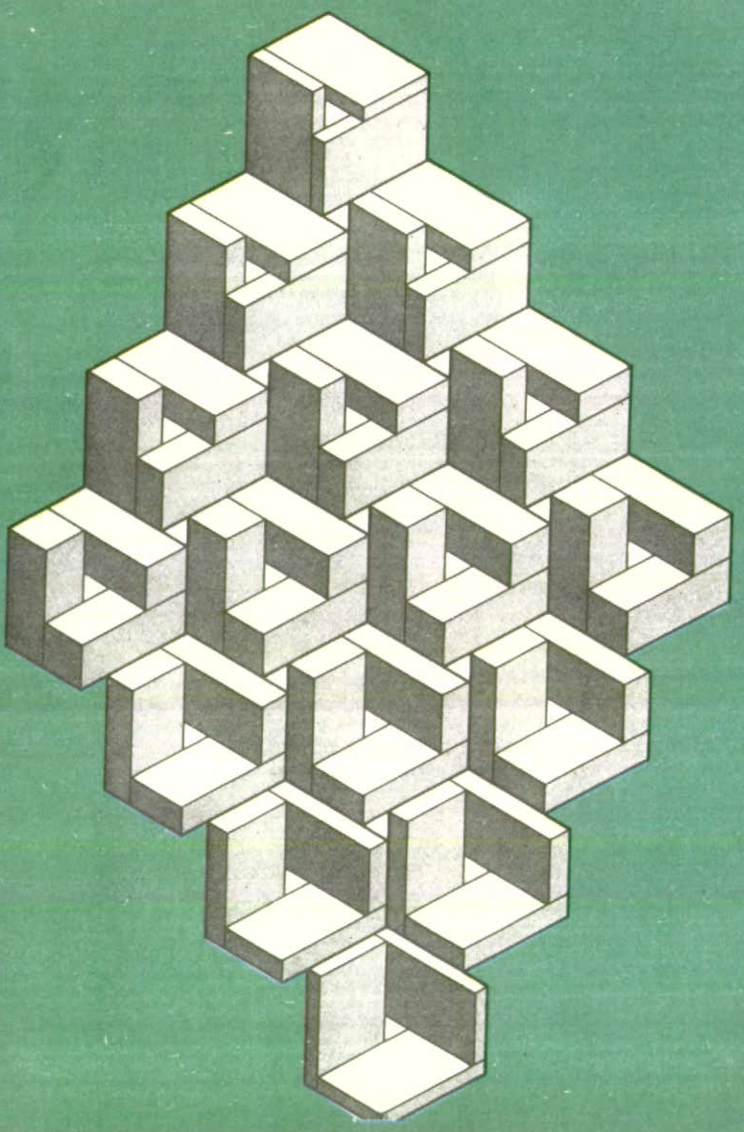
رشد

آموزش ریاضی

همراه با سؤالات مرحلهٔ نهائی
مسابقات ریاضی دانش‌آموزان کشور

سال چهارم ــ زمستان ۱۳۶۶ شمارهٔ مسلسل ۱۶

بها ۱۰۰ ریال



گنبد قابوس ـ گرگان

رشد آموزش ریاضی

سال چهارم ـ زمستان ۱۳۶۶ ـ شمارهٔ مسلسل ۱۶

نشریه گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نشانی: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ وزارت آموزش و پرورش تلفن ۴ ـ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۵۰)

سردبیر : دکتر علیرضا مدقالچی

تولید : واحد مجلات رشد تخصصی

صفحه‌آرا : محمد پریسای

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و آشنایی آنان با شیوه‌های صحیح تدریس ریاضی منتشر می‌شود.

فهرست

پیشگفتار

با انتشار این شماره به پایان سال چهارم انتشار رشد آموزش ریاضی می‌رسیم. خدای منان را سپاس می‌گنیم که بر ما توفیق عنایت فرمود تاگامی کوچك درجهت اعتلا و گسترش دانش ریاضی درکشورمان برداریم.

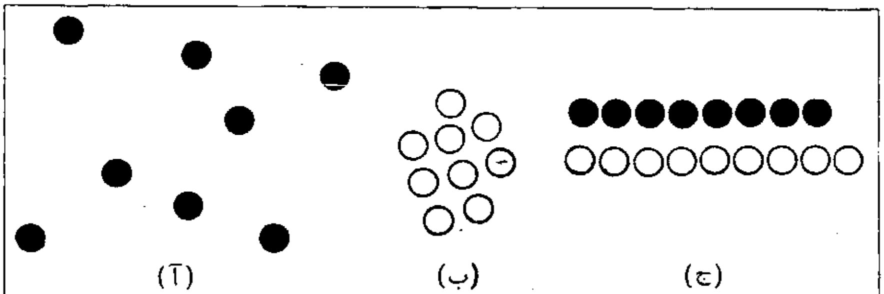
بدون‌شك، انجام و ادامه این امر بدون همت والای مسؤولین محترم سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی امکانپذیر نبوده و نیست. جاداشت که در این جا کارنامه یکساله خود را ارزیابی می‌کردیم. اما این بررسی را به‌عهدهٔ همکاران و دبیران ارجمندی می‌گذاریم که همواره با ارائه پیشنهادات و انتقادات خود، مارا مورد تشویق وترغیب قرار داده و ارشادمان می‌سازند. لذا، شما همچنان بهترین داوران برای ارزیابی کار ما هستید. امیدواریم که مجله خود را با دقت‌کامل از زیر ریزبین دید خود گذرانده و ما را از نقاط ضعفمان آگاه گردانید. در این راستا ذکر نکته‌ای را مفید می‌دانیم و آن اینکه اعتلا دانش ریاضی و جلوگیری از افت آن یکی از اهداف اولیه مجله رشد ریاضی است. از بدو تأسیس هیأت تحریریه ازیك خط‌مشی اصولی پیروی می‌کندکه این خط‌مشی در سرمقاله اولین شماره رشد آموزش ریاضی تبیین شده و توسط اولین سردبیر وهیأت تحریریه پی‌ریزی شده است. موقع را مغتنم شمرده از خدمات ارزنده آقای علیرضا جمالی اولین سردبیر رشد آموزش ریاضی تشکر می‌نمائیم. ایشان در بدو امر همت‌زیادی‌جهت راه‌اندازی مناسب‌این نشریه به‌خرج داده‌اند. امید است که در آتیهٔ نزدیك به‌تحصیلات خود در خارج از

بقیه در صفحه ۵۳

رشد تفکر ریاضی ۲

دکتر محمدحسن بیژن‌زاده
عضو هیأت علمی گروه ریاضی
دانشگاه تربیت‌معلم

مرحله ۲ (ب) ـ دوره تفکر شهودی. دراین‌مرحله‌که از ۴ سالگی شروع و به ۸ـ۷ سالگی ختم می‌شود کودك از علاقمندی خاصی برای معلمین خود برخوردار است زیرا برای بسیاری از کودکان، این سنین‌دو یا سه سال نخست‌آنان را در مدرسه می‌پوشانند. در این دوره تفکر کودکان عمدتاً تحت سیطره درك آنان می‌باشد. مراد از درك تعبیر و تفسیری است که به تجارب خود از دیدن، شنیدن، لمس کردن، حرکت کردن و غیر ذلك می‌دهند. این درك ممکن است دچار اشتباه شود، زیرا همچنان‌که از واژه تصورکه مترادف درك است برمی‌آید، صورت و ظواهر اشیاء نمودی فریبانه دارند، و یك کودك بیشتر فریب می‌خورد زیرا می‌خواهد چیزی را که می‌بیند با چیزهایی‌که قبلا دیده وشبیه آن هستند (ولی باآن یکی نیستند) مطابقت بدهد. شناختن‌که با درك حاصل می‌شود به وسیله یك رشته از اعمال یا تفکرات به‌دست نیامده است. بلکه با مقایسه تصویر عینی‌که مقابل کودك قرار دارد با مجموعه‌ای از تصاویر ذهنی از اشیاء و مطابقت دادن با یکی ازآنها حاصل می‌شود. برای آنکه یك درك بیشتر رشد وگسترش یابد باید با درکهای دیگر همسو شود؛ در این صورت است که می‌شود بی دقتیهای یك درك تصحیح گردد. بیشتردارد (شکل ۱.۶ (ب)) (شکل ۱.۶ (ج)). تفکری‌که وابسته به درك و تصور باشد ممکن است نامعقول و نا مرتبط باشد، چنین تفکری را با یك تصور دیگر می‌توان متناقض ساخت.

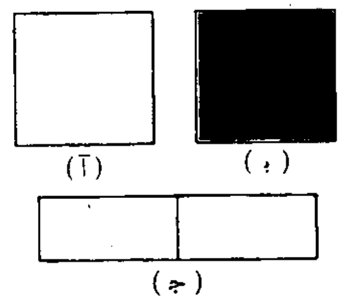


شکل (۱.۶)

تمرین. دو دسته دانه تسبیح شکل مطابق شکل ۱.۶ به یك کودك ۵ـ۴ ساله نشان بدهید و از او بخواهید تا بگوید‌کدام دسته بیشتر است. ممکن است به غلط بگوید‌که دانه‌های دسته (آ) بیشتر از دانه‌های دسته (ب)، که بیشتر نزدهم چیده شده‌اند، هستند. هرگاه از وی بخواهیم دو دسته را چنان بچینند‌که هر دانه از دسته (آ) مقابل یك دانه دسته (ب) قرار گیرد (عمل تناظرسازی) خواهد دید‌که یکی از دسته‌ها، یعنی دسته (ب)، یك دانه

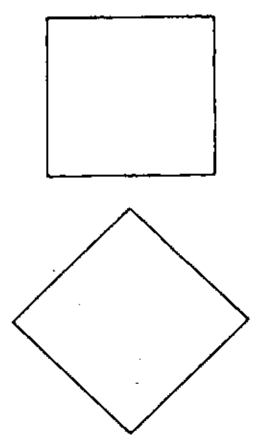
برای مثال، وقتی به‌کودکی‌که در این سنین باشد دومربع یکی قرمزودیگری آبی مطابق شکل ۱.۷ (آ و ب) ارائه دهیم خواهد گفت‌که این دو مربع مساوی هستند زیرا برهم منطبق می‌شوند. سپس یك مربع سبز رنگ به همان اندازه را دو نصف‌کرده و نیمه‌های‌آن را به‌دنبال هم قرارمی‌دهیم (همان شکل قسمت (ب). وقتی از کودك سؤال شود قبول خواهد‌کرد که مربعی‌که (ج) را ساخته با مربع (آ) برابر بوده است. اما وقتی از او

خواسته شود تا شکل‌های (ب) و (ج) را مقایسه کند خواهد گفت که (ج) از (ب) بزرگتر است. ظاهراً او فقط به وسیله طول قضاوت می‌کند و تغییر عرض را به حساب نمی‌آورد. به زبان علامتی او قبول می‌کند که (ب) = (آ) و (ج) = (آ) ولی تشخیص نمی‌دهد که (ج) = (ب) و به گونه‌ای اشتباه‌آمیز تصور می‌کند که (ب) < (ج).



شکل (۱.۷)

تفکری را که بر درك و تصور استوار بوده و نه بر استدلال تفکر شهودی می‌نامند. چون ادراکات تصاویری ذهنی هستند که با احساسات گذشته و حال تولید می‌شوند، روشن است که تفکر شهودی در باب یك چیز یا در مورد یك موقعیت فقط وقتی حادث می‌شود که تماسی مستقیم با شیئ



شکل (۱.۸)

مورد بررسی وجود داشته باشد. برای مثال، در پایان این دوره یك بچه ناگهان شهوداً «می‌بیند» که مربع و لوزی شکل ۱.۸ شکلهای یکسانی هستند که یکی دوران یافته است. چنین قضاوتهای شهودی، که بر اعمال گذشته و شاید بر جنبش‌های مغزی استوار است غالباً همچون جرقه‌ای در بچه بروز می‌کند. کودك نمی‌تواند دلایلی برای قضاوت خود بیاورد لیکن روشن است که او برای قضاوت خویش در یك حرکت تصوری تناظری یك‌به‌یك (بین اجزاء دو شکل) برقرار و اضلاع و زاویه‌ها را نیز تطابق داده است. کشف و آشکارسازی یکسان بودن دو شکل عمدتاً امری متقاعد کننده است. این نوع تفکر شهودی، که جنبهٔ کشف و الهام دارد، به وسیله تجربیات غنی و کاردستی‌های مدبرانه تحریك می‌شود و سالیان سال ادامه یافته و به موقعیت‌های و پیچیده‌تر اعمال می‌گردد. لذا نقش آموزشگاههای آمادگی و دبستانها در فراهم کردن امکاناتی که به وسیله آن کودکان بتوانند به‌ساختن اشیاء با دست، مطابق راهنمایی مربی‌های مربوطه، بپردازند آشکار و حیاتی است. در واقع، تفکر شهودی یك صفت بارزه و اساسی ریاضیات خلاقه‌ای است. خیلی از قضایای مهم ریاضی قبلا به وسیله ریاضیدانها به روشی شهودی حدس زده شده و بعداً توسط خود او و دیگر ریاضیدانها به اثبات رسیده است. بنابراین قوه درك و تفکر شهودی را باید در کودکان تحریك و تقویت کرده و در راستای صحیح هدایت کرد. تا آنکه این تفکر در سرتاسر سالهای دبستان رشد و شکوفایی یافته و در نتیجه ضمن تقویت بیشتر، به‌یادگیری ریاضیات در مرحله بعدی (راهنمایی و متوسطه) حالتی کشفی و اختراعی بدهد. متأسفانه گاهی دیده می‌شود که بعضی از معلمین چنین گمان می‌کنند که فقط با موظف کردن کودکان به انجام تکالیف بیش‌از حد می‌توان آنها را در یادگیری مطالب تشویق و ترغیب کرد غافل از آن‌که فرآیند یادگیری امری همه‌جانبه بوده و باید به نحوی باشد که قدرت درك شهودی، خلاقیت و استدلال منطقی را در آنها بپرورانند تا انسانهایی منطقی، سازنده و مبتکر برای جامعه خود باشند والا با وادار کردن کودکان به انجام تکالیف شاق و اموری که‌ذوق و استعداد آنها را پرورش ندهد جز مأیوس کردن آنها از یادگیری و استهلاك تدریجی علایق آنها نتیجه‌ای نخواهد داشت.

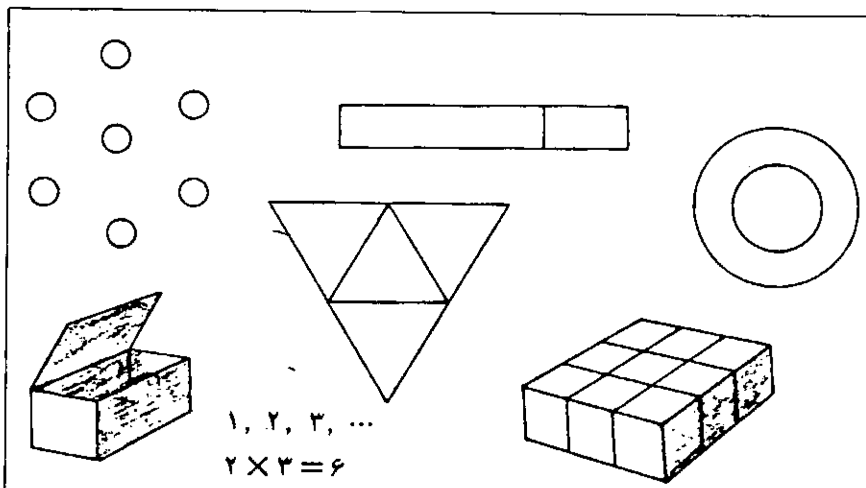
مرحله ۲ (ج) دوره اعمال ملموس

این مرحله مقارن دوره‌ای است که طی آن اعمال منطقی به‌کمك وسایل و مواد ملموس می‌توانند انجام شوند. اکنون کودکان می‌توانند شروع به فکر کردن منطقی کنند مشروط بر آنکه تفکر آنها به وسیله تماس با اشیاء واقعی و موقعیت‌های حقیقی هدایت شود. از سن ۷ یا ۸ سالگی به‌بعد باید تجربیات آنها به قدر کافی گسترش یافته باشد تا آنکه نظرشان در بارهٔ جهان خارج کمتر جنبهٔ خود مرکزی داشته باشد؛ یك کودك آکنون قادر است روابط بین اشیاء را بدون ارجاع به نقطه‌نظر خود کشف و مورد مطالعه قرار دهد. بنابراین تفکر وی تنوع وسیعتری یافته و نتایجی که به دست می‌آورد

کلیتر و دقیقتر است.

این دوره را دوره اعمال منطقی با وسایل ملموس می‌نامیم؛ لذا باید منظورمان را از عبارات اعمال و منطقی که در اینجا به کار می‌بریم روشن کنیم.

می‌دانیم که ریاضیات دو جنبه پذیرفته شده دارد: از یک سو با الگوها و ساختارهایی سروکار دارد که قابل تصویر در ذهن هستند؛ از طرف دیگر ریاضیات با اعمال در ارتباط است؛ اعمال عبارتند از ترکیب ذهنی تصاویر ذهنی. تصاویر ذهنی از تجربیات زیاد با اشیاء ازقبیل مشاهده آنها، جابه‌جاکردن و ساختار تصوری باآنها خلق می‌شوند. این تصاویر بسیار متنوع هستند و شامل اشکال و ساختارهای متنوع، نمادها و علامات، رشته‌ها و دنباله‌ها، فرمولها و عبارات نمادی می‌باشند. شکل (۱۰۹) فقط نمونه‌های بسیار اندکی از تصاویر ذهنی راکه یک کودک ممکن است داشته باشد نشان می‌دهد.



شکل (۱۰۹)

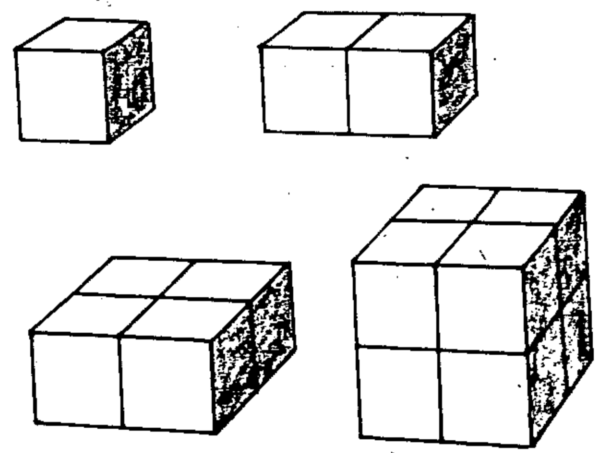
انواع بسیاری از فعالیت‌ها، مانند جابه‌جاکردن اشیاء، ساختن خانه‌های ماسه‌ای (کنار دریا) یا گلی کوچک (و یاساختن یک مدل با آجرهای پلاستیکی جدید اسباب بازی)، بریدن مربع‌ها و ساختن مثلث ازآنها، پرکردن یک جعبه با مکعب‌های کوچکتر، دادن یک شکلات به هریک از عروسکها و یا هریک از دوستانش (تناظر یک به یک) پیش درآمد و پیش نیازکنش‌های مشابه‌ای است که می‌توانند تماماً و به گونه‌ای تصوری در ذهن انجام گیرند. تصاویر ذهنی اشیاء مختلف در ذهن با یکدیگر مربوط شده و یا در ذهن جابه‌جا می‌شوند ونتیجه چنین حرکات ذهنی مجدداً تصاویر ذهنی است. این گونه فعالیت‌های ذهنی که ازمشاهدات واقعی و کار با اشیاء فیزیکی نشأت می‌گیرند **اعمال** نامیده می‌شوند. **پیاژه** از اعمال به عنوان کنش‌هایی داخلی یاد می‌کند، عبارتی که خاطرنشان می‌کندکه این فعالیت‌های ذهنی می‌توانند انجام شوند حتی وقتی‌که اشیاء مربوط دیگر وجود ندارند و زمان کنش‌های فیزیکی که براین اشیاء استوارند گذشته باشد. در واقع می‌توان از این کنش‌ها عمداً صرفنظر کرد. برای مثال، فرض کنیم به کودکی که پنج مداد دارد قول می‌دهیم که دو مداد دیگر به او بدهیم. او یک تصویر ذهنی، احتمالا بی محتوا، از پنج مدادش دارد، دو مداد دیگر را تصویر کرده و به صورت ذهنی آنها را با پنج مداد قبلی‌اش اضافه می‌کند، مجموعه جدید را در ذهن خود رؤیت کرده و شماره هفت‌را به‌دست می‌آورد. نتیجه غالباً چنین بیان می‌شود: «من هفت مداد خواهم داشت». مشخصه مهم اعمال ذهنی‌سیال بودن آنهاست. بچه می‌تواند در ذهن خود به‌پنج مدادی‌که درابتدا داشته بازگردد. برای این‌کار، در ذهن خود، دو مداد اضافی را برداشته و به نقطه شروع خود بر می‌گردد. به‌همین نحوکودک می‌تواند در ذهن خود ساختمانی راکه مثلا با آجرهای پلاستیکی ساخته به قطعات اولیه برگرداند و باآنها یک شکل دیگردر ذهن خود بسازد. این وجه اعمال‌که یک متفکر می‌تواندآنها را برگشت داده به طوری‌که به نقطه شروع باز گردد عکس پذیری[1] نامیده می‌شود. پیاژه می‌گوید، عمل را می‌توانیم به عنوان کنشی تعریف کنیم که می‌تواند به نقطه شروع بازگشت داده شود و نیز باکنش‌های دیگری که واجد این ویژگی عکس پذیری هستند ترکیب شوند[2].

اکنون مثالی ذکر می‌کنیم که نشان می‌دهد چگونه یک رشته از کنش‌ها که هر یک عکس‌پذیر هستند منجر به یک رشته از اعمال ذهنی می‌شود. به یک کودک مجموعه‌ای از مکعب‌های کوچک می‌دهیم. او با استفاده ازمفهوم دو،شروع به ساختمان باآنها می‌کند. ابتدا با دوتای آنها

یک مکعب مستطیل (میله مکعبی) می‌سازد: سپس دو تا از این مکعب مستطیل‌ها را کنار هم گذاشته و یک لایه مربع شکل می‌سازد؛ یک لایه دیگر روی این لایه گذاشته و یک مکعب درست می‌کند. هر کنش می‌تواند بازگشت داده شود و در نهایت کل رشته بازگشت داده می‌شود؛ در این صورت بچه مکعب‌های مجزایی را که با آنها شروع کرده به دست می‌آورد.

بعد از چنین تجربیاتی کودک می‌تواند کل سلسله اعمال را در ذهن خود خلق کرده و با استفاده از دانش شمارش خود، تعداد مکعب‌های استفاده شده در هر مرحله را به شکل مربوطه متناظر کرده و به طور ذهنی رشته اعداد ۱، ۲، ۴، ۸ را تشکیل دهد. در اینجا عامل مهم همان تجربه عملی است که تصور ذهنی مربوط به اشکال و اعمال را میسر می‌سازد. ناتوانی کودکان در سنین بالاتر در تصور ذهنی اشکال هندسی و روابط مربوطه اغلب به سبب فقدان تجربه کافی آنها با اینگونه اشکال در این دوره است. بنابراین بر والدین، مربیان مهدکودک و معلمین فرض است که امکانات لازم را جهت هر چه بیشتر غنی کردن تجربه کودکان، بویژه در این مرحله، فراهم سازند.

کودکان طی دوره اعمال ملموس از عهدهٔ انواع بسیاری از اعمال بر می‌آیند که بعضی از آنها کاملا پیچیده هستند. این اعمال پیچیده از سه عمل ساده‌تر منبعث می‌شوند که برای فرآیند یادگیری جنبهٔ اساسی داشته و زیر بنای کل تفکر ریاضی را تشکیل می‌دهند.



شکل (۱.۱۰)

۱ــ بعضی اوقات اعمال جمع و تفریق را چنان مطالعه می‌کنند که گویی دو عمل مستقل از هم هستند. لیکن باید توجه داشت که تفریق فقط وقتی کاملا درک می‌شود که به عنوان وجهی از جمع تلقی شود. عبارت $7-5=2$ وجه دیگری از $5+2=7$ است و $7-5$ به همان خوبی که با عبارت «۵ تا از ۷ تا برداریم» تعبیر می‌شود (به معنی کاهشی) می‌تواند با عبارت «چقدر به ۵ باید اضافه شود تا ۷ به دست آید» نیز تعریف شود. پس تفریق همان عکس جمع است به این معنی که از ما خواسته می‌شود تا در حاصلجمع عدد مجهول را پیدا کنیم. تجربه نشان داده که تعبیر تفریق به عنوان عکس جمع و آموزش آن به همراه جمع نتایج مفیدتری در پی خواهد داشت. توجه به عکس‌پذیری اعمال فقط به ریاضیات محدود نمی‌شود. بلکه در مسائل فنی و عملی نیز از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار است. از موارد ساده‌آن مانند بازکردن و بستن یك پیچ گرفته تا مواردی‌که با یك سلسله اعمال سروکار داریم مانند بازکردن و بستن یك چرخ‌گوشت و یا یك موتور همگی دارای ویژگی عکس‌پذیری بوده و بچه‌ها علایق شگرفی برای فراگیری این اعمال به همراه اعمال عکس دارند و باید این استعدادآنها را همواره تقویت کرد.

همه می‌دانیم ترکیب اعمال که به آن اشاره شد در سرتاسر ریاضیات وجود دارد. برای نمونه جمع و مشتق دو عمل هستند که هر کدام عکس‌پذیر و قابل ترکیب با اعمال دیگر است. وقتی باهم ترکیب می‌شوند قاعده (عمل) مشتق مجموع دو تابع به دست می‌آید. و نیز عکس مشتق انتگرال‌گیری است که با ترکیب با عمل جمع قاعده انتگرال مجموع دو تابع حاصل می‌شود و قس علیهذا.

۲ــ Reversibility

منابع

۱. Primary Mathematics Today, E. M. Williams & and Hilary Shuard Longman 1980.

۲. Mathematics teaching, Piaget, Ass. Teachers of Mathematics, Blluetin; 1983.

نقش ریاضیات در سایر علوم

بقیهٔ مقالهٔ مندرج در شمارهٔ قبل

مقاله زیر بقیه سخنرانی آقای دکتر محمد علی نجفی وزیر اسبق فرهنگ و آموزش عالی عضوهیأت علمی دانشگاه صنعتی شریف است که در محل سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی وزارت آموزش و پرورش برای دبیران ریاضی ایراد شده است.

یك مثال دیگر در ارتباط با اعداد بزنیم. می‌دانید که عدد جزء اولین مفاهیم ریاضی است که به صورت مجرد خودش در ذهن بشر شکل گرفت البته در ارتباط به اینکه عدد چگونه مورد توجه بشر قرار گرفت و برای بشر روشن شد که یك مفهوم مجردی به نام عدد وجود دارد نظریه‌های مختلفی است که وارد آن نمی‌شویم. باز اختلاف نظری در بین بسیاری از تاریخ‌دانان ریاضی و فلاسفه ریاضی است که آیا ابتدا مفاهیم مربوط به عدد در ریاضیات مطرح شد یا مفاهیم مربوط به خط و صفحه و پیوستارهای هندسی. چون می‌دانید آنچه که بحث مربوط به اعداد را تشکیل می‌دهد تحت‌عنوان حساب از آن یاد شد وخوب، در سیر گسترش خودش یکجایی به جبر منجر شد و امروز، آن دسته از مسائل که مربوط به بررسی خواص اعداد طبیعی و اعداد صحیح می‌باشد، تحت عنوان نظریه اعداد از آن یاد می‌شود برای اینکه آن علوم حساب به شاخه‌های مختلف تقسیم شده است. در مقابل، علم هندسه بود که در کنار مفاهیم مربوط به کمیتهای گسسته (اعداد) مفاهیم مربوط به کمیتهای پیوسته را مورد بررسی قرار می‌دهد. ما به این بحث هم کاری نداریم که حساب مقدم بوده یا هندسه و کدامشان نقش بیشتری درطول تاریخ داشته‌اند ولی آنچه که مهم است آن است که کسانی که علم حساب را به عنوان یك علم مهم در ریاضی مطرح کرده‌اند از ابتدا یعنی از زمان فیثاغورث یعنی حدود ۵۸۰ سال قبل از میلاد تا به امروز صرفاً به خاطر کاربردهای حساب نبوده است. البته کاربردهایی داشته است که همیشه انسان خودش را مدیون و محتاج این علم می‌دیده است. مسائل مربوط به سودوزیان و تجارت و حساب و کتاب نوعی به علم حساب مرتبط بوده و بنابراین انسان ناگزیر از این بوده که با حساب مقدماتی تا اندازه‌ای آشنایی داشته باشد.

اما آنچه که مسلم است هیچ‌کدام از ریاضی‌دانهای بزرگی که در طول تاریخ به حساب پرداخته‌اند به خاطر مسئلهٔ کاربردی بودن علم حساب به‌آن نپرداخته‌اند. زیرا واقعاً کاربردهایش در مقایسه با گسترش و وسعت این علم بسیار ناچیز است البته کاربردهایش تا قرن بیستم کاربرد علم حساب در حد همان حساب کلاس سوم‌وچهارم و پنجم شاید خلاصه بشود. درحالی‌که در طول تاریخ ریاضی هیچ ریاضی‌دان بزرگی نیست که به حساب نپرداخته باشد یعنی تمام ریاضی‌دانان بزرگ قسمتی از عمر خود را صرف حل مسائل حساب یا نظریه اعداد کرده‌اند. از فیثاغورث که معتقد بود که اصولاً نه تنها ریاضی بلکه کل هستی را می‌شود با اعداد تبین و تفسیر کرد و بعد دانشمندان دیگر جهان و دانشمندان اسلامی هم همینطور که مهمترینشان خوارزمی است که به حساب و بعد تبدیل حساب به جبر پرداخت ریاضی دانهای قرن ۱۷ مانند فرما و بعد قرن ۱۸ لاگرانژ و بعد قرن ۱۹ کوشی و بعد قرن ۲۰ گوس و هیلبرت. اگر شما بخواهید ۵۰ ریاضی‌دان از اول تاریخ تا به امروز به‌عنوان ریاضی‌دانهای بزرگ لیست کنید، شاید بدون اغراق ۴۵ نفر آن کسانی باشند که در حساب مدتها کار کرده‌اند و هیچکدام از اینها همانطور که عرض کردم به کاربرد حساب اشاره‌ای نکرده‌اند. صرفاً به علت مسائل فلسفی یا مسائل مربوط به زیبایی‌هایی که در این علم هست به‌آن

پرداخته‌اند، و دغدغه خاطر نداشتند که حالا شاید یك روزی از این علم استفاده بشود یا نه. منتها در قرن ۲۰ باز کاربردهای عجیب علم حساب یا نظریه اعداد روشن شد. از زمان جنگ جهانی دوم ریاضی‌دان انگلیسی که عمده کارش در همین زمینهٔ نظریه اعداد و ریاضیات گسسته بود و آلن تورینگ نام داشت در ارتباط باکشف کدهایی که ارتش امریکا برای کنترل کشتیهای انگلیسی می‌فرستاده‌ازعلم حساب‌استفاده می‌کرد، و بعد یکسری کدهایی را با استفاده از مباحثی که در نظریه اعداد بود بصورت‌کد ریاضی در ارتباط با ارسال پیام از یك نقطه به یك نقطه دیگر مورد استفاده قرار می‌داده است و این‌کشف بزرگ آلن تورینگ در واقع مبنای بزرگترین پیروزیهای متفقین در دریا شد. یك تاریخ‌دان انگلیسی در این مورد می‌نویسد که پیروزی‌متفقین درجنگ جهانی دوم وابسته به جنگ دراقیانوس اطلس بود، زیر دریائیهای آلمان می‌خواستند ارسال ملزومات از انگلستان به‌غرب را که از راه دریا صورت می‌گرفت قطع کنند. کشف رمزهای آلمانها موجب شد کشتیهای انگلیسی از حمله‌آنها درامان بمانند. وبعد قضیه‌هایی مثل قضیه فرما که هنوز هم می‌دانید جواب‌نهایی به‌آن داده نشده در ارتباط با نظریه کدگذاری مورد استفادهٔ قرارگرفت و امروز یك نظریه بسیار گسترده‌ای است که از یك طرف از رشته مخابرات در برق استفاده می‌کند وازیك طرف مبتنی‌است به مسائل نظریه‌اعداد و مسائل مربوط به محاسبات پیمانه‌ای.وقتی شما اعداد را دریك پیمانه یا دریك هنگ‌یاسنج‌قرار می‌دهید، وقتی شما محاسبات پیمانه‌ای انجام می‌دهید مثلاً وقتی دارید در پیمانه هشت عمل جمع انجام می‌دهید سه به‌علاوه هفت می‌شود ده، ۸ تا ازش کم می‌کنید می‌گویید دو. این محاسبات مربوط به هنگها کاربرد بسیار اساسی در مسائل مربوط به نظریه‌کدگذاری دارند. البته همین نظرات تورینگ به طراحی بعضی از ماشینهای محاسباتی انجامید و اولین ماشینهای محاسباتی که در انگلستان ساخته شد تحت عنوان ماشین تورینگ معروف است. هنوز هم نمونه‌هایی از ماشین تورینگ موجود است. این ماشینهای محاسبات بود که وقتی ایده‌های تورینگ به یك دانشمند دیگر به نام فن نیومن رسید. او مبنای کامپیوترهای امروزی را ایجادکرد. یعنی فن نیومن علاوه بر محاسبه، بعد جدیدی اضافه‌کرد که مسئله حافظه بود که شما نه تنها به ماشین یاد می‌دهید که به سرعت حساب بکند بلکه به ماشین یاد می‌دهید که چیزهایی را هم در حافظه‌اش نگه دارد و هر وقت لازم بود آنها‌را دخالت بدهد و بعد تبدیل شد به دنیای امروز الکترونیك‌که بیش‌از هر چیزی تحت‌تأثیرکامپیوتر است. در کشورهای غربی یك‌گرایش واقعاً زننده‌ای نسبت به کامپیوتری کردن همه‌چیزایجاد شده‌که حتی تمامی مسائل عادی روزمره‌هم سعی می‌کنندکه‌با استفاده ازابزارهای‌کامپیوتری‌چه‌کامپیوترهای بزرگ و چه کامپیوترهای کوچك خانگی انجام شود. شکل ابتدایی و ساده‌آن همان ماشینهای محاسباتی که هر کسی در جیب‌دارد وحتی برای ضرب ۵در۳ هم ازآن استفاده می‌کنند. اگر این کامپیوتر که امروز از عرصهٔ صنعت و تکنولوژی دنیا حذف بشود مسلماً هیچیك‌از فعالیتهای تکنولوژیك دنیای غرب بدون‌آن‌قابل ادامه نیست و نه تنها درعرصهٔ صنعت تکنولوژی بلکه در مسائل اقتصادی هم امروز تمام محاسبات مالی‌واقتصادی دنیای غرب برمبنای کامپیوتر است. البته درکشور خودمان هم استفاده می‌شود ولی نه به‌آن شدت و به حد افراط. توجه بکنیدکه ایدهٔ اصلی ساخت این‌کامپیوترها توسط یك ریاضی‌دان که برروی مسائل عدد و ریاضی گسسته کار می‌کرد داده شد و بعد در سیر تکاملی خودش به اینجا رسید و شاید بیشتراز ۵۰٪ از سرمایه‌هایی که طی ۲۰ـ۳۰ سال اخیردرصنعت الکترونیك خرج شده ۵۰٪ آن در ارتباط با کامپیوتر است و باز یك نکته جالب در اینجا اینکه همین کامپیوتری‌که به واسطه یك ایدهٔ مجرد ساخته شد و امروز در دنیای غیر ریاضی کاربرد دارد در خود ریاضی هم کاربرد پیدا کرده و باز بیشترین کاربردش در رشته‌ای از ریاضی است‌که در واقع خاستگاه اوست یعنی در نظریه اعداد. البته در رشته‌های دیگر ریاضی هم به همین ترتیب مثلاً در نظریه‌گراف‌ها که یکی از رشته‌های ریاضیات قرن بیستم است می‌دانید مسئله‌ای به اسم مسئله چهار رنگ که در ابتدای قرن ۲۰ مطرح شد، تا همین ۴ـ۵ سال پیش لاینحل باقی مانده بود شکل عامیانه مسأله این است‌که‌آیا مثلاً اگر یك نقشه جغرافیایی داشته باشیم می‌توانیم فقط با چهار رنگ تمام مناطق مختلف نقشه یا کشورهای مختلف نقشه را رنگ بزنیم بطوری‌که هیچ دوکشور همسایه یك رنگ نداشته باشند این مسئله، مسئلهٔ بسیار پیچیده‌ای است و تا حدود ۴ـ۵ سال پیش که به‌کمك کامپیوتر این مسئله حل شد هیچ راه‌حلی ازآن در دست نبود. البته حدس می‌زدندکه جواب مثبت است ولی اینکه چه راه‌حلی برایش پیدا شود مطلب بسیار مشکلی بود. تا این اواخر برای پنج رنگ این مسئله ساده شده بود یعنی هر نقشه جغرافیایی را می‌شود با پنج رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. بالاخره در حدود ۵ ، ۴ سال پیش دو ریاضی‌دان

آمریکایی با استفاده از کامپیوتر مطلب را اثبات کردند که در حدود چندین ماه طول کشید که اثبات آنها آزمایش شود که آیا درست است یا نه، زیرا محاسبات، محاسبات کامپیوتری بود برای اینکه ریاضی‌دانها صحه بگذارند ماهها طول کشید.

بحثمان را در مورد عدد ادامه بدهیم. این به اصطلاح یك گریزی بود که در ارتباط با خواص اعداد صحیح و نظریه اعداد و کاربردهایش در دنیای امروز زدیم. در ارتباط با اعداد می‌دانید تا مدتها بشر فکر می‌کرد که عدد یعنی عدد صحیح و عدد گویا «حاصل تقسیم دو عدد صحیح». تا اینکه بالاخره کسی گفت که به نظر من طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که هر دو ضلع آن برابر با یك است عدد نیست که حالا می‌دانید می‌شود $\sqrt{2}$. عده‌ای سعی کردند که بگویند این حرف اشتباه است و بالاخره وقتی ثابت شد عددی پیدا شده که در واقع طول ضلع یك مثلث است و آن عدد گویا نیست مدتها یك بحران در ریاضی ایجاد کرد. برای اینکه بسیاری از مبانی فلسفی ریاضی را به هم ریخت تا اینکه بالاخره ریاضی‌دانها قبول کردند که دسته دیگری از اعداد هم هستند که الزاماً به صورت حاصل تقسیم دو عدد صحیح قابل نمایش نیستند. اسم آنها را عدد اصم گذاشتند و بعد اینها را به سیستم اعداد گویا اضافه کردند. سیستمی که به‌وجود آمد مجموعه اعداد حقیقی نام‌گذاری شد. باز بحران عدد در ریاضی به اینجا خاتمه پیدا نکرد. متوجه شدند که بعضی از معادلات جبری هستند که دارای هیچ ریشه‌ای در مجموعهٔ اعداد حقیقی نیستند مثلاً معادلهٔ x^2+1 دارای ریشه نیست تا مدتها این موجب سرگرمی بسیاری از ریاضی‌دانها بود که بتوانند به نحوی این مسئله را حل کنند و سیستم اعداد را بتوانند از یك چنین نقصی نجات دهند. تا اینکه پیشنهاد شد یکی از ریشه‌های معادله یعنی $\sqrt{-1}$ را به عنوان یك عدد جدید نامگذاری کنند و آن عدد را به مجموعه عددهای قبلی اضافه کنند اسم این عدد را i گذاشته و این حرف اول حرف کلمه imaginary به معنی موهومی است. این نشان می‌دهد که دید ریاضی‌دانهایی که این عدد را ابداع و اختراع کردند نسبت به این عدد این بوده که یك چیز موهومی است و بنابراین هیچ‌جای عالم واقع نباید انتظار داشته باشیم که ظاهر شود. سیستم اعدادی که به این ترتیب ساخته شد اسمش را مجموعه اعداد مختلط گذاشتند که به صورت C نمایش داده می‌شود. نکتهٔ عجیب اینکه در قرن و اواخر قرن ۱۹ متوجه شدند که مجموعه اعداد مختلط که یك عدد موهومی هم در آن نقش دارد در ارتباط با محاسبات ریاضی بسیاری از مدارهای الکتریکی ظاهر می‌شوند. یعنی بسیاری از مسائل مربوط به مدارهای الکتریکی در محاسبات به این عدد یا توانهای آن یا ترکیبی از آنها می‌رسد. بعدها نه تنها مسئلهٔ مهندسی برق تحت‌تأثیر سیستم اعداد مختلط، بلکه در اکثر رشته‌های مهندسی و فیزیك اعداد مختلط ظاهر شد. حتی در ارتباط با چرخش الکترون در داخل اتم و اسپین‌ها که در فیزیك از آن صحبت می‌شود ظاهر شد و مسائل مربوط به میزان چرخش یك الکترون در اتم را با اعدادی که آن اعداد، به صورت مختلط ظاهر می‌شدند. به نوعی ارتباط بین آنچه که در ریاضیات قرن ۱۹ به عنوان یك چیز صرفاً موهومی از آن یاد می‌شد با دنیای واقع پیدا شد.

