبهٔ عارضی دارد و هدف اصلی همانا بالا بردن سطح علمی است) باید به تحقیق بها دهیم، آن‌را جدی گیریم، به محقق ارج گذاریم، و وسایل تحقیق اورا جداً فراهم آوریم.

اما در مورد مجلات توصیفی چطور؟ شرایطی که باعث به وجودآمدن این مجلات می‌شوند چیست و چه رسالتی برعهدهٔ آنهاست؟ اجازه دهید که خود را به مجلات ریاضی و آن هم در کشور خودمان محدودکنیم ونگاهی به «سرآغاز» یا پیشگفتار مجلهٔ نشر ریاضی بیندازیم:

«نشر ریاضی می‌خواهد به زبانی توصیفی، آگاهی از ریاضیات را اشاعه دهد. در این مجله زمینه‌های جدید و جذاب ریاضی، دستاوردهای مهم و دیدگاههای نوین را معرفی کنیم و در عین‌حال، به تاریخ، فلسفه، آموزش‌ریاضی، نقد و بررسی کتابهای تازه، و اخبار مربوط به ریاضیات و ریاضیدانان می‌پردازیم. دربارهٔ مسائل روز جامعهٔ ریاضی و دانشگاهی کشور، دیدگاههای صاحبنظران را مطرح سازیم.

مخاطب نشر ریاضی، جامعهٔ رو به گسترش ریاضی خوانان کشور است، از دانش‌آموزان کنجکاو سالهای آخر دبیرستان تا ریاضیکاران حرفه‌ای و سیاستگذاران علمی کشور. در راهی که در پیش‌داریم، پشتوانهٔ ما استقبال، حمایت، و همکاری خوانندگان است.»

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی‌هم، کم‌و بیش تعقیب این هدف را وجههٔ همت خویش قرار داده است. گو اینکه مخاطب مجلهٔ اخیر بیشتر دبیران ریاضی کشور هستند و بعداً دانشجویان و دانش‌آموزان. بنابراین برای به‌وجودآمدن و پایدارماندن مجلات ریاضی توصیفی در بدو امر به خوانندهٔ جدی نیاز است. کیفیت این مجلات کم‌و بیش به هیأت تحریریهٔ آنها بر می‌گردد ولی بالا رفتن تیراژ و نفوذکلام آنها در وهلهٔ اول به‌افزایش تعداد ریاضی خوانان و ریاضیکاران، و در وهلهٔ دوم وجودآمادگی ذهنی‌کافی در بین این اقشار بستگی دارد. یعنی «خیز» کمی و کیفی دانش‌آموزان و دانشجویان خودبه‌خود سبب به وجودآمدن این مجلات و رونق کارآنها می‌شود و برعکس «افت» کمی و کیفی آنها یا موجبی برای ایجاد مجلات به وجود نمی‌آورد یا به فرض هم اگر چنین مجلاتی از طرف سازمانهایی ایجاد شوند (مانند مجلهٔ علمی «دولت علیهٔ ایران» مورد اشاره در مقالهٔ فوق‌الذکر نشرریاضی که در سال ۱۲۶۴ هجری شمسی ایجاد و فقط یك شماره از آن منتشر شد و تا ۱۵ سال بعد هیچ نشریهٔ علمی دیگری منتشر نشد) منجر به‌کساد کار یا فروپاشی یا خالی از مقصود شدن آنها می‌شود.

این‌روزها اینجا و آنجا صحبت از «افت ریاضی» است. برخی از مسؤلین وزارت آموزش و پرورش نگرانیهای خود را در این زمینه ابرازکرده‌اند (نگاه‌کنید مثلاً به پیام وزیر سابق آموزش و پرورش، رشد

آموزش ریاضی، شمارهٔ ۲، صفحهٔ ۳، و مطالب مندرج در پیشگفتار شمارهٔ توأم ۵ و ۶، به قلم رئیس سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی و بالاخره مقالهٔ جامعی دراین زمینه که در مجلهٔ رشد ریاضی شماره ۱۶ درج شده است.) میزگرد نوزدهمین کنفرانس ریاضی کشور (دانشگاه گیلان، ۸–۱۱ فروردین ۱۳۶۷) اختصاص به بحث پیرامون افت ریاضی داشت.

بنابراین اگر به اعتلای ریاضیات و به تبع آن به‌رونق مجلات توصیفی علاقمندیم، باید زمینه‌های وجود افت ریاضی را از میان برداریم یا دست‌کم آنها را کاهش دهیم. فراهم کردن امکانات رفاهی برای دبیران و تشویق افراد شایسته از لحاظ علمی در بین آنها، تضمین نسبی آیندهٔ شغلی دانشجوان ریاضی درکنار اقدامات دیگر و از جمله تأسیس و حمایت از مجلات ریاضی می‌تواند بعد از بین رفتن افت ریاضی یا کاهش آن مؤثر باشد. خوشبختانه سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش از چهار سال پیش به ایجاد نشریه‌های توصیفی پرداخته و اینك نوبت مرکز نشر دانشگاهی که بیشترین و بهترین امکانات را از لحاظ ادارهٔ نشریات علمی دارد؛ فرا رسیده تا دومین مجلهٔ خود در علوم پایه، یعنی «نشر ریاضی» را بعداز «مجلهٔ فیزیك» پایه‌گذاری کند. مطمئنیم که همکاران ما در هیأت ویراستاران این نشریه، در برآوردن مقصود خود در نشر فرهنگ ریاضی در حدتوان خود مؤثر خواهند بود و مجموعهٔ مقالات شمارهٔ اول مجله مؤید این اطمینان ماست.

حال نگاهی به فهرست مندرجات نشر ریاضی می‌اندازیم:

سرآغاز

مسأله روز: گفتگویی دربارهٔ دکتری ریاضی

ریاضیات آشوب؛ عباس عدالت

نگاهی به فرضیهٔ ریمان؛ هربرت ویلف

بینهایت کوچکها به مدرسه باز می‌گردند؛ ویکتور هارنیك

تاریخ ریاضیات دورهٔ باستان‌را چگونه باید بررسی کرد؟؛ آرپاد سابو

چند خاطره از ریاضیدانهایی که شناخته‌ام؛ جورج پولیا

صورتبندی نظم عالم: نقش ریاضیات؛ آرتور جفی

آموزش هنر مسأله حل کردن؛ آنی شوئنفلد

سهم ما از منطق ریاضی؛ ضیاء موحد

نقد خوب چیست؟ آلن ادموندز، جان اوینگ

فهرست کتابهای ریاضی فارسی؛ ف.ا. فریار، شیوادخت شیوایی

واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار؛ سیامك کاظمی

ویراستاری، کیفیت چاپ و کاغذ قابل تحسین است. به نظر همکارانم در هیأت تحریریهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی چه خوب بود که یکی دو مقالهٔ نیمه‌تحقیقی کاردانشجویان یا اساتیدی که آن‌را مناسب درج در مجلات صرفاً تحقیقی نمی‌دانند، در نظر گرفته می‌شد.

نشر ریاضی در قطع رحلی منتشر شده، هر چهار ماه یك بار انتشار می‌یابد، و قیمت آن ۲۵۰ ریال است.

انتشار آن را به همکاران خود در هیأت ویراستاران مجلهٔ نشر ریاضی تبریك می‌گوییم. توفیق بیشتر آنها را آرزو می‌کنیم و دست همکاری به سویشان دراز می‌کنیم.