شاید اگر مثال دیگری هم بزنیم روشن‌کننده‌تر باشد و آن مثالی است که امروز بسیاری از حیطه‌های علم ریاضی تحت‌تأثیر این اختراع و ابداع قرار گرفته است. می‌دانید که این بحث که آیا می‌شود ریشه‌های یك معادله، معادله‌ای که چند جمله‌ای باشد را به‌صورت مجموع، تفاضل، حاصلضرب و حاصل‌تقسیم اعداد (اعدادی که برخاسته از ضرایب معادله باشد و رادیکالهایی از آنها) نمایش داد یا نه، یك سؤال در ریاضیات بود و از خیلی وقت پیش هم مطرح بود. حالا من برای اینکه: کمی روشنتر بگویم این مسئله را با ذکر مثالی عرض می‌کنم مثلاً معادله چند جمله‌ای درجهٔ اول $ax+b=0$ را درنظر می‌گیریم. این معادله همیشه یك ریشه $x=-\frac{b}{a}$ دارد فرض هم براین است که b مخالف صفر باشد. اگر یك چند جمله‌ای درجه دوم درنظر بگیریم $ax^2+bx+c=0$ باز ریشه‌های این چند جمله‌ای برحسب رادیکال وجمع‌ضرب، تفریق وتقسیم این ضرایب شناخته شده است $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$، آنچه را که داخل رادیکال قرار می‌گرفت دلتا می‌گفتند. برای درجه سه تا مدتها جواب روشن نبود بالاخره روشن شد دستوری به اسم دستورکاردان برای پیدا کردن ریشه‌های یك معادله درجه سه هم موجود است. برای درجه چهار باز به همین ترتیب یك دستوری هست اگر یك معادله کلی درجه چهار داشته باشید یك دستور کلی برای ریشه‌های این معادله می‌توان نوشت. در قرن ۱۹ بسیاری از ریاضی‌دانها برروی این فکر می‌کردند که آیا برای هر معادله چند جمله‌ای درجهٔ n هم می‌توان یك چنین دستوری نوشت که در آن دستور فقط از ضرب

و تقسیم و جمع و تفریق ضرایب چند جمله‌ای و رادیکالهای این عبارت استفاده شود. تعداد زیادی از ریاضی‌دانها جواب مثبت برای این سؤال قائل بودند ولی نمی‌توانستند جواب را به دست بیاورند تا اینکه ریاضی‌دان فرانسوی گالوا که حتماً نامش را شنیده‌اید و روی همین مطلب کار می‌کرد در بررسی این مطلب اولاً به این نکته رسید که در حالت کلی نمی‌توان برای ریشه‌های معادله درجه پنج فرمول مشابهی ارائه داد و این را ثابت کرد. که اثبات آن خیلی پیچیده است و احتیاج به اطلاعاتی در زمینهٔ نظریه هیئتها دارد. او در اثبات خودش مواجه شد با ساختمانهای جبری که او اسم این ساختمانها را گروه گذاشت یعنی مجموعه‌های جبری که دارای خواصی بودند و یکی ازآن خواص این بود که هر دو تا عضو این مجموعه را وقتی به نوعی با هم ترکیب کنیم (اینکه معنی ترکیب چیست برحسب مجموعه متفاوت است مثلاً در یکجا ترکیب ممکن است ضرب باشد یکجا ترکیب جمع باشد و یکجا ترکیب یك عمل ریاضی دیگر باشد) یك عددی یا یك عضوی به دست می‌آید که درآن مجموعه است یعنی ازآن خارج نمی‌شود. اصطلاحاً می‌گوئیم این عمل بسته است. و بعد معکوس دارد و الی آخر. شما اصول مربوط به گروه را در ذهن خود بیاورید اینها را گالوا هنگامی که بحثش روی پیدا کردن ریشه‌های معادله‌های درجه ۵ بود به آن رسید و بعد اسم این مجموعه را گروه گذاشت وکم کم عده‌ای به این مسئله علاقه‌مند شدند و نظریه‌ای ایجاد شد به اسم نظریه گروهها در ریاضی. بعداً اسم این نظریه گروهها را، جبر مدرن گذاشتند. اصلاً برای این به این رشته از ریاضی گفته‌اند که خاستگاهش ریشه‌های معادله‌های جبری بود. بعد گفتند مدرن. چون درآن ایام مدرن بود بعداً وقتی از مدرن بودنش افتاد، یعنی ۵۰–۴۰ سال از عمرش گذشت، اسمش جبر مجرد شد برای اینکه هیچ ایدهٔ خارجی در مورد این ساختمانهای ریاضی که روی این مجموعه‌ها تعریف می‌شود وجود نداشت. من فکر می‌کنم اگر از صد ریاضی‌دان که در این رشته کار می‌کرده‌اند سؤال می‌شد که قسم بخورید که آیا این کاربردی هم در عالم واقع خواهد داشت یا نه هر ۱۰۰ نفر قسم می‌خوردند که کاربردی ندارد. ولی باز از عجایب ریاضی اینکه همین جبر مدرن یا جبر مجرد یا جبر «که امروز به خاطر اینکه کاربرد پیدا کرده همه جرأت پیدا نمی‌کنند به آن جبر مجرد بگویند» چون جاهایی در عالم واقع نقشی ازآن دیده می‌شود و بعد هم خوب دیگر خیلی نو نیست و صد سال تقریباً از عمرش گذشته جبر یکی از پرکاربردترین رشته‌های ریاضی در خود ریاضی و در غیر ریاضی شده است. مثلاً در کریستالوگرافی «بلورشناسی» بسیاری از مسائل بلورشناسی نظری تئوریك مبتنی است برخواص گروهها. تقارنهایی که گروهها از خود نشان می‌دهند یعنی اگر شما بخواهید بلورهایی را که در عالم هستی ظاهر می‌شوند تقسیم‌بندی کنید تقسیم‌بندی آنها دقیقاً مبتنی است بر تقسیم‌بندی گروههای متقارنی که وجود دارد. در قرن بیستم یك ریاضی‌دان نروژی نام گروههای جدیدی را به اسم گروه «لی» تعریف کرد البته او این اسم را روی این مجموعه ریاضی نگذاشت ولی بعداً به افتخار او تحت نام گروه «لی» ازآن یاد شد. به هر حال این گروههای «لی» وقتی مطرح شد بسیار مجرد بود یعنی گروههای قبلی که در جبر مدرن مطرح شد کاربردهائی پیدا کردند ولی گروههای «لی» که آقای سوفوسلی ازآن صحبت می‌کرد هیچ کاربردی نداشت. ولی امروز مهمترین ابزارهای توصیف فیزیك جدید و فیزیك نظری همین مفاهیم مربوط به گروهها هستند البته در مکانیك کوانتم به شدت موارد استعمال دارد. گروههای «لی» و ساختمانهای آنها و چیزهایی که بنام نمایش گروههای «لی» ازآنها یاد می‌شود. در فیزیك جدید برای توضیح و توصیف بسیاری از پدیده‌ها مجبورند دست به دامن همین گروهها بشوند. چند وقت پیش من مقاله‌ای در یك مجله خواندم که در ارتباط با استفاده از جبرهای «لی» که البته یك ساختمان وابسته به گروه «لی» است مقاله‌ای درعلم چشم‌پزشکی نوشته شده بود. البته مقاله را که من خودم دیدم واقعاً از یك دید پزشکی مسئله را مطرح نکرده، بلکه یك مبنای نظری برای یك قسمت ازکار چشم را دارد مطرح می‌کند که آن مبتنی است بر همین جبرها. به هرحال این هم به عنوان یك مثال دیگر. خوب رشته جبر امروز به عنوان یکی از اساسی‌ترین و اصلی‌ترین رشته‌های ریاضی درکنار آنالیز است. البته می‌شود رشته‌های دیگر ریاضی را هم به ترتیب اهمیت ذکر کرد ولی به هر حال جبر وآنالیز دو رشتهٔ اصلی هستند. که رشته ریاضی را تحت‌تأثیر خودشان قرار دادند و جالب است که بسیاری از رشته‌های ریاضی حتی تحت‌تأثیر همین جبری که در ابتدا هیچ کاربردی برایش نمی‌شد حدس زد قرار گرفته‌اند. مثلاً شما امروز توپولوژی جبری دارید، هندسه‌جبری دارید، نظریه اعداد جبری دارید، یعنی خیلی از رشته‌های ریاضی تحت‌تأثیر این جبر قرار گرفته‌اند. حتی هندسه که در ابتدا کاملاً مستقل از

حساب رشدکرده بود و در واقع در طول تاریخ ریاضی داعیه‌استیلا برحساب داشته، امروزه به میزان زیادی تحت‌تأثیر جبر است. که خود جبر برخاسته از حساب است و هندسهٔ جبری یك رشته بسیار وسیعی را تشکیل می‌دهد.

به‌عنوان آخرین مثال هم یك مثال از هندسه می‌زنم تا روشن شود که هندسه درکجاها در دنیای امروز مورد استفاده قرار گرفته است. البته این مواردی را که من به عنوان کاربردهای این رشته‌ها خدمت شما عرض‌کردم به صورت واقعاً اجمالی و مختصر است و الا می‌توان کاربردهای بسیار زیاد دیگر در مورد هرکدام از این رشته‌ها را یادکرد. فقط آنچه‌که مورد توجه است این است‌که واقعاً اساس نظریه‌های جدید علمی و اساس سیستمهای پیچیدهٔ تکنولوژی که امروز مبتنی است برمسائلی‌که در زمان خودشان به‌عنوان مسائل مجرد ریاضی ازآنها یاد می‌شد. هندسه‌که در موردآن بحث بسیاری است‌که‌آیا وقتی هندسه اقلیدسی بنیان‌گذاشته شد تحت‌تأثیر مسائل کاربردی و اجرایی بود مثلاً تحت‌تأثیر نجوم بود یا تحت‌تأثیر «ژئودزی». این علمی‌که امروز یکنوع زمین‌شناسی است وقتی‌که شما می‌خواهیدکوتاهترین فاصله را در روی‌یك سطح از یك نقطه‌به‌نقطهٔ دیگر اندازه بگیرید یا روی یك سطح غیر مسطح، خوب این علمی است‌که همیشه مورد توجه بشربوده است. برای اینکه‌شما درانجام فعالیتهای عمرانی و فعالیتهای اقتصادی بتوانیدکوتاهترین فاصله را تشخیص دهید مهم است. حالا عده‌ای می‌گویند هندسه اقلیدس وآن اصولی‌که او مطرح کرد و خواص و قضایا و غیره عمدتاً تحت‌تأثیر این کاربردها بنیان‌گذاشته شده‌که کاری به‌آن نداریم. منتها بعد از سالهاکه از هندسه اقلیدسی می‌گذشت عده‌ای مطرح کردندکه‌آیا واقعاً اصول اقلیدس نسبت به‌هم استقلال دارند، یعنی بخصوص‌دست روی اصل پنجم اقلیدس گذاشتندکه‌آیا واقعاً اصل پنجم از اصول دیگر اقلیدس استقلال دارد یا می‌شود با فرض اصول دیگراصل پنجم‌را نتیجه‌گرفت. خوب جواب‌گویی به این سؤال از نظر نظری مهم بود. مهم است که بتوانید تعداد اصول موضوعه را به حداقل ممکن برسانید اگر چیزهایی را به عنوان قضیه می‌شود ازآن‌اصول نتیجه‌گرفت‌آنها رابدست بیاوریم در قسمت قضیه جای دهیم. این یك سؤال بودکه بعضی‌ها پاسخ مثبت دادند. حتی بعضی اثباتهایی از این پاسخ را چاپ کردندکه بعداً معلوم شد این اثباتها غلط است بعضی‌ها پاسخ منفی می‌دادند بدون اینکه بتوانند دلیلی برای‌آن ارائه دهند.

تااینکه یك منطق‌دان اتریشی بنام‌گودل مطلبی را مطرح‌کردکه در واقع یك پاسخ‌کلی به همهٔ سؤالاتی ازاین نوع است. او گفت هر وقت‌که می‌خواهیدبه بینیدکه‌آیا یك اصل‌نسبت‌به چند اصل دیگر مستقل است یا نه، بیائید یك سیستمی را فرض‌کنید که اصول قبلی درآن باشد و نقیض این اصل که می‌خواهید استقلال‌آن را فرض‌کنید. یعنی سیستمی‌که مبتنی بر اصول قبلی باشد و نقیض اصلی‌که می‌خواهید مورد بحث قرار دهید. حالا اگر این اصل نسبت به‌آن اصول استقلال نداشته باشد وقتی شما سیستمی می‌سازید با استفاده ازآن اصول و نقیض این اصل‌آن سیستم باید قطعاً ناسازگار باشد.به خاطر اینکه اگر ازآن اصول مورد نظرکه مثلاً A است اصل B نتیجه شود شما اصول قبلی را جمع‌کنید و درکنارش نقیض B را بگذارید این مجموعه‌ای‌که ایجادکرده‌اید یك مجموعه ناسازگار می‌شود زیرا آن اصول قبلی B را نتیجه می‌دهد نقیض B را هم‌که در مجموعه دارید، بنابراین B و نقیض B هر دو در مجموعه هست پس ناسازگار است. این یك استدلال منطقی است به این ترتیب‌که حالا اگر می‌خواهید استقلال هر اصل را از هر اصل دیگر بگیرید بر این روش عمل‌کنید. البته‌آزمایش‌کردن اینکه‌آیا‌آن سیستم سازگاراست یا ناسازگار در بعضی موارد بسیار مشکل است. و با همین روش‌آمدند اصول اقلیدس به اضافهٔ نقیض اصل پنجم را در نظر گرفتند. اصل پنجم می‌گوید از یك نقطه خارج یك خط، یك و فقط یك خط می‌توان به موازات‌آن خط رسم‌کرد. آمدند یك سیستم هندسی ساختند مبتنی براصول دیگر اقلیدس و نقیض این‌اصل. این سیستم اقلیدسی روشن بودکه از اول سیستمی برای تفنن و ارضاء حس زیبایی طلبی یا دنبال مسئله‌گشتن ریاضی‌دانها تشکیل شد، چون هر جوری‌که در عالم واقع نگاه می‌کردند می‌دیدندکه از یك نقطه خارج یك خط واقعاً یك خط می‌شود ترسیم‌کرد. براینکه هندسهٔ عالم خارج را همه اقلیدسی می‌پنداشتند در حالی‌که در واقع اینگونه نیست. کسانی مثل لباچوسکی‌که یك ریاضی‌دان روسی است وافراد دیگری‌آمدند هندسه‌هایی را ساختندکه بعداً به اسم هندسه غیر اقلیدسی از آنها یاد شد. هندسه غیر اقلیدسی عبارت است از هندسه‌ای که اصل پنجم اقلیدسی درآن بر قرار نیست و بعد در ابتدای قرن ۲۰ ریاضی‌دان بزرگ بنام هیلبرت برای هندسه‌های غیر اقلیدسی اصول موضوعه قائل شد و دسته‌بندی و تنظیم‌کرد. البته نکته جالب اینکه همین‌آقای هیلبرت وقتی از تزدکترای

خودش در آلمان دفاع می‌کرد در ارتباط با هندسه صحبت می‌کرد او گفت امروز در عالم واقع و دنیای علم هیچ استفاده‌ای از هندسه‌های غیر اقلیدسی نمی‌شود کرد ولی من حدس می‌زنم که بشر باید روزی انرژی را وارد قضایای هندسی بکند و به عنوان یك قسمت از هندسه مورد بحث قرار دهد. انرژی که در عالم طبیعت است و در آن صورت هندسه‌های غیر اقلیدسی به کار بشر می‌آید نه هندسه اقلیدسی. این حرفی بود که هیلبرت به صورت گنگ و مبهم زد و البته به‌نظر می‌آید که خودش هم نمی‌دانست تعبیر فیزیکی این حرف چیست. بعدها انیشتن تحت‌تأثیر این حرفها و حرفهای دیگر و مطالبی که در نظرش بود به هندسه غیر اقلیدسی علاقه‌مند شد و حدود یکسال با یك ریاضی‌دان روی هندسه کار کرد. البته در مورد اینکه آن دانشمند که بوده کمی اختلاف نظر هست بعضی‌ها گفته‌اند یك ریاضی‌دان به اسم «لوی‌چیتا» بوده و بعضی‌ها گفته‌اند ریاضی‌دانی، به اسم گراسمن بود که بیشتر این گراسمن مطرح است. کسی که به انیشتن هندسه دیفرانسیل یاد داد. بعد از این بود که انیشتین نظریه نسبیت عام خودش را مطرح کرد و در نظریه نسبیت عام دیگر هندسه اقلیدسی کارساز نیست و انرژی به عنوان انحنای فضای هندسی استفاده می‌شود و در بحث وارد می‌شود. لذا از آن به بعد هندسه‌های غیر اقلیدسی بسیار مورد توجه قرار گرفتند می‌بینیم که باز سیر تحول این هندسه‌ها بسیار جالب است. ابتدا بر اساس یك نظریه تاریخی می‌گویند که اقلیدس تحت‌تأثیر کاربرد، هندسهٔ خودش را مطرح کرد و بعد به عنوان یك سؤال کاملاً مجرد، سؤال استقلال اصل پنجم از سایر اصول مطرح شد بعد منطق‌دانی که درهیچ جای عمرش با کاربرد برخورد نداشت به اسم گودل برای آن سؤال یك روش اثبات پیش‌بینی کرد. وقتی که آن مطلب اثبات شد بازکسانی مثل لباچوسکی بدون اینکه انتظار کاربرد از آن داشته باشند هندسه غیر اقلیدسی را مطرح کردند و بعد در قرن ۲۰ نسبیت انیشتن براساس این هندسه‌ها از نظر ریاضی شکل گرفت که تمام فیزیك قرن ۲۰ را دچار تحول کرد. امروز هم باز هندسه‌ای که بیشتر در فیزیك برای نظریه‌های جدید مورد نیاز است همین هندسه‌های غیر اقلیدسی است. شاید ذکر این نکته که امروز دنیای فیزیك دنبال یك نظریه جدید است که در واقع این طوری که مدعی هستند مدعیان این نظریه می‌توانند تمام نظریه قبلی را به عنوان حالتهای خاصی از یك نظریه عمومی شکل‌بندی کنند و آن نظریه که تحت عنوان نظریه سوپر ریسمان از آن یاد می‌شود. البته، نظریه پیچیده‌ای است که من هم زیاد از آن اطلاعی ندارم. جالب است که در یك بحث این آقایانی که در ارتباط با این پدیدهٔ جدید یا نظریه جدید فیزیك کار می‌کنند و مدعی هستند اگر این نظریه به یك شکلی مبانی ریاضی پیدا بکند و به یك حد قابل قبولی به‌اثبات نزدیك شود همان انقلابی که درفیزیك قرن ۲۰ توسط مکانیك‌کوانتم و نسبیت انجام شد در فیزیك قرن ۲۱ توسط این نظریه سوپر ریسمان انجام می‌شود. به هر حال نکته‌ای که دانشمندان این نظریه مطرح می‌کردند در یك جلسه‌ای که من هم به عنوان مستمع حضور داشتم می‌گفتند که ما امروز در دنیا دنبال گراسمن زمان خودمان می‌گردیم تا آن هندسهٔ لازم برای این نظریه را به ما بیاموزد. بعد ما بتوانیم نظریه خودمان را مطرح کنیم که ما به شوخی به‌آنها گفتیم شما فرض می‌کنید انیشتن عصر هستید و فقط گراسمن را کم دارید. ولی واقعاً این طور است که نظریه سوپر ریسمان از نظر هندسه مبتنی بر فضاهای بسیار پیچیده‌ای است که به اسم سوپر منیفلد از آنها یاد می‌شود. این منیفلدها ساختمانهای هندسی در هندسه دیفرانسیل هستند. وحتی هنوز این هم کشف نشده که آن بی منیفلدهایی که در نظریه سوپر ریسمان باید مورد استفاده قرار بگیرند چند است.

من امیدوار هستم که ادعاهایی که در ابتدای صحبت مطرح کردیم به یك شکلی تا اینجا اثبات کرده باشیم که اولاً: ریاضیات محض و کاربردی قسمتهای به درد بخور و به درد نخور علم ریاضی نیستند درثانی این دو علم «این دو شاخه ریاضی» کاملاً به‌هم مرتبط هستند درثالث بسیاری ازنظریه‌های اساسی سایر علوم در قرن بیستم تحت‌تأثیر نظریه‌های قدیمی یا جدید ریاضی واقع شده و اصلاً بر اساس آن نظریه‌ها طراحی شده‌اند. همچنین اینکه دنیای امروز در زمینه‌های صنعتی و علمی به مقدار بسیار زیادی متکی به علم ریاضی است. یعنی امروز علوم پیش‌از هر روزی رو به ریاضی شدن دارد و در دنیای غرب واقعاً ملاك موفقیت یك علم امروزه میزانی است که به ریاضی شدن نزدیك شده باشد. علومی مثل علوم سیاسی یا زبان‌شناسی و اقتصاد که جای خود دارد حتی علوم انسانی خیلی دور از مباحث ریاضی هم به سمت ریاضی شدن حرکت کرده‌اند. تجربه ریاضی شدن این علوم بسیار مفید بوده و در عرض مدت کوتاهی پیشرفتهای بسیار اساسی در آن علوم ایجاد شده است. به همین خاطر بقیهٔ علوم هم هر روز تلاش می‌کنند تا در ریاضی کردن محتوا و شکل فرمولهایی که در آن علوم وجود دارد از هم گوی سبقت را بربایند. نکته دیگر اینکه

اگر بنا باشد ما به خودکفایی علمی وصنعتی بیندیشیم آنجایی که واقعاً کلید اصلی را در اختیار مـا می‌گذارد علم ریاضی است. متأسفانه علم ریاضی درکشور ما به مقدار خیلی زیاد با بی مهری روبرو است. من بسیار خوشحال هستم کـه لااقل درآموزش و پرورش گرایشی در عرض چند سالهٔ اخیر نسبت به تقویت علم ریاضی بوجود آمده و تا حدی هـم موفق است. دریکی از گزارشهایی برادرمان آقای دکترحدادکه در شورای عالی آموزش‌وپرورش دادندکه بسیار نگران کننده بود، تعداد دانش‌آموزانی مطرح گردیده بودکه رشتهٔ ریاضی فیزیك را انتخاب کرده‌بودند. در عرض سالهای ۵۳ـ۵۴ به‌بعدتا۵۹ـ۶۰ بسیارگرایش نگران‌کننده‌ای وجود داشت. مقدار زیاد این گرایشات ناشی از دو چیز است مطلب اول اینکه ما نتوانستیم ریاضیات راآن طورکه هست بشناسیم و بشناسانیم، و مطلب دوم اینکه تفکرات کاربردگرایانه که‌درجای خود خوب ومثبت است در بسیاری از زمینه‌هایی که حتی در مورد علوم پایه می‌خواهند تصمیم گیری، بکنند حاکم شده است. لذا باید با هردوی اینها در دو موضوع مختلف و بـه دو شکـل مختلف مبارزه شود. خوشبختانه در سالهای اخیر درآموزش‌وپرورش لااقل مقداری این مسئلـه جبران شده وآمـار دانش‌آمـوزان سالهای اخیر مقداری امیدوارکننده است. در ارتباط به‌گرایش ریاضی در دانشگاهها وضع بسیار بد است شاید مثلاً از هر ۱۰۰ نفری کـه رشتهٔ ریاضی را انتخاب کـرده‌اند ۴ یا ۵ نفر ازآنها با علاقه رشتهٔ ریاضی را انتخاب کـرده‌اند. اکثراً رشتهٔ ریاضی را انتخاب کـرده‌اند چون متأسفانه در رشته‌های دیگـر قبول نمی‌شده‌انـد و این بـاعث یـك تنزل بسیار شدیـد در سطح ریاضیات دانشگاهی کشور شده امیدواریم که اینهم با اقداماتی کـه انجام می‌شود وآینده نگریهایی کـه وزارت فـرهنگ و آموزش عالی و دانشگاهها خواهند داشت به یك شکلی جبران شود. به هرحال جمع‌بندی بحث ما این است که ما در ارتباط بـا اهمیت و ارزش علم ریاضی، چه ازآن جهت کـه ریاضی است و چه ازآن جهت کـه کاربردهای اساسی در علوم دیگر دارد نباید به هیچ عنوان دچار شك‌وتردید شویم. اگر امروز هم شاخه‌هایی از ریاضیات هست کـه مورد استفادهٔ علوم قرار نگرفته یـا نمی‌گیرد این به واسطه بی اهمیت بودن یا ضعیف آن شاخه‌هـای ریاضی نیست بلکه شاید بـه خاطر عقب بودن سایر علوم است و این فقط ادعـای من به عنوان کسی کـه به ریاضی علاقمند هستم نیست، بلکه نگاهی به تاریخ ریاضی این را نشان می‌دهدکـه در زمـان آپولون هیچ کسی حدس نمی‌زد ۱۸۰۰ سال بعد ریاضی آپولون مورد استفاده قرار بگیرد. در زمان کیلی هیچ‌کس حدس نمی‌زدکه ۷۰ـ۶۰ سال بعد ماتریسها با آن شکل در دنیای واقع ظاهر شوند. در زمان گالوا، خود او ودیگران هیچ وقت پیش‌بینی نمی‌کردندکه نظریه گروههای او یـك ابـزار اساسی در طـرح بسیاری از مسائل علـوم و تکنولوژی امروز بشود. این است کـه ما امیدوار هستیم کـه خواهران و برادرانی کـه حرفه‌شان، حرفه ریاضی خواندن و ریاضی تدریس‌کردن است با وقوف بر این مسائل، این مسائل را بتوانند در سطح‌کشور بـاز بکنند، مطرح بکنند و محیطی برای بحث و بررسی در اطراف علـم ریاضی ایجاد بکنند و بهترین محیط هم همان محیطهای دبیرستانی است. یادم می‌آید که موقعی واقعاً بهترین شاگردان دبیرستان بدون هیچ تردیدی ازهمان سال چهارم‌آن موقع (سال دهم) تصمیم‌شان بر این بود که ریاضی بخوانند وتا آخر هم ریاضی‌خوان باقی می‌ماندند.

درکنکورهای ۲ و ۳ سالهٔ اخیر بسیاری از شاگردان رتبه بالای رشته‌های علوم‌تجربی دانش‌آموزان رشته ریاضی هستند. از یك نظرجای خوشحالی است و نشان دهنده قدرت ریاضیات است و اینکه‌کسی ریـاضی بخواند واقعاً اگـر روزی تصمیم بگیرد در یـك جـای دیگـر تحصیل‌کند قدرت‌آن را دارد هما نطورکـه تاریخ ریاضی‌آن را نشان داده است. من یـادم هست‌که یك سال (شاید یك سال قبل یا دو سال قبل) شاگرد اول‌کل رشتهٔ علوم تجربی فارغ‌التحصیل رشتهٔ ریاضی فیزیك بود. از نظر رتبه‌بندی هـم شما رتبه‌هـای بالای دانشگاههای خوب را در رشتهٔ پزشکی نگاه بکنید بسیاری ازآنها دانش‌آمـوزان رشته ریـاضی فیزیك هستند این از یك نظر جـای خوشحالی است‌وازیك نظرجای نگرانی، که چرا دانش‌آموزی که سه سال پیش با علاقه رشته ریاضی را انتخاب‌کرده امروز برای انتخاب رشته در دانشگاه رشته تجربی یا رشته پزشکی را انتخاب می‌کند. لذا امیدوار هستیم که ما بتوانیم در ارتباط با طرح این مباحث وآشنا کردن اندیشمندان و علما و مسئولین مملکت به این مباحث قدمهای ولوکوچك برداریم و انشاءالله همین قدمهای‌کوچك منجر به ایجاد یك جریان علمی در جهت تقویت ریاضیات درکشور باشد. خیلی متشکرم از حوصله‌ای که برای تحمل این صحبتها کردید.

●

بررسی علل افت ریاضی

گروه ریاضی دفتر
تحقیقات و برنامه‌ریزی
وزارت آموزش‌وپرورش

مقدمه

بررسیهای انجام شده تا سال ۱۳۶۲ نشان داده است که تعداد دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی هر سال نسبت به سال قبل کمتر شده و از ۲۹ درصد به ۱۲ درصد سال تحصیلی ۵۲–۵۳ رسیده و درسال ۱۳۶۲ این رقم به ۷ درصد تقلیل یافته است. از طرفی تعداد دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی در استانهای محروم بقدری کم است که در آینده تأمین نیروی انسانی لازم وکافی وکارآمد و بومی درزمینهٔ مذکور امکان‌پذیر نخواهد بود. برای مثال تعداد دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی استان ایلام در سال تحصیلی ۶۱–۶۲ دوازده نفر و در استان هرمزگان ۲۵ نفر بوده است.

برای کشوری که مصمم است در همهٔ زمینه‌ها خودکفا شود شناخت مسائل مربوط به نیروی انسانی وکشف و پرورش استعدادها و هدایت آنها از اهم مطالبی است که باید مورد توجه قرارگیرد زیرا تأثیر تعلیم‌وتربیت در رشد اقتصادی و ایجاد تحول در نهادهای اجتماعی – اقتصادی و سیاسی روشن و انکارناپذیر است در واقع آموزش‌وپرورش خود از سرمایه‌های اساسی و زیربنایی جامعه به شمار میرود و لزوم توجه به روند درست این سرمایه ارزنده و مهم به خوبی محسوس می‌باشد گرایش یا عدم‌گرایش حساب نشده و نامتناسب دانش‌آموزان به رشته‌ای از رشته‌های تحصیلی موجبات اتلاف منابع مالی و نیروهای انسانی را فراهم می‌سازد، زیراکه چرخهای اقتصادی جامعه جز با جایگزینی صحیح و متناسب نیروهای کارآمد و متعهد و مسئول به‌گردش در نخواهد آمد.

مسئله روی گرداندن دانش‌آموزان از رشته‌ای و یا گرایش آنها به رشتهٔ دیگر (بدون توجه به میزان استعدادها و توانشهای آنها) امری است که باید مورد بررسی دقیق علمی وچاره‌جوئی قرار گیرد. به عبارت دیگر، باید علتها شناخته شوند و هدایت دانش‌آموزان به ادامه تحصیل در رشته‌های مختلف به مفهوم دقیق آن صورت پذیرد. برای این منظور درسال ۶۲ دفتر تحقیقات کمیسیونی متشکل از اساتید دانشگاه و صاحب‌نظران تشکیل داد وکمیسیون مذکور طی جلسات و بحث وگفتگوهای بسیار به این نتیجه رسیدکه با استفاده از روشهای آماری و علمی بویژه شیوهٔ پرسشنامه علل تقلیل دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی راکشف و برای رفع آن ارائه طریق شود. برنامه‌کار کمیسیون شامل دو قسمت کوتاه و دراز مدت بود. هدف برنامه کوتاه‌مدت بالا بردن تعداد داوطلبان رشتهٔ ریاضی از طریق اتخاذ شیوه‌های مذکور در ذیل بوده است:

۱) انتشار مجلهٔ رشد ریاضی به منظور جلوه‌گر ساختن اهمیت این رشته؛
۲) برگزاری مسابقات ریاضی و اهداء جوائز به برندگان مسابقه به منظور ... ؛
۳) ترتیب دادن کلاسهای کارآموزی و بازآموزی برای معلمان ریاضی به منظور تأمین معلمین کارآمد ریاضی برای پایهٔ اول رشتهٔ علوم تجربی و ریاضی؛
۴) ترتیب دادن سخنرانیهائی از طرف مسئولین و تأکید بر موازنه و تعادل توزیع نیروی انسانی مورد نیازجامعه بخصوص طرح مسئله در خطبه‌های نماز جمعه از طرف ائمه محترم جمعه؛
۵) ارسال یک طرح چاره‌اندیشی برای مشکلات دانش‌آموزان در ادامه تحصیل در رشته ریاضی به ادارات کل آموزش‌وپرورش به‌منظور تشویق دانش‌آموزان به ادامه تحصیل در رشته ریاضی و فراهم‌آوردن امکانات لازم برای اینکار؛
۶) اجرای یک طرح بررسی از طریق نظرخواهی به منظورکشف برخی مسائل و تهیه فرضیاتی جهت اجرای طرح تحقیق علمی همه‌جانبه به منظور تحکیم اساس هدف و برنامهٔ دراز مدت، لذا اولین بررسی با همکاری واحد ارزشیابی وکارشناسان ریاضی دفتر تحقیقات با طی مراحل فنی وگسترده به وسیلهٔ اعمال هفت پرسشنامه برای نظر خواهی از دانش‌آموزان راهنمائی و متوسطه و دبیران دو مقطع مذکور صورت گرفته است.

تعدادکل دانش‌آموزانی که مورد نظر خواهی قرارگرفته‌اند ۲۲۷۸ نفر و اسامی مناطق و مدارس انتخاب شده به پیوست ارائه شده است.

نتایج بررسی مذکور به صورت ارقام درصدی در جداولی که از نظر خوانندگان می‌گذرد مندرج است و تفسیر داده‌ها نیز جزء‌به‌جزء درکل نشان دهندهٔ عمل مجریان این بررسی است.

امید است حاصل این فعالیت گسترده و مورد نظر کمیسیون فنی ریاضی در جهت رفع مسائل و مشکلات مربوط به رشته ریاضی به طور اخص و سایر رشته‌ها بطور اعم راه‌گشا باشد و برنامه ریزان را مفید افتد.

موضوع، هدف، برنامه، روش تحقیق و مراحل اجرا

الف) موضوع تحقیق، نظر خواهی از دانش‌آموزان و دبیران درمورد علل عدم‌گرایش دانش‌آموزان به‌رشته ریاضی؛

ب -) هدف، بررسی علل عدم استقبال دانش‌آموزان از رشته ریاضی وکاهش ثبت‌نام آنان در این رشته،

ج) برنامه و روش تحقیق و مراحل اجرا.

گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی درسی با تشکیل شوراهای متعدد در مورد علل عدم‌گرایش دانش‌آموزان به رشته ریاضی به بررسی پرداخت، در این شوراها جهت مقابله باکاهش ثبت‌نام دانش‌آموزان در رشته ریاضی ازعواملی مانند مسابقه ریاضی وتشویق دانش‌آموزان استفاده شد. همچنین پس‌از بررسیهای متعدد مسئله نظر خواهی در زمینه علل عدم ثبت‌نام دانش‌آموزان با استفاده از پرسشنامه مورد توجه قرار گرفت.

مراحل اجرا

۱) تهیه وطرح تحقیق در زمینه علل عدم‌گرایش دانش‌آموزان به رشته ریاضی؛

۲) تهیه و تدوین پرسشنامه‌های مقدماتی در ۷ نوع؛

- پرسشنامه شماره ۱ مخصوص دبیران ریاضی دبیرستانها؛
- پرسشنامه شماره ۲ مخصوص نظرخواهی ازدبیران مدارس راهنمائی؛
- پرسشنامه شماره ۳ مخصوص نظرخواهی از دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان رشته ریاضی و فیزیك؛
- پرسشنامه شماره ۴ مخصوص نظرخواهی از دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان رشته علوم تجربی؛
- پرسشنامه شماره ۵ مخصوص نظرخواهی از دانش‌آموزان سال اول دبیرستان رشته علوم تجربی و ریاضی؛
- پرسشنامه شماره ۶ مخصوص نظرخواهی از دانش‌آموزان سال اول دبیرستان رشته علوم انسانی؛
- پرسشنامه شماره ۷ مخصوص نظرخواهی از دانش‌آموزان سال سوم راهنمائی؛

۳) انتخاب مدارس نمونه به صورت تصادفی در سطح تهران جهت پیش‌آزمون به شرح زیر:

- از بین مدارس راهنمائی در سطح تهران ۱۰ مدرسه انتخاب شدکه ۵ مدرسه مربوط به دانش‌آموزان دختر و ۵ مدرسه مربوط به دانش‌آموزان پسر بوده به این ترتیب ۵ کلاس پسرانه و ۵ کلاس دخترانه به طور نمونه انتخاب شدند که از هر کلاس ۱۰ دانش‌آموز به صورت تصادفی مورد نظرخواهی قرار گرفتند.
- در سطح دبیرستان نیز از هر رشته تحصیلی در سال اول و دوم نظری ۵ کلاس نمونه پسرانه و ۵ کلاس نمونه دخترانه انتخاب که از هر کلاس ۱۰ نفر به صورت تصادفی پاسخگوئی پرسشنامه‌های خاص خود بودند.
- دبیران ریاضی کلاسهای منتخب، نمونه پاسخگوی پرسشنامه دبیران بودند.

۴) تکمیل پرسشنامه‌های مقدماتی با راهنمائی افراد اعزامی.

۵) استخراج‌نتایج پرسشنامه‌های مقدماتی به‌منظور رفع نقائص و تهیه پرسشنامه‌های نهایی.

۶) تهیه پرسشنامه‌های نهایی.

۷) انتخاب دانش‌آموزان نمونه در سطح‌کشور بشرح زیر:

الف: جامعه‌آماری

دانش‌آموزان مدارس راهنمائی و دبیرستانی و معلمین ریاضی‌آنان جامعه‌آماری این تحقیق را تشکیل می‌دهند.

ب : نمونه‌آماری

می‌دانیم‌که تعداد اعضاء نمونه، به خصوصیات جمعیت موردآزمایش و هدف و منظور از انجام تحقیق بستگی تام دارد، لکن در تعیین اندازه نمونه می‌توان چهار عامل را مؤثر دانست‌که عبارتند از:

- درجه تشابه و تجانس جمعیت موردآزمایش؛
- نوع نمونه‌گیری؛
- بودجه و وقت و امکانات؛
- نحوه تجزیه تحلیل اطلاعات گردآوری شده.

برای محاسبه اندازه نمونه‌های تصادفی نیز اتخاذ تصمیم قبلی در سه مورد زیر مورد نیاز است.

- میزان دقت در برآورد خصوصیات جمعیت موردآزمایش به وسیله اطلاعاتی‌که از نمونه به دست می‌آید؛

- میزان ریسك قابل قبول بـرای برآورد نادرست و تعیین محیط اطمینان؛
- انحراف معیار جمعیت موردآزمایش.

درصورت در دست نبودن عوامل فوق می‌توان ازجدول اندازه نمونه‌های تصادفی استفاده‌کرد.

در این تحقیق ابتدا با طبقه‌بندی نمودن استانهای‌کشور به طریقی که هر سه استان مشابه در یك ردیف قرارگیرند اقدام شد و سپس به طریق تصادفی از هر یك از رده‌هـا یك استان انتخاب‌که با احتساب تهران ۹ استان انتخاب شدند. سپس به طریق تصادفی ۲ منطقه‌آموزشی از هراستان انتخاب‌که با جمع مرکز هر استان، ۳ منطقه‌آموزشی در هـر استان انتخاب شد. در مرحله دوم به طریق نمونه‌گیری تصادفی یك‌کلاس پسرانه شهری و یك‌کلاس پسرانه روستائی،همچنین یك‌کلاس دخترانه شهری و یك‌کلاس دخترانه روستائی در هر منطقه انتخاب شد، که در صورت نبودن‌کلاس مورد نظردرآن منطقه، فرضاً نبودن کلاس روستائی رشته مورد نظر، بـه حذف این نمونه اقدام شد. تعداد ۱۵ نفر دانش‌آموز از هرکلاس انتخاب شده بـه طور تصادفی مورد نظر خواهی قرارگـرفتند. به این ترتیب تعداد ۲۷۵۵ نفر دانش‌آموز و دبیر مورد نظر خواهـی قرار گرفتند.

۸) تهیه دستورالعمل نحوه انتخاب دانش‌آموز درکلاس نمونه انتخاب شده پرسشنامه؛
۹) تفکیك پرسشنامه‌های دریافتی در ۷ نوع.
۱۰) تفکیك هـر دسته پرسشنامه (۷ نوع بالا) در چهار دسته دختر و پسر، شهر و روستا.
۱۱) شماره‌گذاری پرسشنامه‌ها و حذف پرسشنامه‌های سفید.
۱۲) استخراج پرسشنامه‌های هر دسته و تعین فراوانی.
۱۳) جمع پرسشنامه‌های هـر دسته بـه منظور بـدست‌آوردن جمع کل.
۱۴) تجربه و تحلیل اطلاعات.
۱۵) ارائه‌گزارش.

در ارائه‌گـزارش ابتدا هر دسته پرسشنامه بـه صورت جداگانه تفسیر شده است وسپس سؤالات مشترك پرسشنامه‌های دانش‌آموزان و پرسشنامه‌های دبیران درکنار هـم قرار داده شده و مقایسه شده است. و سپس نتایج به دست‌آمده ازکـل تحقیق ارائه شده است. سؤالات باز درکلیه پرسشنامه‌هـا به علت اینکه هیچ مطلب جدیدی را منعکس نکرده بودند وتکرار سایر سؤالات پرسشنامه بودند، حذف شده است.

نتایجی از پرسشنامه‌های دبیران

- در مجموع اکثریت دبیران دبیرستان و راهنمائـی نظـام آموزشی موجود را بهتر یـا خیلی بهتر از قبل دانسته‌اند. لکن صرف اظهارنظر نمی‌تواند برای رد یا تأئید یك نظام مورد نظر قرارگیرد. برای نشان دادن اهمیت فرآیند یك نظام‌آموزشی لازم است میزان‌کشف و پرورش استعدادها و استفاده مؤثر از توانائی‌هـا در جهت حصول هدفهـای رفتاری و عملی سودمند بـرای جامعه و فرد دقیقاً بررسی گردد.
- اکثریت دبیران‌آمادگی لازم جهت پیاده شدن نظام جدید را داشته‌اند.
- باوجودی‌کـه اکثریت گفته‌اند نظام‌آموزشی موجود بهتر است وآنها هم برای پیاده شدن برنامه جدیدآمادگی‌لازم را داشته‌اند ولی به نظر ۵۲ درصد دبیران دبیرستان و ۴۶ درصد دبیران راهنمائی مجموعـاً ۴۹ درصد دبیران نظام آمـوزشی موجود کارآیی لازم را ندارد. بـاوجود این سنجش میزان کارآیـی نظام‌آمادگـی دبیران، و مقایسه در دو نظام احتیاج به تحقیق دقیق و علمی داردکه درصورت لزوم بایستی انجام شود.
- اکثریت دبیران نظر داده‌اندکه در منطقه، دبیر متخصص و با تجربه ودلسوز به‌تعدادکافی وجود ندارد و این‌می‌تواند در افت دانش‌آموزان مؤثر باشد.
- اکثریت دبیران راهنمایی وحدود نیمی ازدبیران دبیرستان درکلاسهای بازآموزی شرکت‌کرده‌اند ولی تعدادکمی‌از آنها نسبت به مفید بودن برنامه‌آمـوزشی دوره نظرکاملاً مثبتی داشته‌اند.
- بیش‌از نیمی از دبیران دبیرستان فارغ‌التحصیل دانشگـاه تربیت‌معلم نیستند و این نشانگر دبیران‌آزادی است‌کـه احتمالاً متخصص تدریس در رشته ریاضی دبیرستان نیستند. در مورد دبیران راهنمائی ۱۹ درصدآنان چنین وضیعتی را دارند. مجموعاً فقط ۳۷٪ کل دبیران برنامه ریاضی دانشگاه

تربیت معلم را در حد زیاد و خیلی زیاد موفق دانسته‌اند.