نتایج پنجمین دورهٔ مسابقات ریاضی دانش آموزان کشور

اسامی سیزده نفر حائزین رتبه اول تا دهم پنجمین دورهٔ مسابقات ریاضی کشور به شرح زیر است:

۱) علیرضا بیگدلی
۲) حسام حمیدی تهرانی
۳) آرش حسیبی
۴) امیراعلم غضنفریان
۵) بهزاد نظری
۶) محمدعلی خجسته‌پور
۷) محمدرضا استادعلی‌دهقی
۷) افشین نوابی
۸) علیرضا کاظمی‌پور
۸) مجید قادر
*** ۸) غلامرضا محمدخانی**
۹) افشین زهتاب‌آذری
۱۰) رسول حاجی‌زاده

شش نفر اول جهت اعزام به بیست ونهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی به‌کشور استرالیا اعزام خواهند شد و از میان این شش نفر دانش‌آموزان سال چهارم بعد ازقبولی در امتحانات نهایی می‌توانند بدون کنکور در یکی از رشته‌های ریاضی - فیزیك، ادامهٔ تحصیل دهند. کلیه این سیزده نفراز بورس تحصیلی بنیاد البرز استفاده خواهندکرد.

---

* در اعلام قبلی نتایج، اسم ایشان ازقلم افتاده بود.

مسائل شماره ۱۷

تهیه و تنظیم: دکتر حسین ذاکری

۱ـ (المپیاد ۱۹۵۹) ثابت کنید که به ازاء هرعدد طبیعی n کسر $\frac{21n+4}{14n+3}$ تحویل ناپذیر است. آیا بـه ازاء عدد طبیعی n کسر

$$\frac{3\times 7^n+21n+4}{2\times 7^n+14n+3}$$

تحویل ناپذیر است؟ چرا؟

۲ـ (المپیاد ۱۹۶۱) معادله

$$\cos^n x-\sin^n x=1$$

را، که در آن n عدد طبیعی است، حل کنید.

۳ـ (المپیاد ۱۹۶۹) فرض مـی‌کنیم a_1 و ... و a_n اعداد حقیقی ثابت، x یك متغیر حقیقی بوده و

$$f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{1}{2}\cos(a_2+x)+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n+x)$$

ونیز $f(x_1)=f(x_2)=0$ باشد، ثابت کنید که عدد صحیحی مانند m هست که $x_2-x_1=m\pi$.

۴ـ فرض کنیم P_1 و ... و P_n اعداد اول متمایز بـاشند. ثابت کنید کـه $\log P_1$ و ... و $\log P_n$ روی میدان اعدادگـویا مستقل خطی است.

۵ـ (المپیاد ۱۹۷۶) فـرض کنیم $P_1(x)=x^2-2$ و به ازاء هر j، اگر $j\geqslant 2$، آنگاه $P_j(x)=P_1(P_{j-1}(x))$. نشان دهید ریشه‌هـای معادلـهٔ $P_n(x)=x$ همگـی حقیقی و متمایزند.

۶ـ فرض می‌کنیم:

$$a=2\sqrt{1}+2\sqrt{3}+2\sqrt{5}+2\sqrt{7}+2\sqrt{9}$$

$$b=2\sqrt{2}+2\sqrt{4}+2\sqrt{6}+2\sqrt{8}+\sqrt{10}$$

کدامیك از دو عدد a و b بزرگتر است.

۷ـ حداکثر در چند نقطهٔ صحیح و متمایـز سه جملـه‌ای ax^2+bx+c، که درآن $a>100$، می‌تواند مقادیری نابیشتر از ۵۰ داشته باشد.

۸ـ در روی صفحه‌ای n خط رسم شده است. فرض کنیم هیچ دو تا ازآنها باهم موازی نیست و هیچ سه تا از یك نقطه نمی‌گذرند. ثابت کنید کـه این صفحه به $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ ناحیه تقسیم شده است.

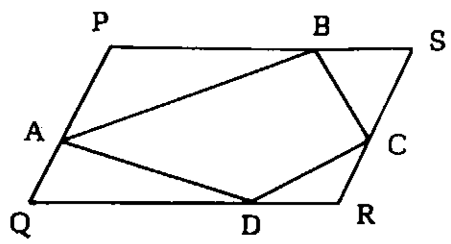
۹ـ فرض کنیم R یك حلقه، I و J و K ایده‌آلهـای R بوده و $I\subseteq J\cup K$. ثابت کنید $I\subseteq J$ یا $I\subseteq K$.

۱۰ـ فرض مـی‌کنیم A و B دو عضو یك گـروه بـاشند به قسمی که $ABA=BA^2B$، $A^3=1$، و برای بعضی مقادیر ممکن n، $B^{2n-1}=1$ (۱ عضو خنثای گروه است) ثابت کنید $B=1$.

مسائل ۱۱، ۱۲ و ۱۳ را آقـای جمالی از انگلستان فرستاده‌اند.

۱۱ـ (المپیاد مسکـو ۱۹۸۱) روی هـر یـك از اضلاع متوازی‌الاضلاع $PQRS$ نقطه‌ای را اختیار می‌کنیم به طوری کـه مساحت چهـار ضلعی حـاصل $ABCD$ نصف مساحت متوازی‌الاضلاع باشد (ش ۱). ثابت کنید که حداقل یکی از

اقطار این چهارضلعی موازی با یکی‌از اضلاع متوازی‌الاضلاع است.

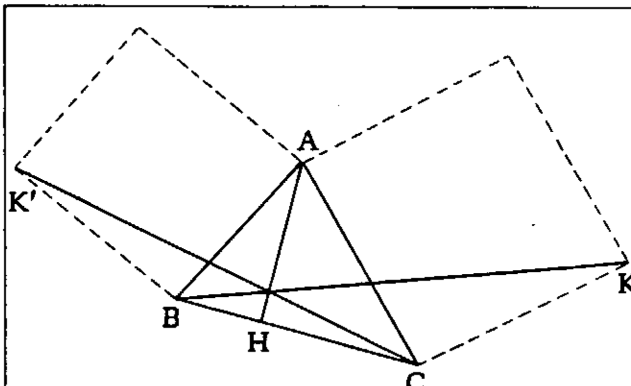


(ش ۱)

۱۲ــ (المپیاد بین‌المللی ۱۹۸۱) سه دایرهٔ متساوی به مراکز X و Y و Z و شعاع r در نقطهٔ P متقاطعند و هر یك بر دو ضلع مثلث ABC مماسند. ثابت‌کنیدکه مراکز دوایر محاطی و محیطی مثلث ABC و نقطهٔ P بر یك استقامتند.

۱۳ــ (مجارستان ۱۹۸۱) شش نقطهٔ متمایـز روی دایـره‌ای مفروضند. محل تلاقی ارتفاعهای مثلث تشکیل شده از هر سه نقطه از این نقاط را به محل تلاقی میانه‌هـای مثلث حادث از سه نقطهٔ دیگر وصل مـی‌کنیم. ثابت‌کنید ۲۰ قطعه خط حاصل از این عمل متقاربند.

۱۴ــ (فرستنده: فرزین سیاسی) در مثلث غیرمشخص ABC درصورتی‌کـه مربع‌های مرسوم روی اضلاع مجاور بـه قاعده رسم شود (ش ۲)، ارتفاع AH از محل تلاقی دوخط BK و $K'C$ می‌گذرد.



(ش ۲)

۱۵ــ (فرستنده: حسین یاسائی، دیپلمه ریاضی‌فیزیك از تبریز) بـه چند طریق می‌توان ۴۰ عددکتاب دو به دو متمایز را بین سه نفر تقسیم‌کرد به طوری‌که به هر نفرحداقل یك‌کتاب برسد؟

۱۶ــ اگر معادله:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x = 0$$

دارای ریشهٔ مثبت x_0 باشد، ثابت‌کنید معادله:

$$n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

دارای یك ریشه مثبت‌کوچکتر از x_0 می‌باشد.

۱۷ــ آیـا اعداد a و b و c موجودند به قسمی‌کـه داشته باشیم:

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} > \sqrt{c(ab+1)}$$

۱۸ــ به‌ازاء چه مقادیری‌از n، $n \in N$ تساوی زیر برقرار است:

$$\sqrt[n]{17\sqrt{5}+38}+\sqrt[n]{17\sqrt{5}-38}=20$$

۱۹ــ نشان دهید تابعی مـانند g اکیداً نزولی و پیوسته از $\mathcal{R}$ به $\mathcal{R}$ وجود دارد به طوری‌که:

$$(a \neq 1 \ \text{و}\ a > 0)\ g(g(x)) = ax+b$$

اما چنین تابع g با خاصیت $(C \neq 0)\ g(g(x)) = x + C$ وجود ندارد.

۲۰ــ فرض‌کنیم f و g دو تابع باشندکـه دارای مشتق دوم پیوسته برفاصله $[0, 1]$ می‌بـاشند. $K_f(x)$ را روی نمودار $y=f(x)$ در نقطـه $(x, f(x))$ بـه صورت زیـر تعریف می‌کنیم:

$$K_f(x) = f''(x)[1+(f'(x))^2]^{-\frac{3}{2}}$$

به همین ترتیب $K_g(x)$ تعریف می‌شود.

فرض‌کنیم:

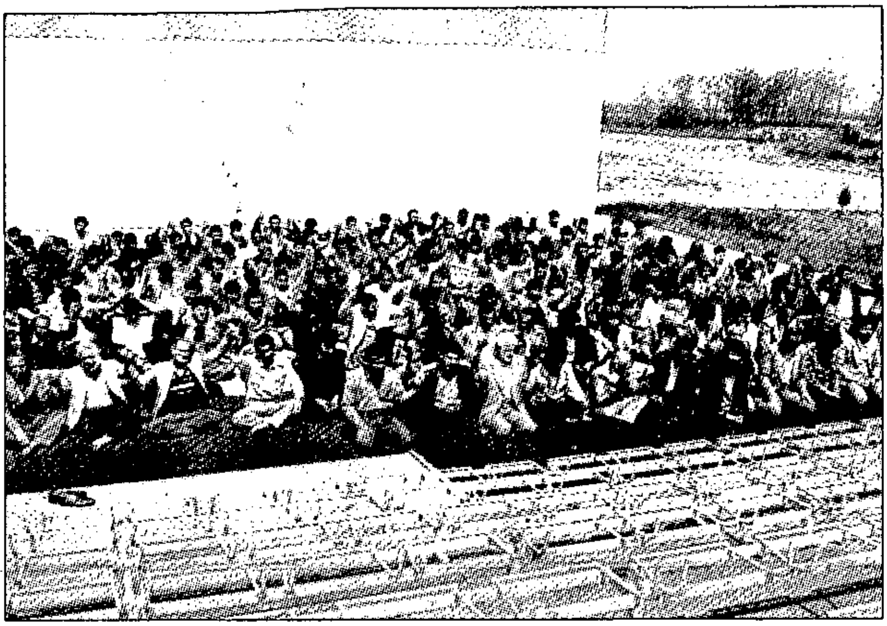
$$f'(0) = g'(0) = 0$$

و:

$$f(0) = g(0) = 0$$

و به ازاء هـر x از $[0, 1]$، $K_g(x) \geqslant K_f(x)$ ثابت‌کنید به ازاء هر x از $[0, 1]$، $g(x) \geqslant f(x)$.

گزارش پنجمین مسابقهٔ ریاضی کشور در گیلان



میرزا جلیلی

هوای شمال همیشه روح‌پرور و دل‌انگیز است اما در فصل بهار چیز دیگری است باران فروردین‌ماه هوای ساحل زیبا کنار را مطبوع و دلپذیر ساخته بود. امواج دریا چون همیشه جوشان و خروشان بیت زیر را در خاطره‌ها زنده می‌کرد:

موجیم که آسودگی ما، عدم ماست
ما زنده به آنیم که آرام نگیریم

دانش‌آموزان ممتاز ریاضی کشور با همان جوش و خروش امواج در تکاپو و فعالیت بودند شوق و علاقه به ریاضی و مسابقه در وجودآنها موج می‌زد. باوجود وضع خاص‌کشور و مسألهٔ بمباران شهرها باز شادی و هلهلهٔ رقابت در مسابقه سراپای‌آنها را فراگرفته بود. آری دانش‌آموزان ممتاز ریاضی‌کشور که سرفراز و سربلند از مسابقه استانی بیرون آمده بودند در ساحل قشنگ زیبا کنار گردهم‌آمدند تا دلیرانه در مسابقه ریاضی کشوری شرکت‌کنند و با دانش‌آموزان باهوش و ریاضی خوان کشور به مبارزه برخیزند.

شرکت دانش‌آموزان ممتاز ریاضی ایران در مسابقهٔ المپیاد ریاضی کوبا در سال گذشته به مسابقه امسال حال و هوای خاص داده بود.

در سال جاری در مسابقات استانی کشور در حدود ۲۵۰۰ نفر دانش‌آموز ممتاز سالهای سوم وچهارم ریاضی‌شرکت کرده بودندکه از میان این عده‌کمیته برگزاری مسابقهٔ ریاضی‌کشور، از روی امتیازات‌کسب شده ۱۳۸ نفر را انتخاب کرده بود (امسال برای اولین‌بار دانش‌ـ آموزان سال سوم ریاضی نیز در مسابقه شرکت‌کرده‌اند).

مسابقه ریاضی‌کشور همه ساله همزمان با برگزاری‌کنفرانس ریاضی ایران در فاصلهٔ ۱۱ــ۸ فروردین‌ماه درمحل‌کنفرانس انجام می‌گرفت. امسال به علت وضع خاص‌کشور انجام این مسابقه به تأخیر افتاد ودر روزهای اول‌ودوم اردیبهشت‌ماه درگیلان برگزار گردید و تجربیات تازه‌ای به همراه‌آورد.

محل انجام مسابقه با تدبیر و همفکری برادران دکتر حدادعادل معاونت محترم وزیر ورئیس سازمان پژوهش‌وبرنامه‌ریزی آموزشی و دکتر نجفی عضو هیأت علمی دانشگاه و معاونت محترم صدا و سیمای جمهوری اسلامی در محل تابستانی صدا و سیما در زیبا کنار درنظرگرفته شده بود.

این مجتمع هم اکنون محل برگزاری اردوها وکنفرانسهای‌آموزشی‌وعلمی صدا و سیما می‌باشد.

محل خواب و اقامت دانش‌آموزان بسیار مناسب وکیفیت غذا هم خوب بود همه دانش‌آموزان و دبیران همراه از اینکه به دانش و دانش‌آموز و دبیر،بها داده شده بود سپاسگزار و ممنون بودند.

پس‌از انتخاب ۱۳۸ نفر دانش‌آموز برای مسابقه‌نهائی، اسامی‌آنهادر روزنامه درج گردید و در ۲۲ فروردین‌ماه جاری طی تلفن‌گرام‌هائی به استانها اطلاع داده شدکه مسابقه‌نهایی در روزهای اول و

دوم اردیبهشت‌ماه در استان گیلان برگزار می‌گردد.

بعدازظهر روز چهارشنبه ۶۷/۱/۳۱ تقریباً همه دانش‌آموزان ممتاز کشور به محل اردو وارد شده و ثبت‌نام کرده بودند. بعضی از ادارات کل آموزش و پرورش راننده و ماشین در اختیار دانش‌آموزان و دبیر همراه قرار داده بودند که این اقدام در رفاه‌حال دانش‌آموزان و آسایش خیال آنها بسیار مؤثر بود. جا دارد ازمسئولین استانهائی که وسیلهٔ نقلیه دراختیار دانش‌آموزان خود قرار داده‌اند قدردانی‌شود. انشاءالله در سالهای آینده این مسأله تعمیم پیدا نماید. در این زمینه می‌توان به طور منطقه‌ای هماهنگی کرد که هر دو یا سه استان مجاور بتوانند با یك وسیله نقلیه به محل مسابقه اعزام شوند.