- اکثر دبیران معتقدندکه برای تدریس ریاضی علاوه برداشتن مدرك تحصیلی رشته ریاضی احتیاج به دانستن روش تدریس ریاضی نیز وجود دارد.
- ۵۹ درصد دبیران دبیرستان و راهنمائی یعنی اکثریت آنان معتقدندکه دانش‌آموزان با درکی ضعیف وارد دورهٔ بعد می‌شوند. یعنی دانش‌آموزانی که به دوره راهنمائی وارد می‌شوند دارای درك ضعیف از ریاضی هستند همینطور در دبیرستان.
- ۴۰ درصد دبیران راهنمایی و ۲۱ درصد دبیران دبیرستان حجم دروس ریاضی دورهٔ خود را زیادتر از حد توان دانش‌آموزان ذکر کرده‌اند. ۵۹ درصد دبیران راهنمائی و ۶۰ درصد دبیران دبیرستان در حد توان و ۲ درصد دبیران راهنمائی و ۴ درصد دبیران دبیرستان پائین‌تر از حد توان دانش‌آموزان ذکر کرده‌اند. در مجموع بیش‌از نیمی‌دبیران‌حجم‌دروس دوره را درحد توان دانش‌آموزان ذکر کرده‌اند.
- ۵۴ درصد دبیران راهنمائی حجم دروس این دوره را بیشتر از حد توان دانش‌آموزان تشخیص داده‌اند.
- ۷۶ درصد دبیران دبیرستان و ۷۱ درصد دبیران راهنمایی معتقدندکه مسائل علمی و کاربردی به اندازه کافی در کتابهای ریاضی مربوط به‌آنها وجود ندارد.
- ۵۳ درصد دبیران دبیرستان و ۶۴ درصد دبیران راهنمائی معتقدندکه کتابها از انجام پیوستگی و گیرائی لازم برخوردار نیستند.
- ۴۲ درصد دبیران دبیرستان و ۶۳ درصد دبیران راهنمائی معتقدندکه کتابها به موضوعات پراکنده پرداخته‌اند.
- اگر چه اکثریت دبیران اظهار داشته‌اندکه‌کتب علمی غیر درسی مطالعه می‌کنند ولی گویا کتاب علمی به اندازه‌کافی در اختیار آنان نیست، زیرا اکثریت پاسخ داده‌اندکه مجلات وکتب غیر درسی علمی به قدرکافی در اختیار ندارند، لذا لازم است در این مورد اقدام و رفع کمبود به عمل آید.
- ۹۱ درصد دبیران، یعنی اکثریت آنان اظهار داشته‌اندکه امکان بازدید از مراکز علمی وفنی را دراختیار نداشته‌اند.
- اکثریت دبیران مشکلات اقتصادی را کم‌وبیش در پائین آمدن کیفیت تدریس خود مؤثر دانسته‌اند.
- اکثریت دبیران وجود امکانات برای مطالعه و تحقیق را به میزان‌زیاد دربالا بردن کیفیت تدریس خود مؤثردانسته‌اند.
- در حالیکه دبیران راهنمائی امکان ادامه تحصیل را در بالا بردن کیفیت تدریس خود از سایر عوامل مؤثر دانسته‌اند دبیران دبیرستان اعتلای وضع اقتصادی را مؤثرترین عامل دانسته‌اند.
- اکثریت قابل توجهی ازدبیران برگزاری مسابقات ریاضی را در جلب دانش‌آموزان برای ادامهٔ تحصیل در رشته ریاضی کاملاً مؤثر دانسته‌اند.
- اکثریت قابل توجهی از دبیران استفاده از تك‌ماده را در تضعیف پایه ریاضی دانش‌آموزان ومآلاً عدم‌گرایش به ادامه تحصیل در رشته ریاضی مؤثر دانسته‌اند.
- اکثریت دبیران اختلاف درآمد یك پزشك با یك مهندس و تحصیل‌کرده رشته ریاضی را در عدم استقبال دانش - آموزان از رشته ریاضی مؤثر دانسته‌اند.
- اکثریت (۹۸) دبیران مهارتهای ویژه در امر تدریس را علاوه برداشتن مدرك تحصیلی ریاضی مؤثر دانسته‌اند.

نتایج پرسشنامه‌های دانش‌آموزان

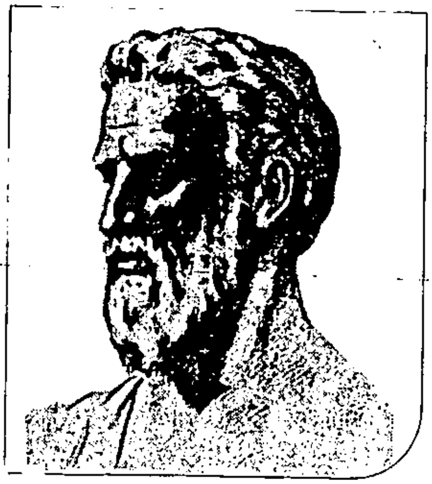
- در مورد دلیل انتخاب رشته تحصیلی بالاترین درصدها مربوط به علائق دانش‌آموزان بوده است و دانش‌آموزان رشته‌های تجربی و ریاضی از ۷۸ تا ۸۶ درصدآنها به خاطر علاقه رشته تحصیلی خویش را انتخاب‌کرده‌اند، ۳۲ درصد دانش‌آموزان سال اول علوم انسانی نیز به خاطر علاقه رشته تحصیلی خویش را انتخاب‌کرده‌اند اما عوامل دیگر مثل نبودن رشته دیگردرنزدیك منزل، توصیه دیگران و دلایل دیگر نیز در انتخاب‌آنها بی تأثیر نبوده است ۸۰۰ درصد از دانش‌آموزان سال سوم راهنمائی نیز علاقه خود را در انتخاب رشته مهم دانسته‌اند. البته بایستی توجه داشت‌که علاقه براثر آگاهی همه‌جانبه دچار نوسان می‌شود والزاماً علائق با استعداد و توانایی هماهنگی‌کامل ندارد. به‌این جهت چنین استنباط می‌شودکه دانش‌آموزان

به راهنمائی به مفهوم علمی وفنی آن برای یافتن بهترین و روشن‌ترین آینده تحصیلی نیاز دارند.

- اکثریت دانش‌آموزان علوم انسانی به خاطر نیاوردن حد نصاب نمره، رشته ریاضی و رشته تجربی را انتخاب نکرده‌اند. در حالیکه اکثریت دانش‌آموزان سال دوم ریاضی به خاطر عدم علاقه به رشته تجربی، رشته ریاضی را برگزیده‌اند. ۲۵درصد دانش‌آموزان سال‌دوم تجربی به خاطر مشکل بودن رشته ریاضی و نداشتن استعداد لازم برای انتخاب این رشته و ۲۵ درصد هم به خاطر نبودن رشتهٔ ریاضی در محل سکونت خویش، رشته تجربی را انتخاب‌کرده‌اند و ۳۵ درصدآنان نیز علت انتخاب رشته تجربی را عدم علاقه به‌رشته ریاضی ذکر کرده‌اند. نتیجتاً بهتر است که هم به‌گسترش کلاسهای ریاضی در مناطق اقدام شود و هم روشهای‌آموزش ریاضی به‌گونه‌ای باشد که موجب جذب دانش‌آموزان شود.
- از ۴۹ تا ۸۶ درصد دانش‌آموزان رشته تحصیلی خود را به دلیل خدمت بیشتر به جامعه اسلامی انتخاب‌کرده‌اندکه بیشترین درصد هر گروه بوده است.
- بیش‌از ۸۰ درصد دانش‌آموزان رشته تحصیلی خود را با مشورت‌کردن انتخاب‌کرده‌اندکه بیشترین درصد را، مشاوره با خانواده به خود اختصاص داده است. بایستی توجه داشت‌که مشورت به خودی خود چندان مفید نمی‌تواند باشد، مگر اینکه مشاور ذیصلاح بوده واز فنون و روشهای مشاوره آگاه باشد و توانایی‌های دانش‌آموزان را درنظر گیرد. آیا خانواده‌ها چنین نگرشهایی را داشته‌اند؟
- دانش‌آموزان هر رشته ارزش اجتماعی ادامه تحصیل در رشته خود را برتر دانسته‌اند، جز رشته علوم انسانی‌که ۶ درصدآنها رشته فرهنگ و ادب و ۱۶ درصد رشته اقتصاد اجتماعی را به خاطر ارزش اجتماعی‌آن انتخاب‌کرده‌اند درحالی‌که ۳۹ درصد ادامه تحصیل در رشته علوم تجربی و ۲۲ درصد رشته ریاضی فیزیک‌را دارای ارزش اجتماعی تلقی‌کرده‌اند. دانش‌آموزان سال اول ریاضی فیزیک نیز ارزش اجتماعی بیشتررا به علوم تجربی داده‌اند. اکثریت دانش‌آموزان سال سوم راهنمائی رشته تجربی را دارای ارزش اجتماعی بیشتر می‌دانند.
- تقریباً درصد بیشتری از هر گروه از دانش‌آموزان آینده اقتصادی درخشنده‌تر را در رشته انتخابی خود تشخیص داده‌اند بیشترین درصد دانش‌آموزان سال سوم راهنمائی رشته تجربی را درآینده اقتصادی درخشنده‌تر و مؤثرتر میدانند.
- ۲۵ درصد دانش‌آموزان رشته ریاضی، گروه پزشکی را برای ادامه تحصیل انتخاب‌کرده‌اند و در مورد سایر گروهها رشته‌های پزشکی برای ادامه تحصیل بیشترین درصد هر گروه از دانش‌آموزان را به خود اختصاص داده است. اگرچه دانش‌آموزان علوم انسانی عملاً نتوانسته‌اند رشته علوم تجربی و ریاضی را انتخاب‌کنند، اما برای ادامه تحصیل بیشترین درصد انتخاب را به رشته پزشکی اختصاص داده‌اند و این نشان می‌دهدکه‌آنها علاقه‌ای به رشته تحصیلی انتخابی خویش ندارند و نیاوردن معدل لازم جهت رشته‌های دیگرآنها را به این سمت‌کشانده است. با توجه به نیازکشور به متخصصین و علاقه دانش‌آموزان به رشته‌های تجربی و ریاضی، بایستی‌کوشش شودکه استعداد دانش‌آموزان در جهت مطلوب پرورش یابد و راهنمائی شغلی صورت‌گیرد.
- ۴۳ درصد دانش‌آموزان سال دوم تجربی و ۴۶ درصد دانش‌آموزان سال اول علوم انسانی نبودن معلم ریاضی خوب در منطقه را در عدم انتخاب رشته ریاضی مؤثر دانسته‌اند.
- دانش‌آموزان سال دوم تجربی به ترتیب درسهای هندسه را با ۲۶ درصد، حساب و جبر را با ۲۲ درصد و ریاضیات جدید را با ۱۳ درصد در عدم انتخاب رشته ریاضی مؤثر دانسته‌اند.
- حجم کتابهای علوم دوره راهنمائی به‌نظر اکثریت دانش‌آموزان (بیش از ۷۰ درصدآنها) متناسب با توانائی دانش‌آموزان است.
- به نظراکثریت دانش‌آموزان سالهای دوم تجربی وریاضی حجم درسهایشان در حد توانائی‌آنهاست.

بقیه در صفحه ۶۵

نگاهی به قضیه فیثاغورث



دکتر جواد بهبودیان بخش ریاضی و آمار ـ دانشکده علوم دانشگاه شیراز

قضیه فیثاغورث بــه روایتی در حدود چهارهزار سال عمر دارد و با توجه به حقایق زیر دارای اهمیت تاریخی می باشد:

الف) درخشندگی قضیه در میان قضایای ریاضی؛

ب) توجه خاص آماتورهای ریاضی و ریاضیدانان حرفه‌ای به این قضیه؛

ج) سادگی و شایستگی قضیه برای پژوهش بیشتر در سطح مقدماتی و عالی.

درسال ۱۹۷۱ درکشور نیکاراگوا ده سری تمبر پست منتشر گردیدکــه روی آنها فرمولهای ریاضی چاپ شده بود. یك سری از این تمبرهــا رابطه فیثاغــورث یعنی $a^2=b^2+c^2$ را، با شرحی کوتاه به زبان اسپانیائی، دربرداشت. اگر دیده بــاشید، پــوستر دوازدهمین کنفرانس ریــاضی کشور هم، در فروردین ماه ۱۳۶۰ در دانشگاه صنعتی اصفهان، با یك شکــل هندسی که به این قضیه مربوط می‌شود مزین گردیده بود.

بنابرایــن بجاست که ما هم به این قضیه زیبا و تاریخی از نو نگاه‌کنیم، تا بدانیم در باره‌آن چه‌کرده‌اند و چــه می‌توان کرد. این مقاله را، به طورکــوتاه، تحت چهار عنوان ارائه می‌دهیم.

۱ــ تاریخچه قضیه

۲ــ اثبات قضیه

۳ــ وارون قضیه

۴ــ تعمیم قضیه.

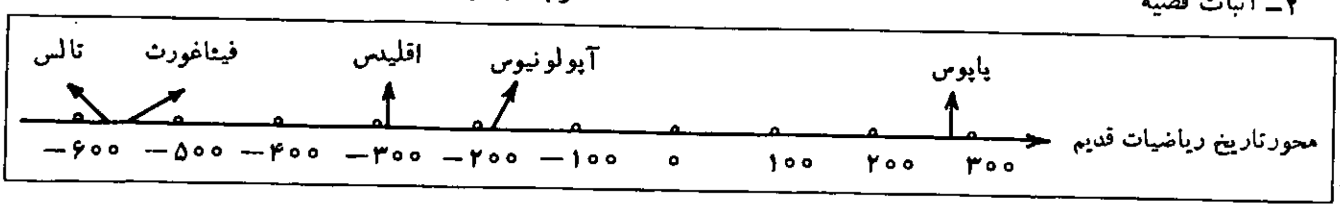
منابعی‌کــه در پایان این مقاله داده شده‌اند، مطالبی درباره این عناوین دربر دارند.

۱ــ تاریخچه قضیه فیثاغورث

تــاریخ پیدایش و اثبات این قضیه هــم مــانند بسیاری از موضوعهای علمی و اجتماعی خالــی از ابهام نمی‌بــاشد. با اینکه قضیه را به‌فیثاغورث نسبت داده‌اند، باستانشناسهای قرن بیستم معتقدندکــه بیش‌از هزار سال قبل‌از میلاد بابلیها از این قضیه اطلاع داشتند، حتی چینیها و هندیها هم با آن آشنا بودند. مصریها هــم در امور مساحی بــا تقسیم یك طناب به ۱۲ پاره برابر مثلثهائی با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ می‌ساختند. با این حال تاریخدانان ریاضی، می‌گــویند به احتمال زیاد نخستین اثبات قضیه از فیثاغورث می‌باشد و در افسانه‌هــا آمده استکــه او بعداز اثبات ، گاوی را قربانی‌کرد.

بــرای اینکه بدانیم رشد و رسائــی ریاضیات در دوران فیثاغورث چگونه بوده است، نگاهی به محور تاریخ ریاضیات قدیم، در شکل زیر، ما راکمك می‌کند.

گــرچه مبادی ریــاضیات مدیون تلاشهای بابلیها، هندیها،



چینیها و مصریها می‌باشد، با این حال یونانیها که در حکمت پیشتاز بوده‌اند در ریاضیات هم سهمی به سزا داشته‌اند. بین سالهای ۶۰۰- و ۵۰۰- ، تالس و فیثاغورث شهرتی بسزا داشتند، فیثاغورث ۵۰ سال جوانتر از تالس، و شاگرد او بود. او بعد از مسافرت به هند و مصر به زادگاهش، شهر ساموس در یونان، بر می‌گردد. ولی به علت تشنج سیاسی مجبور می‌شود که در بندر کروتون در جنوب ایتالیا مقیم گردد. در اینجا «مکتب برادری» را تشکیل می‌دهد و هواداران او ضمن انجام شعائر و آداب مکتبی به فعالیتهای ریاضی و حل مسائل هندسه و حساب می‌پردازند. معمولاً هر چه را در این مکتب کشف می‌کردند به فیثاغورث نسبت می‌دادند واز انفاس قدس او می‌دانستند. پی یر دوسو، تاریخدان علوم، می‌گوید ممکن است این قضیه را هم یکی از هواداران او ثابت کرده باشد ولی به‌جناب استاد نسبت داده باشند. البته، هیچ مدرك معتبری موجود نمی‌باشد تا بتوان چیزی را مدعی شد و آنچه را گفته‌اند يك نوع کورمالی در تاریکیهای قبل از میلاد می‌باشد.

باید گفت که قبل از ظهور اقلیدس، یعنی ۳۰۰ سال پیش از میلاد، هندسه وحساب تاحدودی رشد می‌کند و مطالب پراکنده در باره خطوط موازی و مثلثهای متشابه ثابت می‌شوند. اقلیدس برای اولین بار به اطلاعات هندسی سروسامان می‌دهد و هندسه اقلیدسی را با مهارت کافی پی‌ریزی می‌کند. این اثر ریاضی بزرگترین تحول فکری را ایجاد می‌کند. تا امروز بیش از دو هزار سال از عمر این اثر می‌گذرد و بیش از دوهزار بار به زبانهای مختلف چاپ شده است.

در جلد اول این اثر باستانی، قضیه فیثاغورث قضیه شماره ۴۷ می‌باشد.

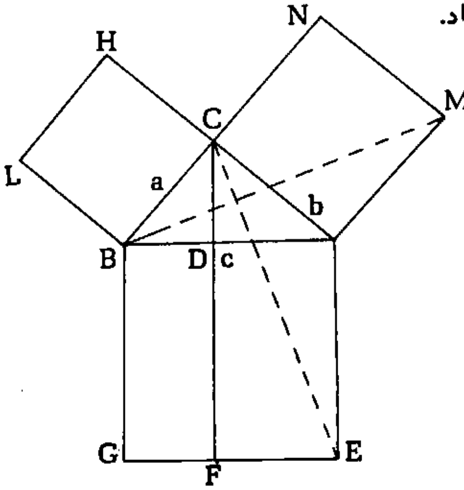
۲- اثبات قضیه فیثاغورث

نخست دو اثبات معروف را مطالعه می‌کنیم.

(۱) اثبات اقلیدس. این اثبات را به طور خلاصه شرح می‌دهیم. در شکل ۱ دو مثلث ABM و ACE برابرند. مساحت مثلث اول برابر با نصف مساحت مربع ACNM و مساحت مثلث دوم برابر با نصف مساحت مستطیل ADFE می‌باشد. در طرف چپ شکل، هم می‌توان دو مثلث دیگر در نظر گرفت. بدین طریق ثابت می‌شود که مساحت مربع روی وتر برابر است با مجموع مساحتهای دو مربع روی اضلاع زاویه قائمه.

به خاطر شباهت شکلی، این اثبات به‌اثبات صندلی عروس یا کلاهك فرانسیس (مؤسسه فرقه راهبان در ۱۲۰۹ میلادی) شهرت دارد.

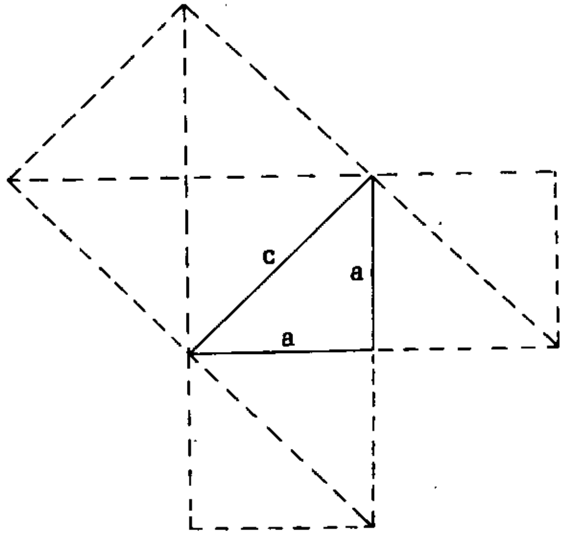
اثبات اقلیدس به خاطر پیچیدگی در شکل مدتهاست که از کتابهای درسی حذف شده است. با این حال کاملاً منطقی و کلی می‌باشد و به یاری آن می‌توان قضیه را در جهات مختلف تعمیم داد.



شکل ۱- اثبات اقلیدس

(۲) اثبات بنگرو ببین. در برابر اثبات اقلیدس، يك اثبات ساده و دیدنی در شکل ۲، برای حالت خاصی که مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه می‌باشد، داده شده است.

این اثبات در آثار افلاطون دیده می‌شود و گویا سقراط آنرا به غلام‌زاده خود تعلیم می‌داده است. به خاطر سادگی، این اثبات را اثبات «بنگرو ببین» می‌نامند.

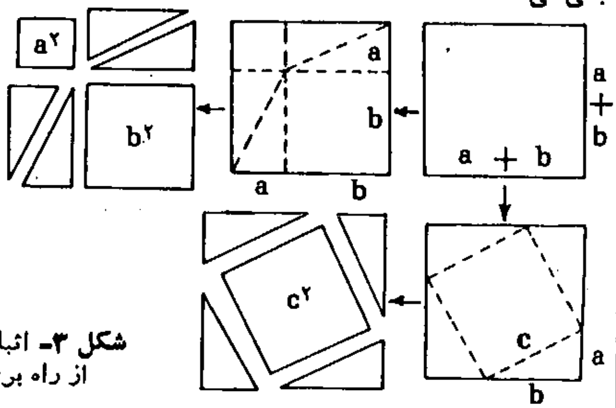


شکل ۲- اثبات بنگرو ببین

در میان این دو اثبات پیچیده و ساده، دهها اثبات دیگر ارائه شده‌اند. در طول تاریخ ریاضی به اثبات هیچ قضیه‌ای به‌اندازه قضیه فیثاغورث توجه نشده است. بهترین گواه کتابی است که در ۱۹۴۰ میلادی توسط اِ اِس لومیس تحت عنوان «قضیه فیثاغورث» با سرمایه شخصی نامبرده منتشر گردید [۷]. این کتاب ۲۸۵ صفحه‌ای، محتوی ۳۶۷ اثبات گوناگون می‌باشد، که به نحوی جالب دسته‌بندی شده‌اند.

اینك چند اثبات ساده را مختصراً شرح می‌دهیم:

(۳) اثبات از راه برش: برای این اثبات، که محتملاً از خود فیثاغورث می‌باشد، به شکل ۳ توجه کنید. در این شکل از دو مربع، هر یك به ضلع $a+b$، از دو راه مختلف چهار مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع a و b برش می‌دهیم. از مربع به مساحتهای a^2 و b^2 و از مربع دوم یك مربع به مساحت c^2 باقی می‌ماند.



شکل ۳- اثبات از راه برش

(۴) اثبات از راه تشابه. در شکل ۴ مساحتهای مثلثهای متشابه BCH و ACH و ABC بترتیب با a^2 و b^2 و c^2 متناسب می‌باشند. اگر مساحت را با S نشان دهیم داریم:

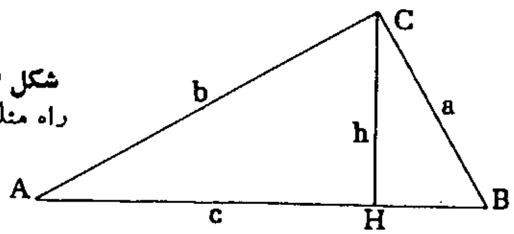
$$\frac{a^2}{S_{BCH}}=\frac{b^2}{S_{ACH}}=\frac{c^2}{S_{ABC}}$$

$$\frac{a^2+b^2}{S_{BCH}+S_{ACH}}=\frac{c^2}{S_{ABC}}$$

$$a^2+b^2=c^2$$

این اثبات هم محتملاً از خود فیثاغورث می‌باشد.

شکل ۴- اثبات از راه مثلثهای متشابه

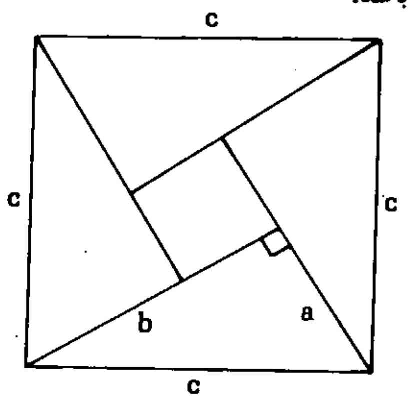


(۵) اثبات جبری. در شکل ۵ داریم:

$$c^2=(b-a)^2+4\left(\frac{ab}{2}\right)$$

$$c^2=a^2+b^2$$

این اثبات از باسکارا، ریاضیدان و منجم هندی، در ۱۱۵۰ میلادی می‌باشد.



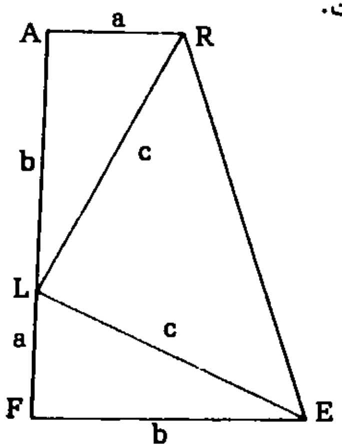
شکل ۵- اثبات باسکارا

(۶) اثبات ذوزنقه‌ای: در شکل ۶ داریم:

$$\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2}=\frac{(a+b)(a+b)}{2}$$

$$c^2=a^2+a^2$$

این اثبات را گارفیلد بیستمین رئیس جمهور آمریکا در ۱۸۷۶ ارائه داده است.

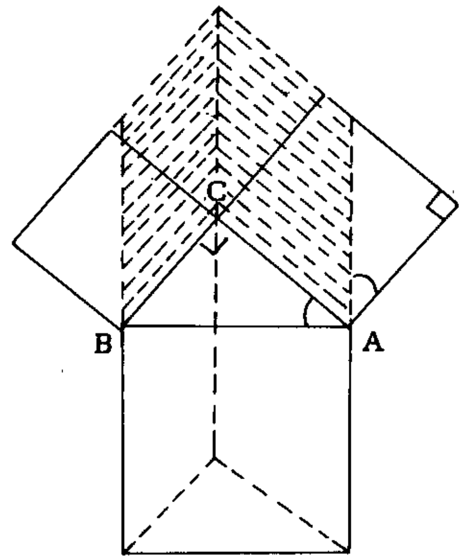


شکل ۶- اثبات ذوزنقه‌ای

(۷) اثبات انتقالی. در شکل ۷ روی اضلاع مثلث قائم‌الزاویه سه مربع بنا می‌کنیم. از مربع روی وتر مثلثی به‌اندازه مثلث مفروض جدا می‌نمائیم ودرعوض مثلث مفروض را به باقی مربع ضمیمه می‌کنیم. بدین طریق دو

متوازی‌الاضلاع به دست می‌آیند. این دو متوازی‌الاضلاع را به قدری انتقال می‌دهیم تا دو متوازی‌الاضلاع هاشور خورده به دست‌آیند. اضلاع بالائی این دو متوازی‌الاضلاع‌ها شور خورده را به قدری انتقال می‌دهیم تا بر اضلاع دو مربع بالائی منطبق شوند. ازاینجا معلوم می‌شود که مساحت مربع روی وتر برابر با مجموع مساحتهای دو مربع روی دو ضلع زاویه قائمه می‌باشد.

این اثبات را به پاپوس نسبت داده‌اند.



شکل ۷- اثبات انتقالی

۳- وارون قضیه فیثاغورث

وارون قضیه فیثاغورث را، کـه به‌آسانی ثابت می‌شود، به صورت زیر بیان می‌کنند:

هرگـاه در مثلثی بـا اضلاع c و b و a داشته بـاشیم $a^2+b^2=c^2$، آن مثلث قائم‌الزاویه می‌باشد. بنابراین خود قضیه و وارون‌آن می‌شود:

قضیه ۱. هر مثلث با اضلاع $a \leqslant b < c$ قائم‌الزاویه می‌باشد، اگر و تنها اگر داشته باشیم $a^2+b^2=c^2$.

حال این پرسش را مطرح مـی‌کنیم: آیـا مـی‌توان مثلث قائم‌الزویه‌ای پیداکـرد، به طوری‌کـه $a^t+b^t=c^t$ و عدد حقیقی $t \neq 2$؟ قضیه زیر به این پرسش پاسخ منفی می‌دهد.

قضیه ۲. فـرض‌کنید در مثلثی بـا اضلاع $a \leqslant b < c$ داشته باشیم:

$$a^t+b^t=c^t$$

این مثلث قائم‌الزاویه می‌باشد، اگـر و تنها اگر داشته باشیم $t=2$.

اثبات. اگر $t=2$، بنا به قضیه ۱ مثلث قائم‌الزاویه می‌باشد. حال فرض‌کنید مثلث قائم‌الزاویه باشد. با استفاده از،

$$a^2+b^2=c^2 \quad \text{و} \quad a^t+b^t=c^t$$

داریم:

$$a^t+b^t=(a^2+b^2)^{\frac{t}{2}}$$

با فرض $b \geqslant a$ و $\frac{b^2}{a^2}=y$ و $t=2h$ می‌نویسیم:

$$a^{2h}+b^{2h}=(a^2+b^2)^h$$

$$a^{2h}(1+y^h)=a^{2h}(1+y)^h$$

$$1+y^h=(1+y)^h$$

تساوی برای هر y در فـاصله $[1, \infty)$ باید درست باشد. با مشتق‌گیری، نسبت به y، از دو طرف این تساوی داریم:

$$y^{h-1}=(1+y)^{h-1}$$

که لازمه‌آن $h=1$ یا $t=2$ می‌باشد.

این قضیه وارون دیگری از قضیه فیثاغورث‌را دربر دارد. در ضمن نشان می‌دهدکـه نمای ۲ در رابطه $a^2+b^2=c^2$ نشانی عمده برای‌قائم الزاویه بودن مثلث می‌باشد.

قضیه ۲ را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

قضیه ۳. فـرض‌کنید در مثلثی بـا اضلاع $a \leqslant b < c$ داشته باشیم:

$$f(a)+f(b)=f(c)$$

به طوری که تابع حقیقی $f \geqslant 0$ پیوسته باشد. این مثلث قائم‌الزاویه می‌باشد، اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$f(x)=kx^2 \qquad k>0$$

اثبات این قضیهٔ‌کلی به‌آنالیز ریاضی پیشرفته نیاز دارد [۶].

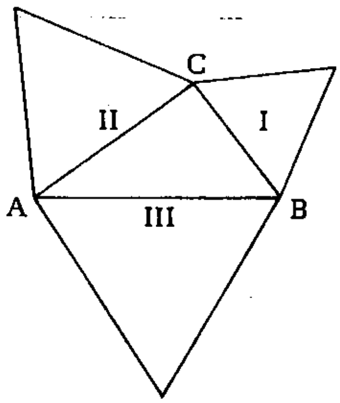
۴- تعمیم قضیه فیثاغورث

قضیه فیثاغـورث را در جهات مختلف تعمیم داده‌اند. در این بخش چند تعمیم را به اختصار مطالعه می‌کنیم.

(۱) تعمیم برای اشکال متشابه روی سه ضلع. تعبیرهندسی رابطه $a^2+b^2=c^2$ این است‌کـه مساحت مربع روی وتر برابر است با مجموع مساحتهای دو مربع روی دو ضلع زاویه

قائمه. این موضوع را می‌توان به‌آسانی برای هر سه شکل متشابه‌که روی سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه بنا شوند تعمیم داد. مثلاً در شکل ۸ داریم:

$$S_{I}+S_{II}=S_{III}$$



شکل ۸- تعمیم برای اشکال متشابه

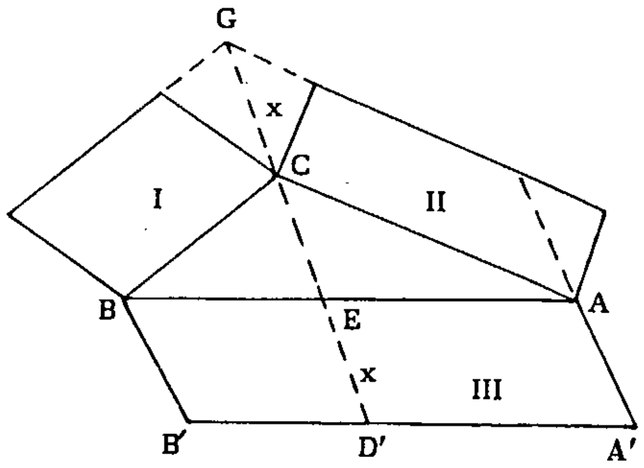
(۲) تعمیم با متوازی‌الاضلاع در مثلث دلخواه. روی سه ضلع مثلث دلخواه ABC سه متوازی‌الاضلاع دلخواه مطابق شکل ۹ بنا می‌کنیم، به طوری‌که:

$$ED = 1C = x \quad \text{و} \quad GD \| AA'$$

با استفاده از مساحتهای چند متوازی‌اضلاع می‌توان نشان داد که:

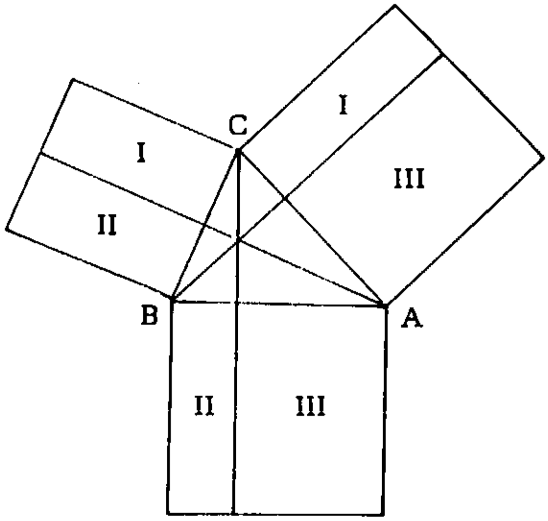
$$S_{I}+S_{II}=S_{III}$$

این تعمیم را به پاپوس نسبت داده‌اند.



شکل ۹- تعمیم با متوازی‌الاضلاع

(۳) تعمیم با اثبات اقلیدس: روی سه ضلع ABC سه مربع بنا می‌کنیم. حال مطابق شکل ۱۰، سه ارتفاع این مثلث را امتداد می‌دهیم تا هر یك از این سه مربع را به دو مستطیل تقسیم می‌کند. مستطیلهای هم شماره در این شکل دارای مساحتهای برابر می‌باشند. مثلا مساحت مستطیل I روی ضلع c برابر است با $cb\cos A$ و مساحت مستطیل I روی b برابر است با $bc\cos A$. در حالت خاصی‌که زاویه A قائمه باشد، قضیه فیثاغورث نتیجه می‌شود.



شکل ۱۰- تعمیم با اثبات اقلیدس

تعمیم بالا را چند سال پیش جی. دی. چاکریان مشاهده کرده است و اخیراً ثابت کرده‌اندکه تنها به وسیله ارتفاعهای مثلث می‌توان مربعهای روی سه ضلع را به مستطیلهای دو به دو برابر تقسیم کرد* [۳].

(۴) تعمیم رابطه فیثاغورث. مثلث قائم‌الزاویه ABC را با $a \leqslant b < c$ درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم h ارتفاع نظیر c باشد. اگر مساحت مثلث را به دو طریق پیدا کنیم و از رابطه $a^2+b^2=c^2$ استفاده نمائیم داریم:

$$ab=ch$$

$$a^2b^2=c^2h^2$$

$$a^2b^2=(a^2+b^2)h^2$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$$

آخرین رابطه از رابطه فیثاغورث نتیجه می‌شود، اما قضیه زیر نشان می‌دهد که این رابطه معادل رابطه فیثاغورث نمی‌باشد. از اینرو آنرا تعمیم رابطه فیثاغورث می‌نامیم. به طور خلاصه در هر مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\hat{C}=90^\circ \Leftrightarrow a^2+b^2=c^2$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$$

قضیه ۴. فرض کنید در مثلث ABC داشته باشیم $a \leqslant b$ و h ارتفاع نظیر ضلع c باشد. اگر تعمیم رابطه فیثاغورث برقرار باشد، آنگاه $\hat{B}-\hat{A}=90^\circ$ یا $\hat{B}-\hat{A}=90^\circ$.
در حالت دوم مثلث را شبه مثلث قائم‌الزاویه می‌نامیم.

اثبات. از تعمیم رابطه فیثاغورث داریم $a \leqslant b < h$. اگر $a=b$، آنگاه $a=b=\sqrt{2}\,h$ و $c=2h$ و درنتیجه $a^2+b^2=c^2$، یعنی مثلث مفروض قائم‌الزاویه می‌باشد.

اگر $a<b$، می‌توانیم مثلث قائم‌الزاویه ACH را طوری رسم کنیم تا $AC=b$ وتر و $CH=h$ یک ضلع زاویه قائمه باشد. حال به مرکز C و شعاع a دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط AH را مطابق شکل ۱۱ در دو نقطه B' و B'' قطع کند.

مثلث $AB'C$ قائم‌الزاویه می‌باشد. برای اثبات این موضوع از C عمودی بر AC رسم می‌کنیم تا خط AH را در D قطع کند. در مثلث قالزاویه ADC داریم:

$$\frac{1}{CD^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$$

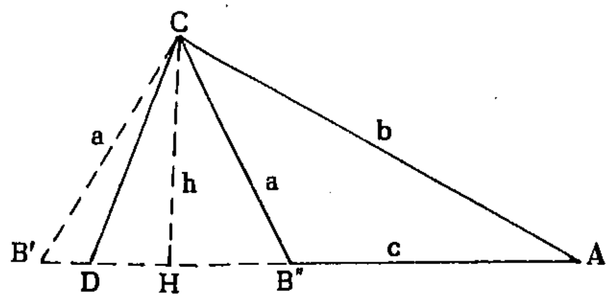
از مقایسه این رابطه با رابطه

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$$

داریم $CD=a$ یا $CD=CB'$ پس B' و D بر هم منطبق می‌باشند.

حال به‌آسانی می‌توان نشان‌داد که در مثلث $AB''C$ رابطه $B''-A=90$ برقرار است. این قضیه را می‌توان با روش مثلثاتی هم به سادگی ثابت کرد.

فرض کنید در این قضیه h و c و b و a اعداد صحیح مثبت باشند. سه‌تائی (a, b, c) را که رابطه فیثاغورث صدق می‌کند سه‌تائی فیثاغورث و سه‌تائی (a, b, h) را که در تعمیم رابطه فیثاغورث صدق می‌کند سه‌تائی فیثاغورث وارون می‌نامیم. در باره سه‌تائی اول بررسی زیاد شده است [۲]، اما در باره سه‌تائی دوم، تا آنجائی که نویسنده می‌داند، کاری انجام نشده است.



شکل ۱۱ــ مثلثهای مربوط به تعمیم رابطه فیثاغورث

(۵) تعمیم برای چهاروجهی قائم. شکل ۱۲ یک چهاروجهی قائم با رأس V و قاعده ABC می‌باشد، یعنی

$$VA \perp VB \perp VC$$

قضیه زیر درباره این چهاروجهی به نام دوگواشهرت دارد، که در ۱۷۸۳ آنرا به آکادمی علوم فرانسه ارائه داد.

قضیه ۵. در چهاروجهی قائم VABC، رابطه زیر میان مساحتهای چهاروجه برقرار می‌باشد:

$$S^2_{ABV}+S^2_{ACV}+S^2_{BCV}=S^2_{ABC}$$

اثبات. در مثلث قائم‌الزاویه ABV ارتفاع VK را رسم می‌کنیم. خط AB بر صفحه مثلث CKV عمود می‌باشد، زیرا بر KV و CV عمود می‌باشد. پس صفحه مثلث CAV بر صفحه مثلث ABC عمود می‌باشد و در نتیجه ارتفاع VH در صفحه CKV جا دارد.

حال فرض می‌کنیم $AV=a$، $BV=b$، $CV=c$، $HV=h$. حجم چهاروجهی را با v نشان می‌دهیم. طبق تعمیم رابطه فیثاغورث.

الف ــ در مثلث قائم‌الزاویه ABV داریم:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{KV^2}$$

ب ــ در مثلث قائم‌الزاویه CKV داریم:

$$\frac{1}{KV^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h^2}$$

از ترکیب دو رابطه بالا نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h^2}$$

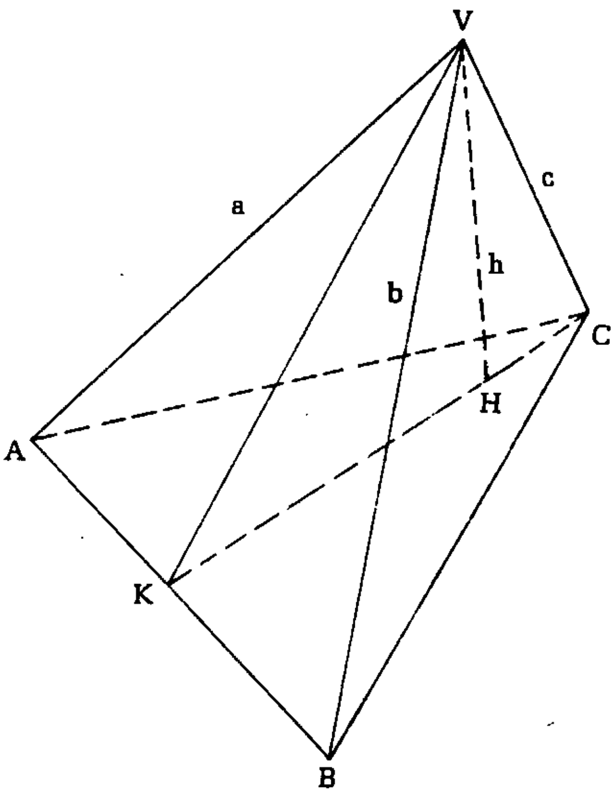
$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=\frac{a^2b^2c^2}{h^2}$$

$$4(S^2_{ABV})+4(S^2_{ACV})+4(S^2_{BCV})+\frac{(6V)^2}{h^2}$$

حال با استفاده از

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\times h$$

قضیه ثابت می‌شود.



شکل ۱۲- تعمیم برای چهاروجهی قائم

با استفاده از محورهای مختصات قائم VABC یا فرمول مساحت مثلث (فرمول هرون) هم می‌توان قضیه را ثابت کرد. این قضیه برای فضای n بعدی هم قابل بررسی می‌باشد.

منابع فارسی

۱- احمدآرام، بحثی در قضیه فیثاغورث، کتابهای سیمرغ، ۱۳۴۵. این کتاب ترجمه قسمتی از کتاب زیر می‌باشد:
E. Fourrey, Curiosjte's Geometriques, Librairie Vuibert (1920).

۲- حسن صفاری، تاریخ علوم، امیرکبیر، ۱۳۴۷ (ترجمه از پی‌یرروسو).

منابع خارجی

1- Ball, W. W. R., A Short Account of History of Mathematics, Dover Publications, 1960.