از ۱۳۸ نفر دانش‌آموز انتخاب شده ۱۳۳ نفر در مسابقهٔ نهائی شرکت‌کردند که ۱۲ نفرآنها دختر و بقیه پسر بودند. ۷۰ نفر از این دانش‌آموزان از استان تهران انتخاب شده بود.

شنیده می‌شدکه بعضی از دبیرستانهای کشور، مسابقه ریاضی را جدی گرفته و دبیران کم‌وبیش در این زمینه با دانش‌آموزان کارکرده‌اند. امید است که این رقابت صحیح و ارزنده بین دبیرستانها گسترش پیدا نماید و سال به سال دانش‌آموزان ورزیده‌تری که نماینده توان علمی استان خود هستند به مسابقات نهایی معرفی گردند.

صبح روز پنجشنبه ۶۷/۲/۱ مراسم افتتاحیه مسابقه برگزار شد. دراین جلسه ابتدا آیاتی ازکلام‌الله مجید قرائت گردید و بعد برادر پورقاسمی مدیر کل آموزش‌و پرورش گیلان ضمن خوش‌آمدگزارشی از وضع رشته ریاضی در این استان و آمار دانش‌آموزان ارائه داد.

در این جلسه برادر دکتر حدادعادل، سخنانی به شرح زیر ایرادکردند:

در همه تمدنهای بزرگ مثل مصر، یونان، بین‌النهرین و دورهٔ اسلامی، که در گذشته درخشیده‌اند علم ریاضی نیز با آن تمدنها در خشش و تلؤلؤ خاص داشته است. همراه با شهرت و آوازه‌آن تمدن، ریاضی‌دانان نامی برخاسته‌اندکه به‌اعتبار این تمدنها افزوده‌اند. در تمدن غرب‌نیز ریاضی‌جایگاه والائی دارد و ریاضیدانان در تجلی تمدن فعلی کمکهای شایانی کرده‌اند. بنابراین لازم است جمهوری اسلامی ایران نیز به ریاضی و ریاضی خوان بها دهد و نوجوانان را به ادامه تحصیل در این رشته تشویق نماید. هدف از انجام این مسابقه و انتشار مجلهٔ رشد ریاضی درحقیقت در همین راستا می‌باشد.

برادر دکتر نجفی وزیر اسبق فرهنگ‌و آموزش عالی طی سخنانی بیان نمودند: ریاضیات موتورصنعت وتکنولوژی امروز است اگر بخواهیم صنعت و تکنولوژی درکشور ما راه افتاده و پیشرفت‌کند باید موتورآنراکه‌ریاضی‌است‌روشن‌نگهداریم. برای رهائی از هر نوع وابستگی صنعتی لازم است ریاضی درکشور اسلامی ما گسترش پیدا نماید و رشته‌های مهندسی با استفاده از دانش‌آموزان با هوش رشته ریاضی در زمینه‌های مختلف تکنولوژی به تحقیق بپردازند وکشور را از صنعت شرق و غرب بی‌نیاز سازند. ایشان ادامه دادند که امروزکمتر قسمتی از ریاضی وجود داردکه در صنعت و تکنولوژی کاربرد نداشته باشد. حتی خود مبتکرین و مکتشفین نظریه‌های جدید ریاضی، در شروع، باورشان‌نمی‌آمدکه این نظریه‌های جدیدی‌که‌یافته‌اند روزی به‌این گستردگی در صنعت به کار برده شود.

ساعت ۳ بعدازظهر روز پنجشنبه اول اردیبهشت‌ماه اولین دوره مسابقه در قسمت پذیرش مجتمع برگزارگردید و دور دوم مسابقه در ساعت ۹ صبح روز جمعه دوم اردیبهشت انجام‌گرفت.

بقیه در صفحه ۷۴

معرفی

نشریات بین‌المللی ریاضی

Order From:
Mathematical Association of America
1529 Eighteenth St, NW
Washington, DC 20036

دکتر محمدحسن بیژن‌زاده

مجله ماهنامه ریاضی از انتشارات انجمن ریاضی‌آمریکا است که تقریباً هر ماه منتشر می‌شود. این مجله که قدمتی به اندازه تاریخ تأسیس انجمن ریاضی‌آمریکا (یکصد سال) دارد ازجمله کثیرالانتشارترین نشریات این انجمن به شمار می‌آید. این مجله بر پایه‌ای انتشار می‌یابد تا مشوقی برای بسط و گسترش ریاضیات بویژه ریاضیات در سطح کالج (دبیرستانی و پیش دانشگاهی) باشد. نظر هیأت تحریریه مجله مبین آن است که مقالاتی مورد پذیرش قرار می‌گیرند که جنبه توصیفی داشته و کاربرد ریاضیات در زندگی واقعی را مورد توجه قرار دهند و به علاوه جاذبه گسترده‌ای در بین خوانندگان داشته باشند. مقالات هر شماره تحت عنوان‌های ذیل دسته‌بندی می‌شوند:

(آ) مقالات اصلی
(ب) یادداشتهای کوتاه
(ج) آموزش ریاضیات
(د) مسائل و حل‌آنها
(ه) بررسی کتابهای جدید
(و) بررسی تلگرافی
(ز) نامه‌هایی به سردبیر

در شماره اخیری (اکتبر ۱۹۸۷) از آن‌که به دست ما رسیده است مقالات ذیل درج شده‌اند.

مقالات اصلی : به صدا درآوردن همدسته‌ها[1]
مسابقه ریاضی پوتنم[2]

آموزش ریاضی : استفاده از حلقه‌گر[3] ها در آموزش جبر مدرن؛
استفاده از تعویض ساز[4] ها در آموزش ساده بودن A_5،
گزارش کمیته برنامه پیش دانشگاهی ریاضیات.

یادداشتهای کوتاه: جاذبیت ریاضیات؛
تعمیم قضیه گولدباخ ـ اشنیرلمن[5]؛
یادداشتی بر مسئله $3x+1$؛

مسائل و حل آنها: مسائل مقدماتی و حل‌آنها؛

مسائل : مسائل پیشرفته و حل‌آنها

بررسی کتب : جبر مجرد تألیف آی. ان. هرشتاین[6]
جاذبیت آمار، ویراستاری شده توسط ریچارد جی‌بروك[7]

لازم به یادآوری است که کتابخانه سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی این مجله را آبونمان می‌باشد و علاقمندان می‌توانند از امکانات این کتابخانه استفاده کنند.

۱) Cosets
۲) Putnam
۳) Ringer
۴) Commutators
۵) Goldbach – Schuirelman
۶) I. N. Herstein
۷) R. J. Brook

حل مسائل مرحله نهایی پنجمین دورهٔ مسابقات ریاضی دانش‌آموزان کشور

جلسه بعدازظهر

۱ـ اعداد صحیح و مثبت a و b و c را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\begin{cases} a^۳-b^۳-c^۳=۳abc \\ a^۲=۲(b+c) \end{cases}$$

حل. از رابطهٔ اول داریم:

$$۰=a^۳-b^۳-c^۳-۳abc=(a-b-c)$$
$$(a^۲+b^۲+c^۲+ab-bc+ca)$$

ولی

$$(a^۲+b^۲+c^۲+ab-bc+ca)$$
$$=\frac{۱}{۲}[(a+b)^۲+(b-c)^۲+(c+a)^۲]$$

پس پرانتز دوم فقط‌وفقط وقتی صفر است که

$$b=-c \text{ ، } a=b$$

و $c=a$ که با توجه به مثبت بودن a و b و c غیر ممکن است. پس داریم

$$\begin{cases} a=b+c \\ a^۲=۲(b+c) \end{cases}$$

ولذا $a^۲=۲a$ یعنی $a=۲$، پس $b+c=۲$ نتیجه می‌شود $b=c=۱$.

۲ـ فرض کنید تابع حقیقی در فاصلهٔ $[۰,\infty]$ تعریف شده و f' و f'' در این فاصله موجود باشند و داشته باشیم:

$$f''(x)=\frac{۱}{x^۲+f'(x)^۲+۱} \text{ ؛ } f(۰)=f'(۰)=۰$$

ثابت کنید تابع g با ضابطهٔ

$$g(۰)=۰ \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{f(x)}{x}\ (x>۰)$$

کراندار است.