2- Burton, D.M., Elementary Number Theory, Allyn and Bacon, Inc., 1980, PP. 249-250.

3- Chakerian, G. D and Klamkin, M. S., A Generalization of the Pythagorean Theorem Seen as a Problem of Equivalent Resis-tances, Mathematics Magazine, Vol. 59, 1986, 149-153.

4- Eves, H, Great Moments in Mathematics (before 1950), the Mathematical Association of American, 1980, 26-42.

5- Gardner, M., Simple Proofs of the Pythag-orean Theorem and Sundry Other Matters, Scientific American, 211, October 1964, PP. 118-126.

6- Gudder S. and Strawther, D., A Converse of Pythagoras, Theorem, The American Mathe-matical Monthly, Vol 87, 1977, 551-553.

7- Loomis, E. S., The Pythagorean Proposition, The National Council of Teachers of Mathe-matics (1968 reissued).

حل معادلات درجهٔ سه و چهار

آقای امین براک دانش‌آموز علاقمند ریاضی ـ فیزیک مطلبی طولانی تحت عنوان حل معادلات درجه سوم و چهارم تهیه و به هیأت تحریریه ارسال داشته بودند. این مقاله ضمن داشتن نکات جالب حاوی نکات مبهمی نیز بود که نیاز به توضیح داشت. ضمناً رادیکالهای حقیقی و مختلط تمیز داده نمی‌شد. این مقاله ما را بر آن داشت که مقاله‌ای تحت همین عنوان تدوین کنیم جا دارد که از زحمات آقای امین براک تشکر و قدردانی نمائیم.

دکتر حسین ذاکری
عضو هیأت علمی گروه
ریاضی دانشگاه تربیت معلم

در دورهٔ راهنمایی با روش حل معادلات درجهٔ اول و دوم با ضرایب حقیقی آشنا شدیم و می‌دانیم که هیچ عدد حقیقی نمی‌توان یافت که در معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2+1=0$ صدق نماید. این معادله در توسیعی از میدان اعداد حقیقی، که میدان اعداد مختلط نامیده می‌شود، دارای جواب است. در جبر دانشگاهی، در درس نظریهٔ گالوا، ثابت می‌شود که برای حل معادلات درجهٔ سوم نیز ناچاریم از اعداد مختلط کمك بگیریم. به بیان دقیق، ثابت می‌شود که در حالت کلی نمی‌توان فقط با به کار بردن چهار عمل اصلی و رادیکالهای اعداد حقیقی ریشه‌های یك معادلهٔ درجهٔ سوم با ضرایب حقیقی را، حتی وقتی که همهٔ آنها حقیقی باشند، محاسبه کرد. از اینرو، در این مقاله به اختصار ابتدا جبر اعداد مختلط را توضیح می‌دهیم و سپس با بکارگیری اعداد مختلط به حل معادلات درجهٔ سوم و چهارم خواهیم پرداخت. در اینجا لازم است گفته شود که در حالت کلی نمی‌توان فرمولی برای حل معادلات با درجهٔ بیشتر از چهار ارائه داد. خواننده می‌تواند برای اثبات این مطلب به مبحث نظریهٔ گالوا در کتابهای جبر مراجعه نماید.

اینك بحث خود را با معرفی اعداد مختلط شروع می‌کنیم. در این مقاله میدان اعداد حقیقی را با R نشان خواهیم داد. فرض کنیم a و $b \in R$. زوج مرتب (a, b) را یك عدد مختلط می‌نامیم. به‌ازاء هردو عدد مختلط (a, b) و (c, d) عدد مختلط $(a+c, b+d)$ را حاصلجمع آن دو عدد مختلط، و عدد مختلط $(ac-bd, ad+bc)$ را حاصلضرب آن دو محدود مختلط می‌نامیم. به بیان دیگر حاصلجمع و حاصلضرب دو عدد مختلط (a, b) و (c, d) را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+b)$$

$$(a, b)\cdot(c, d)=(ac-bd, ad+bc).$$

اینك به‌راحتی می‌توان دید که مجموعهٔ اعداد مختلط با این دو عمل جمع و ضرب تشکیل یك میدان می‌دهد. این میدان را، میدان اعداد مختلط می‌نامیم و با C نشان می‌دهیم. اگر محور طول‌ها را درصفحهٔ مختصات محورحقیقی اختیار کنیم، ملاحظه می‌شود که نقطهٔ نمایشگر عدد حقیقی a بر نقطه‌ای به مختصات $(a, 0)$ منطبق است. لهذا می‌توان عدد حقیقی a را با عدد مختلط $(a, 0)$ مساوی گرفت. درنتیجه می‌توان میدان اعداد حقیقی را زیر مجموعهٔ میدان اعداد مختلط در نظر گرفت و هر عدد حقیقی را یك عدد مختلط به حساب آورد. اگر عدد مختلط $(0, 1)$ را با i نشان دهیم، آنگاه

$$i^2=(0, 1)(0, 1)=(-1, 0)=-1$$

بنابراین i یك ریشهٔ معادلهٔ $x^2+1=0$ است. ریشهٔ دیگر این معادله $-i$ می‌باشد. فرض کنیم a و $b \in R$ در این صورت

$$(a\ ,\ b)=(a\ ,\ 0)+(0\ ,\ b)$$
$$=(a\ ,\ 0)+(2\ ,\ 1)(b\ ,\ 0)\ =a+ib$$

به ازاء هر $b \in R$ و a ، $a+ib$ را صورت استاندهٔ عدد مختلط $(a\ ,\ b)$ می‌نامیم. با به کار بردن صورت استاندهٔ اعداد مختلط جمع وضرب اعداد مختلط را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$
$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

با توجه به فرمول‌های بالا معلوم می‌شود که ضرب و جمع اعداد مختلط همانند ضرب و جمع اعداد حقیقی است با این تفاوت که هرجا که i^2 ظاهر شود باید -1 را جایگزین آن کرد و در جملاتی که دارای عامل i هستند از i آنها فاکتور گرفت.

فرض‌کنیم $a+ib$ و $c+cd$ صورت‌های استاندهٔ دو عدد مختلط باشند و $a \neq 0$ یا $b \neq 0$ (این بدان معنی است که $a+ib \neq 0$). برای بدست‌آوردن صورت استاندهٔ عدد مختلط $\frac{c+id}{a+ib}$ ، صورت و مخرج کسر را در عدد مختلط $a-ib$ ضرب می‌کنیم داریم:

$$\frac{c+id}{a+ib}=\frac{(c+id)(a-ib)}{(a+ib))a-ib)}$$
$$=\frac{(ac+bd)+i(ad-bc)}{a^2+b^2}$$
$$=\frac{ac+bd}{a^{22}+b^2}+i\frac{ab-bc}{a^2+b^2}.$$

عدد مختلط $a-ib$ را مزدوج عدد مختلط $a+ib$ می‌نامند و با علامت $\overline{a+ib}$ نشان می‌دهند.

در بالا جوابهای معادلهٔ $x^2=-1$ را بدست‌آوردیم. اینك می‌خواهیم به حل معادلات $x^n=a+ib$، که درآن n عدد صحیح بزرگتر از ۱ ، a و b اعداد حقیقی هستند، بپردازیم. قبلاً درحالت خاص $n=2$ معادله را حل می‌کنیم.

مثال ۱. فرض‌کنیم a و $b \in R$. ریشه‌های معادلهٔ $x^2=a+ib$ را به دست‌آورید.

حل. فرض‌کنیم $\alpha+i\beta$ یك ریشهٔ معادلهٔ $x^2=a+ib$ باشد که درآن α و $\beta \in R$. در این صورت

$$(\alpha+i\beta)^2=(\alpha^2-\beta^2)+i(2\alpha\beta)$$
$$=a+ib$$

لهذا $\alpha^2-\beta^2=a$ و $2\alpha\beta=b$. از حل این دستگاه معادلات می‌توان α و β را محاسبه‌کرد. در نتیجه

$$\alpha+i\beta=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+i\varepsilon\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right) \qquad (1)$$

که درآن اگر $b \geqslant 0$ ، $\varepsilon=1$ و اگر $b<0$ و $\varepsilon=-1$.

اینك دو مثال عددی در رابطه با کاربرد دستور (۱) می‌آوریم.

مثال ۲. ریشه‌های معادلهٔ $x^2=-1-2i$ را محاسبه کنید.

حل. با جایگزینی در دستور (۱) داریم

$$x=\pm\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4}}{2}}-i\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4}}{2}}\right)$$
$$=\pm\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}-i\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)$$

مثال ۳. ریشه‌های معادلهٔ $x^2=-4$ را بدست‌آورید.

حل. با استفاده از دستور (۱) داریم

$$x=\pm\left(\sqrt{\frac{-4+\sqrt{16+0}}{2}}+i\sqrt{\frac{4+\sqrt{16+0}}{2}}\right)=\pm 2i$$

مثال ۴. فرض کنیم n یك عدد صحیح بزرگتر از ۱ و a و b اعداد حقیقی باشد. ریشه‌های معادلهٔ $x^n=a+ib$ را بدست‌آورید.

حل. در حل این معادله از دستور

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^m=\cos(m\theta)+i\sin(m\theta)$$

که درآن θ عددی حقیقی و m یك عدد طبیعی است، استفاده خواهیم‌کرد. این دستور به فرمول موآور معروف است و می‌توان آنرا با استقراء روی m ثابت‌کرد. با استفاده از فرمول موآور معلوم می‌شود که عدد مختلط

$$w=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n} \qquad (۲)$$

یك ریشهٔ معادلهٔ $x^n=1$ است. در نتیجه

$$1=w^0 \text{ و } w \text{ و } w^2, \dots, w^{n-1}$$

تمام ریشه‌های این معادله خواهند بود.

همچنین، اگر θ را چنان اختیار کنیم که

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{و} \quad \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

آنگاه، با به کار بردن فرمول موآور، به سادگی می‌توان دید که

$$u=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right) \qquad (۳)$$

یك ریشهٔ معادلهٔ $x^n=a+ib$ می‌باشد.

فرض کنیم y یك ریشهٔ دلخواه معادلهٔ $x^n=a+ib$ باشد در این صورت

$$y^n=a+ib=u^n$$

لهذا $\left(\frac{y}{u}\right)^n=1$. بنابراین $\frac{y}{u}$ یك ریشهٔ معادلهٔ $x^n=1$ می‌باشد. در نتیجه $0\leqslant i\leqslant n-1$ موجود است که $y=uw^i$. بنابراین، ریشه‌های معادلهٔ $x^n=a+ib$ عبارتند از $u=uw^0$ و uw و $uw^2, \dots, uw^{n-1}$.

مثال‌های ۱ و ۴ در حل معادلات درجهٔ سوم کاربرد دارند. اینك به حل معادلات درجهٔ سوم می‌پردازیم.

حل معادلهٔ درجهٔ سوم

فرض کنیم a و b و $c\in C$. معادلهٔ درجهٔ سوم

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

را در نظر می‌گیریم. این معادله با تغییر متغیر $x=y-\frac{a}{3}$ به معادله‌ی $y^3+py+q=0$ تبدیل می‌شود. بنابراین، کافی است معادله‌ای به صورت $y^3+py+q=0$ را حل کنیم. معادله $y^3+py+q=0$ با تغییر متغیر $y=Z-\frac{p}{3Z}$ به معادلهٔ

$$27Z^6+27bZ^3-p^3=0$$

تبدیل می‌شود. این معادله برحسب Z^3 یك معادلهٔ درجهٔ دوم است و داریم

$$Z^3=\frac{-q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

که در آن $\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$ یك ریشهٔ معادلهٔ

$$X^2=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$$

است و می‌توان آنرا با به کار بردن دستور (۱) محاسبه کرد. اینك، بعداز نوشتن عدد مختلط

$$\frac{-q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

به صورت استاندهٔ $\alpha+i\beta$، می‌توان مطابق مثال ۴ عمل کرد و ریشه‌های معادلهٔ $Z^3=\alpha+i\beta$ را به‌دست‌آورد. باجایگزینی این ریشه‌ها در تساوی $y=Z-\frac{p}{3Z}$، ریشه‌های معادلهٔ $y^3+py+q=0$ محاسبه می‌شوند.

ملاحظات. فرض کنیم p و q اعداد حقیقی باشند. اگر $4p^3+27q^2\geqslant 0$، آنگاه

$$\frac{-q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

عدد حقیقی است. در نتیجه عدد حقیقی

$$\sqrt{\frac{-q}{2}+\delta\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

که در آن $\delta=\pm1$، یك ریشهٔ معادلهٔ

$$Z^3=\frac{-q}{2}+\delta\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

می‌باشد.

اگر $4p^3+27q^2<0$، آنگاه

$$\frac{-q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$=\frac{-q}{2}\pm i\sqrt{-\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

که در آن $\sqrt{-\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}$ یك عدد حقیقی می‌باشد.

بسادگی می‌توان ثابت کرد که در این حالت همهٔ ریشه‌های معادلهٔ $y^3+py+q=0$ اعداد حقیقی می‌باشد.

حل معادلهٔ درجهٔ چهار

فرض‌کنیم $d \in C$ و c و b و a. معادلهٔ درجهٔ چهار

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

را در نظر می‌گیریم این معادله با تغییر متغیر $x=y-\frac{a}{4}$ به معادلهٔ $y^4+py^2+qy+r=0$ تبدیل می‌شود. معادله درجهٔ سوم

$$(u-p)y^2-qy+\left(\frac{u^2}{4}-r\right)=0$$

ریشهٔ مضاعف مانند Z_1 دارد. در نتیجه

$$(u-p)y^2-qy+\left(\frac{u^2}{4}-r\right)$$
$$=(u-p)(y-Z_1)^2$$

فرض‌کنیم $t=y^2+\frac{u}{2}$، در این صورت

$$0=y^4+py^2+qy+r=\left[y^2+\frac{u}{2}\right]^2$$
$$-\left[(u-p)y^2-qy+\frac{u^2}{4}-r\right]$$
$$=t^2-[\sqrt{u-p}\,(y-Z_1)]^2$$
$$=[t-\sqrt{u-p}\,(y-Z_1)][t+\sqrt{u-p}\,(y-Z_1)]$$

لهذا

$$t-\sqrt{u-p}\,(-Z_1)=y^2-\sqrt{u-p}\,y$$
$$+\frac{u}{2}+Z_1\sqrt{u-p}=0$$

و

$$t+\sqrt{u-p}\,(y-Z_1)=y^2+\sqrt{u-p}\,y$$
$$+\frac{u}{2}-Z_1\sqrt{u-p}=0$$

از حل این معادلات درجهٔ دوم y محاسبه می‌شود. با جایگزینی مقادیر y در تساوی $x=y-\frac{b}{4}$ همهٔ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ چهار مفروض به دست می‌آید.

در تهیه این مقاله از جزوهٔ درسی آقای دکتر فرودی که در دانشگاه تربیت‌معلم تدریس می‌کردند، استفاده شده است.

●

۸ـ در دو بخش ناهمساز معادل که در یك جفت نقطهٔ نظیر مشترکند، سه خط که سه جفت نقطه‌های نظیر دیگر را به هم می‌پیوندند همرس یا موازیند.

برهان. در دو جفت بخش ناهمساز معادل $(ABCD)$ و $(AB'C'D')$ که در نقطهٔ A مشترکند:

$$(ABCD)=(AB'C'D') \qquad (1)$$

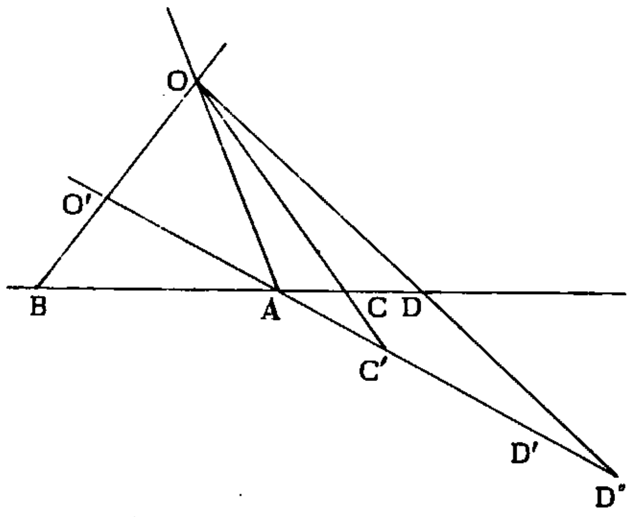
BB' و CC' را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند. فرض می‌کنیم خط OD قاطع $B'C'$ را در D'' قطع کند، در این صورت در دستگاه $ABCD$ و O داریم

$$(ABCD)=(AB'C'D'') \qquad (2)$$

از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$(AB'C'D')=(AB'C'D'')$$

یعنی D'' بر D' منطبق است و BB' و CC' و DD' همرسند. در حالت خاصی‌که BB' و CC' با هم موازی باشند DD'' نیز با آنها موازی است و عطف به قضیهٔ تالس D' بر D'' منطبق است.



ش ۱

دردو دستگاه معادل $abcd$ و O و $a'b'c'd'$ و O که در دو خط نظیر b و b' مشترکند: می‌خواهیم ثابت‌کنیم

۹ـ قضیه. در دو دستگاه ناهمساز معادل هرگاه یك جفت شعاع نظیر مشترك باشد. سه نقطه تقاطع سه جفت شعاع نظیر دیگر بر یك خط راست واقع‌اند.

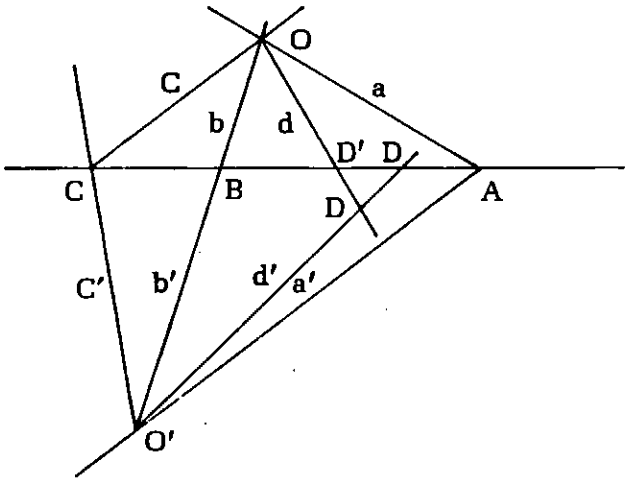
بخش ناهمساز

حسین غیور

A و C و D که به ترتیب سه نقطهٔ تقاطع سه زوج خطهای (a, a') و (c, c') و (b, b')اند بر یك خط راست واقعند. برای اثبات AC را وصل می‌کنیم تا b و b' را در B و b و b' را به ترتیب در D' و D'' قطع کند چون دو دستگاه باهم معادلند، داریم

$$(ABCD')=(ABCD'')$$

یعنی D' و D'' و دو نتیجه D و D' و D'' بر هم منطبق‌اند و قضیه ثابت است.



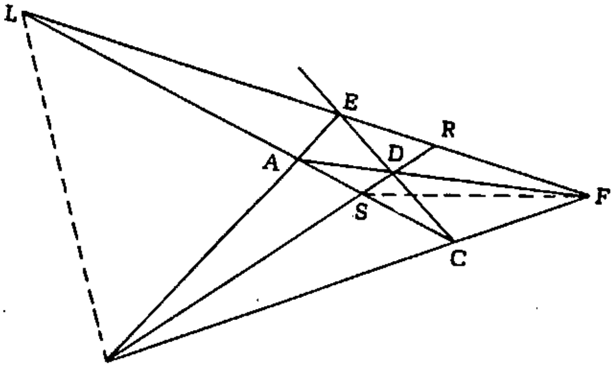
ش ۲

۱۰ـ برای مثال در دستگاه و بخش ناهمساز سه قضیه مهم هندسه اقلیدسی را عنوان می‌کنیم:

الف ـ چهار ضلعی کامل[۱] ـ چهار ضلعی‌کامل از تقاطع چهار خط دو بدو متقاطع که نقطه‌های تقاطع‌آن متمایز باشد پدید می‌آید. نقطه‌های تقاطع را رأس چهار ضلعی و خط و اصل بین دو رأس راکه منطبق بر ضلع نباشد قطرچهارضلعی گویند. بسادگی معلوم می‌شود چهار ضلعی کامل دارای شش رأس و سه قطر است.

قضیه. هر قطر چهار ضلعی کامل از تقاطع با دو قطر دیگر به نسبت همساز (توافقی) تقسیم می‌شود.

برهان. فرض می‌کنیم ABCDEF چهار ضلعی کامل و AC و BD و EF سه قطرآن باشد.



ش ۳

دستگاه EFRL و B را با AC قطع می‌کنیم:

$$(EFRL)=(ACSL) \qquad (۱)$$

دستگاه EFRL و D را با AC قطع می‌کنیم:

$$(EFRL)=(CASL) \qquad (۲)$$

از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$(ACSL)=(CASL) \Longrightarrow$$

$$\frac{AS}{AL} : \frac{CS}{CL} = \frac{CS}{CL} : \frac{AS}{AL} \Longrightarrow$$

$$\frac{AS}{AL} = \pm \frac{CS}{CL}$$

در این تساوی علامت + امکان ندارد زیرا در این صورت A بر C منطبق می‌شودکه خلاف فرض یعنی وجود چهار

ضلعی است. پس

$$\frac{AS}{AL}=-\frac{CS}{CL} \Longrightarrow (ACSL)=-۱$$

چون دستگاه ACSL و B با EF قطع شود خواهیم داشت

$$(EFRL)=-۱$$

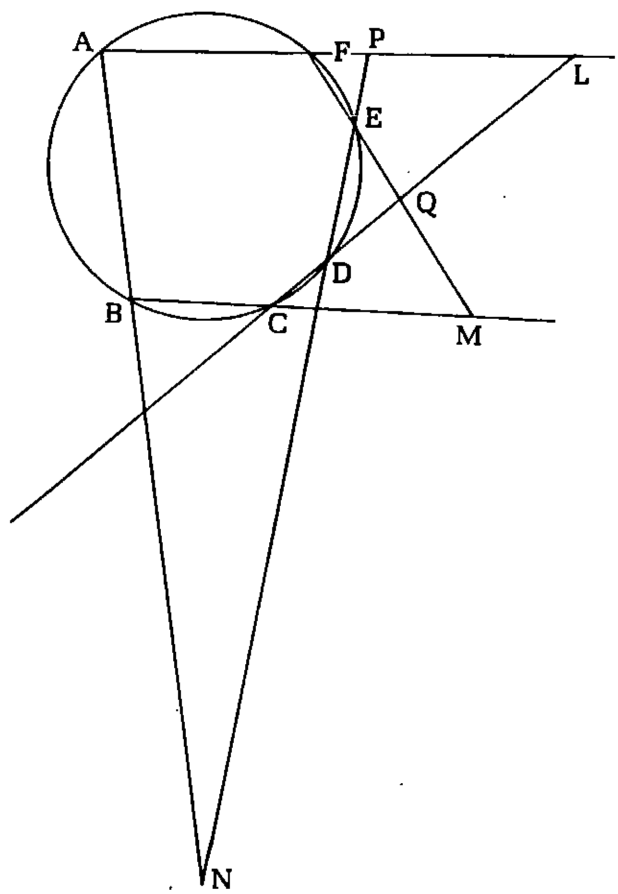
چون دستگاه ACSL و F را با قطر DB قطع کنیم، نتیجه می‌شود:

$$(DBSR)=-۱$$

۱۱ــ قضیهٔ پاسکال Pascal . درشش ضلعی سه نقطهٔ تقاطع ضلع‌های مقابل (دو در میان) بر یك خط راست قرار دارند.

$$A \text{ و } BDEF = C \text{ و } BDEF \qquad (۱)$$

دستگاه BDEF و A را با خط DE ودستگاه BDEF و C را با خط EF قطع می‌کنیم تـا به ترتیب دو بخش ناهمساز



NDEP و MQEF پدیدآید. به موجب تساوی (۱)

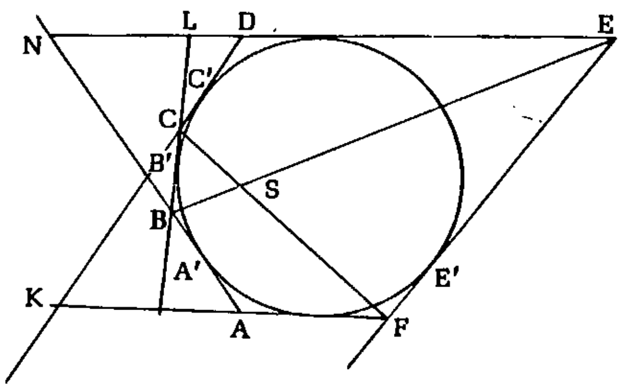
$$(NDEP)=(MQEF) \qquad (۱)$$

چـون در تساوی (۲) دو بخش ناهمساز معادلند و در نقطه E مشترکند بـه موجب قضیهٔ ۹ سه خـط NM و DQ و PF همرسند یعنی سه‌نقطهٔ N و M و L بریك خط راست واقعند.

تبصرهٔ ۱. قضیهٔ پـاسکال در شش ضلعی محاطـی مقعر نیز صادق است و برهان‌آن همان است‌که ذکرشد، به شرط اینکه نام نقطه‌ها تغییر نکند.

تبصرهٔ ۲. قضیهٔ پاسکال در شش ضلعی‌های محاط در مقطع مخروطی صدق می‌کند (در فصل قطب قطبی در ادامه درسهایی از هندسه به این موضوع اشاره می‌شود).

قضیهٔ بریانشون. درشش‌ضلعی محیطی خطهایی‌که رأسهای زیر به هم وصل می‌کنند همرسند.



برهان. DE و AF دو ضلع یـك در میان از شش ضلعی محیطی ABCDEF را با چهار ضلع AB و BC و CD و EF که به ترتیب در A′ و B′ و C′ و E′ با دایرهٔ مخاطی مماسند، قطع می‌کنیم تا دو بخش ناهمساز معادل (NLDE) و (AHKF) پدیدآید. دو دستگـاه ناهمساز NLDEو B و AHKFو C راکه با هم معادلند درنظر می‌گیریم. چون در این دو دستگاه معادل دوخط نظیر BL و CH برهم منطبق‌اند بـا توجه بـه قضیهٔ ۹ سه نقطهٔ تقاطع سه زوج خطهـای نظیر (AC, BN) و (CK, BD) و (CF, BE)، که به‌ترتیب یکدیگر را در A و D و S قطع می‌کنند، بر یك خط راست واقعند. یعنی AD از S می‌گذرد و قضیه ثابت است.

این قضیهٔ در شش ضلعی‌هـای محیط بر مقطع مخروطی نیز صدق می‌کندکه در فصل قطب و قطبی به‌آن اشاره خواهد شد.

شگفتیهای اعداد

محمدتقی دیبایی

در عدد ۱۴۲۸۵۷، به ترتیب به مضارب ۱، ۳، ۲، ۶، ۴، ۵ آن توجه می‌کنیم

۱ × ۱۴۲۸۵۷ = ۱۴۲۸۵۷

۳ × ۱۴۲۸۵۷ = ۴۲۸۵۷۱

۲ × ۱۴۲۸۵۷ = ۲۸۵۷۱۴

۶ × ۱۴۲۸۵۷ = ۸۵۷۱۴۲

۴ × ۱۴۲۸۵۷ = ۵۷۱۴۲۸

۵ × ۱۴۲۸۵۷ = ۷۱۴۲۸۵

۱ × ۱۴۲۸۵۷ = ۱۴۲۸۵۷

مشاهده می‌کنیم که ترتیب ارقام هر یك از حاصلضربهای بالا یك گردش در ارقام حاصلضرب قبلی است.

به عنوان مثالی دیگر عدد ۰۷۶۹۲۳ (با حفظ صفر بی‌اثر آن) و، به ترتیب، مضارب ۱، ۱۰، ۹، ۱۲، ۳ و ۴ ازآن را در نظر می‌گیریم. باز هم ملاحظه می‌کنیم که هر حاصلضرب نتیجهٔ یك گردش در ارقام حاصلضرب قبلی است.

۱ × ۰۷۶۹۲۳ = ۰۷۶۹۲۳

۱۰ × ۰۷۶۹۲۳ = ۷۶۹۲۳۰

۹ × ۰۷۶۹۲۳ = ۶۹۲۳۰۷

۱۲ × ۰۷۶۹۲۳ = ۹۲۳۰۷۶

۳ × ۰۷۶۹۲۳ = ۲۳۰۷۶۹

۴ × ۰۷۶۹۲۳ = ۳۰۷۶۹۲

اکنون این سؤال مطرح می‌شود که این اعداد چگونه بدست می‌آیند و مضارب آنها ازکجا مشخص می‌شوند؟

برحسب اتفاق، عدد ۱۴۲۸۵۷ دورهٔ تناوب نمایش اعشاری کسر $\frac{۱}{۷}$ است و اعداد ۱، ۳، ۲، ۶، ۴ و ۵، به ترتیب، باقیمانده‌های تقسیم ۱ بر ۷ در روند یك دورهٔ تناوب است.[1]

۱/۰	۷
۳۰	۰/۱۴۲۸۵۷
۲۰	
۶۰	
۴۰	
۵۰	
۱	

درصورتی که خارج قسمت و باقیمانده‌های تقسیم ۱ بر ۱۳ را در روند یك تناوب مورد مطالعه قرار دهیم، متوجه می‌شویم که پدیدهٔ مذکور چندان تصادفی نیست. به عبارت دیگر، خارج قسمت و باقیمانده‌های این تقسیم در روند یك تناوب عبارتند از ۰۷۶۹۲۳ و ۱، ۱۰، ۹، ۱۲، ۳ و ۴.

۱	۱۳
۱۰۰	۰/۰۷۶۹۲۳
۹۰	
۱۲۰	
۳۰	
۴۰	
۱	

مثالهای بالا مشوق ما در ارائه‌ی مثالهای دیگری است. از تقسیم ۱ بر ۳۷ داریم:

۱۰	
۱۰۰	۳۷
۲۶۰	۰/۰۲۷
۱	

۱ × ۰۲۷ = ۰۲۷

۱۰ × ۰۲۷ = ۲۷۰

۲۶ × ۰۲۷ = ۷۰۲

از تقسیم ۱ بر ۱۷، داریم:

۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷ = خارج قسمت در یک دورهٔ تناوب

باقیمانده‌های تقسیم در طول یک دورهٔ تناوب :

۱۲، ۸، ۱۱، ۱۳، ۳، ۲، ۷، ۱۶، ۵، ۹، ۶، ۴، ۱۴، ۱۵، ۱۰، ۱

۱ × ۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷ = ۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷

۱۰ × ۰۵۸۸ . . . . . . ۶۴۷ = ۵۸۸ . . . . . . ۶۴۷۰

۱۵ × ۰۵۸۸ . . . . . . ۶۴۷ = ۸۸۲ . . . . ۷۰۵

۱۴ × ۰۵۸۸ . . . . . . ۶۴۷ = ۸۲۳ . . . . ۰۵۸

۴ × ۰۵۸۸ . . . . . . ۶۴۷ = ۲۳۵ . . . . ۵۸۸

۶ × ۰۵۸۸ . . . . . . ۶۴۷ = ۳۵۲ . . . . ۸۸۲

. . . .

از تقسیم ۱ بر ۱۹، خارج قسمت در روند یک دورهٔ تناوب عبارت است از ۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۴۲۱ و باقیمانده‌های یک دورهٔ تناوب ۱، ۱۰، ۵، ۱۲، ۶، ۳، ۱۱، ۱۵، ۱۷، ۱۸، ۹، ۱۴، ۷، ۱۳، ۱۶، ۸، ۴ و ۲. بررسی گردش ارقام حاصلضربهای عدد مذکور در این باقیمانده‌ها را به خواننده واگذار می‌کنیم.

مشاهدهٔ این مثالها، حدس ذیل را در ذهن قوت می‌بخشد که:

اگر عدد طبیعی n با ۱۰ متباین باشد و خارج قسمت تقسیم ۱ بر n در یک دورهٔ تناوب به‌شکل $a_1 \cdots a_r$ و باقیمانده‌های این تقسیم در یک دورهٔ تناوب، به ترتیب، اعداد $b_1 = 1$ ، b_2 ، … ، b_r باشند، آنگاه

$$(b_1 = 1) \quad b_1 \times a_1 \cdots a_r = a_1 \cdots a_r$$

$$b_2 \times a_1 \cdots a_r = a_2 \cdots a_r a_1$$

$$b_3 \times a_1 \cdots a_r = a_3 \cdots a_r a_1 a_2$$

. . . . ۲

---

(۱) Henry Boners & Joan E. Bowers; Arithmetical Excursions, Dover, 1961

(۲) می‌توان ثابت کرد که r تعداد ارقام یک دورهٔ تناوب، به‌صورت زیر است

$$r = \min\{k \in \mathbb{N} \quad n \mid (10^k - 1)\}.$$

ر. ک. به

محمدتقی دیبایی؛ نمایش اعشاری کسرهای متعارفی، رشد ریاضی، ۱۵

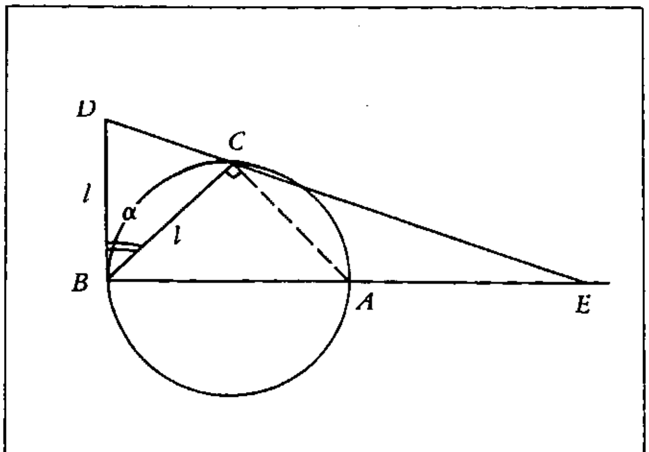
●

چند مسأله غیر منتظره در رابطه با حدود

ترجمهٔ: مسعود ساروی عضو هیأت علمی دانشگاه مازندران

۱ــ دایره‌ای به‌شعاع واحد، به‌قطر AB و وتری به طول l را همانگونه که درشکل زیر نشان داده شده است، درنظر می‌گیریم. از نقطهٔ B مماسی رسم کرده و روی آن نقطهٔ D را طوری انتخاب می‌کنیم که $BD = l$ باشد. امتداد DC قطر BA را در E قطع کرده است.

سؤال: وقتی $l \to 0$، BE به‌چه حدی میل می‌کند؟



حل. خط AC را رسم کرده و زاویهٔ DBC را برابر α فرض می‌کنیم. می‌توان نوشت:

$$BE = l\,tg\,\widehat{BDE} = CB\,tg\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right) = 2\cos\widehat{CBA}\cdot cotg\frac{\alpha}{2}$$

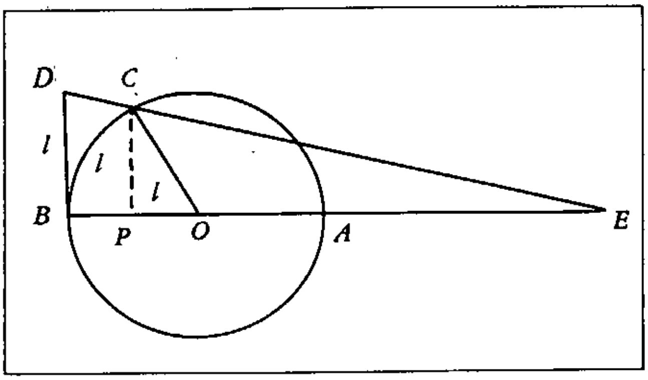
$$= 2\sin\alpha\cdot cotg\frac{\alpha}{2} = 4\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

بسهولت می‌توان مشاهده نمود، وقتی $l\to 0$، $\alpha\to 0$. پس

$$\lim_{l\to 0} BE = \lim_{\alpha\to 0} 4\cos^2\frac{\alpha}{2} = 4$$

بنابراین وضع حدی E (وازاین رو α) وقتی $l\to 0$ درفاصلهٔ ۴ از B قراردارد. این نتیجه که کمی غیرمنتظره می‌باشد، بدون تحلیل برای حدس‌زدن مشکل می‌باشد.

حال وضع مشابه‌دیگری را بررسی می‌کنیم با این‌تفاوت که نقطهٔ C را طوری انتخاب می‌کنیم که $\widehat{BC}=l$ باشد (شکل زیر)



سؤال، وقتی $l\to 0$، BE به‌چه حدی میل می‌کند؟

حل. از تشابه دومثلث BDE و PEC خواهیم داشت

$$\frac{BE}{BD}=\frac{PE}{PC}$$

که می‌توان آنرا چنین نوشت:

$$\frac{BE}{l}=\frac{BE-1+\cos l}{\sin l}$$

یعنی

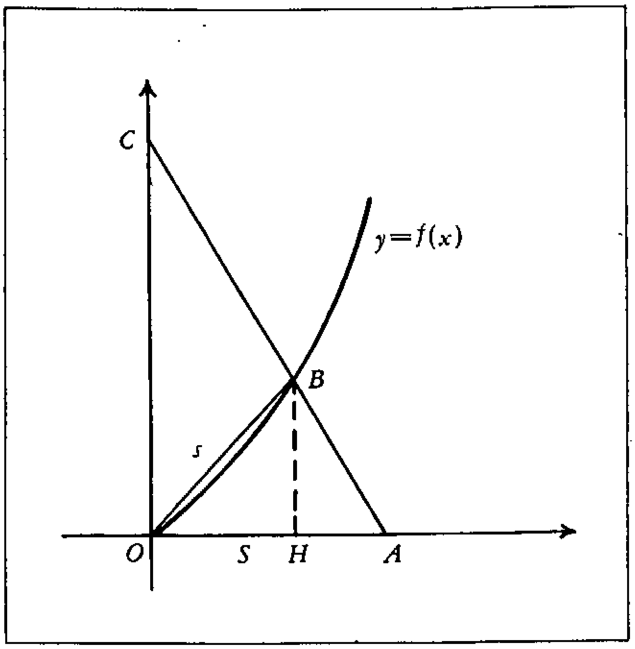
$$BE=\frac{l(\cos l-1)}{\sin l-l}$$

دراینجا با استفاده از بسط $\sin l$ و $\cos l$ برحسب سری تیلوریا با استفاده ازقاعدهٔ لوپیتال می‌توان به‌آسانی نشان داد که

$$\lim_{l\to 0} BE = \lim_{l\to 0}\frac{l(\cos l-1)}{\sin l-l} = 3$$

۲- منحنی $y=f(x)$ را طوری درنظرمی گیریم که f درنزدیکی مبداء مختصات دارای مشتق مرتبهٔ دوم پیوسته باشد. بعلاوه، فرض می‌کنیم $f(0)=f'(0)=0$ و $f''(0)\neq 0$. درربع اول نقاط A و B به‌ترتیب روی محور xها و منحنی $f(x)$ به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که $OA=OB=s$ (شکل زیر). خط AB محور yها را درنقطه C قطع کرده است.

سؤال: وقتی $s\to 0$، OC به چه حدی میل می‌کند؟



حل. مختصات B را به‌صورت $(x, f(x))$ درنظرمی گیریم. با رسم ارتفاع BH خواهیم داشت:

$$OB^2=BH^2+OH^2$$

یعنی

$$s^2=[f(x)]^2+x^2$$

با بررسی tgA به‌ترتیب درمثلث‌های ABH و ABO خواهیم داشت

$$tg A=\frac{BH}{AH}=\frac{f(x)}{s-x} \quad \text{و} \quad tg A=\frac{OD}{OA}=\frac{OC}{s}$$

بنابراین

$$\frac{OC}{s}=\frac{f(x)}{s-x}$$

یعنی

$$OC=\frac{sf(x)}{s-x}=\frac{sf(x)(s+x)}{s^2-x^2}=\frac{s(s+x)}{f(x)}=$$
$$\frac{x^2+[f(x)]^2+x[x^2+(f(x))^2]^{\frac{1}{2}}}{f(x)}$$

بنا به‌پیوستگی f، و رابطهٔ $0<x<s$، نتیجه‌می‌شود که $x\to 0$ اگر و تنها اگر $s\to 0$. بالنتیجه

$$\lim_{s\to 0} OC=\lim_{x\to 0} OC=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+[f(x)]^2+x\{x^2+[f(x)]^2\}^{\frac{1}{2}}}{f(x)}$$

چون $f(0)=f'(0)=0$ با استفاده از قضیه تیلور* c ای وجود دارد که $0<c<x$ و $f(x)=\frac{1}{2}x^2f''(c)$.

بنابراین

$$\lim_{s\to 0} OC=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\frac{1}{4}x^4[f''(c)]^2+x\left\{x^2+\frac{1}{4}x^4[f''(c)]^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}x^2f''(c)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\quad \frac{4}{f''(c)}+\frac{1}{2}x^2(f''(c)+$$
$$\frac{2\left\{1+\frac{1}{4}x^2[f''(c)]^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{f''(c)}=\frac{4}{f''(0)}$$

زیرا $c\to 0$، وقتی $x\to 0$. بنابراین $\lim_{s\to 0}OC=\frac{4}{f''(0)}$

تذکر ۱. شرط $f(0)=0$ برای اینکه s به سمت صفر میل می‌کند ضروری است.