حل. چون f' و f'' پیوسته است پس انتگرالپذیرند، لهذا داریم:

$$\int_۰^x f''(t)dt=\int_۰^x \frac{dt}{t^۲+f'(t)^۲+۱}$$
$$\leqslant \int_۰^x \frac{dt}{t^۲+۱}$$
$$=\text{Arc tan } t\Big|_۰^x=\text{Arc tan } x$$

پس

$$f'(x)-f'(۰)\leqslant \text{Arc tan } x$$

بالنتیجه

$$\int_۰^x f'(t)dt\leqslant\int_۰^x \text{Arc tan } t\, dt$$
$$=x\text{Arc tan } x-\frac{۱}{۲}\ln(۱+x^۲)$$

یعنی

$$f(x) \leqslant x \operatorname{Arc\,tan} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

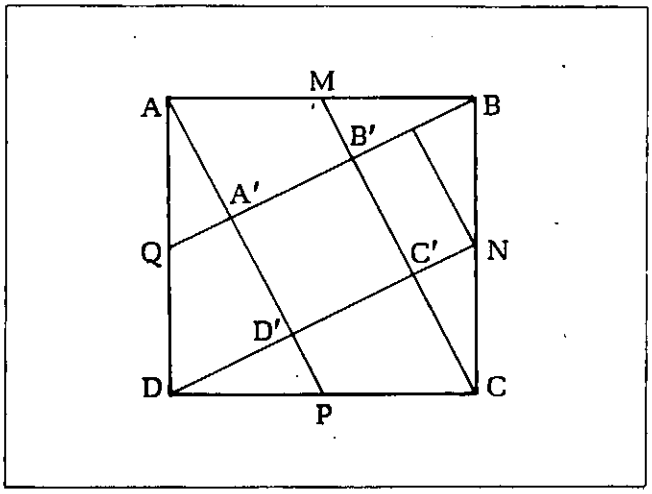
و بالنتیجه

$$\frac{f(x)}{x} \leqslant \operatorname{Arc\,tan} x - \frac{1}{2x} \ln(1+x^2)$$

حد طرف‌دوم در بینهایت برابر $\frac{\pi}{2}$ است پس عددی مانند A است‌که بر بازه $[A, \infty)$، تابع g از بالاکراندار است. از پیوستگی g بر $[0, A]$ نتیجه می‌شود‌که g براین بازه‌هم از بالاکراندار است. چون g نامنفی است پس بر $[0, \infty)$ کراندار است.

تبصره. می‌توان ثابت کرد‌که g صعودی است لهذا $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ موجود است.

۳ـ در شکل زیر نقاط M، N، P و Q به ترتیب در وسط اضلاع مربع $ABCD$ قرار دارند. ثابت کنید مقدار مساحت چهارضلعی $A'B'C'D'$ برابر $\frac{1}{5}$ مساحت مربع $ABCD$ است.



حل. بسهولت دیده می‌شود‌که چهارضلعی $A'B'C'D'$ مربع است و $A'B' = B'B$ و $MB' = \frac{1}{2} AA'$. واضح است‌که مثلثهای MBC، AQB، ADP و DCN برابرند. لهذا،

$$S_{ABCD} = 4 \times S_{MBC} - 4S_{MBB'} + S_{A'B'C'D'}$$

واضح است‌که مساحت مثلث MBB' برابر $\frac{1}{4}$ مساحت مربع $A'B'C'D'$ است پس

$$S_{ABCD} = 4 \times S_{MBC}$$

همچنین بدیهی است‌که

$$S_{MBC} = 5 S_{MBB'}$$

پس

$$S_{ABCD} = 4 \times 5 S_{MBB'} = 5 S_{A'B'C'D'}$$

جلسه صبح

۱ـ مطلوبست محاسبهٔ عبارت

$$A = \sin 1^\circ \times \sin 2^\circ \times \cdots \times \sin 89^\circ$$

حل. داریم:

$$\sin x \sin(90^\circ - x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

بنابراین:

$$A = (\sin 1^\circ \sin 89^\circ)(\sin 2^\circ \sin 88^\circ) \cdots (\sin 44^\circ \sin 46^\circ) \sin 45^\circ$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2^{45}} (\sin 2^\circ \sin 4^\circ \cdots \sin 88^\circ)$$

به روش مشابه خواهیم داشت:

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2^{67}} (\sin 4^\circ \sin 8^\circ \sin 12^\circ \cdots \sin 88^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2^{67}} (\sin 4^\circ \sin 56^\circ \sin 64^\circ)(\sin 8^\circ \sin 52^\circ \sin 68^\circ) \cdots (\sin 28^\circ \sin 32^\circ \sin 88^\circ) \cdot \sin 60^\circ$$

با استفاده از رابطهٔ:

$$\sin x \sin(60^\circ - x) \sin(60^\circ + x) = \frac{1}{4} \sin 3x$$

می‌توان نوشت

$$A=\frac{\sqrt{2}}{2^{62}}\cdot\frac{1}{4^{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin 12^\circ\sin 24^\circ\cdots\sin 84^\circ)$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2^{82}}\,(\sin 12^\circ\sin 48^\circ\sin 72^\circ)$$

$$(\sin 24^\circ\sin 36^\circ\sin 84^\circ)\sin 60^\circ$$

$$A=\frac{\sqrt{6}}{2^{82}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{4^{2}}\,(\sin 36^\circ\cdot\sin 72^\circ)$$

یا به عبارتی

$$A=\frac{\sqrt{18}}{2^{87}}\sin 36^\circ\sin 72^\circ \qquad (*)$$

البته می‌توان $\sin 36^\circ$ و $\sin 72^\circ$ را نیز محاسبه کرد و مقدار عددی آنها را در رابطهٔ (*) قرار داد.

۲ـ تابع پیوسته $f:\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ را چنان تعیین کنید که به ازاء هر x و $y\in\mathcal{R}$ داشته باشیم:

$$f(x^2-y^2)=f(x)^2-f(y)^2$$

حل. با فرض $x=y$ و $y=0$ و $x=0$ داریم:

$$f(0)=0 \quad \text{و} \quad f(x^2)=f(x)^2$$

و

$$f(-y^2)=-f(y)^2$$

فرض کنید u و v دو عدد صحیح باشد که $u>0$ و $v<0$.
با فرض $x^2=u$ و $-y^2=v$ داریم:

$$f(u+v)=f(u)+f(v)$$

حال اگر $u\geqslant 0$، آنگاه داریم:

$$u=2u-u$$

پس:

$$f(u)=f(2u)-f(u)$$

یعنی:

$$f(2u)=2f(u)$$

به استقراء دیده می‌شود که:

$$f(nu)=nf(u)$$

واضح است که رابطهٔ اخیر به‌ازاء $u<0$ نیز برقرار است.
از اینجا به سهولت نتیجه می‌شود که:

$$f(x)=ax$$

که $a=0$ یا $a=1$ می‌باشد.

۳ـ چهار خط متمایز L_1، L_2، L_3 و L_4 را در فضا در نظر بگیرید که هیچ سه‌تای آنها در یك صفحه قرار نداشته باشند. فرض کنید محل تقاطع خطوط L_1 و L_2 نقطهٔ A و محل تقاطع خطوط L_2 و L_3 نقطهٔ B و محل تقاطع خطوط L_3 و L_4 نقطهٔ C باشند. حداقل و حداکثر تعداد خطوطی را که در فضا هر چهارخط فوق را قطع می‌نماید تعیین کرده و ادعای خود را ثابت کنید.