تذکر ۲. اگر $f'(0)\neq 0$، به‌سهولت می‌توان نشان‌داد که $\lim_{s\to 0}OC=0$. زیرا،

$$\lim_{s\to 0}OC=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+[f(x)]^2+x\{x^2+[f(x)]^2\}^{\frac{1}{2}}}{f(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(x\frac{x}{f(x)}+f(x)+\frac{x}{f(x)}\{x^2+[f(x)]^2\}^{\frac{1}{2}}\right)$$

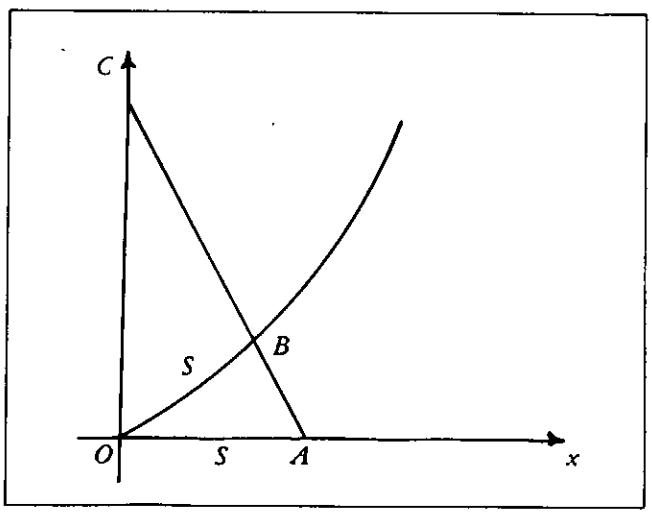
$$=0\left(\text{با استفاده از قاعدهٔ لوپیتال } \lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}=\frac{1}{f'(0)}\right)$$

تذکر ۳. از آنجائیکه $f''(0)\neq 0$، همسایگی‌ای برای صفر وجود دارد که شامل صفرهای دیگر از f نیست. بنابراین وجود $f(x)$ درمخرجهای عبارات بالا مشکلی ایجاد نمی‌کند. اگر $f''(0)=0$ انتخاب شود امکان دارد که در نزدیکی صفر نهایتاً برای مقادیر زیادی از x و c داشته باشیم $f(x)=\frac{1}{2}x^2f''(c)=0$، وعبارت فوق درصفرهائی از f تعریف نشود. لیکن، اگر ۰ یك صفر منفرد از f'' باشد، بحث بالا نشان می‌دهد که $\lim_{s\to 0}OC=\infty$

حال مسألهٔ مذکور را با کمی تغییر جزئی، با این فرض که $\widehat{OB}=s$، بررسی می‌کنیم.

این مسأله به این صورت عنوان می‌شود: منحنی $y=f(x)$ را طوری درنظر می‌گیریم که f در نزدیکی مبدأ مختصات دارای مشتق دوم پیوسته بوده و بعلاوه $f(0)=f'(0)=0$ و $f''(0)\neq 0$ می‌باشد.

نقاط A و B درربع اول و به ترتیب روی محور x ها ومنحنی $f(x)$ به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که $OA=\widehat{OB}=s$ خط AB محور yها را در نقطهٔ C قطع کرده است (شکل زیر): نشان دهید وقتی‌که $s\to 0$، $OC\to\frac{3}{f''(0)}$



حل: مجدداً فرض می‌کنیم مختصات B به‌صورت $(x, f(x))$ باشد. آنگاه با استفاده از فرمول محاسبه‌طول کمان خواهیم داشت.

$$s=s(x)=\int_{0}^{x}\{1+[f'(t)]^{2}\}^{\frac{1}{2}}dt$$

که $s(0)=0$. بعلاوه از رابطهٔ بالا می‌توان نوشت:

$$s'(x)=\{1+f'(x)]^{2}\}^{\frac{1}{2}}$$

که $s'(0)=1$ و

$$s''(x)=f'(x)f''(x)\{1+[f'(x)]^{2}\}^{-\frac{1}{2}},$$

مانند قسمت قبل

$$\lim_{x\to 0} OC=\lim_{x\to 0} OC=\lim_{x\to 0}\frac{s(x)f(x)}{s(x)-x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{s(x)f'(x)+s'(x)f(x)}{s'(x)-1}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{s(x)f''(x)+2s'(x)f'(x)+s''(x)f(x)}{s''(x)}$$

(بنا به قاعدهٔ لوپیتال)

$$=\lim_{x\to 0}\left(s(x)\cdot\frac{f''(x)}{s''(x)}+2s'(x)\cdot\frac{f'(x)}{s''(x)}+f(x)\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{s(x)\{1+[f'(x)]^{2}\}^{\frac{1}{2}}}{f'(x)}+\frac{2s'(x)\}1+[f'(x)]^{2}\}^{\frac{1}{2}}}{f''(x)}+f(x)\right)$$

(به‌جای $s''(x)$ از مساوی آن استفاده شده است).

حال با استفادهٔ مجدد ازقاعدهٔ لوپیتال، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0}\frac{s(x)\{1+[f'(x)]^{2}\}^{\frac{1}{2}}}{f'(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{S'(x)\{1+[f'(x)]^{2}\}^{\frac{1}{2}}+S(x)f'(x)f''(x)\{1+[f'(x)]^{2}\}^{\frac{1}{2}}}{f''(x)}$$

$$=\frac{1}{f''(0)}$$

از آنجائیکه

$$\lim_{x\to 0}\frac{2s'(x)\{1+[f'(x)]^{2}\}^{\frac{1}{2}}}{f''(x)}=\frac{2}{f''(0)}$$

مشاهده‌می کنیم که

$$\lim_{x\to 0} OC=\frac{3}{f''(0)}$$

تذکر ۱. اگر $f'(0)\neq 0$، آنگاه $s'(0)\neq 1$ و نتیجه می‌شود که $\lim_{x\to 0} OC=0$

تذکر ۲. اگر $f''(0)=0$ چه‌اتفاق‌می‌افتد؟ اگر بی‌نهایت بار در نزدیکی صفر، $f''(x)=0$، آنگاه بحث فوق به‌شکست می‌انجامد. لیکن اگر ۰ یك صفر منفرد از f'' باشد آنگاه $\lim_{x\to 0} OC=\infty$

برهان دومسألهٔ حدی فوق را می‌توان با قراردادن $f(x)=1-(1-x^{2})^{\frac{1}{2}}$ (که در آن $f(0)=f'(0)=0$ و $f''(0)=1$ می‌باشد) به‌دست آورد.

---

* از قضیه تیلور می‌توان‌گفت هرگاه تابع f و مشتق اول آن یعنی f' درفاصله بسته $[a,b]$ پیوسته باشد و مشتق دوم آن یعنی f'' در بازهٔ باز (a,b) وجودداشته باشد؛ آنگاه عددی مانند c در بازهٔ (a,b) می‌توان یافت به‌قسمی که

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{1}{2}f''(c)(b-a)^{2}$$

**** طول یك منحنی مسطح**

درازا یا طول یك منحنی مسطح از نقطه x_0 تا x ازرابطه زیر به دست می‌آید.

$$l=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+y'^{2}}dx=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+[f'(x)]^{2}}\,dx$$

مرجع

1. The Mathemetical Gazzette, NO 437, 442

یک سری نامتناهی از

عبارتهای مختلفی برای نمایش π وجود دارد. سعی می‌کنیم عدد π را برحسب یک سری از دترمینان نشان دهیم.

قضیه.

$$\frac{\pi}{2}-1=2^{0}\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}+$$

$$+2^{2}\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} & 1\\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 1\end{vmatrix}$$

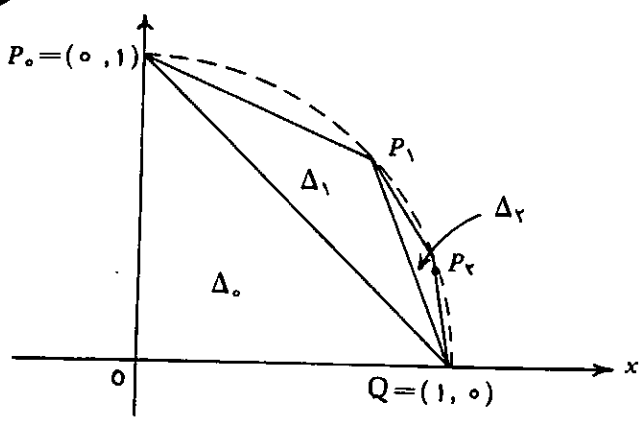
$$+2^{2}\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} & \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} & 1\\ \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} & 1\end{vmatrix}$$

$$+\cdots+2^{n-1}\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}_n}}} & \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}_n}}} & 1\\ \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}_{n-1}}}} & \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}_{n-1}}}} & 1\end{vmatrix}$$

برهان. می‌دانیم که $\frac{1}{4}$ مساحت دایره‌ای بـه شعاع ۱ را می‌توان به‌صورت مجموع سری نامتناهی زیر بیان کرد.

$$\frac{\pi}{4}=\Delta_0+2^{0}\Delta_1+2^{1}\Delta_2+2^{2}\Delta_3+\cdots+2^{n-1}\Delta_n+\cdots,$$

که درآن $\Delta_i\,(i=0,1,2,3,\ldots)$ مساحتهـای مثلثهـای متساوی‌الساقینی است کـه در شکل زیر نشان داده شده است. فرض‌کنیم Q و P_0، به ترتیب نقاط $(1,0)$ و $(0,1)$ و P_n و راس مثلثی با مساحت Δ_n باشند $(n\geqslant 1)$.



با توجه بـه اینکه مساحت مثلثی با رئوس (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، و (x_3, y_3) که ترتیب رئوس آنها درجهت حرکت عقربه ساعت است، برابر است با

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$

ازطرفی مثلث nم دارای رئوس Q، P_n و P_{n-1} است.

بنا براین کافی است مختصات هریك از P_n را تعیین کنیم. به‌ازاء هر $n\geqslant 1$، P_n نقطهٔ وسط قوسی از دایره است که نقطهٔ Q را به P_{n-1} وصل می‌کند، از اینرو مماس بر دایره در نقطهٔ P_n موازی با سکانت $P_{n-1}Q$ است.

فرض می‌کنیم مختصات P_n، (u_n, v_n) باشد. معادلهٔ ربع دایره که در فاصلهٔ بین ۰ و ۱ است عبارتست از

$$y=\sqrt{1-x^2}\quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

از طرفی داریم

$$f'(u_n)=\frac{f(u_{n-1})-f(1)}{u_{n-1}-1}\quad (n\geqslant 1),$$

یا:

$$\frac{u_n}{\sqrt{1-u_n^2}}=\frac{\sqrt{1-u_{n-1}^2}}{1-u_{n-1}}$$

که پس از مجذور کردن دو طرف تساوی و حل برحسب u_n خواهیم داشت $u_n^2=\frac{1}{2}(1+u_{n-1})$. با توجه به اینکه $u_n^2+v_n^2=1$ نتیجه می‌گیریم $v_n^2=\frac{1}{2}(1-u_{n-1})$. چون u_n و v_n هر دو نامنفی است و $u_0=0$، بنابراین خواهیم داشت:

$$(u_0, v_0)=(0, 1)$$

$$(u_1, v_1)=\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

$$(u_2, v_2)=\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)},\ \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right)=$$

$$=\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$

$$(u_3, v_3)=\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)},\right.$$

$$\left.\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}\right)$$

$$=\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)$$

$$(u_n, v_n)=\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{+\cdots+\sqrt{2}}}},\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{+\cdots+\sqrt{2}}}}\right).$$

از اینرو مساحت مثلث nام برابر است با،

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1\\ u_n & v_n & 1\\ u_{n-1} & v_{n-1} & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1\\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}_{\,n} & \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}_{\,n} & 1\\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}_{\,n-1} & \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}_{\,n-1} & 1\end{vmatrix}$$

و با توجه به‌این نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

مرجع

1. Mathematics Magazine, Vol.57, No. 4, September 1984.

دترمینان برای π

ترجمه: رضا شهریاری

یک قاعده و قانون کلی در بخش‌پذیری اعداد

علی نجف‌آبادی دبیر ریاضی

قضیه. دو عدد صحیح‌ومثبت b و $A=a_na_{n-1}\cdots a_1a_0$ را در مبنای ۱۰ درنظر می‌گیریم ($a_0 , a_1 , \cdots , a_{n-1}, a_n$ به‌جای ارقام صفر تا ۹ می‌باشند) و عدد A را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=10^na_n+10^{n-1}a_{n-1}+\cdots+10a_1+a_0$$

۱- اگر به جای ۱۰ عدد $(10-b)$ را قرار دهیم عبارت(۱) را خواهیم داشت:

$$(10-b)^na_n+(10-b)^{n-1}a_{n-1}+\cdots+(10-b)a_1+a_0 \qquad (1)$$

اگر این عبارت بر b بخش‌پذیر باشد A بر b بخش‌پذیر است و برعکس.

برهان. اگر پرانتزها را در عبارت (۱) بسط دهیم جملات اول پرانتزها به ترتیب از چپ به راست عبارتند از 10^n و 10^{n-1} و ... و ۱۰ و بقیه جملات پرانترها مضربی از b می‌باشند و اگر مجموع این جمله‌ها را با bK نشان دهیم عبارت (۱) را می‌توان چنین نوشت $A+bK$ بنابراین اگر $A+bK$ بر b بخش‌پذیر باشد A بر b بخش‌پذیر است و برعکس اگر A بر b بخش‌پذیر باشد $A+bK$ بر b بخش‌پذیر است و مانده A بر b برابر مانده $A+bK$ بر b است.

از قضیه فوق نتایج بسیار مهم زیر به دست می‌آیند.

اولا. همه قواعد بخش‌پذیری اعداد بر ۲, ۳, ۴, ۵, ۸, ۹, ۱۰ و ۱۱ راکه درباره هریک درکتابهای درسی قضیه‌ای ذکر و اثبات شده است می‌توان به ترتیب زیر ازآن نتیجه گرفت:

الف) اگر $b=11$ باشد برحسب اینکه n فرد یا زوج باشد $(10-11)^n$ برابر ۱− یا ۱+ است پس اگر به جای ارقام A را از راست به چپ زوج و فرد بگیریم عبارت (۱) برابر است با مجموع ارقام مکانهای زوج منهای مجموع ارقام مکانهای فرد واگراین‌حاصلجمع بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد A بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

ب) اگر $b=10$ باشد عبارت (۱) برابر است با a_0 یعنی مانده A بر ۱۰ برابر است با رقم سمت راست A پس اگر رقم سمت راست عدد صفر باشدآن عدد بر ۱۰ بخش‌پذیر است.

ج) اگر $b=9$ باشد $(10-b)=1$ پس عبارت (۱) برابر است با حاصلجمع ارقام عدد A یعنی اگر مجموع ارقام A بر ۹ بخش‌پذیر باشدآنگاه A بر ۹ بخش‌پذیر است.

د) اگر $b=8$ باشد $(10-b)=2$ و لذا همه جملات عبارت (۱) از چپ به راست تا خود جمله $(10-b)^3a_3$ مضرب ۸ می‌باشند و بنابراین اگر:

$$(10-b)^2a_2+(10-b)a_1+a_0$$

یعنی $4a_2+2a_1+a_0$ بر ۸ قابل قسمت باشد A بر ۸ قابل قسمت است.

ه) اگر $b=5$ باشد $(10-b)=5$ یعنی تمام جملات عبارت (۱) غیر از a_0 یك مضرب ۵ دارند پس اگر a_0 صفر یا ۵ باشد A بر ۵ بخش‌پذیر است.

ز) اگر $b=4$ باشد $(10-b)=6=2\times3$ پس تمام جملات عبارت (۱) از چپ به راست تا خود جمله $(10-b)^2a_2$ بر ۴ بخش‌پذیرند و کافی است

$$(10-b)a_1+a_0$$

بر ۴ بخش‌پذیر باشد و چون

$$(10-b)a_1+a_0=10a_1+a_0-ba_1$$

پس اگر $10a_1+a_0$ یعنی عددیکه از دو رقم سمت راست عدد A تشکیل می‌شود بر ۴ بخش‌پذیر باشد A بر ۴ بخش‌پذیر است.

ح) اگر $b=3$ باشد $(10-b)=7=1+2\times3$ و اگر $(1+2\times3)^n$ را طبق فرمول دو جمله‌ای خیام بسط دهیم، جمله اول برابر ۱ و بقیه جملات مضربی از ۳ می‌باشند و لذا عبارت زیر راکه به ازاء $b=3$ از عبارت (۱) نتیجه شده:

$$(1+2\times3)^na_n+(1+2\times3)^{n-1}a_{n-1}+\cdots+(1+2\times3)a_1+a_0$$

از دو قسمت تشکیل شده یك قسمت‌آن مجموع ارقام عدد A وهمه جملات قسمت‌دیگرآن مضرب ۳ می‌باشند پس اگر مجموع ارقام عدد A بر ۳ بخش‌پذیر باشد عدد A بر ۳ بخش‌پذیر است.

ط) اگر $b=2$ باشد $10-b=8$. پس همه پرانتزهای عبارت (۱) عددی ای زوج پس مانده A بر ۲ برابر مانده a_0 بر ۲ است یعنی اگر رقم سمت راست عددی زوج یا صفر باشدآن عدد بر ۲ بخش‌پذیر است.

ثانیاً: یك قاعده و قانون‌کلی برای بخش‌پذیری اعداد به دست می‌آید:

برای تعیین مانده عدد $A=a_na_{n-1}\cdots a_1a_0$ بر عدد b ابتدا a_n را در $(10-b)$ ضرب‌کرده با رقم بعدی جمع می‌کنیم:

$$(10-b)a_n+a_{n-1}$$

عدد حاصل را دو باره در $(10-b)$ ضرب‌کرده با رقم بعدی جمع می‌کنیم داریم:

$$(10-b)^2a_n+(10-b)a_{n-1}+a_{n-2}$$

و عمل را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تاآخرین جمع با a_0 به دست‌آید چون n بار ضرب در $(10-b)$ انجام داده‌ایم نتیجه همان عبارت (۱) خواهد بود چون

$$A=10^na_n+\cdots+10a_1+a_0$$

را با عبارت (۱) مقایسه‌کنیم نتیجه می‌شودکه مقدار عبارت (۱)کوچکتر از A است بنابراین $A+bK<A$ اگرعدد حاصل مثبت وکوچکتراز b باشد یعنی $0<A+bK<b$ برابر مانده A بر b است و اگر برابر صفر یا مضرب b باشد A بر b بخش‌پذیر است. بمثالهای زیر توجه فرمایید:

مثال ۱) مانده عدد ۳۵۴۷۰ را بر ۱۲ به دست‌آورید.

حل. چون $10-b=10-12=-2$ بنابراین طبق قاعده فوق داریم:

$$(((-2\times3+5)(-2)+4)(-2)+7)(-2)+0=10$$

یعنی عدد ۳۵۴۷۰ بر ۱۲ بخش‌پذیر نیست و مانده برابر ۱۰ است. به روش معمول می‌گوییم چون عدد مفروض بر دو عدد ۳ و ۴ بخش‌پذیر نیست بنابراین بر ۱۲ نیز بخش‌پذیر نیست ولی برای تعیین باقیمانده باید تقسیم را انجام دهیم.

مثال ۲) آیا عدد ۲۵۴۸ بر ۱۳ بخش‌پذیر است؟

حل. چون $10-b=10-13=-3$ لذا طبق قاعده بالا صورت عمل چنین است:

$$((-3\times2+5)(-3)+4)(-3)+8=-13=-1\times13$$

پس عدد مفروض بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

مثال ۳) آیا عدد ۱۲۳۴ بر ۷ بخش‌پذیر است.

حل. داریم $10-b=10-7=3$ و صورت عمل به صورت زیر است:

$$((3\times1+2)\times3+3)\times3+4=58$$

۵۸ برابر $A+bK$ است پس مانده ۵۸ بر ۷ برابر مانده عدد مفروض بر ۷ است و برای تعیین مانده ۵۸ بر ۷ قاعده را در مورد ۵۸ عمل می‌کنیم $3\times5+8=23$ و مانده ۲۳ بر ۷ برابر ۲ است‌که همان مانده ۱۲۳۴ بر ۷ است.

تبصره ۱) برای تسریع در عمل ملاحظه می‌کنیم اگر هر مضربی از b بر $A+bK$ اضافه یا از آن کم کنیم در باقیمانده آن بر b تأثیری ندارد. لذا بعداز هر ضرب در $(۱۰-b)$ و نیز بعداز هر جمع با رقم بعدی مضارب b را کنار می‌گذاریم و یا در صورت لزوم مضربی از b به‌آن اضافه می‌کنیم. مثلا در مورد مثال ۳ چون $۱۵=۳(۲+۱×۳)$ از ۱۵ می‌توان ۷×۲ راکنار گذاشت $۱=۷×۲-۱۵$ و ۱ را با رقم بعدی یعنی ۳ جمع می‌کنیم می‌شود ۴ و حاصلضرب آن در ۳ می‌شود ۱۲ و از ۱۲ می‌توان ۷ راکنار گذاشت. $۵=۷-۱۲$ و ۵ را با رقم آخر جمع می‌کنیم $۹=۴+۵$ و از ۹ باز ۷ راکنار می‌گذاریم می‌شود ۲ که مانده عدد مفروض بر ۷ است.

مثال ۴) مانده عدد ۱۸۹۲ را بر ۱۹ به دست آورید.

حل. $-۹=۱۹-۱۰$ و داریم:

$$((-۹×۱+۸)(-۹)+۹)(-۹)+۲$$

چون $۱۸=۹+(-۹)(۸+۱×۹-)$ اگر ۱۹ را از ۱۸ کنار بگذاریم داریم -۱ و $۱۱=۲+(-۹)(-۱)$ و لذا مانده برابر ۱۱ است.

تبصره ۲) در صورتی‌که عدد حاصل منفی باشد مضربی از b را به‌آن اضافی می‌کنیم به طوری‌که عدد حاصل مثبت و کوچکتر از b باشد به‌مثال زیر توجه فرمایید.

مثال ۵) آیا عدد ۲۹۱۸ بر عدد ۱۷ بخش‌پذیر است.

حل. $-۷=۱۷-۱۰$ و بنابراین داریم:

$$((-۷×۲+۹)(-۷)+۱)(-۷)+۸$$

چون $۳۵=(-۷)(۹+۲×۷-)$ و $۱=۱۷×۲-۳۵$ و $-۶=۸+(-۷)(۱+۱)$ برای تعیین باقیمانده ۱۷ را به -۶ اضافه می‌کنیم داریم $۱۱=۱۷+۶-$ که برابر مانده عدد مفروض بر ۱۷ است.

تبصره ۳) برای تسریع بیشتر در عمل اگر b یك رقمی باشد می‌توان از هر رقم عدد A یك یا چند b راکنار گذاشته و در مورد عدد حاصل قاعده را به کار برد مثلا در مورد بخش‌پذیری عدد ۸۷۶۹ بر ۷ اگر از هر رقم یك ۷ راکنار بگذاریم نتیجه می‌شود ۱۰۱۲ (از ۶ یك ۷ راکنار بگذاریم می‌شود -۱ که به صورت ۱ می‌نویسیم) حال اگر در مورد ۱۰۱۲ قاعده را به کار بریم خواهیم داشت:

$$((۳×۱+۰)۳-۱)۳+۲=۲۶=۷×۳+۵$$

یعنی مانده ۸۷۶۹ بر ۷ برابر ۵ است. اگر b دو رقمی باشد عدد A را از چپ به راست به بخش‌های دو رقمی جداکرده و از هر عدد دو رقمی حاصل یك یا چند برابر b راکنار گذاشته ودر مورد عدد حاصل قاعده را به کار می‌بریم مثلا در مورد بخش‌پذیری عدد ۵۲۴۴ بر ۱۷ عدد $۵۱=۱۷×۳$ را از ۵۲ و $۳۴=۱۷×۲$ را از ۴۴ کنار می‌گذاریم می‌شود ۱۱۰ و قاعده را درباره ۱۱۰ اعمال می‌کنیم.

تبصره ۴) اگر A عدد صحیح و منفی باشد مانده $-A$ را که مثبت است بر b بدست‌آورده‌آن را r می‌نامیم مانده A بر b برابر $b-r$ خواهد بود زیرا:

$$-A=bq+r \longrightarrow A=-bq-r$$
$$=-bq-b+b-r=b(-q-۱)+b-r$$

ثالثاً: قاعده فوق درصورتی‌که A و b درهر مبنای دلخواه مانند c نوشته شده باشد نیز صحیح و قابل اجرا است.

(درصورتیکه چهار عمل اصلی را درهمان مبنا انجام دهیم). یعنی رقم اول سمت چپ A را در $(c-b)$ ضرب‌کرده با رقم دوم از سمت چپ جمع‌کرده عدد حاصل را باز در $(c-b)$ ضرب‌کرده با رقم سوم جمع می‌کنیم وعمل را ادامه می‌دهیم تاآخرین جمع با a_0 به دست‌آید اگر عدد حاصل یعنی:

$$(c-b)^n a_n+(c-b)^{n-۱}a_{n-۱}+\cdots+(c-b)a_۱+a_0 \qquad (۲)$$

بر b قابل قسمت باشد و یا صفر باشد A بر b بخش‌پذیر است.

و نیز قواعدی نظیرآنچه در مبنای ۱۰ در مورد بخش‌پذیری بر اعداد ۱۱ و ۱۰ و ... گفته شد در مبنای c نیز می‌توان به دست‌آورد. مثلا در مبنای c عددی بر $c-۱$ قابل قسمت است‌که مجموع ارقامش بر $c-۱$ بخش‌پذیر باشد (نظیر ۹ در مبنای۱۰) زیرا دراین حالت $c-b=c-(c-۱)=۱$ و چون در عبارت (۲) قرار دهیم حاصل برابر مجموع ارقام A خواهد بود.

مسائل شماره ۱۶

این بار مسائل مجله را بـا خاطره‌ای از یك دبیر بازنشسته ادبیات شروع می‌کنیم که حاوی مطالب جالب و آموزنده است. برای این منظور عین نامه ایشان یعنی نامه آقای جعفر پورهاشمی را درج می‌کنیم.

«یك خاطره شیرین از دوران تحصیلات متوسطه»

من همیشه در ادبیات نمرات خـوب مـی‌گرفتم ولـی در ریاضیات چندان موفق نبودم و این را هم خودم می‌دانستم و هم استاد ریاضی ما. دبیر ریاضیات ما مرد ادیب و دانشمند و ریاضی‌دان متبحر، بـرادر پروفسور هشترودی ریـاضی‌دان معروف بود. این مـرد بزرگـوار، یعنی دبیر مـا علاوه‌بـر ریاضیات، در ادب فارسی، عربی، زبان خارجه و حتی موسیقی هم کاملاً وارد بود و بسیار فروتن و افتاده.

روزی من، در زنگ ریاضی قبل‌از اینکه استاد واردکلاس شود، دو خط شعر بـرای او ساختم و روی تخته سیاه کـلاس نوشتم، بدین مضمون:

بر فـراز ابرهـای‌آسمانـی فکر مـا
منحنی طی می‌کند دائم بهر صبح‌ومسا
گر توخود را منحنی کردی‌ز رسم منحنی
من ز فکر منحنی‌کردم قد خود را دوتا

* * *

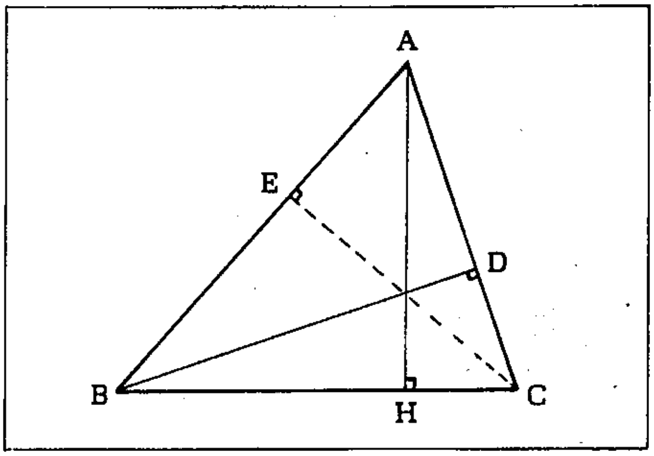
استاد واردکلاس شد وشعر را خواند. درحالیکه لبخندی مهربان بر لب داشت نگـاهی به من انداخت، زیرا می‌دانست که این کار،کار من است. سپس آهسته تخته پاکن را برداشت و مشغول پاك‌کردن شعر شد. انگار می‌خواست‌آن شعر را در ذهن خود ثبت‌کند. پس‌ازآن مشغول دادن درس جبر و هندسه شد. یکی از همکلاسیهای من‌که جوان بسیار خوبی هم بود وکنار من می‌نشست، سرش را بیخ‌گـوش من‌گذاشت و گفت: «پورهـاشمی، استاد از تو جبر و هندسه می‌خواهد نـه شعر.» این حرف درست و بموقع او، چنان در من تأثیری‌کردکه مرا در مسیر آموختن علم ریاضی انداخت، تاجائیکه در علم هندسه کار مختصری هـم انجام دادم. البته در همان موقع، آن کار مختصر این است:

قضیه: در هـر مثلث غیر مشخص، مربع هـر ضلع مساوی است بـا مجموع حاصلضرب دو ضلع دیگر در تصویر ضلع مربع شده روی‌آنها. به عبارت دیگر:

$$AB^2 = BC \cdot BH + AC \cdot AD$$

اثبات: دو مثلث BCE و ABH متشابه‌اند داریم:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{BE} \implies AB \times BE = BC \times BH$$



به طریق مشابه داریم:

$$ABD \sim ACE \implies \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \implies$$
$$\implies AB \times AE = AC \times AD$$

از جمع دو رابطه داریم:

$$AB \cdot BE + AB \cdot AE = BC \cdot BH$$
$$+ AC \cdot AD \implies AB(BE + AE)$$
$$= BC \times BH + AC \times AD \implies$$
$$AB = BC \cdot BH + AC \cdot AD$$

از این فرمول می‌توان قضیه فیثاغورث را به‌آسانی ثابت کرد. طبق فرمول بالا داریم:

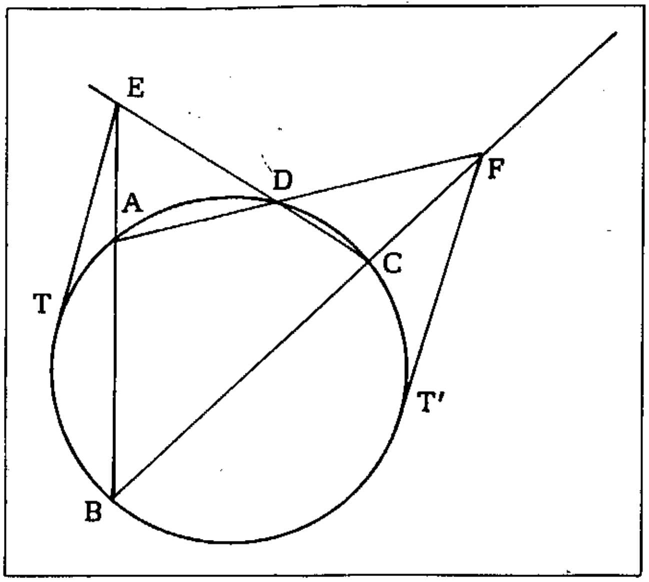
$$BC = AB + AC$$

زیرا تصویر BC روی AB خود AB و تصویر BC روی AC خود AC می‌شود.

توضیح. در مورد قضیه بالا یادآوری می‌شود که در کتاب هندسه چهارم ریاضی، تألیف مرحوم حسین مجذوب، مسئله زیر راجع به چهار ضلعی محاطی درج شده است:

مسئله. در چهار ضلعی محاطی $ABCD$ دایره محیطی را رسم می‌کنیم و از E و F نقطه تقاطع اضلاع مقابل دو مماس ET و FT' را بر دایره محیطی رسم می‌کنیم ثابت کنید

$$ET^2 + FT'^2 = EF^2$$



این مسئله در حالت خاصی‌که $A = C = 90^\circ$ باشد تبدیل به قضیه‌ای می‌شود که آقای جعفر ـ پورهاشمی طرح کرده‌اند.

۱ـ فرض می‌کنیم

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

ثابت کنید:

$$A^{-1} = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} A'$$

۲ـ فرض می‌کنیم G یک گروه با مرتبه خود باشد. ثابت کنید که، به ازاء هر $a \in C$، معادله $x^2 = a$ فقط یک جواب دارد. جواب این معادله را با $a^{\frac{1}{2}}$ نشان مـی‌دهیم و عمل $\circ$ را روی G چنین تعریف می‌کنیم:

$$x \circ g = (x^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}})^2$$

نشان دهیدکه $(G, \circ)$ یک گروه است.

۳ـ اگـر مسئول مرکزکنترل هوایی دو علامت (سیگنال) به ترتیب از دو پست رادیوکاتور، در مدت‌کمتراز t دریافت کند، نزدیک شدن هـواپیما را اطلاع مـی‌دهد. در صورتیکه این مرکز، در مدت T از پست‌های اول و دوم، دو علامت‌را در زمـانهای دلخواه دریافت‌کند، احتمال ظاهر شدن هواپیما در مدت T چقدر است.

۴ـ اگر a و b و c اعداد حقیقی، دو به دو متمایز و ریشه‌های معادله درجه سوم $f(x)=0$ باشند، ثابت کنید:

$$\frac{a}{f'(a)}+\frac{b}{f'(b)}+\frac{c}{f'(c)}=0$$

۵ـ حاصلضرب دو کثیرالجمله با ضرایب صحیح، کثیرالجمله‌ای شده است که ضرایب آن زوج می‌باشند. بین ضرایب کثیرالجمله اخیر، لااقل یك ضریب موجود است که بر ۴ بخش‌پذیر نیست. ثابت کنید همه ضرایب یکی از کثیرالجمله‌های اولیه، زوج است.

۶ـ یك ماشین حساب تنها دو عمل جمع و تفریق را انجام می‌دهد. می‌دانیم تابع f یك تابع خطی بوده و

$$f(2)=15/1 \quad \text{و} \quad f(1)=16/3$$

می‌باشد. چگونه می‌توان $f(1985)$ را حساب کرد؟ تعداد آن چقدر است؟

۷ـ تابع f بر بازه $[0, 1]$ نامنفی و $f(1)=1$ است. اگر به ازاء دو عدد دلخواه با شرایط $x_3 \geqslant 0$ و $x_2 \geqslant 0$ و $x_1+x_2 \leqslant 1$ داشته باشیم.

$$f(x_1+x_2) \geqslant f(x_1)+f(x_2)$$

ثابت کنید به ازاء همه مقادیر x داریم: $f(x) \leqslant 2x$

آیا به ازاء همه مقادیر x رابطه $f(x) \leqslant 1/9x$ بر قرار است.

۸ـ ثابت کنید:

$$(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n)^2 + (\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cdots+\cos\alpha_n) \leqslant n^2$$

۹ـ نا معادله زیر را حل کنید

$$|\sin x-\sin y|+\sin x\sin y \leqslant 0$$

۱۰ـ آیا روی صفحه محورهای مختصات می‌توان نواری طوری ساخت که نسبت به خط l به معادله

$$169x-143y+132=0$$

تقارن داشته و هیچ نقطه‌ای از آن مختصات صحیح نداشته باشد؟

۱۱ـ رابطه زیر را ثابت کنید:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{200}$$

۱۲ـ **مسئله پاپوس.** از مثلثی یك ضلع، زاویه روبروی آن و طول نیمساز وارد بر آن ضلع، مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۱۳ـ فرض می‌کنیم $n \geqslant 5$ عددی صحیح باشد. نشان دهید n اول است اگر و فقط اگر به ازاء هر چهار عدد صحیح و مثبت n_1 و n_2 و n_3 و n_4 که

$$n=n_1+n_2+n_3+n_4$$

نامساوی $n_{i_1} \cdot n_{i_2} \neq n_{i_3}-n_{i_4}$ بر قرار باشد.

۱۴ـ اگر $f(x)$ و $g(x)$ چند جمله‌ای‌هایی باشند که در رابطهٔ زیر:

$$f(x^2+x+1)=g(x)\cdot f(x)$$

صدق می‌کنند f تابعی چند جمله‌ای با درجه زوج است.

۱۵ـ اگر $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ باشد ثابت کنید:

$$\frac{tg\,x_2}{tg\,x_1} > \frac{x_1}{x_2}$$

۱۶ـ اگر $a_1 \ldots a_n$ اعداد حقیقی باشند به طوریکه $\sum_i a_i$ و $\sum_{i<j} a_i a_j$ و $\sum_{i<j<k} a_i a_j a_k$ مثبت باشند، آنگاه a_1 و $a_2 \ldots a_n$ مثبت است.

۱۷ـ اگر a_i اعداد یك تصاعد حسابی باشند که قدر نسبت آن عددی صحیح و ناصفر است، داریم:

$$\sum_{i=1}^{K}\left[\frac{a_i}{kd}\right]=\left[\frac{a_1}{kd}\right]+\left[\frac{a_2}{kd}\right]+\cdots+\left[\frac{a_K}{kd}\right]=\left[\frac{a_1}{d}\right]$$

که در آن $[x]$ جزء صحیح x است.

۱۸ـ فرض می‌کنیم $n \in N$، ثابت کنید $[(5+2\sqrt{6})^n]$ یك عدد صحیح فرد است ($[x]$ جزء صحیح x می‌باشد).

۱۹ـ در مثلث حاده الزاویه، از وسط هر یك از اضلاع عمودهایی بر دو ضلع دیگر فرود می‌آوریم. ثابت کنید مساحت شش ضلعی محدود با این عمودها برابر با نصف مساحت مثلث است.

۲۰ـ ثابت کنید در مجموعه مثلث‌های $T(G)$ مثلثی به‌اضلاع $\sin G$ و $\cos G$ و $\cos 2G$ وجود دارد $\left(0 < G < \frac{\pi}{4}\right)$ ماکزیمم شعاع دایرهٔ محیطی $(R(G))$ را تعیین کنید.

نتایج پنجمین مسابقهٔ ریاضی استانی که در تاریخ ۶۶/۱۱/۱۲ همزمان درمراکز استانها برگزار گردید به ترتیب حروف الفبا به‌شرح زیر می‌باشد. در این مسابقه در حدود سه هزار نفر از دانش‌آموزان سال سوم و چهارم ریاضی فیزیك شرکت کرده بودند که از بین آنها اسامی ۱۳۸ نفر تعیین شدند.

	نام	نام خانوادگی	استان	دبیرستان	سال
	الف				
۱	کامران	ابراهیمی	تهران ــ منطقه ۱۰	شهید حسن قدس	چهارم
۲	احسان	ابراهیم حبیبی	تهران ــ منطقه ۱	نیکان	چهارم
۳	حسین	ابراهیم نژاد صدیق	تبریز ــ ناحیه ۲	ثقة‌الاسلام	سوم
۴	کیوان	احدی	تهران ــ منطقه ۸	کمال	چهارم
۵	رضا	احمدی دانش	تهران ــ منطقه ۱۴	باباطاهر	چهارم
۶	محمدرضا	استاد علی دهقی	تهران ــ منطقه ۱	شهید مطهری	چهارم
۷	فریدون	اسکندری	تهران ــ منطقه ۱۱	شهید مفتح	چهارم
۸	مازیار	اسماعیلی خطیر	تهران ــ منطقه ۶	البرز	چهارم
۹	حسن	اصفهانی	باختران ــ ناحیه ۱	انقلاب	چهارم
۱۰	بهروز	افتخاری	تهران ــ منطقه ۶	البرز	چهارم
۱۱	مجید	آقابابائی	تهران ــ منطقه ۲	مفید	چهارم
۱۲	کامران	اکبری	شیراز ــ ناحیه ۲	شرافتیان	چهارم
۱۳	مجید	امیریان	اصفهان ــ ناحیه ۳	صدر اصفهانی	چهارم
۱۴	رامین	امیری فر	چهارمحال و بختیاری ــ شهرکرد	سیدجمال‌الدین اسدآبادی	چهارم
۱۵	پرهام	امیرمکری	تهران ــ منطقه ۳	شهدا	چهارم
۱۶	رضا	ایرانپور	اصفهان ــ ناحیه ۳	شهید بهشتی	چهارم
۱۷	شهریار	ایروانیان	تهران ــ منطقه ۷	شهید منتظری	چهارم
	ب				
۱۸	نظر	باقلانی	ایلام	شریعتی ایلام	چهارم
۱۹	حمیدرضا	بخشی	سمنان ــ دامغان	قدس	چهارم
۲۰	جمال	بدری	آذربایجان غربی ــ سلماس	امیرکبیر	چهارم
۲۱	علیرضا	بیگدلی	تهران ــ منطقه ۶	البرز	چهارم
۲۲	لیلا	بلوری	شیراز ــ ناحیه ۲	آسیه	چهارم
۲۳	ساسان	بهمنی کشکولی	کهگیلویه و بویراحمد ــ گچساران	امام خمینی	سوم
	پ				
۲۴	فاطمه	پاکپور	اراك	تزکیه	چهارم
	ت				
۲۵	علیرضا	تفنگ‌چی	همدان	ابن‌سینا	چهارم

۲۶ منوچهر	تکریمی	آذربایجان غربی ــ ارومیه	شهید چمران	چهارم
۲۷ علی‌اصغر	تن‌آرا	آذربایجان شرقی ــ مرند	شهید سیدزاده	چهارم
ج				
۲۸ مسعود	جعفری	اصفهان ــ ناحیه ۲	شهدای ادب	چهارم
۲۹ حمیدرضا	جلالی	تهران ــ منطقه ۶	البرز	چهارم
۳۰ امیر حسن	جمالی	سمنان ــ شاهرود	امام خمینی	سوم
۳۱ مصطفی	جمشیدپور	بوشهر ــ خورموج	شهید مطهری	چهارم
۳۲ وحید	جوادی	لرستان ــ الیگودرز	ــ	چهارم
ح				
۳۳ مسعود	حاج‌آقاجانی	مشهد ــ ناحیه ۱	شهید مصطفی خمینی	چهارم
۳۴ حنان	حاج‌محمودی	تهران ــ منطقه ۱	توحید	چهارم
۳۵ رسول	حاجی‌زاده	تهران ــ منطقه ۹	امام صادق (ع)	چهارم
۳۶ مهرداد	حسینی	چهارمحال و بختیاری ــ شهرکرد	سیدجمال‌الدین اسدآبادی	چهارم
۳۷ آرش	حسیبی	تهران ــ منطقه ۲	سروش آزادی	چهارم
۳۸ مریم	حشمت‌زاده	باختران ــ ناحیه ۲	جلال آل‌احمد	چهارم
۳۹ حمیدرضا	حقیقت خواه	تهران ــ منطقه ۱	نیکان	چهارم
۴۰ علی	حمزه‌لو	اراك	صمصامی	چهارم
۴۱ کوروش	حمیدزاده	تهران ــ منطقه ۳	آیت‌ا... منتظری	چهارم
۴۲ حسام	حمیدی‌تهرانی	تهران ــ منطقه ۱۱	شهید بهشتی	چهارم
۴۲ شهاب	حمیدی‌راد	تهران ــ منطقه ۸	دانشمند	چهارم
خ				
۴۴ محمدعلی	خجسته‌پور	شیراز ــ ناحیه ۲	شرافتیان	سوم
۴۵ عبدالرضا	خیاطیان	یزد	رازی	چهارم
د				
۴۶ خسرو	داودی	تهران ــ منطقه ۱۲	علوی	چهارم
۴۷ امیر	درویشی	گیلان ــ بندرانزلی	فردوسی	چهارم
۴۸ حمید	دهقان	تهران ــ منطقه ۲	شهید باهنر	چهارم
۴۹ حمیدرضا	دهقان سانیجی	یزد	رازی	چهارم
۵۰ علی	دلخوش	مشهد ــ ناحیهٔ ۱	امیرکبیر	چهارم
ذ				
۵۱ وحید	ذنوبی	تهران ــ منطقه ۲	شهید مطهری	چهارم
ر				
۵۲ مصطفی	رحمانی	تهران ــ منطقه ۱۲	چیت‌چیان	چهارم
۵۳ بابك	رسته‌گار خجسته	تهران ــ منطقه ۲	منتظری	چهارم
۵۴ محمد	رسمی	تهران ــ منطقه ۱۱	شهید مفتح	چهارم
۵۵ بابا	رضائی جواهری	همدان ــ ملایر	انقلاب اسلامی	چهارم
۵۶ محمد	رضایی	تهران ــ منطقه ۱۲	علوی	چهارم
۵۷ مهدی	رضایی	تهران ــ منطقه ۱۱	شهید مفتح	سوم
س				
۵۸ حسین	سرمدی	تهران ــ منطقه ۱۱	شهید بهشتی	چهارم
۵۹ محمدرضا	سیادت	تهران ــ منطقه ۲	مفید	چهارم

	ش				
۶۰	حامد	شاه‌حسینی	تهران ــ منطقه ۳	شهید محمد منتظری	چهارم
۶۱	شهریار	شاه‌حیدری	تهران ــ منطقه ۳	شهید محمد منتظری	چهارم
۶۲	عارف	شاه‌منصوریان	مازندران ــ رامسر	امام خمینی	سوم
۶۳	فریبا	شجاعی	هرمزگان ــ بندرعباس	۱۷ شهریور	چهارم
۶۴	مهرداد	شریفی	هرمزگان ــ بندرعباس	ابن‌سینا	چهارم
۶۵	حسین	شفیع‌زاده	تهران ــ منطقه ۸	امام صادق (ع)	چهارم
۶۶	شهرام	شمس	خوزستان ــ بهبهان	شهید مطهری	چهارم
۶۷	شهناز	شهباز	تهران ــ منطقه ۷	ندای آزادی	چهارم
۶۸	محمدحسین	شیردره حقیقی	شیراز ــ ناحیهٔ ۱	مفتاحی	چهارم
	ص				
۶۹	مجید	صادقی	اصفهان ــ ناحیهٔ ۵	شهیدنبوی‌منش	چهارم
۷۰	صبا	صبوحی	تهران ــ منطقه ۱	محمد نراقی	چهارم
۷۱	امیرسعید	صدیقی	زنجان ــ قزوین	شریعتی	چهارم
۷۲	معصومهٔ	صفری	ایلام	پروین اعتصامی	چهارم
۷۳	آرتا	صدرزاده	تهران ــ منطقه ۸	کمال	چهارم
۷۴	شادان	صنیع‌پوراصغریان	تهران ــ منطقه ۷	ندای آزادی	چهارم
۷۵	محمدکریم	صیرفیان	اصفهان ــ ناحیهٔ ۱	شهیدنیلفروش‌زاده	چهارم
	ض				
۷۶	محمدرضا	ضیائی	تهران ــ منطقه ۲	شهید مطهری	چهارم
	ع				
۷۷	امیرعباس	عابدی	تهران ــ منطقه ۱۲	علوی	سوم
۷۸	امیر	عاملی	مشهد ــ ناحیهٔ ۴	شهید جباریان	سوم
۷۹	علی‌اعظم	عباسفر	تهران ــ منطقه ۱۲	علوی	چهارم
۸۰	علیرضا	عباسی	زاهدان	رازی	سوم
۸۱	کوروش	علیائی	تهران ــ منطقهٔ ۱۱	شهید بهشتی	سوم
۸۲	محسن	علیشاهیها	تهران ــ منطقه ۱۱	شهید مفتح	چهارم
۸۳	حمیدرضا	علی‌پورتبریزی	مشهد ــ ناحیه ۲	فردوسی	چهارم
	غ				
۸۴	امیرعلم	غضنفریان	زنجان	امیرکبیر	چهارم
۸۵	عیسی	غفاری نژاد	کرمان	امام خمینی	چهارم
۸۶	مازیار	غفوری خرازی	تهران ــ منطقه ۳	شهدا	چهارم
	ف				
۸۷	فرخ	فتحی‌زاده	زاهدان	رازی	چهارم
۸۸	یعقوب	فرجامی	تهران ــ قم	امام‌صادق (ع)	چهارم
۸۹	فرزاد	فرهمند	اصفهان ــ ناحیهٔ ۳	سعدی	چهارم
۹۰	هومن	فرهمند	تهران ــ منطقه ۳	شهدا	چهارم
۹۱	بابك	فریبرز	تهران ــ منطقه ۱۲	فیروزبهرام	چهارم
۹۲	محمدابراهیم	فولادوند	تهران ــ منطقه ۸	کمال	چهارم
	ق				
۹۳	مجید	قادر	تهران ــ منطقه ۸	کمال	چهارم
۹۴	امیر	قانعی‌خوزانی	تهران ــ منطقه ۱۲	شهید باهنر	چهارم

۹۵	مهران	قدوسی	اصفهان ــ ناحیهٔ ۲	شهدای ادب	چهارم
۹۶	مسعود	قطبی	سنندج	ناصررنج آوری	چهارم
۹۷	سهراب	قلی‌پور	تهران ــ منطقه ۹	امام صادق (ع)	چهارم
	ك				
۹۸	علیرضا	کاظمی‌پور	کرمان	شهدا ۱۰	چهارم
۹۹	کیوان	کامیار	تهران ــ منطقه ۳	شهدا	چهارم
۱۰۰	جمشید	کرمانچی	تهران ــ منطقه ۱	نیکان	چهارم
۱۰۱	مهرناز	کرمانی	تبریز ــ ناحیه ۳	توحید	چهارم
۱۰۲	عبدالرضا	کمالی‌مقدم	بوشهر ــ برازجان	طالقانی	سوم
۱۰۳	سیدعلیرضا	کلاهدوزان	تهران ــ منطقه ۱۲	علوی	چهارم
۱۰۴	بابك	کیانی	اصفهان ــ ناحیه ۳	عدل	چهارم
	گ				
۱۰۵	علی‌اصغر	گرجی	مازندران ــ قائم‌شهر	امام جعفرصادق (ع)	سوم
	م				
۱۰۶	غلامرضا	محمدخانی	تهران ــ منطقه ۲	مفید	چهارم
۱۰۷	علیرضا	مجیدی	سنندج	ناصر رنج آوری	چهارم
۱۰۸	داریوش	مرتضوی	اصفهان ــ ناحیهٔ ۲	شهدای ادب	چهارم
۱۰۹	عبدالمجید	مرادی	کهگیلویه و بویراحمد ــ گچساران	امام خمینی	چهارم
۱۱۰	داود	معصومی محوا	تهران ــ منطقه ۱۲	علوی	سوم
۱۱۱	ژان	مقدس	تهران ــ منطقه ۲	شهید مطهری	چهارم
۱۱۲	مهران	ملکی	تهران ــ منطقه ۱	نیکان	چهارم
۱۱۳	ناصر	مویدنیا	تبریز ــ ناحیهٔ ۱	والفجر	سوم
۱۱۴	زرناز	مهریار	اصفهان ــ ناحیهٔ ۲	۲۲ بهمن	چهارم
۱۱۵	سعید	مهدیزاده توزون	تهران ــ منطقه ۸	کمال	چهارم
۱۱۶	کامبیز	میرزائیان	تهران ــ منطقه ۶	دانشمند	چهارم
۱۱۷	امیررضا	میرصالحی	تهران ــ منطقه ۳	شهدا	چهارم
۱۱۸	سارا	میناگر	مازندران ــ بابل	حریت	سوم
	ن				
۱۱۹	علی	ناصری‌مقدم	تهران ــ منطقه ۶	البرز	چهارم
۱۲۰	محرم	نژاد ایزد موسی	تهران ــ منطقه ۱۶	رشد	سوم
۱۲۱	محمدمهدی	نژادکاشانی	مشهد ــ ناحیه ۲	شهید رجائی	چهارم
۱۲۲	حسین	نژادی	مشهد ــ ناحیه ۲	فردوسی	چهارم
۱۲۳	فرید	نعمتی	تهران ــ منطقه ۷	شهید رجائی	چهارم
۱۲۴	بهزاد	نطنزی	اصفهان ــ ناحیهٔ ۲	شهدای ادب	چهارم
۱۲۵	هومن	نمکی	بوشهر	سعادت	چهارم
۱۲۶	افشین	نوابی	شیراز ــ ناحیهٔ ۲	شرافتیان	چهارم
۱۲۷	مهرداد	نوروزی‌نیالستانی	تهران ــ منطقه ۲	شهیدمطهری	چهارم
۱۲۸	احمد	نوروزی	تهران ــ منطقه ۱۲	چیت‌چیان	چهارم
۱۲۹	فرید	نیك‌بین	تهران ــ منطقه ۳	شهید مطهری	سوم
۱۳۰	ساسان	نیك‌نشان	تهران ــ منطقه ۳	شهید محمد منتظری	چهارم
	و				
۱۳۱	حسین	واحدی‌زاده	لرستان ــ بروجرد	شهید مطهری	چهارم

بقیه در صفحه ۷۷

پنجمین دوره مسابقات ریاضی استانی دانش آموزان کشور همزمان با آغاز دهه مبارک فجر انقلاب اسلامی

کشور را به برکت این جوانهای عزیز به جایی می‌رسانیم که احتیاجش در هر امری از کشورهای دیگر منقطع گردد.
«امام خمینی»

تاریخ: ۶۶/۱۱/۱۲	
شروع: ساعت ۹ صبح	مدت آزمون صبح: ۳ ساعت

۱ـ درمثلث ABC میانه AM را رسم کرده و نقطه وسط آن را I بنامید. پاره‌خط BI را ادامه دهید تا ضلع AC را در نقطه D قطع کند. ثابت کنید:

$$S_{ABC}=12S_{AID}$$

(منظو از S_{ABC} مساحت مثلث ABC است)

۲ـ ثابت کنید حاصل‌جمع هیچ k اعدد صحیح متوالی ومثبت را نمی‌توان به‌صورت 2^n نوشت.

(k و n اعداد صحیح ومثبت، و $k\neq 1$، است)

۳ـ چند جمله‌ایهای $P(x)$ را طوری تعیین کنید که اتحاد زیر برقرار باشد.

$$xP(x-1)=(x-12)P(x)$$

آزمون بعدازظهر	شروع: ۱۴/۳۰	مدت: ۳ ساعت

۴ـ مثلث ABC مفروض است.

آـ ثابت کنید عده بیشماری مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد به‌طوریکه مثلث ABC در آنها محاط باشد (یعنی هریك از رئوس A، B و C روی یکی از اضلاع مثلث ساخته شده قرار گیرد).

ب ـ ازمیان مثلثهای متساوی‌الاضلاع ساخته شده مثلثی را تعیین کنید که محیط ومساحت آن ماکزیمم باشد.

۵ـ چند جمله‌ای ناصفر $f(x)$ را چنان تعیین کنید که رابطه زیر برقرار باشد.

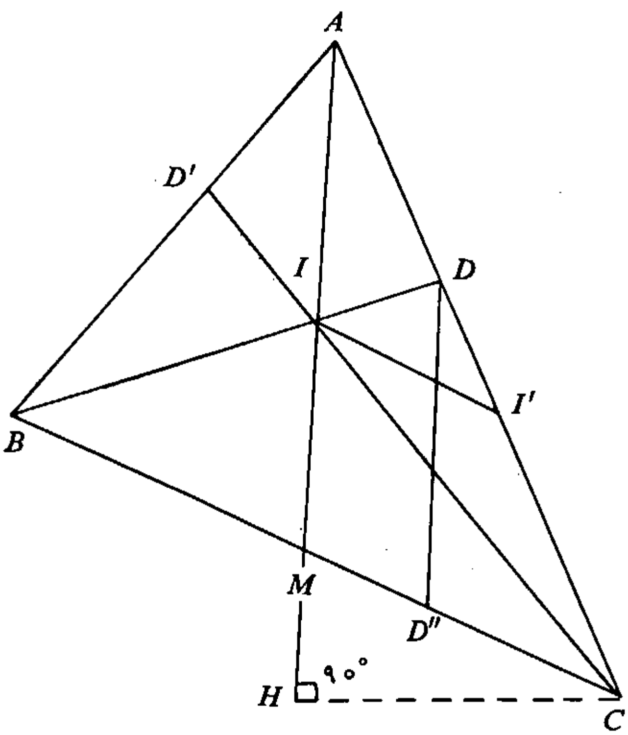
$$f(2x)=f'(x)f''(x)$$

۶ـ اعداد صحیح ومثبت n و a_1، a_2، ...، a_n را طوری تعیین کنید که

$$a_1+a_2+\dots+a_n=1366$$

وحاصلضرب $a_1a_2\dots a_n$ ماکزیمم باشد.

حل ۱. مساحت AMC برابر $\frac{1}{2}$ مساحت ABC است و مساحت مثلث AIC نیز برابر $\frac{1}{2}$ مساحت AMC است (زیرا قاعدهٔ آنها AI و IM است که با هم برابرند و CH ارتفاع مشترك آنهاست.) پس مساحت AIC برابر $\frac{1}{4}$ مساحت ABC است. حال ثابت می کنیم که مساحت AID برابر $\frac{1}{3}$ مساحت AIC است. اما این دومثلث دارای ارتفاع مشترك هستند. لذا باید ثابت کنیم $AC=3AD$ یا، $\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$. برای این منظور، II' را موازی BC می‌کشیم. چون I وسط AM است پس



$\frac{II'}{MC}=\frac{1}{2}$ یا $\frac{II'}{BC}=\frac{1}{4}$. ازتشابه دومثلث DII' و DBC داریم:

$$(1)\qquad \frac{DI}{DB}=\frac{II'}{BC}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{DB}{DI}=\frac{4}{1}\Rightarrow\frac{DB}{BI}=\frac{3}{4}$$

خط DD'' را موازی AM رسم می‌کنیم دومثلث AMC و CDD'' متشابه‌اند. پس

$$(2)\qquad \frac{DC}{AC}=\frac{DD''}{AM}=\frac{DD''}{2IM}=\frac{1}{2}\times\frac{DD''}{IM}$$

اما دومثلث BDD'' و BIM متشابه‌اند لهذا، بنابه (1)

$$(3)\qquad \frac{DD''}{IM}=\frac{BD}{BI}\overset{\text{بنابه}(1)}{\Rightarrow}\frac{DD''}{IM}=\frac{4}{3}$$

بنابه (1) و (2)، داریم

$$\frac{DC}{AC}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{AC}{DC}=\frac{3}{2}.$$

ازطرفی،

$$\frac{AC-DC}{DC}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{AD}{DC}=\frac{1}{2}.$$

به‌عبارت دیگر

$$\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}\Rightarrow AC=3AD.$$

حل۲. فرض کنید، P، $P+1$،...، و $P+(k-1)$، k عدد صحیح مثبت ومتوالی باشد و

$$P+(P+1)+\dots+(P+(k-1))=2^n$$

بالنتیجه،

$$kP+(1+2+3+\dots+k-1)=2^n$$

$$kP+\frac{(k-1)k}{2}=2^n$$

$$(1)\qquad k\left[P+\frac{k-1}{2}\right]=2^n$$

آ) اگر k فرد باشد، دراینصورت $P+\frac{k-1}{2}$ عددی صحیح است ولذا، تساوی (1) غیرممکن است (چون 2^n عامل فردی مانند k ندارد).

ب) اگر k زوج باشد، داریم $k=2L$ پس،

$$k\left[P+\frac{k-1}{2}\right]=2^n,$$

$$2L\cdot\left[P+\frac{2L-1}{2}\right]=2^n,$$

$$L\cdot[2(P+L)-1]=2^n.$$

چون $2(P+L)-1$ فرد است پس 2^n باید دارای عامل‌اول فرد داشته باشد که غیرممکن است، پس حکم ثابت است.

حل۳. فرض کنیم $P(x)=P_n(x)$ کثیرالجمله‌ای ازدرجهٔ n باشد. ازتساوی بالا نتیجه می‌شود که، $P(x)$ بر x بخش‌پذیر است. بنابراین، $P_n(x)=x\cdot P_{n-1}(x)$ ($P_{n-1}(x)$ یک کثیرالجمله ازدرجهٔ $n-1$ می‌باشد)

درنتیجه،

$$P(x-1)=(x-1)P_{n-1}(x-1)$$

یا

$$x\cdot P(x-1)=x\cdot(x-1)\cdot P_{n-1}(x-1)$$

$$(x-12)\,P(x)=x\cdot(x-1)P_{n-1}(x-1)$$

بنابراین، $P(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیراست. پس داریم

$$P_n(x)=x\cdot(x-1)\cdot P_{n-2}(x)$$

یا

$$P_n(x-1)=(x-1)(x-2)\cdot P_{n-2}(x-1)$$

درنتیجه،

یا

$$x\cdot P_n(x-1)=x\cdot(x-1)(x-2)P_{n-2}(x-1)$$

$$(x-12)P(x)=x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot P_{n-2}(x-1)$$

بنابراین $P(x)$ بر $x-2$ بخش‌پذیراست لذا می‌توان نوشت،

$$P_n(x)=x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot P_{n-3}(x)$$

با تبدیل x به $x-1$ خواهیم داشت،

$$P_n(x-1)=(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot P_{n-3}(x-1)$$

درنتیجه،

$$x\cdot P_n(x-1)=x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot P_{n-3}(x-1)=(x-12)\cdot P(x)$$

یعنی، $P(x)$ بر $x-3$ بخش‌پذیراست. با ادامهٔ این روش خواهیم داشت،

$$(1)\qquad P(x)=P_n(x)=x(x-1)(x-2)\cdot(x-3)\dots(x-11)\,P_{n-12}(x)$$

با تبدیل x به $x-1$ داریم

$$P(x-1)=(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-12).\,P_{n-12}(x-1)$$

و یا

$$(x-12)\cdot P(x)=x(x-1)\cdot(x-2)\cdots(x-11)$$
$$(x-12)\cdot P_{n-12}(x-1)$$

با استفاده از رابطهٔ (۱) خواهیم داشت

$$(x-12)\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdots(x-11)$$
$$\cdot P_{n-12}(x)=x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdots(x-11)$$
$$\cdot(x-12)\cdot P_{n-12}(x-1)$$

در نتیجه، $P_{n-12}(x)=P_{n-12}(x-1)$. فرض کنید $Q(x)=P_{n-12}(x)$ داریم: $Q(x-1)=Q(x)$ که $Q(x)$ یک کثیرالجمله از درجهٔ $n-12$ می‌باشد. اگر

$$Q(x)=Q_0(x)=C$$

(یعنی $Q(x)$ یک کثیرالجمله از درجهٔ صفر باشد) آنگاه رابطهٔ $Q(x)=Q(x-1)$ برقرار است.

حال ثابت می‌کنیم که $Q(x)=C$ تنها حالتی است که رابطهٔ $Q(x)=Q(x-1)$ می‌تواند برقرار باشد. اگر

$$Q(x)=Q_k(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\dots+a_{k-1}x+a_k$$

که درآن $k\geqslant 1$ و $a_0\neq 0$ آنگاه از $Q(x)=Q(x-1)$ نتیجه می‌شود:

$$a_0(x-1)^k+a_1(x-1)^{k-1}+\dots=$$
$$=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\dots$$

با مساوی قرار دادن ضریب x^{k-1} در دوطرف تساوی خواهیم داشت،

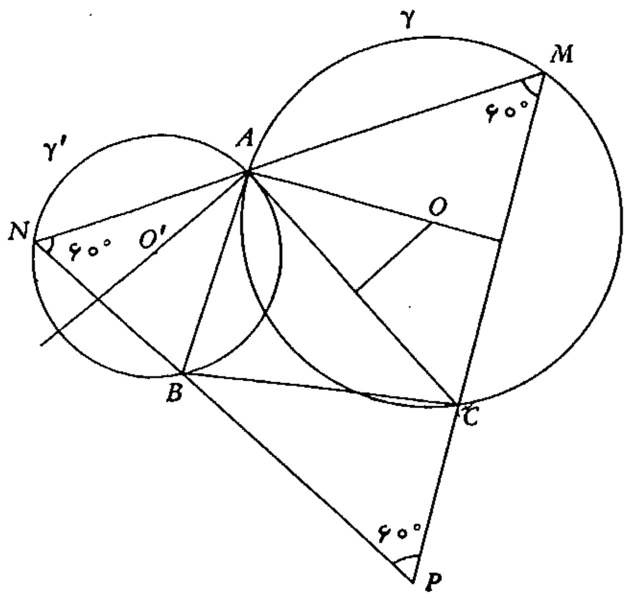
$$ka_0+a_1=a_1\Rightarrow a_0=0$$

و این متناقض با $a_0\neq 0$ است پس $k=0$ بنابراین $Q(x)=C$، در نتیجه،

$$P(x)=C\ \ x\ \ (x-1)(x-2)\cdots(x-11)$$

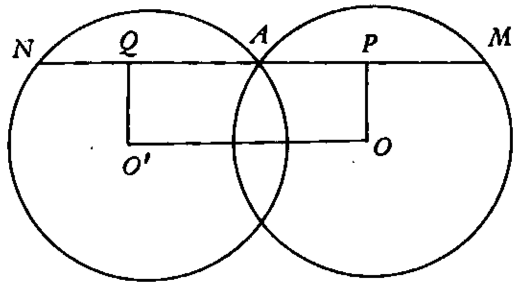
یعنی $P(x)$ یک کثیرالجمله از درجهٔ ۱۲ میباشد.

حل ۴. کمان درخورهای $60°$ را بر AC و AB رسم کرده و آنها را دوایر γ و γ' می‌نامیم. هر خطی که از A رسم شود تا γ و γ' را در M و N قطع کند آنگاه خطوط MC و NB همدیگر را در نقطه‌یی مانند P قطع می‌کنند. مثلث MNP متساوی‌الاضلاع است (ش ۱). درنتیجه بی‌نهایت مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توان بر ABC محیط کرد. حال برای اینکه مساحت یامحیط یک مثلث، متساوی‌الاضلاع ماکزیمم‌شود کافیست ضلع آن ماکزیمم شود. پس برای‌حل این‌قسمت‌کافیست از نقطهٔ A خطی‌رسم کنیم تا MN ماکزیمم شود. ثابت‌می‌کنیم هرگاه از A خطی به‌موازات OO' (خط‌المرکزین در دایرهٔ



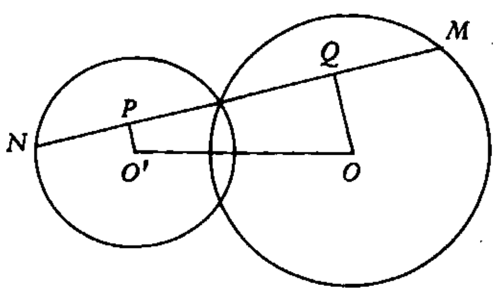
(ش ۱)

γ و γ') رسم کنیم این خاصیت را خواهد داشت. اگر MN موازی OO' باشد آنگاه واضح است که $MN=2OO'$ (ش ۲).



(ش ۲)

ولی اگر MN موازی OO' نباشد $MN<2OO'$ (ش ۳).



(ش ۳)

زیرا اگر از O و O' به MN عمود کنیم و پاهای عمود را P و Q بنامیم خواهیم داشت

$$\frac{MN}{2} = PQ < OO' \Rightarrow MN < 2OO'$$

حل ۵. فرض کنید $f(x) = ax^n + \dots + a_1x + a_0$ باشد چون درجه‌های $f(x)$، $f'(x)$، $f''(x)$ به ترتیب، n، $n-1$ و $n-2$ می‌باشد، باید داشته باشیم:

$$f(2x) = f'(x) \cdot f''(x)$$

پس $n = (n-1) + (n-2)$ بعبارتی $n = 3$.

پس $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$$f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

$f''(x) = 6a_3x + 2a_2$، از $f(2x) = f'(x) \cdot f''(x)$ نتیجه میشود که،

$$a_3(2x)^3 + a_2(2x)^2 + a_1(2x) + a_0$$
$$= (3a_3x^2 + 2a_2x + a_1)(6a_3x + 2a_2)$$

در نتیجه داریم؛

$$8a_3 = 18a_3^2 \Rightarrow a_3 = \frac{4}{9}$$

$$4a_2 = 6a_3a_2 + 12a_3a_2 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$2a_1 = 4a_2^2 + 6a_3a_1 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$a_0 = 2a_2a_1 \Rightarrow a_0 = 0$$

در نتیجه، $f(x) = \frac{4}{9}x^3$ جواب مسأله است.

حل ۶. هریك از x_iها را می‌توان کوچکتر از ۴ گرفت زیرا اگر $a_i \geqslant 4$، آنگاه $a_i = a_i - 2 + 2$ و $2(a_i - 2) \geqslant a_i$ پس به‌جای a_i می‌توان دو عدد ۲ و $a_i - 2$ را انتخاب کرد. حال ادعا می‌کنیم که در بین a_iها بیش از دو تا عدد ۲ نمی‌توانیم داشته باشیم زیرا $3 + 3 = 2 + 2 + 2$ و $2 \times 2 \times 2 < 3 \times 3$ پس به‌جای هر ۳ تا عدد ۲ می‌توان اعداد ۳ و ۳ را انتخاب کرد. در نتیجه با توجه به تساوی

$$1366 = 3 \times 454 + 2 + 2$$

خواهیم داشت

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{454} = 3, \quad a_{455} = a_{456} = 2$$

یعنی ماکزیمم حاصلضرب $3^{454} \times 2^2$ خواهد بود.

پیشگفتار بقیه از صفحه ۳

کشور پایان داده و به‌جمع ما بپیوندند.

به‌منظور غنای بیشتر مباحث دبیرستانی، همکاری تنگاتنگ دبیران ارجمند با مجله خود ضروری است. انتظار ما از همکاران دبیرستانی، دانش‌آموزان گرامی و دانشجویان عزیز اینست که با ارسال مقالات و مسائل ما را بیش از پیش یاری دهند. اما ضروری است که نکاتی چند در مورد مقالات ذکر گردد. اولاً، ضروری است که منابع و مراجع کامل مقالات و مسائل ارسالی اعم از ترجمه و تألیف به‌طور کامل ذکر گردد. از این پس، هیأت تحریریه از چاپ مقالات و مسائل بدون مرجع معذور است، ثانیاً، مقالات تایپ شده و یاحداقل باخط‌خوانا و با فاصلهٔ کافی نوشته شود.

خوشبختانه، تقویت هیأت تحریریه از یك سو، و دریافت مقالات متنوع و فراوان از سوی دیگر، هیأت تحریریه را برآن داشت که امکان افزایش تعداد شماره‌های مجله را مورد بررسی قرار دهد. اگر امکانات سازمان اجازه دهد تعداد شماره‌ها را به شش شماره درسال افزایش خواهیم داد. هیأت تحریریه بعد از بحث وبررسی‌های دقیق و کامل برای انجام این امرقول‌مساعد می‌دهد. امید است که بخش تولید هم با سازماندهی وتقویت نیروهای خود، در انجام این امر مهم مساعدت و همت لازم را مبذول دارد. مسلماً، اگر این قول ما جامهٔ عمل بپوشد خبر مسرت‌بخشی برای هزاران خواننده مجله خواهد بود که همواره خواستار افزایش‌تعداد شماره‌ها هستند. بشارت دیگر اینکه مرکز نشر دانشگاهی هم به فکر انتشار مجله‌ای بنام نشر ریاضی افتاده است. امید است که دست‌اندرکاران این مجله در راه گسترش تحقیق و تتبع دانش ریاضی در ایران موفق باشند.

در پایان برخود لازم می‌دانیم که از مساعی جمیلهٔ کلیه کارکنان بخش‌تولید رشدهای تخصصی، که همکاری‌صمیمانه‌ای با ما دارند، تشکر نمائیم. به ویژه خدمات ارزندهٔ آقای نیکنام سرپرست بخش تولید و آقای پریسای صفحه‌آرای رشد آموزش ریاضی قابل تقدیر است.

سردبیر

محاسبهٔ مجموع قوای kام n عدد طبیعی

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$$

محمدرضا هاشمی دانشجوی رشته الکترونیک دانشگاه امام حسین

S_k از دترمینان مرتبهٔ kام زیر محاسبه می‌شود.

$$S_k = \frac{n+1}{(k+1)!}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (n+1)-1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & \cdots & (n+1)^2-1 \\ 4 & 6 & 4 & 0 & \cdots & (n+1)^3-1 \\ 5 & 10 & 10 & 5 & \cdots & (n+1)^4-1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ k+1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & (n+1)^k-1 \end{vmatrix}$$

برهان. می‌دانیم اگر $m = 1, 2, 3, \ldots$ باشد آنگاه:

$$(x+y)^m = x^m + mx^{m-1}y + \frac{m(m-1)}{2!}x^{m-2}y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^{m-3}y^3 + \cdots + y^m$$

در اتحاد فوق با قرار دادن $x = n-1$ و $y = 1$ و $m = k+1$ داریم:

$$n^{k+1} - (n-1)^{k+1} = (k+1)(n-1)^k + \frac{k(k+1)}{2!}(n-1)^{k-1} + \frac{(k-1)k(k+1)}{3!}(n-1)^{k-2} + \cdots + 1$$

حال اگر در اتحاد فوق به‌ترتیب مقادیر $1, 2, 3, \ldots, (n+1)$ را قرار دهیم از جمع روابط حاصل به تساوی زیر خواهیم رسید:

$$(n+1)^{k+1} = (k+1)S_k + \frac{k(k+1)}{2!}S_{k-1} + \frac{k(k-1)(k+1)}{3!}S_{k-2} + \cdots + (k+1)S_1 + (n+1)$$

تساوی فوق را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(k+1)S_k + \frac{k(k+1)}{2!}S_{k-1} + \frac{(k-1)k(k+1)}{3!}S_{k-2} + \cdots + (k+1)S_1 = (k+1) - (n+1)$$

حال اگر در تساوی فوق به ترتیب مقادیر $1, 2, 3, \ldots k$

را به k نسبت دهیم دستگاه زیر حاصل می‌گردد.

$$\text{(دستگاه مثلثی)}\quad\begin{cases} 2S_1=(n+1)^2-(n+1) \\ 3S_2+3S_1=(n+1)^3-(n+1) \\ 4S_3+6S_2+4S_1=(n+1)^4-(n+1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (k+1)S_k+\dfrac{k(k+1)}{2!}S_{k-1}+\dfrac{(k-1)k(k+1)}{3!}S_{k-2}+\cdots+(k+1)S_1=(n+1)^{k+1}+(n+1) \end{cases}$$

$$(u_{k+1}=(n+1)^{k+1}-(n+1)$$

$$S_k=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \;\cdots & u_2 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \;\cdots & u_3 \\ 4 & 6 & 4 & 0 \;\cdots & n_4 \\ 5 & 10 & 10 & 5 \;\cdots & u_5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k+1 & \cdots & \cdots & \cdots & u_{k+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots \\ 3 & 3 & 0 & \cdots \\ 4 & 6 & 4 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k+1 & \cdots & \cdots & k+1 \end{vmatrix}} \Longrightarrow S_k=\frac{n+1}{(k+1)!}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (n+1)-1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & \cdots & (n+1)^2-1 \\ 4 & 6 & 4 & 0 & \cdots & (n+1)^3-1 \\ 5 & 10 & 10 & 5 & \cdots & (n+1)^4-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (k+1) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & (n+1)^k-1 \end{vmatrix}$$

حل مسائل شماره ۱۴و۱۳

تنظیم از: محمود نصیری

۱. نقیض گزاره ذیل را بنویسید.

«بین هردو عدد حقیقی متمایز، عددی‌حقیقی وجودداردد»

حل. ترجمهٔ گزارهٔ فوق به زبان ریاضی به صورت زیر است:

«به‌ازاء هــر دوعــدد حقیقی مانند x و y اگر $x<y$، آنگاه‌عددی حقیقی‌مانند z وجوددارد به‌طوری که $x<z<y$.

ترجمه این گزاره به‌زبان منطق چنین است.

$$\forall x \forall y \exists z[x, z, y \in R \text{ ، } x<y \Longrightarrow x<z<y)]$$

که نقیض آن

$$\exists x \exists y \forall z[x, y, z \in R \text{ ، } x<y \wedge (x \geqslant z \vee y \geqslant z)]$$

می‌باشد.

ترجمه آن به‌زبان عادی چنین است.

«دوعدد حقیقی متمایز وجود دارد کـه هـرعدد حقیقی حداقل ازیکی ازآنها نابیشتر است».

۲. a و b و c چه مقادیر حقیقی داشته باشند تـا به‌ازاء جمیع مقادیر x و y و z داشته باشیم:

$$|ax+by+cz|+|bx+cy+az|+|cx+ay+bz| = |x|+|y|+|z|.$$

حل. فــرض می‌کنیم به‌ازاء جمیع مقادیــر x و y و z تساوی برقرارباشد.

به‌ازاء $x=y=z=1$ داریم

$$(1) \quad |a+b+c|=1.$$

به‌ازاء $y=z=0$ و $x=1$ داریم

$$(2) \quad |a|+|b|+|c|=1.$$

به‌ازاء $z=0$ و $y=-1$ و $x=1$ داریم:

$$(3) \quad |a-b|+|b-c|+|c-a|=2$$

همچنین به‌ازاء جمیع مقادیر a و b و c داریم:

$$(4) \quad |a+b+c| \leqslant |a|+|b|+|c|$$

دررابطه (۴) وقتی تساوی بــرقرار است که a و b و c هم علامت باشند یعنی همزمان داشته باشیم:

$$ab \geqslant 0 \text{ و } bc \geqslant 0 \text{ و } ac \geqslant 0$$

در نامساوی

$$(5) \quad |a-b|+|b-c|+|c-a| \leqslant 2|a|+2|b|+2|c|$$

وقتی تساوی برقراراست‌که داشته باشیم که $ac \leqslant 0$ و $bc \leqslant 0$ و $ab \leqslant 0$ از روابط (۱) و (۲) و (۳) نتیجه‌می‌شود که درروابط (۴) و (۵) باید به جای نامساوی تساوی برقرار گردد یعنی داشته بــاشیم. $ab=bc=ca=0$. واین تنها در حالتی امکان‌پذیراست که دوتا ازاعداد a و b و c برابرصفر و عدد سوم همان‌طورکه ازروابط (۱) ویا (۲) دیده می‌شود از نظر قدرمطلق برابر واحد باشد.

۳. اگر $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$، ثابت‌کنید.

$$\sin\alpha \geqslant \frac{2\alpha}{\pi}+\frac{\alpha}{12\pi}(\pi^2-4\alpha^2)$$

حل. تابع f را با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{x^2}{3\pi} & x \neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم.

این تابع بر R پیوسته است (تحقیق کنید). اگر $x\neq 0$،

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}+\frac{2x}{3\pi}$$ و

بنابراین $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{3\pi(x\cos x-\sin x)+2x^3}{3\pi x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

اگر $g(x)=3\pi(x\cos x-\sin x)+2x^3$ بگیریم، آنگاه

$$g'(x)=3x(2x-\pi\sin x)$$

ازفرض $0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}$ نتیجه می‌شود $\sin x\geqslant \frac{2x}{\pi}$ (مسئله ۵ رشد شمارهٔ ۱۲) درنتیجه $g'(x)\leqslant 0$، یعنی تابع g بر $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ نزولی است لهذا:

$$3\pi(x\cos x-\sin x)+2x^3\leqslant 0$$

پس به‌ازاء هر x اگر $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ ، $g(x)\leqslant 0$ و در نتیجه به‌ازاء هر x ازاین فاصله $f'(x)\leqslant 0$ یعنی تابع f بر $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ نزولی است بنابراین، اگر $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$ ، آنگاه $f(\alpha)\geqslant f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ یعنی $\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{\alpha^2}{3\pi}\geqslant\frac{2}{\pi}+\frac{\pi}{12}$. لهذا،

$$\sin\alpha\geqslant\frac{2\alpha}{\pi}+\frac{\alpha}{12\pi}(\pi^2-4\alpha^2).$$

به‌ازاء $\alpha=0$ تساوی برقرار است.

۴. اگر $f\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right)=\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ ، $f(x)$ را بیابید.

حل. واضح است که $f(0)=0$ فرض می‌کنیم $x\neq 0$،

$$f\left(\frac{1}{x+\frac1x+1}\right)=\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}+1}=\frac{1}{\left(x+\frac1x\right)^2-1}$$

$$=\frac{1}{\left(x+\frac1x+1\right)\left(x+\frac1x-1\right)}=$$

$$=\frac{1}{\left(x+\frac1x+1\right)\left(x+\frac1x+1-2\right)}$$

اگر $x+\frac1x+1$ را به x تبدیل کنیم،

$$f\left(\frac1x\right)=\frac{1}{x(x-2)}=\frac{1}{x^2-2x}$$

با تبدیل $\frac1x$ به x، $f(x)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$f(x)=\frac{1}{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}}=\frac{x^2}{1-2x}$$

چون این رابطه به‌ازاء $x=0$ نیز سازگار است پس:

$$f(x)=\frac{x^2}{1-2x}$$

۵. ثابت کنید:

$$Arc\,tg\,x+Arc\,tg\,y=Arc\,tg\frac{x+y}{1-xy}+K\pi$$

به قسمی که

$$\begin{cases}K=0 & xy<1 & & \text{اگر}\\ K=-1 & xy>1 & x<0\ \text{و} & \text{اگر}\\ K=+1 & xy>1 & x>0\ \text{و} & \text{اگر}\end{cases}$$

راه حل اول. به‌آسانی دیده می‌شود که عبارات $Arc\,tg\,x+Arc\,tg\,y$ و $Arc\,tg\frac{x+y}{1-xy}$ فقط در $K\pi$ (K عددی صحیح است) اختلاف دارند زیرا

$$tg(Arc\,tg\,x+Arc\,tg\,y)=\frac{x+y}{1-xy}$$ و

$$tg\left(Arc\,tg\frac{x+y}{1-xy}\right)=\frac{x+y}{1-xy}.$$

وبنابراین:

$$*\quad Arc\,tg\,x+Arc\,tg\,y=Arc\,tg\frac{x+y}{1-xy}+K\pi$$

برای محاسبه مقادیر K داریم:

$$-\frac{\pi}{2}<Arc\,tg\,x<\frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad -\frac{\pi}{2}<Arc\,tg\,y<\frac{\pi}{2}$$

یعنی

$$-\pi<Arc\,tg\,x+Arc\,tg\,y<\pi$$

$$\left|Arc\,tg\frac{x+y}{1-xy}+K\pi\right|<\pi$$

و چون

$$-\frac{\pi}{2}<Arc\,tg\frac{x+y}{1-xy}<\frac{\pi}{2}$$

پس $|K|<2$ بنابراین K فقط می‌تواند مقادیر ۰ و ۱ و ۱− را اختیار کند. برای پیدا کردن K درهر حالت می‌نویسیم.

$$\cos(Arc\,tg\,x+Arc\,tg\,y)=\cos\left(Arc\,tg\frac{x+y}{1-xy}+K\pi\right)$$

پس از بسط این عبارت داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}}\cdot\cos K\pi$$

یعنی

$$\cos K\pi=\frac{1-xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\sqrt{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}$$

داریم:

$$\sqrt{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}=\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1-xy)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{|1-xy|}$$

یا

$$\cos K\pi=\frac{1-xy}{|1-xy|}$$

اگر $xy<1$ یعنی $1-xy>0$ آنگاه $|1-xy|=1-xy$
اگر $xy>1$ یعنی $1-xy<0$ آنگاه $|1-xy|=-(1-xy)$
بنابراین
اگر $xy>1$، آنگاه $\cos K\pi=-1$ و اگر $xy<1$ آنگاه $\cos K\pi=1$.
وچون $K\pi$ فقط مقادیر ۰ و π و $-\pi$ را اختیار می‌کند

درنتیجه
اگر $xy<1$، آنگاه $K=0$
اگر $xy>1$، آنگاه $K=\pm1$

برای تعیین علامت K درقسمت دوم گوئیم اگر $xy>1$ و $x>0$ آنگاه $y>0$ وبنابراین $Arc\,tg\,x>0$ و $Arc\,tg\,y>0$ و $Arc\,tg\frac{x+y}{1-xy}<0$ پس دررابطه * طرف اول مثبت است باید طرف دوم نیز مثبت باشد. یعنی باید $K=1$ و به همین ترتیب اگر $xy>1$ و $x<0$ آنگاه $y<0$ وباید $K=-1$

تذکر. درحالتی‌که $xy=1$ باشد یعنی $y=\frac{1}{x}$ داریم

$$Arc\,tg\,x+Arc\,tg\frac{1}{x}=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & x>0\\ -\frac{\pi}{2} & x<0\end{cases}$$

روش دوم.

$$Arc\,tg\,x+Arc\,tg\,y=Arc\,tg\frac{x+y}{1-xy}+K\pi$$

بنابر مسئله ۶ از سؤالات تشریحی کنکور ۶۳، رشد آموزش ریاضی، سال اول، شماره ۴، زمستان ۶۳ ثابت شده است که

$$Arc\,tg\,x+Arc\,tg\frac{1}{x}=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & x>0\\ -\frac{\pi}{2} & x<0\end{cases}$$

ابتدا فرض کنید $xy<1$. دو حالت رخ می‌دهد. حالت اول: حداقل یکی از x یا y مثبت باشد. بدون آنکه به‌کلیت برهان خللی وارد شود می‌توان فرض کرد که $x>0$. بنابراین، $y<\frac{1}{x}$، ازطرفی بنابرصعودی بودن تابع $Arc\,tg$،

$$-\frac{\pi}{2}<Arc\,tg\,x+Arc\,tg\,y\leqslant Arc\,tg\,x+Arc\,tg\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$

پس

$$-\frac{\pi}{2}<Arc\,tg\frac{x+y}{1-xy}+K\pi<\frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

ازطرفی $-\frac{\pi}{2}<-Arc\,tg\frac{x+y}{1-xy}<\frac{\pi}{2}$ باجمع این نامساوی با نامساوی فوق خواهیم داشت $-\pi<K\pi<\pi$ بنابراین $k=0$.