حل. اگر سه نقطه برهم منطبق باشند همواره بینهایت خط با خاصیت مورد نظر قابل رسم است (از هر خطی که از این نقطه بگذرد جواب است). به همین ترتیب درحالتی که دو نقطه برهم منطبق باشند همواره بینهایت خط جواب مسأله است. اگر A، B و C متمایز باشند، خطی که از A به C وصل می‌شود حداقل دارای این خاصیت است.

حال برای تعیین تعداد حداکثر خطوط، صفحهٔ مار بر L_1 و L_2 را با P_1 و مار بر L_3 و L_4 را با P_2 نمایش می‌دهیم. چون B به هر دو صفحه تعلق دارد پس یا برهم منطبق‌اند و یا فصل مشترکی چون L دارند. شرط اول امکان ندارد چون در آن صورت چهار خط در یك صفحه قرار می‌گیرند که خلاف فرض است. اگر L با خطوط L_1 و L_4 موازی نباشد، آنگاه L نیز یك جواب مسأله است. اگر L با یکی از این دو خط موازی باشد آنگاه L نمی‌تواند جواب مسأله باشد. از طرف دیگر هیچ خط دیگری جز خط L و خطی که A و C را به هم وصل می‌کند نمی‌تواند هر چهار خط را قطع نماید. زیرا اگر چنین خطی از A نگذرد در صفحه P_1 واقع است. در این صورت اگر محل تقاطع این خط با خط L_3 نقطهٔ B' باشد، چون B متعلق به P_1 است و B' به P_1 تعلق دارد پس دو نقطهٔ خط L_3 روی P_1 و در نتیجه L_1، L_2 و L_3 در یك صفحه‌اند که خلاف فرض است. به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که این خط از C نیز باید بگذرد، پس خط مفروض همان AC است (و یا فصل مشترك P_1 و P_2 در حالتی که B بر B' منطبق باشد) پس بیش‌از دو خط با شرایط مفروض قابل حصول نیست.

بقیه از صفحهٔ ۳۷

$$= d'x + d'x = \circ \implies d'x = \circ$$

$$\implies (d^{\text{۲}} + e^{\text{۲}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} x = \circ$$

و اگر $d^{\text{۲}} + e^{\text{۲}} = \circ$ آنگاه مدار Q شامل ماتریس $\begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & f \end{bmatrix}$ است که در این حالت:

$$[x \ y \ \text{۱}] \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \text{۱} \end{bmatrix} = f = \circ$$

یعنی اگر $f = \circ$ باشد جواب یك نقطه است و اگر $f \neq \circ$ باشد معادله جواب ندارد.

مثال. معادله درجه دوم:

$$x^{\text{۲}} + \text{۲}xy + y^{\text{۲}} + \text{۴}x - \text{۲}y - \text{۹} = \circ$$

را در نظر بگیرید داریم:

$$Q = \begin{bmatrix} \text{۱} & \text{۱} & \text{۲} \\ \text{۱} & \text{۱} & -\text{۱} \\ \text{۲} & -\text{۱} & -\text{۹} \end{bmatrix} \implies \tau(Q) = \text{۲}$$

و

$$\delta(Q) = \circ \quad \text{و} \quad \Delta(Q) = -\text{۲}$$

بنابراین $\delta(Q) = \circ$ پس‌از حالت دوم استفاده می‌کنیم و فرم استاندارد آن عبارت است از:

$$\text{۲}x^{\text{۲}} + \frac{\text{۹}}{\text{۲}} y = \circ$$

که معادله یك سهمی است.

منابع

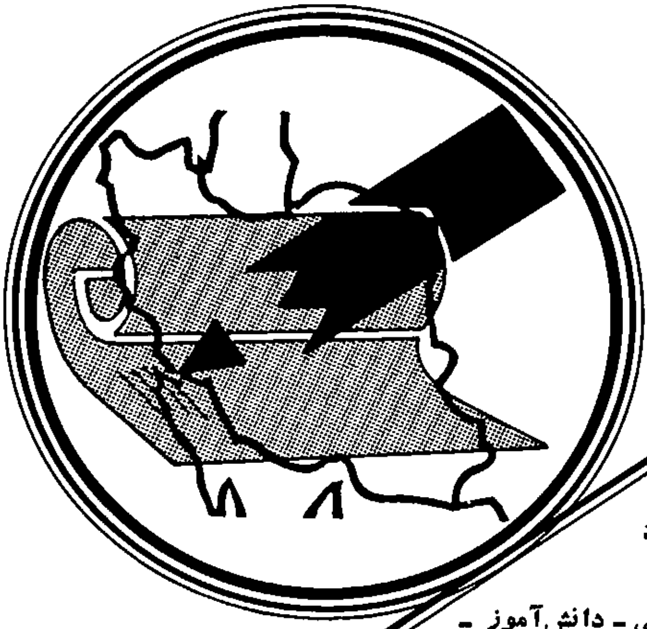
1. Dieudonné J., and J. B. Carrell, Invariant Theory, Old and New Academic Press, New York 1971.
2. Fogarty, J. , Invariant Theory, W. A. Benjamin, New York 1969.
3. Klein, F., Elementary Geometry from an Advanced-standpoint Geometry, Dover, New York, 1945.
4. Frank, A. M. M. D. Grosshens, (P. P) 407 – 413), 1981.

بقیه از صفحهٔ ۳

اول این مسابقه جهت شرکت در بیست و نهمین المپیاد بین المللی ریاضی به کشور استرالیا اعزام خواهند شد. بدون شك، انجام این امور یکی از اقدامات مؤثر جهت تشویق دانش‌آموزان و علاقه‌مندان به دانش ریاضی و یکی از عوامل جلوگیری از افت ریاضی است. با ایجاد رقابت سالم بین مراکز و مناطق مختلف استانها استعدادهای درخشان شناخته شده و جو سالمی برای ادامه این رقابت‌ها ایجاد می‌گردد. بعلاوه، ارتباط با مراکز علمی سالم جهان لازمه یك برنامه‌ریزی دقیق آموزشی و شناخت دقیق واقعیتها برای کشور ما است. استفاده از تجربیات دیگران و تلفیق و تطبیق آنها با آرمانهای اسلامی جامعه انقلابی، رشد و شتاب بیشتری به پیشرفتهای علمی ما القاء می‌کند.

خبر مسرت‌بخش دیگری که در این مصاحبه مطبوعاتی اعلام گردید ایجاد باشگاه ریاضی است که در واقع مرکزی برای تبادل افکار ریاضی جوان خواهد بود. امید است با همت دست‌اندرکاران ریاضی کشور و با مساعدت و یاری وزارت آموزش و پرورش ایجاد این باشگاه جامعه عمل پوشد. ایجاد یك چنین مرکزی در کنار انجمن ریاضی ایران کلیهٔ ریاضی‌کاران و ریاضی‌دانان را در کنارهم قرار داده تا با همکاری و هماهنگی یکدیگر تحولی در جامعه ریاضی ایران به وجود آورند.

سردبیر



نامه‌ها

برادر امید ظاهری ـ دیپلمه ـ اصفهان

از ارسال حل یك مسأله و صورت و حل یك مسأله دیگر تشکر می‌نمائیم. این مسائل به بخش مسائل ارجاع گردید. آدرس یکی از مجلات در بخش نامه‌های شماره ۱۵ آمده است. قرار است از این به بعد کلیه مجلات خارجی سازمان پژوهش معرفی گردند.

برادر سعید مروت ـ دانشجو ـ مشهد

در روش بخشپذیری شما بر ۷، هیچگاه به یك عدد یك رقمی نمی‌رسیم. ضمناً بایستی در حالت کلی ثابت کنید که:

$$\overline{ab} \equiv ۰ (\mathrm{mod}\, ۷)$$

اگر و فقط اگر:

$$a + ۵b \equiv ۰ (\mathrm{mod}\, ۷)$$

برادر محمد رهبر ـ دانشجو ـ تهران

در ارسال محاسبه مجموع A در مسأله شماره ۱۳ رشد شماره ۱۳ ـ ۱۴ در دسته‌بندی که به عمل آوردید به جای n (کوچك)، N به کار برده‌اید که راه‌حل مسأله را مغشوش کرده است.

برادر علی‌اصغر گرجی ـ دانش‌آموز ـ تهران

بطوری که اشاره کرده‌اید جواب شما فقط به صورت حدس بیان شده است و حدس جایگزین استدلال نیست.

برادر مهرداد جلالیان ـ دانش‌آموز ـ تهران

از ارسال یك مقاله تشکر می‌نمائیم ولی به طوری که می‌دانید روش ارسالی شما در واقع روشی است که در حالت کلی برای حل مسائل به کار می‌رود.

برادر سورنا نظرباغی ـ دانش‌آموز ـ ارومیه

از اظهار لطف شما نسبت به مجله تشکر می‌نمائیم. اشکال شما به قضیه ۱.۴.۶ هندسه سال‌سوم آموزش متوسطه ـ ریاضی فیزیك به گروه ریاضی ارجاع گردید.

برادر کامبیز اخلاصی ـ دانش‌آموز ـ تهران

به‌هرحال مسأله‌آقای علی سواری برای حل در اختیار خوانندگان قرار گرفته است. چاپ دستور استرلینگ متناسب با اهداف مجله نیست. یك صورت آن چنین است:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{۲\pi n}\,(n/e)^n} = ۱$$

برهان آنرا می‌توانید از کتابهای ریاضیات عمومی پیدا کنید.

برادر مسعود رجبی ـ دانشجو ـ تهران

از اظهار لطف و محبت شما تشکر می‌نمائیم. حل مسائل ارسالی شما به بخش مسائل ارجاع گردید.

برادر رضا پورعظیم ـ دانش‌آموز ـ تبریز

از اظهار لطف شما نسبت به مجله تشکر می‌نمائیم. بدون شك هر راه‌حلی که روش

درستی برای یك محاسبه ریاضی به دست دهد، منطقی است. مسأله ارسالی شما به بخش مسائل ارجاع گردید.

برادر ایرج تقی‌زاده ـ تهران

در برهانی که برای محاسبه جواب معادلهٔ

$$y^3=x^2+2$$

ارائه داده‌اید مشکلاتی وجود دارد از جمله اینکه اگر

$$U=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$$

و

$$V=q_1^{\beta_1}\cdots q_n^{\beta_n}$$

باشد حالتهای زیادی پیش می‌آید که مورد بررسی قرار نگرفته است. برای اطلاع خوانندگان ذیلاً تاریخچه مختصری از این معادله را می‌آوریم:

صورت کلی این معادلات چنین است

$$y^3=x^2+k$$

که k عددی است طبیعی. این معادله به معادله باشه معروف است. در این مورد مقالات فراوانی نوشته است.

اولین فردی که نتیجه قابل ملاحظه‌ای در مورد این معادلات ارائه داد باشه بود. روش او این بود که اگر (a, b) یك جواب گویای معادله فوق باشد فرض می‌کنیم:

$$y=b-\lambda x \quad \text{و} \quad x=a-X ،$$

λ را چنان تعیین می‌کنیم که ضریب X در معادله جدید صفر شود. فرما ادعا کرده است که معادله:

$$y^3=x^2+2$$

جوابی غیر از (۳ ,۵ ±) ندارد ولی راه حلی ارائه نداد. اویلر در سال ۱۷۳۸ به روش نزول نامتناهی برای برخی از انواع آن برهانهایی ارائه داد. البته برهان اویلر برای ادعای فوق نادرست بود ولی تا سال ۱۹۷۵ مقبول همه بود که در این سال پی بر آن برهان خرده گرفت و برای اولین بار برهان درستی برادعای فرما ارائه داد. موردل ثابت کرده است که معادله:

$$y^3=x^2+k$$

فقط تعداد متناهی ریشه دارد یکی از انواع این نوع معادلات در کتاب نظریه اعداد ترجمه‌دکتر آدینه محمد نارنجانی و نیز در کتاب تئوری اعداد، تألیف دکتر غلامحسین مصاحب آمده است.

برادر امیر محمد اجتهادی ـ دانش‌آموز ـ تهران

روش محاسبه جمله عمومی دنباله فیبوناتچی در شماره مسلسل ۱۲ رشد آموزش ریاضی آمده است. این روش را می‌توان برای محاسبه جمله عمومی بعضی از رشته‌های تراجعی خطی به کار برد.

برادر سید محمد ظهیری ـ مشهد

با عرض سلام متقابل از اینکه راهنمائیهای مجله موجب ناراحتی شما گردید متأسفیم. پاسخ نامه خیلی مفصل شما را بطور کامل و بطور خصوصی ارسال خواهیم داشت.

خواهر مهناز کوشا ـ دانشجو پزشکی

ابتدا لازم به ذکر است که ما به کلیه نامه‌ها پاسخ می‌دهیم. برای ما روشن نیست که شما چگونه از رابطهٔ

$$(x^3+y^3)^{1/3}=z$$

به رابطهٔ

$$z=\frac{1}{(x^3+y^3)^3} \;!!$$

رسیده‌اید مسلماً این یك نتیجه‌گیری غلطی است.

برادر حمیدرضا ـ دانشجو ریاضی ـ مشهد

متأسفانه شما نقیض جملهٔ «به ازاء عدد دلخواه عدد K صحیح T را ...» را جملهٔ «به ازاء هر K و هر T ...» نوشته‌اید که مسلماً درست نیست و این درشروع برهان است.

برادر عارف شاه‌منصوریان ـ رامسر

از اظهار لطف و محبت و قدردانی شما نسبت به مجله صمیمانه تشکر می‌نمائیم. متأسفانه در شرایط فعلی قادر نیستیم مجله را ماهانه منتشر سازیم. از ارسال حل دو مسأله از مسائل المپیاد ریاضی تشکر می‌نمائیم.

برادر ناصر بیگی ـ دانش‌آموز ـ تهران

با عرض سلام متقابل، واضح است که نگاشت

$$g: A \longrightarrow Q$$

در اثبات لم فوق خوش‌تعریف نیست اصولاً g یك تابع تعریف نمی‌کند.

برادر حسین‌مراد مومیوند ـ هنرجوی اتومکانیك ـ توسیرکان

مطلبی را که با تحمل زحمات زیادی به دست آورده‌اید، فرمول ساده‌ای برای محاسبه تعداد K عدد فرد می‌باشد که در همه کتابهای دبیرستانی و مقدماتی موجود است.

برادر جواد ترکمن ـ دانش‌آموز ـ تهران

با عرض سلام متقابل، ما برای ازدیاد

معلومات شما مطالعه مجلهٔ رشدآموزش ریاضی و سایر مجلات مشابه را توصیه می‌نمائیم. متأسفانه راه‌حل ارسالی شما برای محاسبه حجم چهاروجهی فاقد شکل است.

برادر محمد یعقوبی - گرگان

نامه شمادریافت شد ولی مطالب آن‌را به‌گونه‌ای نوشته بودیدکه به زحمت توانستیم آنرا بخوانیم وبعضی از سؤالات شما را بفهمیم. در مورد سؤال اول شما به اطلاع می‌رسانیم اصل پنجم هندسه اقلیدس این است‌که «از یك نقطه واقع درخارج یك‌خط فقط یك‌خط موازی‌با آن می‌توان رسم کرد.» حال اگر این اصل تبدیل به اصول دیگری مثلاً «نتوان خط موازی رسم‌کرد یا بینهایت خط می‌توان رسم کرد» شود هندسه‌های دیگری به دست می‌آورد. در مورد معادلهٔ فرما مسلماً حل‌شما نادرست است. شما گفته‌اید که اگر (x, y, z) جواب معادله:

$$x^n+y^n=z^n$$

باشد آنگاه در معادله:

$$x^{2n-1}+y^{2n-1}=z^{2n-1}$$

صدق می‌کند. ولی این برهان نادرست است.