حالت دوم: x و y هر دو منفی باشد. دراینحالت چون $xy<1$ پس $y>\frac{1}{x}$ بنابر صعودی بودن $Arc\,tg$ ،

$$0>Arc\,tg\,x+Arc\,tg\,y\geqslant Arc\,tg\,x+Arc\,tg\,\frac{1}{x}\geqslant-\frac{\pi}{2}$$

بنابراین چون $0<-Arc\,tg\,\frac{x+y}{1-xy}<\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}<Arc\,tg\,\frac{x+y}{1-xy}+K\pi<0$ پس $-\frac{\pi}{2}<K\pi<\frac{\pi}{2}$.
بنابراین $K=0$

حال فرض کنید که $xy>1$ پس x و y متحدالعلامه است. به طریق مشابه ثابت می‌شود که اگر $x>0$ آنگاه $k=1$، واگر $x<0$ آنگاه $k=-1$.

۶. آیا تابعی مانند f بر $[0,\infty)$ وجود دارد که دوبار مشتق‌پذیر بوده و در شرایط زیر صدق کند؟ $f(0)=0$، $f'(0)=1$ و $f(1)=1$، و اگر $x>0$ آنگاه $f''(x)>0$.

حل. ثابت می‌کنیم با شرایط فوق به‌ازاء هر $x>0$، $f(x)>x$ ولذا $f(1)=1$ نمی‌تواند برقرار باشد

تابع g باضابطه $g(x)=f(x)-x$ را بر $[0,+\infty)$ تعریف می‌کنیم. چون f دوبار مشتق پذیر بوده یعنی g' و g'' بر $[0,+\infty)$ موجودند. وچون $f(0)=0$ درنتیجه $g(0)=0$ و $g'(x)=f'(x)-1$.

بنابه فرض مسأله به‌ازاء هر $x>0$، $f''(x)>0$ پس تابع f' بر $(0,\infty)$ اکیداً صعودی است لذا اگر $x>0$، آنگاه $f'(x)>f'(0)=1$ یعنی $f'(x)-1>0$ ودرنتیجه تابع g نیز اکیداً صعودی است.

یعنی، اگر $x>0$، آنگاه $g(x)>g(0)$. یعنی، اگر $x>0$،آنگاه $f(x)>x$،که با $f(1)>1$ متناقض است.

۷. اگر $a>0$ و $b>0$، حد زیر را به‌دست‌آورید.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}}\quad(n\in N)$$

آیا مسأله را می‌توان برای تعداد متناهی ازاعداد مثبت a و b و c و... تعمیم داد؟

حل. ابتدا فرض می‌کنیم $0<a\leqslant b$،

$$\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}}=b\sqrt[n]{\frac{1+\left(\frac{a}{b}\right)^n}{2}}$$

$$0<a\leqslant b\ ،\ 0<\frac{a}{b}\leqslant 1\ ،\ 0<\left(\frac{a}{b}\right)^n\leqslant 1$$

$$\frac{1}{2}<\frac{1+\left(\frac{a}{b}\right)^n}{2}\leqslant 1\ ،\ \sqrt[n]{\frac{1}{2}}<\sqrt[n]{\frac{1+\left(\frac{a}{b}\right)^n}{2}}\leqslant 1$$

طرفین نامساوی را در b ضرب می‌کنیم داریم.

$$b\sqrt[n]{\frac{1}{2}}<\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}}\leqslant b$$

و چون $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=1$ پس $\lim\limits_{n\to+\infty}b\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=b$ وبنا به اصل فشار

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}}=b$$

به‌همین ترتیب اگر فرض کنیم $0<b\leqslant a$ حد فوق برابر a خواهد شد.

$$\text{پس:}\quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}}=Max\{a\ ,\ b\}$$

به‌همین روش می‌توان ثابت کرد که اگر $c>0$ و b و a آنگاه:

$$\lim\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}=Max\{a\ ,\ b\ ,\ c\}$$

ومی‌توان مسئله را برای هرتعداد متناهی اعداد مثبت تعمیم‌داد.

۸. توابع f و g چنان‌هستندکه، به‌ازاء هرعدد حقیقی x،

$$f'(x)=g(x)\quad \text{و}\quad g'(x)=-f(x)$$

فرض‌کنیم $f(0)=0$ و $g(0)=1$ ثابت‌کنید

$$f(x)=\sin x\quad \text{و}\quad g(x)=\cos x$$

حل. بدیهی‌است که‌توابع‌سینوس‌وکسینوس‌درمفروضات مسأله صدق می‌کنند. بنابراین کافی است نشان دهیم که سینوس وکسینوس تنها توابعی‌هستند که‌درمفروضات مسأله‌صدق می‌کنند. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر f و g درفرض‌های مسأله صدق کنند، آنگاه: $(f(x))^2+(g(x))^2=1$. زیرا داریم:

$$2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)f'(x)=$$
$$=2f(x)g(x)-2g(x)\cdot f(x)=0$$

پس c عددی است ثابت $(f(x))^2+(g(x))^2=c$
اینک برای‌محاسبه c، داریم $g(0)=1$ و $f(0)=0$ درنتیجه:

$$(f(x))^2+(g(x))^2=1$$
$$c=(f(0))^2+(g(0))^2=1$$

فرض‌کنیم F و G نیز چنان باشند که به‌ازاء هرعدد حقیقی x، $F(0)=0, G(0)=1, G'(x)=-F(x), F'(x)=G(x)$ مانند آنچه در بالا ثابت‌کردیم به‌ازاء $\varphi=F-f$ و $\psi=G-g$ نتیجه می‌شود $\varphi^2(x)+\psi^2(x)=0$ ($G'=-\varphi$ و $\varphi'=G$) درنتیجه $\varphi=0$ و $\psi=0$ یعنی توابع sin و cos، توابع منحصر به‌فردی هستند که درحکم مسأله صدق می‌کنند.

۹. تابع $f:[0,1]\longrightarrow R$ دارای مشتق دوم پیوسته بوده و رابطه $f''(x)+xf'(x)-x^2f(x)\geqslant 0$ همواره برقرار است.

ثابت‌کنید f نمی‌تواند درفاصله $(0,1)$ دارای نقطه ماکزیمم با مقدارماکزیمم مثبت باشد.

حل. قبلاً قضیه زیر را بیان می‌کنیم

قضیه: فرض‌کنیم c یك نقطه بحرانی تابع f دریك فاصله بازباشد به‌طوری‌که به‌ازاء هر x ازیك همسایگی c، f' و f'' وجود داشته و $f'(c)=0$ باشد دراین صورت

۱ــ اگر $f''(c)<0$، آنگاه f درنقطه c ماکزیمم نسبی دارد.

۲ــ اگر $f''(c)>0$، آنگاه f درنقطه c می‌نیموم نسبی دارد.

فرض‌کنیم $0<c<1$ و c یك نقطه ماکزیمم نسبی با مقدار مثبت باشد یعنی $f(c)>0$، چون c یك نقطه ماکزیمم نسبی و f' درهرنقطه از $(0,1)$ وجود دارد پس $f'(c)=0$. وچون f'' در $[0,1]$ وجود داشته وپیوسته است پس $f''(c)$ وجود دارد. بنابراین $f''(c)-c^2f(c)\geqslant 0$، یعنی $f''(c)\geqslant c^2f(c)$. لهذا، $f''(c)>0$ واین‌متناقض باماکزیموم داشتن f در c است.

۱۵. اگر n عددی طبیعی باشد مجموع زیر را پیداکنید

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2^2}\right]+\cdots\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]+\cdots$$

$[x]$ به‌معنای جزء صحیح است.

حل. ابتدا اتحاد زیر را ثابت می‌کنیم

(۱) $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x]$ هرعددحقیقی x رامی‌توان به‌یکی از دوصورت $x=k+p$ و $x=k+p+\frac{1}{2}$ نوشت‌که k عددی صحیح و $0\leqslant p<\frac{1}{2}$،

و

$$1)\quad x=k+p\Rightarrow\left[k+p+\frac{1}{2}\right]=k$$
$$[2x]=[2k+2p]=2k \quad \text{و} \quad [k+p]=k$$

پس

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x]$$

$$2)\qquad x=k+p+\frac{1}{2}\Rightarrow\left[x+\frac{1}{2}\right]=$$
$$=\left[k+p+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]=k+1$$
$$[2x]=[2k+2p+1]=2k+1 \quad \text{و} \quad [x]=$$
$$=\left[k+p+\frac{1}{2}\right]=k$$

پس در هرحالت رابطه (۱) برقرار است. با استفاده از اتحاد بالا داریم:

$$\left[\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]+\cdots=$$
$$[n]-\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]+\cdots\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]$$
$$+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]\right\}=n$$

زیرا اگر $n<2^k$ یا $k>log_2 n$ جمله $\left[\frac{n}{2^k}\right]$ وتمام جمله‌های بعد از آن برابرصفر می‌شود

اگر $x\in R$ باشد مسئله به‌همین ترتیب حل می‌شود جوابها به‌ازاء $k>0$ برابر $[x]$ و به‌ازاء $k<0$ برابر $[x]+1$ می‌باشد.

۱۱. اگر n عددی فرد و r_1 و r_2 و.... r_k یك دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانه n باشد، ثابت‌کنید $r_1+r_2+\cdots+r_k\equiv 0(modn)$.

حل. چون $\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$ یك‌دستگاه مخفف‌مانده‌ها به پیمانه n است پس اعداد $\{-r_1, -r_2, \ldots, -r_k\}$ نیزیك دستگاه مخفف مانده‌ها به‌پیمانه n است. وهریك ازاعضای آن تنها با یك عضو از اعضای دستگاه مخفف مانده‌ها به‌پیمانه n همنهشت است وبالعکس. یعنی به‌ازاء هر i، jای موجود است که: $r_i\equiv -r_j(modn)$

بنابراین

$$r_1+r_2+\dots+r_k\equiv -r_1-r_2-\dots-r_k \pmod{n}$$

یا

$$2(r_1+r_2+\dots+r_k)\equiv 0 \pmod{n}$$

چون $(n\,,2)=1$ با تقسیم دو طرف بر ۲ حکم مطلوب نتیجه می‌شود.

۱۲. فرض کنید که p عدد اول بزرگتر از ۲ باشد و a عددی صحیح که $0<a<p-1$، ثابت کنید

$$\binom{p-1}{a}\equiv(-1)^a \pmod{p}$$

حل.

$$\binom{p-1}{a}=\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-a)}{a!}=$$

$$\frac{P^a+A_1P^{a-1}+\dots+A_{a-1}P+(-1)(-2)\cdots(-a)}{a!}$$

$$=\frac{KP+(-1)^a a!}{a!}=\frac{KP}{a!}+(-1)^a$$

سمت راست رابطه فوق عددی صحیح است پس سمت چپ وبالاخص $\frac{KP}{a!}$ یك عدد صحیح است.

چون $0<a<P-1$ پس در $a!$ عامل P موجود نیست درنتیجه $\frac{K}{a!}$ باید عدد صحیح باشد. بنابراین،

$$\binom{P-1}{a}=\frac{K}{a!}P+(-1)^a\equiv(-1)^a \pmod{p}$$

۱۳. مجموع زیر را حساب کنید.

$$A=\frac{1^2}{2^1}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\dots+\frac{n^2}{2^n}.$$

حل.

$$A=\frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\dots+\frac{n^2}{2^n}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{K^2+4k+6}{2^k}-\frac{(k+1)^2+4(k+1)+6}{2^{k+1}}\right]$$

$$=6-\frac{n^2+4n+6}{2^n}$$

بنابر قاعده ادغام

۱۴. به‌ازاء هرعدد صحیح a مجموعه‌ی مضارب صحیح a را با aZ نشان می‌دهیم، فرض کنیم m و n اعداد طبیعی باشند. تحت چه شرایطی $mZ\subseteq nZ$. m و n چه شرایطی داشته باشند که $mZ\cup nZ$ یك زیرگروه $(Z,+)$ شود.

حل. بسهولت می‌توان دید که $mZ\subseteq nZ \iff n|m$.

فرض کنیم $mZ\cup nZ$ یك زیر گروه $(Z,+)$ باشد. دراین‌صورت عدد طبیعی مانند d هست که $mZ\cup nZ=dZ$ درنتیجه بنابر قسمت اول، $d|m$ و $d|n$ (۱). ازطرف دیگر، چون $d\in mZ\cup nZ$، پس $d\in mZ$ یا $d\in nZ$. درنتیجه، $m|d$ یا $n|d$ (۲)

فرض کنیم $m|d$ چون بنابه (۱) $d|m$ پس $d=m$، چون $d|n$، داریم $m|n$. به‌روش مشابه اگر $n|d$، آنگاه $n|m$ بنابراین اگر $mZ\cup nZ$ یك زیرگروه Z باشد، آنگاه $m|n$ یا $n|m$، بالعکس اگر $m|n$ یا $n|m$، آنگاه $mZ\cup nZ$ یك زیر گروه Z است. بنابراین $mZ\cup nZ$ زیر گروه Z است اگر و فقط اگر $m|n$ یا $n|m$.

۱۵. فرض کنیم a و b دو عدد طبیعی باشند و

$$\begin{array}{ll}
a=bq_1+r_1 & 0<r_1<b\\
b=r_1q_2+r_2 & 0<r_2<r_1\\
\vdots & \vdots\\
r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n & 0<r_n<r_{n-1}\\
r_{n-1}=r_nq_{n+1} &
\end{array}$$

فرض می‌کنیم $p(x)=\begin{pmatrix}x&1\\1&0\end{pmatrix}$. نشان دهید که $(p(x))^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-x\end{pmatrix}$ ونتیجه بگیرید.

$$(*)\qquad (a\,,b)=(r_n\,,0)\,p(q_{n+1})\,p(q_n)\cdots p(q_1).$$

و ازآنجا نتیجه بگیرید که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a و b به‌صورت $au+bv$ می‌باشد که u و v اعداد صحیح هستند.

حل. بسهولت می‌توان دید که $(p(x))^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-x\end{pmatrix}$

هم‌چنین داریم

$$(r_n,0)\begin{pmatrix}q_{n+1}&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_n&1\\1&0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}q_1&1\\1&0\end{pmatrix}=$$

$$(r_{n-1}\,,r_n)\begin{pmatrix}q_n&1\\1&0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}q_i&1\\1&0\end{pmatrix}=\dots=(a,b)$$

بنابراین (*) برقرار است.

از (*) داریم:

$$(a\,,b)\,p(q_1)^{-1}p(q_2)^{-1}\cdots p(q_{n+1})^{-1}=(r_n\,,0)\Rightarrow$$

$$(a\,,b)\begin{pmatrix}0&1\\1&-q_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-q_2\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0&1\\1&-q_{n+1}\end{pmatrix}=(r_n\,,0)$$

فرض کنیم $\begin{pmatrix}0&1\\1&-q_2\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0&1\\1&-q_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u&u'\\v&v'\end{pmatrix}$ در این‌صورت

$$(a\,,\,b)\begin{pmatrix}u&u'\\v&v'\end{pmatrix}=(r_n\,,\,0)\Rightarrow au+bv=r_n$$

وحکم برقرار است.

۱۶. فرض می‌کنیم

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\text{و}$$

$$A(x)=\begin{pmatrix}1&x&\frac{x(x+1)}{2}\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix}$$

نشان دهید:

۱ـ به‌ازاء هرعدد طبیعی n، $A^n=A(n)$.

۲ـ به‌ازاء هردوعدد حقیقی y و x،

$$A(x)A(y)=A(x+y)$$

۳ـ به‌ازاء هردوعدد طبیعی m و n، $\left(A\left(\frac{m}{n}\right)\right)^n=A(m)$

ثابت کنید. $A^{\frac{m}{n}}A^{\frac{p}{q}}=A^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$.

حل ۱. بدیهی است که $A=A(1)$ فرض کنیم حکم به‌ازاء عدد طبیعی n برقرار باشد. داریم

$$A^{n+1}=A\cdot A^n=A\cdot A(n)=A(n+1)$$

۲ـ بسهولت دیده می‌شود که حاصلضرب $A(x)$ در $A(y)$ همان $A(x+y)$ می‌باشد

۳ـ بنابر (۲) داریم

$$A\left(\frac{n-1}{n}\right)A\left(\frac{1}{n}\right)=A(1)$$

$$A\left(\frac{n-2}{n}\right)A\left(\frac{1}{n}\right)=A\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

$$A\left(\frac{1}{n}\right)A\left(\frac{1}{n}\right)=A\left(\frac{2}{n}\right)$$

درنتیجه:

$$\left(A\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=A(1)=A$$

فرض می‌کنیم $m\geqslant 1$، داریم

$$\left(A\left(\frac{m}{n}\right)\right)^n=\left(A\left(\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}\right)\right)^n\left(A\left(\frac{m-1}{n}\right)A\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

$$=\left(A\left(\frac{m-2}{n}+\frac{1}{n}\right)A\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=$$

$$=\left(A\left(\frac{m-2}{n}\right)A\left(\frac{1}{n}\right)A\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=$$

$$=\left(A\left(\frac{m-2}{n}\right)\left(A\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2\right)^n=$$

$$\cdots\cdots=\left(A\left(\frac{2}{n}\right)\left(A\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{m-2}\right)^n$$

$$=\left(A\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)A\left(\frac{1}{n}\right)^{m-2}\right)^n=$$

$$=\left(A\left(\frac{1}{n}\right)^m\right)^n=\left(A\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{mn}=$$

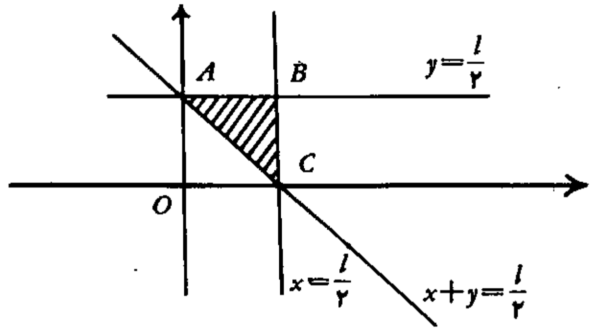
$$=\left(\left(A\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n\right)^m=A^m=A(m)$$

۱۷. سیمی به‌طول l را به سه‌قسمت تقسیم کرده‌ایم، مطلوبست احتمال آنکه با این سه قطعه بتوان یك مثلث ساخت

حل. فرض می‌کنیم دو قطعه به‌طولهای x و y باشند در این‌صورت

$$\underline{\quad x\quad}|\underline{\quad y\quad}|\underline{\ l-x-y\ }$$

شرایط آن‌که این سه‌قطعه، طول اضلاع یك مثلث باشند آن است که:



$$\begin{cases}0<x<l-x\\0<y<l-y\\0<l<2(x+y)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<\frac{l}{2}\\0<y<\frac{l}{2}\\0<x+y<\frac{l}{2}\end{cases}$$

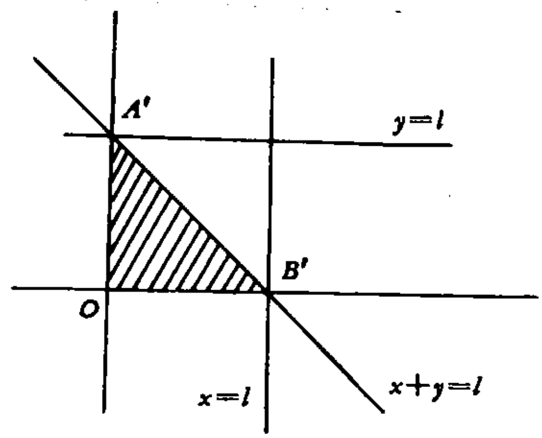
ناحیه‌ای که در آن x و y و $l-x-y$ شرایط ضلع‌های مثلث را دارا می‌باشند نقاط داخل مثلث ABC می‌باشد، و

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{l}{2}=\frac{l^2}{8}.$$

ازطرف دیگر درحالت کلی

$$\begin{cases} 0<x<l \\ 0<y<l \\ 0<l-x-y<l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<l \\ 0<x<l \\ 0<x+y<l \end{cases}$$

قسمتی که کلیه حالات ممکن برای برشها را دربردارد نقاط داخل مثلث $OA'B'$ می‌باشد.



$$S_{O'A'B'} = \frac{l}{2}\cdot l = \frac{l^2}{2}$$

$$P = \frac{S_{ABC}}{S_{O'A'B'}} = \frac{\frac{l^2}{8}}{\frac{l^2}{2}} = \frac{1}{4}$$

۱۸. ثابت کنید حجم چهاروجهی $ABCD$ که AB و CD دویال متنافر از آن است ازدستور زیر به‌دست می‌آید.

$.V=\frac{1}{6}AB\cdot CD\cdot d\sin\alpha$

که d و α به‌ترتیب فاصله (درازای عمود مشترك) وزاویه بین دویال متنافر AB و CD هستند

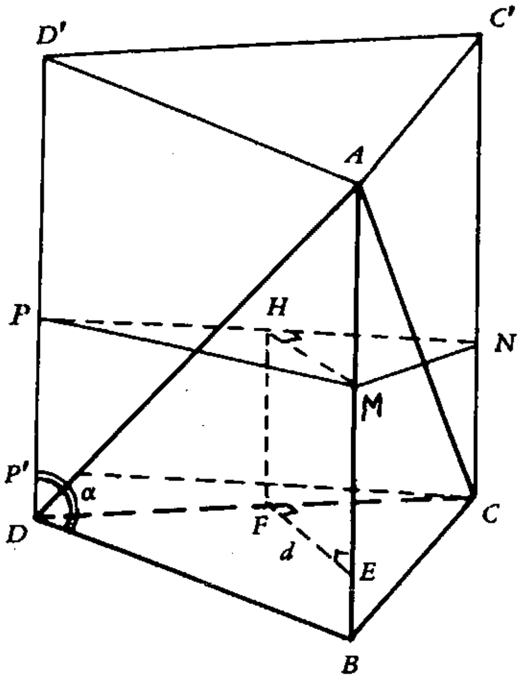
حل. چون به چهاروجهی $ABCD$ منشور سه‌پهلوی $BCDAC'D'$ را مطابق‌شکل ضمیمه کنیم. Vحجم چهاروجهی برابر $\frac{1}{3}$ حجم منشور است زیرا وجه BCD وارتفاع رأس A ازچهاروجهی همان قاعده وارتفاع منشور است. ازطرف‌دیگر می‌دانیم حجم منشور برابراست با مساحت مقطع قائم درطول یال جانبی.

$$V=\frac{1}{3}S_{MNP}\cdot AB$$

$$S_{MNP}=\frac{1}{2}PN\cdot MH$$

$$PN=P'C=DC\sin\widehat{CDD'}=DC\sin\alpha$$

زیرا DD' با AB موازی و $\widehat{CDD'}=(\widehat{CD\,,AB})=\alpha$ MH که داخل سطح مقطع قائم منشوراست برAB عمود است وچون‌بروجه $DCD'C'$ عمود است برDC نیزعمود می‌باشد. MH فاصله AB ازوجه $DCD'C'$ که‌ازBC موازی AB رسم شده برابراست با d طول عمود مشترك‌دویال AB وCD. یعنی



$$S_{MNP}=\frac{1}{2}DC\cdot d\sin\alpha \Rightarrow V=\frac{1}{6}AB\cdot DC\cdot d\sin\alpha$$

۱۹. اگر سه دایرهٔ $(O,\ R)$ و (O',R') و $(O'',\ R'')$ متعلق به‌یك دسته دایره باشند ثابت کنید

$$\frac{R^2}{OO'\cdot OO''}+\frac{R'^2}{O'O''\cdot O'O}+\frac{R''^2}{O''O\cdot O''O'}=1$$

حل (روش هندسی).

اگر M نقطه‌ای از محور اصلی سه دایره فرض شود به موجب رابطه استوادت داریم:

$$\frac{MO^2}{OO'\ OO''}+\frac{MO'^2}{O'O''\ O'O}+\frac{MO''^2}{O''O\ O''O'}=1$$

اگر p قوت نقطه M نسبت به‌دایره‌های دسته باشد.

$$p=MO^2-R^2=MO'^2-R'^2=MO''^2-R''^2$$

درنتیجه:

$$\frac{p+R^2}{OO'\cdot OO''}+\frac{p+R'^2}{O'O''\cdot O'O}+\frac{p+R''^2}{O''O\cdot O''O'}=1$$

پس،

$$\frac{R^2}{OO'\cdot OO''}+\frac{R'^2}{O'O''\cdot O'O}+\frac{p+R''^2}{O''O\cdot O''O''}+$$

$$+p\left(\frac{O''O'+OO''+O'O}{OO'\cdot O'O''\ O''O}\right)=1$$

بالنتیجه، $A=1$.

حل (روش تحلیلی).

اگرمحورطولها منطبق برمحور دسته دایره (مکان هندسی مرکزها) ومحورعرضهامنطبق برمحور اصلی دسته دایره انتخاب شود معادله دسته دایره چنین است:

$$x^2+y^2-2mx+c=0$$

در دایره (O, R)، $O(m\ ,\ 0)$ مرکز و $R^2=m^2-c$ است و همین‌طور دردو دایرهٔ دیگر.

اگر طرف اول تساوی حکم مسئله را به A نشان دهیم:

$$A=\frac{R^2O''O'+R'^2OO''+R''^2O'O}{OO'\cdot O'O''\cdot O''O}=$$

$$\frac{(m^2-c)(m'-m'')+(m'^2-c)(m''-m)+(m''^2-c)(m-m')}{(m'-m)(m''-m')(m-m'')}=1$$

$$\frac{m^2(m'-m'')+m'^2(m''-m)+m''^2(m-m')}{(m'-m)(m''-m')(m-m'')}=1$$

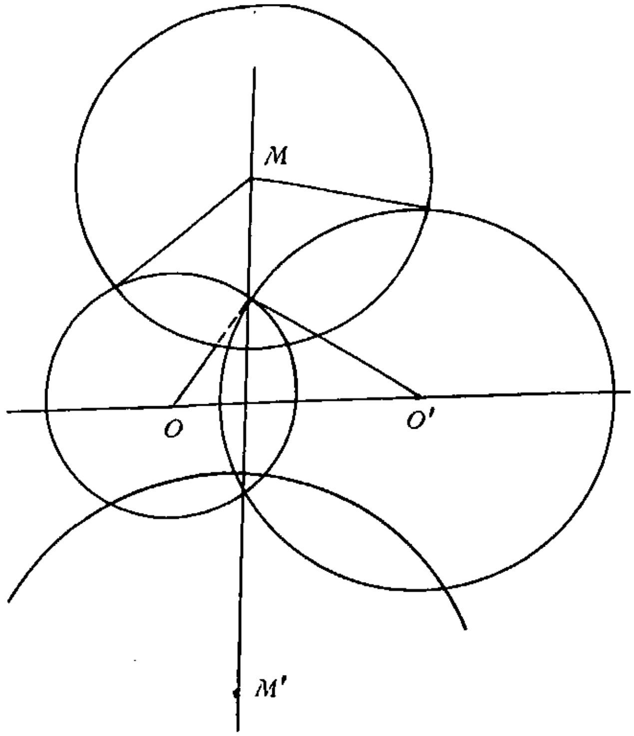
مسأله فوق توسط استاد غیود طرح شده است

۲۵. تعداد دایره‌های دوبه‌دو عمود برهم کدام است.

الف- ۲ ب- ۳ ج- ۴ د- بی‌شمار

حل. جواب: ب

می‌توان به‌سادگی دو دایرهٔ عمود برهم در A و B به مرکزهای O و O' رسم کرد. M مرکزسومین دایره‌ای‌که براین دودایره عمود می‌شود باید روی AB محوراصلی دودایرهٔ O و O' واقع شود و شعاع آن به‌اندازهٔ طول مماسی باشدکه از M بر دودایره رسم می‌شود. نظیر دایرهٔ به‌مرکز M بی‌شمار دایره می‌توان رسم کرد که بردودایرهٔ O و O' عمود باشد ولی هیچ یك ازاین دایره‌ها بردایره M عمود نمی‌شوند. زیرا، دو دایره O و O' یك دسته دوایر متقاطع در A و B می‌سازند (شامل جمیع دایره‌هائی که از A و B می‌گسذرند) و تمام دایره‌های عمود بر O و O' نظیر M و M' با هم دسته دوایر دیگری می‌سازندکه دسته دوایر مزدوج دسته دایره اول نامیده می‌شود درمبحث دسته دوایرثابت می‌شودکه دسته دوایرمزدوج دسته دوایر متقاطع یك‌دسته دوایرغیرمتقاطع است. یعنی دوایر M و M' در تمام حالتها غیر متقاطع (متخارج یا متداخل) هستند و لذا نمی‌توانند برهم عمود باشند.



درخاتمه ازکلیه عزیزانی‌که درحل مسائل این شماره ما را یاری نموده‌اند صمیمانه تشکر می‌کنیم وموفقیت هریك از این همکاران خوب را آرزومندیم. امیدواریم بیش ازاین بـا ماهمکاری‌کرده وما را یاری دهند. اسامی این همکاران به‌شرح زیر است: بابك فهیمی دانشجو از تهران مسائل ۴، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۳، ۱۷.

حمیدرضا شاطری نجف‌آبـادی ازاصفهان مسائـل، ۶، ۷، ۱۳، ۱۶ و ۱۷، ۱۹.

حمیدرضا فنائی دانشجو از آزاد شهر مسائل ۴، ۸، ۹، ۱۰، ۱۳، ۱۶.

بابك صالحیان دانشجو ازتهران مسائل، ۷، ۸.

پیام حیدری دانشجو ازتهران مسائل، ۴، ۸، ۱۰.

حمیدرضا رهبر دانشجو از تهران مسئله ۱۶.

محمد رحیم دیپلمه از تهران مسائل ۴، ۱۶.

ایرج تقی‌زاده از تهران مسائل ۴، ۱۲.

مجید مطهری دانش‌آموز از مشهد مسائل ۴ و ۱۰.

لطیف پورشامی دانشجو ازتبریز مسئله ۱۰.

حسین رستمی دبیر ریـاضی ازآشتیان، علیرضا بیگدلی دانش‌آموز از قم، محمدرضا مختارپور دانش آموز از تبریز، عبدالرضا رهبر دانشجو از تهران، امیر صادقی دانش‌آموز از سربندر، اکبر غفارپوررهبر، حسین شاه‌محمدی دانش‌آموز از دماوند مسئلهٔ ۴.

بقیه از صفحه ۱۹

- تعداد درسهای سال دوم ریاضی و تجربی به نظر اکثر دانش‌آموزان کافی است.
- به نظر اکثریت دانش‌آموزان رشته ریاضی مجموعه دروس سال دوم و دروس ریاضی آنها در حد فهم دانش‌آموزان است.
- بیش‌از ۷۰ درصد دانش‌آموزان معتقدندکتابهای علوم گیرائی لازم برای تشویق دانش‌آموزان به انتخاب رشته علوم تجربی و ریاضی را دارد.
- بیش‌از ۶۰ درصد دانش‌آموزان گفته‌اندکه کتابهای ریاضی دورهٔ راهنمائی متناسب با توانائی دانش‌آموزان است.
- بیش‌از ۶۰ درصد دانش‌آموزان گفته‌اند حجم کتابهای علوم دوره راهنمائی متناسب با ساعات تدریس آنهاست.
- تقریباً نیمی از دانش‌آموزان اظهار داشته‌اندکه حجم کتابهای ریاضی دوره راهنمایی متناسب با ساعات تدریس آنها است. در این مورد بازنگری به‌کتابهای ریاضی و ساعات تدریس‌آنها لازم به نظر می‌رسد، چراکه حدود ۵۰ درصد دانش‌آموزان حجم کتابها را با ساعات تدریس متناسب نمی‌دانند و این می‌تواند عاملی در عدم درك مطالب ریاضی توسط دانش‌آموزان و بالمآل عدم انتخاب ریاضی در سالهای بعد باشد.
- بیش‌از ۶۰ درصد دانش‌آموزان اظهار داشته‌اندکه امکان شناخت حرف و مشاغل را داشته‌اند.
- حدود نیمی از دانش‌آموزان از مرکز علمی و فنی در دوره راهنمائی بازدیدکردند. با توجه به اینکه بازدید اگر طی برنامه‌ای مشخص و هدف‌دار انجام شود می‌تواند در جهت‌گیری دانش‌آموزان در جهت انتخاب رشته تحصیلی مؤثر باشد بایستی به این مسأله توجه بیشتری شود.
- اکثریت دانش‌آموزان مجلات وکتب علمی مطالعه می‌کنند ولی میزان این‌کتب و مجلات به نظر اکثریت آنها کافی نیست.

نتایج کلی

باتوجه به نظریات اعلام شده توسط دبیران و دانش‌آموزان

- کمبود دبیر متخصص و با تجربه و دلسوز در دبیرستانها و مدارس راهنمائی می‌تواند از عوامل عدم‌گرایش دانش‌آموزان به ثبت‌نام در رشته ریاضی باشد.
- بازآموزی معلمین هم از نظرکمیت و هم از نظرکیفیت احتیاج به بازنگری دارد. بدین معنا که هم بایستی توسعه بیشتری یابد تا تمامی معلمین را دربرگیرد وهم برنامه‌های آن بگونه‌ای تدوین شودکه برای معلمان مفید باشد.
- مجموعاً حدود نیمی از دبیران پاسخ دهنده به پرسشنامه نظر مثبت و نیمی نظر منفی نسبت به وضع موجودکتابها داشته‌اند. نظرهای منفی در مورد پراکنده بودن مطالب، عدم نظم و ارتباط منطقی عمودی و افقی مطالب، عدم گیرایی محتوی،عدم انسجام وپیوستگی وعدم برخورداری کافی از طرح مسائل علمی و کاربردی درکتابهای ریاضی بوده است.
- در مجموع بیش‌از نیمی از دانش‌آموزان معتقدندکه کتابهای علوم و ریاضی دوره راهنمائی و دبیرستان متناسب با ساعات تدریس و فهم دانش‌آموزان است. دبیران نیزکم‌وبیش تقریباً هم عقیده با دانش‌آموزان هستند. ولی چون به هر حال در مقابل درصد نسبتاً زیادی نیز خلاف این عقیده را دارند، بازنگری برنامه وکتابها، بخصوص کتابهای ریاضی دوره راهنمائی و دبیرستانی مفید به نظر می‌رسد.
- لازم است کتب و مجلات علمی به اندازه کافی در اختیار معلمان و دانش‌آموزان قرار گیرد.
- مشکلات مالی و اقتصادی از عوامل مؤثر درکاهش کیفیت تدریس نعلمان است.

به علت محدودیت صفحات مجله، در این شماره به درج صورت تستهای کنکور سال تحصیلی ٦٦–٦٧ با کلید حل آنها اکتفا می‌کنیم. احتمالا درشمارهٔ آتیه راه حل کامل بعضی از تستها با بررسی و تحلیل ارائه خواهد شد.

سؤالات کنکور سال تحصیلی ٦٦-٦٧

امتحان گزینش دانشجو - گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی
سال تحصیلی ۶۶-۶۷ (مدت ۴۰ دقیقه)

۱. نقیض گزارهٔ $\exists A\forall B(B\subset A)$ کدام است؟

۱) $\forall A\exists B[\sim(B\subset A)]$ ۲) $\forall A\forall B(B\subset A)$ ۳) $\exists A\exists B(B\subset A)$ ۴) $\forall A\forall B[\sim(B\subset A)]$

۲. باقیماندهٔ تقسیم $۷^{۴k}-۱$ (که در آن k عددیست صحیح ومثبت) بر ۵ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳. وارون تابع $y=\sin x-۲$ کدام است؟

۱) $y=۲\,Arcsin\,x$ ۲) $y=-۲\,Arcsin\,x$ ۳) $y=Arcsin(x-۲)$ ۴) $y=Arcsin(x+۲)$

۴. هرگاه $(B,+,\circ)$ یك جبر بول و $x,y,z\in B$. حاصل عبارت $xyz+x'z+y'z$ کدام است؟

۱) x ۲) $x+y$ ۳) z ۴) $z+y$

۵. اگرمیانگین مقادیر ۱۰۰ و ... و ۲ و ۱ برابر $\bar{X}$ ومیانگین مقادیر ۲۰۰ و ... و ۱۰۲ و ۱۰۱ برابر $\bar{Y}$ باشد، آنگاه $\bar{Y}$ کدام است؟

۱) $\bar{X}$ ۲) $۵۰+\bar{X}$ ۳) $۲\bar{X}$ ۴) $۱۰۰+\bar{X}$

۶. اگر $X=۵-۲U$ و $S_u^۲=۱$، آنگاه $S_x^۲$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷. اگر $A=\{x|x>۱\}$ و $B=\{x|x<-۱\}$ آنگاه $A'\cap B'$ کدام مجموعه است؟

۱) $\{x|-۱<x<۱\}$ ۲) $\{x|-۱<x\leqslant ۱\}$ ۳) $\{x|-۱\leqslant x<۱\}$ ۴) $\{x|-۱\leqslant x\leqslant ۱\}$

۸. ازجعبه‌ای که شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است دومهره بتصادف خارج می‌کنیم، احتمال آنکه این دو مهره همرنگ نباشند کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۱}$ ۲) $\frac{۵}{۱۱}$ ۳) $\frac{۶}{۱۱}$ ۴) $\frac{۷}{۱۱}$

۹. بیشترین اندازهٔ عبارت $۲x+y$ که در شرایط $\begin{cases} ۳x+۴y\leqslant ۱۲ \\ x\geqslant ۰ \\ y\geqslant ۰ \end{cases}$ صدق می‌کند کدام عدد است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۰. حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱-a & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱-a \end{vmatrix}$ کدام‌است؟

۱) $-a^۲$ ۲) $a^۲$ ۳) $۱-a$ ۴) $۱+a$

۱۱. فرض کنیم A و B دو ماتریس متقارن وارون‌پذیر و جابه‌جایی باشند، ماتریس $(A^{-1}B)'$ کدام است؟

۱) $-A^{-1}B'$ ۲) $-AB'$ ۳) $A^{-1}B$ ۴) $A'B$

۱۲. مقادیر ویژهٔ ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ کدامند؟

۱) ۱ و ۱− ۲) ۱ و ۰ ۳) ۰ و ۳ ۴) ۱ و ۳

۱۳. فرض کنیم X یك ماتریس متعامد متقارن باشد. ماتریس X^2 کدام است؟

۱) I ۲) $\bar{O}$ ۳) X ۴) $2X$

۱۴. اگر M' تبدیل نقطهٔ $M=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ تحت ماتریس $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ و M'' تبدیل M' تحت ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، M'' کدامست؟

۱) $\begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$

۱۵. Q مجموعه اعداد منطق است و I یك ایده‌آل در Q است و $2\in I$ دراینصورت I کدام مجموعه اعداد است؟

۱) صحیح ۲) صحیح مثبت ۳) منطق ۴) منطق ومثبت

۱۶. اگر عبارت $x^6+ax^3+bx^4+1$ بر x^2-1 بخش‌پذیر باشد، حاصل $a-2b$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸. مجموعه جواب نامعادلهٔ $\log_{10}\frac{x+2}{5}<-1$ کدام است؟

۱) $-3<x<-\frac{5}{2}$ ۲) $-2<x<-\frac{3}{2}$

۳) $\frac{3}{2}<x<2$ $\frac{5}{2}<x<3$

۱۹. x و y دوعدد حقیقی‌اند به طوریکه $x+y=1$. کمترین مقدار x^3+y^3 برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۲۰. حد مجموع جملات یك تصاعد هندسی چهاربرابر جملهٔ اول است. قدرنسبت این تصاعد چقدراست؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $\frac{7}{8}$

۲۱. اگر A و B دوپیشامد مستقل باشند و $P(A)=0/2$ و $P(A\bigcup B)=0/4$، $P(B)$ کدام است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۱۵

۲۲. مقدار $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[5x^2]}{x+5}$ کدام است؟

۱) ۱− ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۵

۲۳. فرض کنیم $f(x)=\sqrt{x-1}\ (x\geqslant 1)$، دراینصورت تابع $f(tgx)$ در کدام فاصله پیوسته است؟

۱) $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ ۲) $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ۳) $\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$ ۴) $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

۲۴. مشتق تابع $f(x)=\sin(\cos x)$ درنقطهٔ $x=0$ کدام است؟

۱) $\frac{-1}{2}$ ۲) ۰ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۲۵. فرض کنیم تابع $R \xrightarrow{f} R$ روی R مشتق‌پذیر از مرتبهٔ دوم باشد و $h(x)=f(1-4x^2)(x\in R)$ و $f'(1)=1$، مقدار $h''(0)$ کدام است؟

۱) ۱۶− ۲) ۸− ۳) ۸ ۴) ۱۶

۲۶. مشتق چپ تابع

$$f(x)=|2x+1|-|x-1|(x\in R)$$

درنقطهٔ $x=-\frac{1}{2}$ کدام است.