برادر عبدالخالق - شیراز

با عرض سلام متقابل، نظر به اینکه قاعده ذهنی شما در مورد ضرب دوعدد برای ما روشن نیست، از اظهارنظر در مورد آن معذوریم.

برادر علی دارمی - اهواز

ضمن تشکرازارسال چند مسأله، مسائل شما به بخش مسائل ارجاع گردید ولی عموماً در مجله مسأله‌ای مورد استفاده قرار می‌گیردکه جنبه تازگی وطرح داشته باشد ومسائل تکراری ویا اقتباسی (بدون ذکر منبع) مفید نیستند.

برادرکیوان پژوتن - دانش‌آموز - تهران
برادر کیان شیخ‌بهایی - دانش‌آموز - زنجان

اولین شماره‌های مجله فعلاً نایاب است. برای تهیه بعضی‌از شماره‌ها می‌توانید با مرکز توزیع در تهران مکاتبه نمائید.

برادر کامبیز شعاری‌نژاد - دانش‌آموز - تهران

با عرض سلام متقابل ذیلاً پاسخ سؤالات شما را می‌دهیم:

۱) برای تهیه بعضی‌از شماره‌های قبلی می‌توانید به‌کتابفروشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درخیابان ایرانشهر مراجعه‌کنید.

۲) برای تهیه مجلات ریاضی‌خارجی، می‌توانیدآدرس بعضی‌ازآنها را ازگروه ریاضی دفترتحقیقات وبرنامه‌ریزی درسی (خیابان ایرانشهر شمالی)دریافت دارید.

۳) می‌توانید مقالات ترجمه یا تألیفی خود را با منابع کامل ارسال دارید. در مورد ترجمه اصل مقاله ارسال‌گردد.

۴) این مسأله قبلاً در مجله حل شده است.

برادر عباس انصاری‌آملی - دانش‌آموز - تهران

برای تهیه شماره‌های مختلف مجله به مراکز توزیع مراجعه فرمائید. متأسفانه مسأله ارسالی شما بدون ذکر منبع می‌باشد.

اسامی افرادی‌که حل بعضی‌از مسائل المپیاد ریاضی، مسائل چهارمین مسابقه ریاضی و یا حل بعضی‌از مسائل شماره ۱۳-۱۴ را فرستاده‌اند به شرح زیر می‌باشد:

کیوان پژوتن از تهران، مرتضی جوادزاده دانشجو از تهران، آرش یزدان‌بخش دانش‌آموز از تهران، حسین زاده‌مرشدنیك دانشجو از تهران، کاظم قنبری دانشجو از تهران، علی عیسی‌پور دانش‌آموز از تهران، آرتا صدرزاده دانش‌آموز از تهران، علی‌قلی ملاپور دانش‌آموز از تهران، محمودرضا ضیائی دانش‌آموز از تهران، بابك فهیمی دانشجو از تهران، بابك صالحیان دانشجو از تهران، فرید حسینی ازگرگان، حمیدرضا فنایی دانشجو از اصفهان، مجید ابراهیمی‌لسانی دانشجو ازکرج، علیرضا بیگدلی از قم، سید مهرداد جلالیان‌حسینی ازمشهد، اکبرغفارپوررهبر از تبریز، رضا ایرانپور دانش‌آموز از اصفهان، کیان شیخ‌بهایی دانش‌آموز از زنجان،زهرا ابیضی‌دانش‌آموز، امیرحسین دلیررویفرد از تهران، مهرداد مخاطب از تهران، حامد شاه‌حسینی دانش‌آموز از تهران.

بقیه از صفحهٔ ۶۵

تعداد سؤالات در هر نوبت ۳ سؤال و مدت هر امتحان نیز ۳ ساعت تعیین شده بود پس‌از پایان هرجلسه اوراق، شمارش و در پاکتهای مخصوص جا داده و تحویل برادر دکتر حدادعادل می گردید.

در حین انجام مسابقات، برادر دکتر حدادعادل در گردهمائی دبیران که همراه دانش‌آموزان آمده بودند شرکت کردند و در جریان آموزش ریاضی در سطح کشور قرار گرفتند دبیران مشکلات منطقه آموزشی خود بخصوص در رابطه با برنامه و کتاب مطرح می کردند وایشان تأکید نمودند که این مشکلات در تهران مورد بررسی و توجه قرار می‌گیرد.

مراسم اختتامیه، پس‌از اتمام مسابقه، روز جمعه با برگزاری نماز جماعت و حضور همهٔ شرکت کنندگان در هوای آزاد محوطه انجام پذیرفت، دراین مراسم دانش‌آموزان باهم دعای ماه مبارك رمضان و دعای وحدت خواندند و برای پیروزی رزمندگان اسلام دعا کردند. در این مراسم برادر دکتر حدادعادل از همهٔ‌دست اندرکاران مسابقه و دبیران و دانش‌آموزان تشکر کردند و به دانش‌آموزان یادآور شدند که مطالعه ریاضی برای شما لازم است ولی کافی نیست، شما باید در همهٔ شئونات جامعه اسلامی مطالعه و تحقیق کنید در امور دینی، اجتماعی و سیاسی اطلاعات کافی به‌دست آورید تافردا بتوانید فرد مؤثر و مفیدی برای جامعه اسلامی باشید. اگر فقط به خواندن ریاضی اکتفا کنید فردا ممکن است دیگران کار به دست گیرند و از شما به عنوان ابزار دست استفاده نمایند در نتیجه از فکر و مغز شما به طور کامل در اداره امور کشور استفاده نشود.

بعدازظهر روز جمعه دریا آرام و مجتمع ساحلی زیبا کنار نیزآرام بود زیرا دانش‌آموزان دسته دسته همانطورکه آمده بودند بلافاصله بعداز صرف نهار عازم شهرهای خود شدند تا پیام مسابقه ریاضی را به شهرهای خود ببرند و جوانان منطقه خود را به ادامهٔ تحصیل در رشته ریاضی تشویق نمایند. تصحیح اوراق امتحانی در تهران زیر نظر استادان دانشگاه، دبیران وکارشناسان دفتر تحقیقات انجام گرفت و شش نفر توسط کمیته مسابقه ریاضی کشور انتخاب شدند.

Content

Preface		3
Mathematicians of Islamic Era	Dr. M. Q. Vahidi	4
Beauty in Mathematics	Dr. M. H. Bijan - Zadeh	6
Obituary of G. Polya	Dr. A. R. Medgalchi	10
A Simple Method of Teaching Mathematics	Dr. A. Redjali	14
Mathematical Induction	E. Darabi	18
Convexity, Concavity	M. Nssiri	25
Investigation of Quadratic Equations	H. P. Masiha	32
A Functional Equation With Application to Number System	Dr. A. Chademan	38
Convex Functions	Dr. A. R. Medgalchi	42
Solutions of Some Problems Left Unsolved	Dj. Lalli	48
Solutions of Two Problems	H. Gayour	54
A Report on 19th Annual Mathematics Conference		58
Nashr - I Ryazy, A Mathematics Journal of Iran University Press	Dr. M. Q. Vahidi	59
Problems No. 17	Dr. H. Zakeri	62
A Report on 5th National Contest	M. Djalili	64
American Mathematical Monthly	Dr. M. H. Bijan - Zadeh	66
Solutions of Problems of 5th National Contest		67
Letters		71

Roshd, Magazine of Mathematical Education, Vol IV No. 17, Spring 1988 Mathematics Section, 274 BLDG-No. 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave., Tehran - Iran.

A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.

آیا شما مجلات رشد
مخصوص دبیران
را می‌خوانید؟

مجلات رشد تخصصی

هر سه ماه یکبار، برای استفاده دبیران و دانشجویان رشته‌های مختلف و دانش‌آموزان علاقمند دبیرستانها از سوی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزرات آموزش و پرورش منتشر می‌شود.