۱) ۱− ۲) ۱ ۳) $\frac{-1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۷. رابطهٔ $x^5+y^4+x^2y=1$، x را بطور ضمنی برحسب y بیان می‌کند $x'(0)$ کدام است؟

۱) ۵− ۲) $\frac{-1}{5}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) ۵

۲۸. مقدار $\int_{-1}^{1}|x+|x||dx$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۹. اندازه حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی $y=x^2$ وخط $y=x$ حول محور x کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{15}$ ۲) $\frac{2\pi}{15}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{3\pi}{4}$

۳۰. فرض کنیم $S(t)=\int_{-1}^{t}\frac{dx}{1+x^{10}}$ $(t\in R)$ ، در اینصورت $S'(0)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) ۱ ۴) ۲

۳۱. اگر $\sin 2\alpha>0$ و $\cos\alpha\, tg\alpha<0$ آنگاه انتهای α درکدام ناحیه مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۳۲. اگر $\pi/4<\alpha<3\pi/4$ و $\cos 2\alpha=\frac{1}{1-m}$ آنگاه حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $]-\infty,2[$ ۲) $]1,\infty[$ ۳) $]2,\infty[$ ۴) $]-\infty,1[$

۳۳. حاصل عبارت

$$\sin[Arc\,cotg\sqrt{3}]+\sin\left[Arc\,tg(1)+Arc\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

برابر کدام است:

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}+1$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\sqrt{3}+1$ ۴) $\frac{3}{2}$

۳۴. اگر $\alpha+\beta=\frac{5\pi}{4}$ آنگاه حاصل عبارت $(1+tg\alpha)(1+tg\beta)$ برابر کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۳۵. حدود تغییرات α درفاصلهٔ $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ بـرای اینکه معادلـهٔ $\sqrt{2}\cos x+\sin x=tg\alpha$ دارای جواب بـاشد، برابرکدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$ ۲) $-\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{6}$

۳) $-\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{3}$ ۴) $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$

۳۶. f تابعی است حقیقی با دامنهٔ R و $|f|\leqslant 2$ که در هیچ نقطه‌ای دارای حدنیست تابع $f(x)(x^2-1)$ دقیقاً درچند نقطه دارای حدیست حقیقی؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۷. درمثلث ABC، اگر

$$(a+b+c)(a+b-c)=3ab$$

آنگاه زاویهٔ C برابرکدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۳۸. حدتابع $f(x)=x\,tg\frac{\pi}{2x}$، وقتی کـه $x\to\infty$، برابرکدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) 0 ۳) $\frac{2}{\pi}$ ۴) ∞

۳۹. یك دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sin^2\left(\frac{\pi}{3}x\right)+\sin(\pi x)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۴۰. حاصل انتگرال $\int\frac{dx}{\cos^2x\sqrt{1+tgx}}$ برابر کـدام است؟

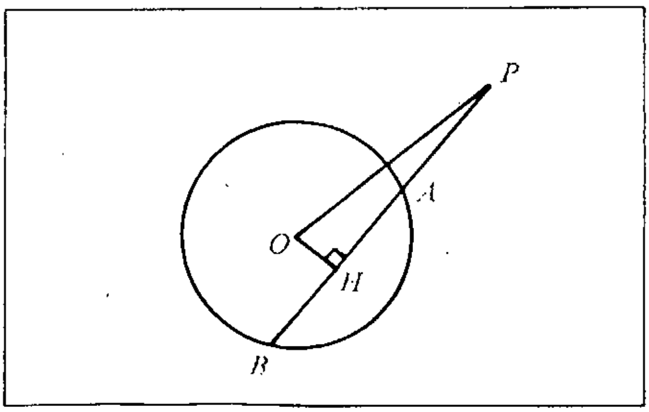
۱) $\frac{1}{\cos x}+tgx+c$ ۲) $\frac{1}{\cos x}+cotgx+c$

۳) $2\sqrt{1+tgx}+c$ ۴) $2(1+tgx)+c$

۴۱. در مثلث قائم‌الزاویـهٔ ABC، طول دوضلع زاویهٔ قائمه ۳ و $\sqrt{3}$ می‌باشد، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث چقدراست؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{4}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{2}$

۴۲. درشکل مقابل $PA=\frac{AB}{2}=3$, $OH=1$, $\widehat{OHA}=90^\circ$ شعاع دایره چقدر است؟



۱) $\sqrt{13}$ ۲) $\sqrt{12}$

۳) $\sqrt{11}$ ۳) $\sqrt{10}$

۴۳. محور اصلی دودایرهٔ $x^2+y^2=1$ و $(x-1)^2+y^2=1$ کدام خط است؟

۱) $x=\frac{1}{2}$ ۲) $y=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ ۳) $x=\frac{-1}{2}$ ۴) $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴۴. معادلهٔ پارامتری بیضی که مختصات مرکز آن $(3,2)$ و طول اقطار آن ۱۰ و ۶ و قطر بزرگ آن موازی محور oy است، کدام است؟

۱) $x=3+\cos\alpha$ $\quad y=2+5\sin\alpha$
۲) $x=2+5\cos\alpha$ $\quad y=3+3\sin\alpha$
۳) $x=3+5\cos\alpha$ $\quad y=2+3\sin\alpha$
۴) $x=2+3\cos\alpha$ $\quad y=3+5\sin\alpha$

۴۵. فاصلهٔ هر نقطه واقع در برون یك سهمی از خط هادی

۱) بیشتر از فاصله‌اش از کانون سهمی است
۲) کمتر از فاصله‌اش از رأس سهمی است
۳) کمتر از فاصله‌اش از کانون سهمی است
۴) مساوی فاصله‌اش از کانون سهمی است

۴۶. خط به‌معادلهٔ $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-t \\ z=t+1 \end{cases}$ با صفحه‌ای به‌معادلهٔ $ax+2y-az=0$ موازی است، مقدار a کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۴۷. دو صفحه به معادلات $2x+y+az=0$ و $-x+by-z+1=0$ با یکدیگر موازی‌اند، a و b کدامند؟

۱) $a=-\frac{1}{2}, b=2$ ۲) $a=\frac{1}{2}, b=2$

۳) $a=2, b=-\frac{1}{2}$ ۴) $a=2, b=\frac{1}{2}$

۴۸. اندازهٔ دو زاویه از یك کنج سه‌وجهی ۴۷ و ۱۵۶ درجه است. اگر x زاویهٔ سوم این کنج باشد، x در کدام رابطه صدق می‌کند؟

۱) $223<x<360$ ۲) $109<x<157$
۳) $157<x<360$ ۴) $157<x<223$

۴۹. طول ضلع قاعدهٔ هرم منتظم و مربع القاعده‌ای $6\sqrt{2}$ سانتیمتر و اندازهٔ یال جانبی آن ۱۰ سانتیمتر است، حجم این هرم چند سانتیمتر مکعب است؟

۱) ۱۶۲ ۲) ۱۷۲ ۳) ۱۸۲ ۴) ۱۹۲

۵۰. درمثلث قائم‌الزاویه ABC $\left(A=\frac{\pi}{2}\right)$، حاصل عبارت $\frac{1+\cos 2C}{\sin 2B}$ برابر کدام است؟

۱) $\cos C$ ۲) $\cot g C$ ۳) $\sin C$ ۴) $tg C$

امتحان گزینش دانشجو - گروه آزمایشی علوم تجربی
سال تحصیلی ۶۶ - ۶۷ (مدت ۲۴ دقیقه)

۱. اگر

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}=\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$

آنگاه $A+B+C$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲. مجموعهٔ جوابهای $0 \leqslant 1-x^4$ کدام است؟

۱) $(-\infty , +1]$ ۲) $]-1 , 1[$
۳) $[-1 , 1]$ ۴) $[-1 , +\infty)$

۳. معادلهٔ $x^3-3x+1=0$ دارای چندجواب است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴. مقدار $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} tg^2x$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) $+\infty$

۵. مقدار $\lim_{x\to -2^+} \frac{x+\sqrt{x+2}}{x+2}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) -1 ۳) ۱ ۴) $+\infty$

۶. اگر تابع f در نقطهٔ a پیوسته باشد، کدام تابع همواره در نقطهٔ a پیوسته است؟

۱) $\sqrt{1-f^2}$ ۲) $\sqrt{1+f^2}$

۳) $\sqrt{f-f^2}$ ۴) $\sqrt{f+f^2}$

۷. مشتق تابع $f(x)=tg(\sin 2x)$ در نقطهٔ $x=0$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸) ازنقطهٔ (۵ و ۱) دقیقاً چند خط مـی گذرد بطوریکه هر یك بر منحنی $y=x^2-1$ مماس باشد یا بر منحنی $y=4-x^2$ مماس باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹. عدد ۳۶ را بـه دو قسمت چنان تقسیم کرده‌ایم کـه حاصلضرب آن دو ماکزیمم است، آن دو قسمت کدامند؟

۱) ۱۲،۲۴ ۲) ۱۶،۲۰ ۳) ۱۸،۱۸ ۴) ۱۴،۲۲

۱۰. معـادلـهٔ دایـرهٔ مـمـاس داخـل بـا دایـرهٔ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(1+\sqrt{\alpha^2+\beta^2})^2$ که مختصات مرکز آن (۲β و ۲α) است کدام است؟

۱) $(x-۲\alpha)^۲+(y-۲\beta)^۲=\frac{۱}{۱۶}$

۲) $(x-۲\alpha)^۲+(y-۲\beta)^۲=\frac{۱}{۹}$

۳) $(x-۲\alpha)+(y-۲\beta)^۲=\frac{۱}{۴}$

۴) $(x-۲\alpha)^۲+(y-۲\beta)^۲=۱$

۱۱. خارج‌قسمت $x^۲-۷x+۱۰$ بر $x^۲+۱$ کدام‌است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۲. هذلولی $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ باخروج از مرکز e مفروض است، طول وتری از آن که از کانون گذشته و بر محور xها عمود است، کدام است؟

۱) $۲a\sqrt{e^۲-۱}$ ۲) $\frac{۲a^۲}{b\sqrt{e^۲-۱}}$

۳) $۲b\sqrt{e^۲-۱}$ ۴) $۲\frac{b^۲}{a}\sqrt{e^۲-۱}$

۱۳. انتگرال $x\sqrt{۸+x^۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}(۸+x^۲)^{\frac{۳}{۲}}+C$ ۲) $\frac{۱}{۶}(۸+x^۲)^{\frac{۳}{۲}}+C$

۳) $\frac{۲}{۳}(۸+x^۲)^{\frac{۳}{۲}}+C$ ۴) $\frac{۴}{۳}(۸+x^۲)^{\frac{۳}{۲}}+C$

۱۴. انتگرال $tg^۴x$ کدام است؟

۱) $x-\frac{۱}{۳}tg^۳x-tgx+C$ ۲) $x-\frac{۱}{۳}tg^۳x+tgx+C$

۳) $x+\frac{۱}{۳}tg^۳x-tgx+C$ ۴) $x+\frac{۱}{۳}tg^۳x+tgx+C$

۱۵. کدام کسر با کسر اعشاری... ۵/۶۶۶ برابراست؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۱۶}{۳}$ ۳) $\frac{۱۷}{۳}$ ۴) $\frac{۱۹}{۳}$

۱۶. واسطهٔ هندسی اعداد $\sqrt{۳}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ کدام عدد است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۷. هرگاه $log\,x=\bar{۴}/۳۱۲۵۰$، آنگاه $colog\,x$ کدام است؟

۱) $\bar{۳}/۶۸۷۵$ ۲) $\bar{۴}/۶۸۷۵$ ۳) ۳/۶۸۷۵ ۴) ۴/۶۸۷۵

۱۸. A و B و C سه مجموعه هستند به قسمی که $A\cap B=A\cap C=B\cap C=\varnothing$ و $n(A)=۵$، $n(B)=۶$، $n(C)=۱۰$. $n(A\cup B\cup C)$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۱۹. عکس نقیض گزاره $p\Rightarrow\sim q$ کدام گزاره است؟

۱) $q\Rightarrow p$ ۲) $q\Rightarrow\sim p$

۳) $\sim q\Rightarrow p$ ۴) $\sim q\Rightarrow\sim p$

۲۰. اگر $\sin\alpha\cos\alpha>۰$ و $\cos\alpha\, cotg\alpha<۰$ آنگاه انتهای کمان α در کدام ناحیه دایره مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۲۱. حاصل عبارت $tg(Arc\,tg۲+Arc\,tg۱)$ برابر کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) -۳

۲۲. تابع حقیقی $f\geqslant ۰$ روی $[۰ , ۱]$ پیوسته است. اگر ناحیهٔ بین نمودارهای $y=f(x)$، $x=۰$، $y=۰$، $x=t$ $(۰\leqslant t\leqslant ۱)$ را حول محور xها دوران دهیم حجم جسم حاصل برابر $\pi t^۸$ می‌شود، $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}x^{\frac{۷}{۲}}$ ۲) $\sqrt{۲}x^{\frac{۷}{۲}}$ ۳) $۲\sqrt{۲}x^{\frac{۷}{۲}}$ ۴) $۴\sqrt{۲}x^{\frac{۷}{۲}}$

۲۳. حداکثر عبارت $\sin x-\sqrt{۳}\cos x$ برابر کدام‌است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) $۱+\sqrt{۳}$

۲۴) معادله $cotg\frac{x}{۲}-tg\frac{x}{۲}=۲\sqrt{۳}$، در فاصلهٔ $[۰ , ۲\pi]$، چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵. ارتفاع وارد بر وتر در یك مثلث قائم‌الزاویه وتر را به دوقسمت به‌طولهای ۳ و ۱۲ سانتیمتر تقسیم کرده است، مساحت این مثلث چند سانتیمتر مربع است؟

۱) ۴۶ ۲) ۴۵ ۳) ۴۲ ۴) ۴۰

۲۶. در مثلث ABC، E روی AB و بین A و B و F روی AC و بین A و C می‌باشد، در کدام حالت دومثلث ABC و AEF متشابهند؟

۱) $AF=۲\ ,\ EB=۵\ ,\ FC=۴\ ,\ AE=۳$

۲) $AF=۴\ ,\ EB=۱۰\ ,\ FC=۶\ ,\ AE=۶$

۳) $AF=۷\ ,\ EB=۳\ ,\ FC=۲\ ,\ AE=۱۰$

۴) $AF=۱۲\ ,\ EB=۴\ ,\ FC=۸\ ,\ AE=۶$

۲۷. طول اقطار یك متوازی‌الاضلاع ۱۲ و ۸ است اگر طول یك ضلع متوازی‌الاضلاع ۸ باشد، طول ضلع دیگر چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۱۰}$ ۲) $۴\sqrt{۵}$ ۳) $۵\sqrt{۴}$ ۴) $۱۰\sqrt{۲}$

۲۸. قاطع از نقطهٔ A خارج یك دایره درنقاط B و C

دایره را قطع می‌کند، اگر $AB=6$ و $AC=8$ باشد، طول مماس بردایره ازنقطهٔ A چقدر است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{3}$

۲۹. اگر رأس یك مخروط را روی صفحه‌ای بموازات صفحهٔ قاعده تغییردهیم:

۱) حجم مخروط ثابت وسطح جانبی آن تغییرمی‌کند
۲) حجم مخروط و سطح جانبی آن هر دو ثابت می‌مانند
۳) حجم مخروط وسطح جانبی آن هردو تغییرمی‌کنند
۴) حجم مخروط تغییر و سطح جانبی آن ثابت می‌ماند

۳۰. حاصل عبارت $2cotg\,x\left[\frac{1}{sin2x}-\frac{1}{tg2x}\right]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $2tg^2x$ ۴) $2cotg^2x$

امتحان گزینش دانشجو ـ گروه آزمایشی علوم انسانی
سال تحصیلی ۶۶ ـ ۶۷ (مدت ۲۳ دقیقه)

۱. می‌دانیم R مجموعه اعداد حقیقی و Z مجموعه اعداد صحیح نسبی و N مجموعه اعداد طبیعی است، کدامیك از روابط زیرصحیح است؟

۱) $N\subset Z\subset R$ ۲) $R\subset Z\subset N$
۳) $R\subset N\subset Z$ ۴) $Z\subset R\subset N$

۲. کدامیك ازچهارعدد زیر بر۴ بخش‌پذیر نیست.؟

۱) ۴۹۸۸۴ ۲) ۹۴۱۱۶ ۳) ۹۵۲۲۰ ۴) ۹۷۰۰۴۲

۳. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك سه‌عدد ۱۴ و۲۱ و۷۰ کدام‌است؟

۱) ۱ ۲) ۷ ۳) ۱۴ ۴) ۷۰

۴. کوچکترین مضرب مشترك (۳۶۰ و ۴۵۰) کدام است؟

۱) ۹۰۰ ۲) ۱۰۸۰ ۳) ۱۸۰۰ ۴) ۳۶۰۰

۵. فروشگاهی جوراب ۲۴۰ تومانی خود را ۱۵درصد تخفیف‌می‌دهد، قیمت جوراب چقدراست؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۲۰۴ ۳) ۲۰۶ ۴) ۲۰۸

۶. باقیماندهٔ تقسیم x^3+2x^2-4x-5 بر $x+2$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷. حاصل عبارت $\frac{2}{3x-3}-\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{2x+2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6(x^2-1)}$ ۲) $\frac{x}{6(x^2-1)}$
۳) $\frac{1}{6(x-1)}$ ۴) $\frac{1}{6x+6}$

۸. جواب دستگاه معادلات $\begin{cases} y=x-1 \\ 2x=2y+2 \end{cases}$ کدام است؟

۱) ($x=a$ و $y=a-1$) ۲) ($x=a$ و $y=a+1$)
۳) ($x=2$ و $y=1$) ۴) ($x=5$ و $y=4$)

۹. دارائی پدری پس ازفوت ۳۶۰،۰۰۰ تومان است، او دو پسر وسه دختر ویك همسر دارد، سهم ارث یك دختر او چقدر است؟

۱) ۴۵،۰۰۰ تومان ۲) ۵۰،۰۰۰ تومان
۳) ۵۵،۰۰۰ تومان ۴) ۶۰،۰۰۰ تومان

۱۰. جواب دستگاه نامعادلات مقابل کدام است؟

$$\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{x}{3}<\frac{5}{6} \\ \frac{x}{2}-\frac{x}{3}<\frac{1}{2} \end{cases}$$

۱) $x<3$ ۲) $x<1$ ۳) $0<x<1$ ۴) $1<x<2$

۱۱. برای آن که $x=1$ ریشهٔ معادلهٔ $x^3+a^2x^2-3ax+1=0$ باشد، a کدام مقداراست؟

۱) $a=0$ و $a=1$ ۲) $a=-1$ و $a=1$
۳) $a=0$ و $a=2$ ۴) $a=2$ و $a=1$

۱۲. بهازای چه مقداری از m حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ $(m-1)x^2+2m^2x+m=0$ برابر ۲ است؟

۱) $m=0$ ۲) $m=1$ ۳) $m=2$ ۴) $m=3$

۱۳. مجموع عددهای زوج از ۲ تا ۵۰۰ کدام است؟

۱) ۶۲۶۵۰ ۲) ۶۲۷۰۰ ۳) ۶۲۷۵۰ ۴) ۶۲۸۰۰

۱۵. اگر لگاریتم ۲ برابر ۰/۳۰۱۰ باشد، عدد 2^{64} چند رقمی است؟

۱) ۱۸ رقم ۲) ۱۹ رقم ۳) ۲۰ رقم ۴) ۲۱ رقم

۱۶. کدام تعریف برای مجموعهٔ $A=\{x|x>0\}$ صحیح است؟

۱) مجموعهٔ اعداد اصم بزرگتر ازصفر

۲) مجموعه اعداد حقیقی مثبت
۳) مجموعه اعداد صحیح غیرصفر
۴) مجموعه اعداد گویای غیر صفر

۱۷. رأس سهمی $y = x^2 - 1$ کدام است؟

۱) (۰ و ۱−)　۲) (۱− و ۰)　۳) (۱ و ۰)　۴) (۰ و ۱)

۱۸. اگر تابع درآمد کل، $TR = x^2 + 4x$ و هزینهٔ کل $TC = x + 10$ باشد، به ازای چند واحد تولید، شرکت بهنقطهٔ سربه‌سر می‌رسد؟

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۴　۴) ۵

۱۹. اگر نمودار مقابل توزیع ۶۰،۰۰۰ نفر را در گروههای سنی A و B و C و D نشان دهد، چند نفر در گروه سنی A قرار دارند؟

۱) ۱۰۰۰　۲) ۶۰۰۰　۳) ۱۰،۰۰۰　۴) ۱۵،۰۰۰

D C B A ۱۱۰° ۱۰۰° ۹۰° ۶۰°

۲۰. اگر میانگین قیمت کالائی در بازار ۲۰۰۰ ریال باشد و در یك حراجی کالا را ۱۰ درصد ارزانتر بفروشند، متوسط قیمت این کالا در حراجی چندریال خواهد بود؟

۱) ۱۸۰۰　۲) ۱۸۲۰　۳) ۱۹۰۰　۴) ۱۹۲۰

۲۱. پراش مقادیر ۱۵ و۱۴ و ۱۳ و۱۲ و۱۱، کدام است؟

۱) صفر　۲) ۲　۳) ۲/۵　۴) ۶

۲۲. از کیسه‌ای محتوی ۵ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه، ۳ مهره بتصادف خارج می‌کنیم، احتمال اینکه مهره‌ها همرنگ باشند، کدام است؟

۱) $\dfrac{\binom{5}{3}+\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}}$　۲) $\dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}}$　۳) $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}}$　۴) $\dfrac{\binom{5}{3}\times\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}}$

۲۳. در یك آزمون تستی ۴ گزینه‌ای داوطلبی به ۱۰ سؤال بتصادف جواب می‌دهد. احتمال اینکه به۶ سؤال جواب صحیح بدهد، کدام است؟

۱) $\binom{10}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{3}{4}\right)^6$　۲) $\binom{10}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^4$

۳) $\binom{10}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^6$　۴) $\binom{10}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{3}{4}\right)^4$

۲۴. ۷۰ درصد تولیدات کارخانه‌ای سالم است، یك نمونهٔ ۲۰ تائی از محصولات این کارخانه انتخاب می‌کنیم. انتظار میرود چندکالا معیوب باشند؟

۱) ۸　۲) ۶　۳) ۱۲　۴) ۱۴

۲۵. ۷۰درصد تولیدات کارخانه‌ای سالم است. ۲ نمونه از تولیدات این کارخانه را بتصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال آنکه حداقل یکی سالم باشد کدام است؟

۱) ۰/۷　۲) ۰/۱۴　۳) ۰/۴۹　۴) ۰/۹۱

۲۶. اگر در یك منحنی هنجاری استاندارد $S_0^2 = 0/4772$ باشد، $P(-2 \leqslant z \leqslant 0)$ کدام است؟

۱) ۰/۰۲۲۸　۲) ۰/۴۷۷۲　۳) ۰/۵۲۲۸　۴) ۰/۹۵۴۴

۲۷. اگر متغیر تصادفی x دارای توزیع هنجاری با میانگین ۲۵ باشد، $P(x \leqslant 25)$ کدام است؟

۱) ۰　۲) ۱　۳) ۰/۵　۴) ۰/۷۵

۲۸. اگر از جامعه‌ای که یك نمونه‌ای ۲۰ تائی انتخاب کرده‌ایم نتیجهٔ $\sum_{i=1}^{20}(X_i-\bar{X})^2 = 380$ حاصل شده باشد، برآورد نقطه‌ای پراش کدام است؟

۱) ۱۸　۲) ۱۹　۳) ۲۰　۴) ۲۱

۲۹. اگرمعادلهٔ خط رگرسیون $Y = 2x + 3$ و $\bar{X} = 4$ باشد، میانگین y کدام است؟

۱) ۳　۲) ۸　۳) ۹　۴) ۱۱

۳۰. اگر $SS_X = 10$ و $SP_{XY} = -15$ و $\bar{X} = 4$ و $\bar{Y} = 5$، معادلهٔ خط رگرسیون Y نسبت به X کدام است؟

۱) $y = -1/5x - 11$　۲) $y = -1/5x + 11$

۳) $y = 1/5x - 11$　۴) $y = 1/5x + 11$

جواب آزمون ریاضیات گروه ریاضی فیزیك

۱− (۱)	۱۲− (۴)	۲۳− (۴)	۳۵− (۳)	۴۶− (۴)
۲− (۱)	۱۳− (۱)	۲۴− (۲)	۳۶− (۲)	۴۷− (۳)
۳− (۴)	۱۴− (۲)	۲۵− (۲)	۳۷− (۳)	۴۸− (۲)
۴− (۳)	۱۵− (۳)	۲۶− (۱)	۳۸− (۱)	۴۹− (۴)
۵− (۴)	۱۶− (۴)	۲۷− (۲)	۳۹− (۴)	۵۰− (۲)
۶− (۴)	۱۷− (۱)	۲۸− (۲)	۴۰− (۳)	
۷− (۴)	۱۸− (۲)	۲۹− (۲)	۴۱− (۳)	
۸− (۳)	۱۹− (۱)	۳۰− (۳)	۴۲− (۴)	
۹− (۲)	۲۰− (۲)	۳۱− (۳)	۴۳− (۱)	
۱۰− (۲)	۲۱− (۲)	۳۲− (۳)	۴۴− هیچکدام	
۱۱− (۳)	۲۲− (۲)	۳۳− (۴)	۴۵− (۳)	

پاسخ آزمون ریاضی گروه علوم تجربی

۱– (۱)	۱۲– (۳)	۲۳– (۳)
۲– (۳)	۱۳– (۱)	۲۴– (۲)
۳– (۴)	۱۴– (۳)	۲۵– (۲)
۴– (۴)	۱۵– (۳)	۲۶– (۴)
۵– (۱)	۱۶– (۱)	۲۷– (۱)
۶– (۲)	۱۷– (۱)	۲۸– (۴)
۷– (۳)	۱۸– (۴)	۲۹– (۱)
۸– (۴)	۱۹– (۲)	۳۰– (۲)
۹– (۳)	۲۰– (۳)	
۱۰– (۴)	۲۱– (۴)	
۱۱– (۱)	۲۲– (۳)	

پاسخ آمار و ریاضی گروه آزمایشی علوم انسانی

۱– (۱)	۱۲– (۳)	۲۳– هیچکدام
۲– (۴)	۱۳– (۳)	۲۴– (۲)
۳– (۲)	۱۴– (۲)	۲۵– (۴)
۴– (۳)	۱۵– (۳)	۲۶– (۲)
۵– (۲)	۱۶– (۲)	۲۷– (۳)
۶– (۴)	۱۷– (۲)	۲۸– (۳)
۷– (۳)	۱۸– (۱)	۲۹– (۴)
۸– (۱)	۱۹– (۳)	۳۰– (۲)
۹– (۱)	۲۰– (۱)	
۱۰– (۲)	۲۱– (۲)	
۱۱– (۴)	۲۲– (۱)	

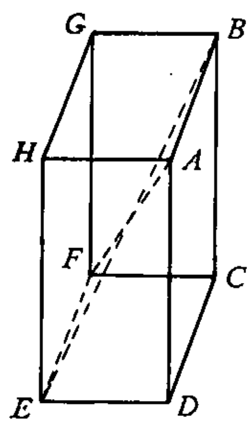
تعمیمی از قضیهٔ فیثاغورث

مسعود ساروی عضو هیأت علمی دانشگاه مازندران

بنا به قضیهٔ فیثاغورث می‌دانیم که در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع وتر برابر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر می‌باشد. این قضیهٔ را می‌توان در فضای سه‌بعدی هم تعمیم داد.

قضیهٔ در هر مکعب مستطیل مجموع مربعات مساحت دو مستطیل قائم برهمدیگر برابر است با مربع مساحت مستطیل قطری (مستطیلی که دو ضلع مقابل آن از یک مستطیل نیست) از همان مکعب مستطیل.

اثبات مکعب مستطیل زیر را درنظر می‌گیریم بگونه‌ای که S_1 مساحت مستطیل $ABCD$ و S_2 مساحت مستطیل $CDEF$ و S_3 مساحت مستطیل $ABEF$ باشد. آنگاه با فرض $AB=a$ و $BC=b$ و $DE=c$ خواهیم داشت.



$$S_1=AB\cdot BC=ad$$
$$S_2=ED\cdot DC=ca$$
$$s_3=AE\cdot AB=\sqrt{b^2+c^2}\cdot a$$
$$s_3^2=s_1^2+s_2^2$$

یادداشت: انتخاب تعریف مستطیل قطری و عنوان قضیهٔ از طرف اینجانب می‌باشد به‌همین‌جهت هر نوع عنوان اصلاحی از طرف اساتید محترم و دانشجویان عزیز را با رغبت می‌پذیریم.

میزگردی در مورد ریاضیات محض و کاربردی

جهاد دانشگاهی دانشکده علوم دانشگاه تهران

مقدمه. ریاضیات به عنوان بنیادی‌ترین‌شاخه علوم پایه و به تعبیری ما در دیگر رشته‌ها وفنون می‌باشد زیرا تقریباً در تمامی شعب علوم تجربی و عقلی نفوذکرده و بیان مفاهیم موجود در هر رشته به زبان ریاضی به معنای توانایی ما در تفسیر و حتی‌الامکان پیش‌بینی‌های دقیق در حیطه آن رشته می‌باشد، به نظر می‌رسد در سرزمین اسلامی‌مان علاقمندان به این رشته و استعدادهای بالقوه ریاضی به نسبت زیاد باشند ولی از طرف دیگر نیاز به تبلیغ در باره ریاضیات و تفهیم نقش کلیدی‌آن، بخصوص برای مسئولین نظام‌آموزشی، حس می‌شود. لذا با راهنمائیهای یکی ازاساتید گروه‌ریاضی دانشکده علوم دانشگاه تهران، جهاد دانشگاهی این دانشکده در فکر تشکیل میزگردی جهت بحث در مورد گوشه‌ای از کاربردهای ریاضیات با حضور چند تن از اساتید دانشگاه و مسئولین اجرایی، افتاد و پس‌از چند ماه تدارک در تاریخ دوشنبه ۶۶/۳/۱۱ این میزگرد با حضورآقایان دکتر نجفی وزیر اسبق فرهنگ وآموزش عالی و عضو هیأت علمی دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی شریف، دکترشوشهانی رئیس‌دانشکده ریاضیات‌دانشگاه‌صنعتی شریف، دکتر منصوری رئیس گروه فیزیك مرکز نشر دانشگاهی و عضو هیأت علمی دانشکده فیزیك دانشگاه صنعتی شریف، دکتر صفوی عضوهیأت علمی‌گروه برق دانشکده فنی دانشگاه تهران، دکتر مکنون معاونت‌آموزشی‌و تحقیقاتی وزارت نیرو و عضو هیأت علمی دانشگاه امیرکبیر وآقای نیلی رئیس دفتراقتصادکلان وزارت برنامه و بودجه در دانشکده علوم دانشگاه تهران تشکیل شد که گزارش مختصری از گفتگوهای انجام شده درزیرمی‌آید.

دکتر نجفی (هماهنگ کننده): «هرعلمی روش وارزش واهمیت خاص خودش را دارد و علم ریاضی هم در بین علوم و معارف بشری مستثنای از این قاعده نیست و برای بررسی ارزش واهمیت علم ریاضی‌ابعاد مختلفی هست که می‌شود از طریق آنها وارد این موضوع شد و مسئله را مورد ارزیابی قرار داد. مثلا می‌شود از یك دیدگاه فرهنگی و ایدئولوژیك مسئله اهمیت‌و ارزش علم ریاضی را مورد بررسی قرار داد. همچنین می‌شود ارزش و اهمیت ریاضی را با بررسی نقش تاریخی این علم در حل مسائل علمی و اجتماعی تمدنهای بشری مورد توجه قرار داد، یا اینکه می‌شود با نگرشی به برنامه‌ریزیها و تجربیات سایر کشورها مسئله ارزش واهمیت ریاضی را در این برنامه‌ریزیها پی گیری کرد و نتایجی ازآن گرفت.

به هرحال‌آنچه‌که موضوع بحث امروز ماست مسئله کاربرد علم ریاضی است در سایر علوم، و بخصوص با تأکید در علوم مهندسی و فیزیك. امیدوار هستیم که درخلال بحث به چند مسئله دوستان پاسخ بدهند یکی مسئله مرزبندی است‌که امروز در دنیا و در ایران در ارتباط با علم ریاضی محض و علم ریاضی کاربردی بعضی‌ها قائل شدند. البته این مسئله تا وقتی‌که به عنوان دسته‌بندی و نامگذاری تلقی

بشود مسئله خوبی است از نظر اینکه انسان مسائل ریاضی را تعقیب کند و بتواند در دسته‌های مختلف این علم مباحث مختلفی را مورد بررسی قرار دهد. ولی متأسفانه همین تقسیم‌بندی باعث بعضی بدفهمی‌ها و بدآموزی‌ها شده که عده‌ای اینجور تلقی کرده‌اند که ریاضی محض عبارتست از شاخه بدرد نخور، ریاضی کاربردی عبارتست از شاخه بدرد بخور ریاضی. همچنین امیدوار هستیم که شمه‌ای از آتیه علم ریاضی در ایران و در جهان در این جلسه ترسیم شود؛ یك دید کلی نسبت به اینکه علم ریاضی در چند سال آینده به کجا خواهد رفت و چه وضعیتی را نسبت به سایر علوم خواهد داشت. همچنین بواسطهٔ حضور بعضی از برادرانی که مسئولین دستگاههای اجرائی کشور هستند انتظار داریم این برادران یا دوستان دیگری که اساتید رشته‌های دیگر هستند برای ما بگویند که انتظاراتشان از ریاضی‌دانها و ریاضی‌خوانها و اساتید و دانشجویان ریاضی چه هست و ما بررسی کنیم که این انتظارات تا چه حد قابل برآورد است و بعد امیدوار هستیم برای بهبود وضع علمی کشور و بخصوص برای بهبود وضع رشته ریاضیات در کشور پیشنهاداتی داشته باشیم که به عنوان نتیجه و حاصل این سمینار در اختیار برادران برنامه‌ریز و مسئولین دانشگاهها و وزارت فرهنگ و آموزش عالی و وزارت آموزش‌وپرورش قرار دهیم.»

دکتر شهشهانی: درمورد ریاضیات محض و کاربردی قرار شد من مختصری بطور اجمال به‌ریشه‌یابی بین این‌تمایز بپردازم. اولاً این را بگویم که واقعاً این طور نیست که دوشاخه از ریاضیات وجود داشته باشد بلکه‌در واقع می‌شود گفت ریاضی‌دانها و یا افراد ریاضی کار دو نوع فعالیت دارند، یکدسته فعالیت مربوط به ریاضی محض‌ودسته دیگر مربوط به فعالیت ریاضیات کاربردی. آنچه که اینها را متمایز می‌کندآن اشیائی هست که درآنجا مورد بررسی هستند یك شاخه از ریاضیات می‌تواند هم جنبه‌های به اصطلاح محض داشته باشد و هم جنبه‌های کاربردی. رشته‌های مختلف ریاضی هم ریشه‌هایشان در کاربردها بوده و بعضی ریشه‌های‌درونی‌ریاضیات داشته‌اند و اینکه امروز کاربرد دارند یا نه بسیاری اوقات ارتباطی به ریشه‌هایشان ندارد.

امروز به چه چیزی ریاضیات می‌گویند؟ من همین دیدگاه عملی را درنظر می‌گیرم، من می‌خواهم بگویم بطور خلاصه ریاضیات‌را می‌شود گفت یك علم است منتها علم مفاهیم مجرد دقیق است. در اصل و در شروع، ریاضیات علمی بوده مثل علم طبیعی امروزی مثل علم فیزیك بوده بعد تدریجاً در طول تاریخ ریاضی مسائلی پیش‌آمده‌که همه ازآن مطلع هستیم بخصوص می‌شودگفت در اواخر نیمه دوم قرن نوزدهم با پیدایش مسائلی مثل هندسه‌های غیر اقلیدسی که واقعاً مستقیم از طبیعت صحبت نمی‌کنند (اشیایی که مورد توجه ریاضی‌دانها هستند مستقیماً اشیاء طبیعی نیستند بلکه اشیاء مجردی‌هستند.) در واقع‌می‌توان گفت در نیمه اول این قرن، دوجریان مجزا در ریاضیات بوجودآمد و این باعث شدکه تمایزی ایجاد شود، آنچه که ما ریاضیات محض و ریاضیات کاربردی می‌گوییم.

دکتر منصوری: به نظر من ما در سالهای اخیر یك مقدار عمل زده شده‌ایم و بیشتر توجه به کاربردهای فوری هر چیزی می‌کنیم از جمله در علوم و علوم پایه‌که ریاضیات یکی از آنها می‌باشد، و اگر این عمل زدگی راکنار بگذاریم و مقداری متوجه مشکلات بشویم به نظر من مسئله را حل می‌کند. این میزگرد یك مقدار این مسئله را دارد عنوان می‌کندکه صحبت ازکاربرد ریاضی‌دانهاست نه ریاضیات کاربردی. یعنی به هرحال ریاضی دانهاکجا به درد می‌خورند. نقشی‌که ریاضیات در فیزیك دارد و کاری‌که فیزیك می‌کند بررسی پدیده‌های طبیعی به‌طورعام است. امروزه ما می‌خواهیم بفهمیم این طبیعتی‌که ما درآن زندگی می‌کنیم چه هست وچگونه درست شده و چگونه پدیده‌ها قابل توجه هستند و چه پیش‌بینی‌هایی را در مورد پدیده‌ها می‌توانیم بکنیم و مهمتر از همه فهم خود پدیده‌ها هستند. ولی فیزیك جدید که عملا از زمان نیوتن شروع می‌شود چیز دیگراست و مهمترین ابزاری‌که ما در شناخت پدیده‌ها به کار می‌بریم ریاضیات است. یك مدل از پدیده‌ها می‌سازیم‌که می‌توانیم‌آن را به زبان ریاضی حل‌کنیم ببینیم‌که چطور این نقش ریاضی در فیزیك ادامه پیدا کرد. امروزه هر کاری در فیزیك‌انجام می‌گیرد ناچار با استفاده از ریاضیات است؛ امکان ندارد بخشی از ریاضیات وجود داشته باشدکه به درد ما در فیزیك نخورد. اینکه ما نمی‌توانیم پدیده‌های طبیعی را دقیق توجیه‌کنیم

بر می‌گردد به اینکه ما ریاضیات کافی نداریم. ممکن است به‌نظر آید که الان ریاضی‌دان کاری می‌کند که هیچ مصداق طبیعی ندارد و هیچ نقشی در فیزیك ایفا نمی‌کند ولی نباید گفت کار بی‌خودی است برای پیشرفت در فیزیك با توانایی بررسی پدیده‌های پیچیده‌تر قطعاً احتیاج به‌یك پدیده‌های پیچیده‌تر در ریاضیات خواهیم داشت که ممکن است امروز برای ما قابل تصور نباشد. و انتظار ما از ریاضی‌دانها باید این باشد که ریاضیات انشاءالله... نخواهد خودش را در ایران این طور عرضه بکند که به درد دیگران نمی‌خورد.»

دکتر صفوی: «من فکر می‌کنم که درمجموع شاید مهمترین وجه‌تمایز علوم مهندسی جدید نسبت به روشهای مهندسی که قبلا رایج بوده یعنی در ۵۰ سال پیش، این است که ریاضیات اصولاً در مرکزروش شناسی مهندسی جدیدقرار گرفته‌در واقع‌روش مهندسی جدید عمدتاً روش‌ریاضیات است شاید این مهمترین دلیل باشد که این چند دهه جدید بخصوص مهندسی یك رشد خیلی مطمئن و دقیقی داشته است. نکته‌ای که در واقع از نظر روشهای ریاضی در مهندسی خیلی مهم است این است که عمدتاً امروز برخلاف سابق‌روشهای ریاضی خیلی به‌کاربردها محدود نیست روشهای ریاضی در واقع جزئی از وسائل مهندسی است اگر بخواهد با معیارهای این زمان‌کار کند. مسئله دوم‌که در اینجا در شروع بحث‌هم‌اشاره شده به‌اصطلاح موضوع سمینار رابطه بین ریاضیات کاربردی و ریاضیات محض است. الان ما درخیلی از فعالیتهای عادی مهندسی از شروع کار که مسئله مدل‌سازی هست احتیاج داریم به قضایا واصول ریاضی که شاید هیچ‌کدام از این قضایا بطور مستقیم به یك روش محاسباتی منجر نشود شما شاید مثالهائی ازآن را در درسهای محاسباتی خودتان داشته‌اید. اغلب با این مسئله مواجه می‌شوید که آیا این مدل سازگاری هست. این مدل، مدل قابل شناختی هست یا نیست. یا آیا مدل ریاضی ما را بیك حل مطمئن و معتبری راهنمایی می‌کند یا نه. این حل اصولاً وجود دارد یا ندارد؟ خیلی از این سؤالها هست که اگر کسی که در مهندسی کار می‌کند، بتواند از قبل جواب بدهد درکار تحقیقاتی‌اش اثر می‌گذارد وآنقدر مهم است که اغلب در واقع شاید بیشتر ازآن روشهای محاسباتی اهمیت داشته باشد و این مسئله خیلی رایج است.

به هرحال چیزی که به نظر من به عنوان یك راه حل می‌رسد، وجود همین میزگرد به عنوان یك کارابتکاری است و همین سمینارها وکنفرانسها و برنامه مشترک بین دانشکده ریاضی و دانشکده مهندسی و علوم پایه و برنامه‌های تحقیقاتی شاید کمکی به رشته‌های ریاضی کاربردی و غیر کاربردی و ازآن طرف دیگر خوداین زمینهٔ هم اثر بخشی رشته ریاضی را در حل مسائل اجتماعی و حل مسائلی که جامعه باآن روبروست نشان می‌دهد و این خیلی مهم است.»

دکتر مکنون: «بطورکلی اهمیتی که درکشورهای مختلف به ریاضیات داده می‌شود قابل توجه است؛ اخیراً ژاپنی‌ها را با آمریکائیها مقایسه کرده‌اند، گفته‌اندکه در مدارس ژاپن به طور متوسط حدود ۲ ساعت‌ونیم، ۳ ساعت ریاضیاتشان بیشتر از آمریکائیهاست، با چند تا پارامتر دیگر همه راکنارهم گذاشته و به این نتیجه رسیده‌اندکه این جهش ژاپن در این سالها به این دلائل بوده است.

من قسمت‌آب راکه بیشتر رشته خودم هست، اشاره بیشتری خواهم کرد، قسمتی که به پدیده‌های آماری که یك بخش عظیمش را ریاضیات می‌پوشاند برمی‌گردد.

قسمت دیگر قسمتهای مدل‌سازی است. یکی از کارشناسهای هندکه اخیراً به‌ایران آمده‌اند در مورد مسائل آزمایشهای هیدرولیك می‌گفت ما خودمان این قسمت را حدود ۱۸ سال پیش تأسیس کردیم و خیلی زود به این نتیجه رسیدیم که بخش ریاضی‌مان را جلو بیاندازیم و قبل‌از اینکه بعضی بخشهای پرخرج‌تررا انجام دهیم روی این قسمت سرمایه‌گذاری کنیم.»

آقای نیلی: «شناخت از اقتصاد و زمینه‌های اقتصادی و مقایسه با شناختی که معمولا نیروهای دانشگاهی ما از اقتصاد در مقایسه با فیزیك و علوم مهندسی دارندکمتر است، شاید لازم باشد ثبات‌کنیم ارتباطی بین اینها وجود دارد. آنچه‌که به عنوان یك نظریه اقتصادی‌ورابطه‌آن با ریاضیات مطرح هست یکی از مسائل مربوط به برنامه‌ریزی است، یکی نظریه‌های تصمیم گیری‌است‌ویکی برنامه‌ریزیهای سیستمی، که هریك به شکلی با برنامه‌ریزی اقتصادی ارتباط دارد. نظریه اقتصاد یك پایه‌اش اقتصاد خرد است و یك پایه‌آن اقتصادکلان. بطورکلی

صورت اقتصاد خرد تبیین رفتار میلیونها مصرف‌کننده و تولیدکننده و تولیدکننده ودر بازار هزارها کالااست.

ما برای تولیدکننده یك تابع هدف تعریف می‌کنیم که سود است و تولیدکننده می‌خواهد سود خودش را ماکزیمم مبتنی بر محدودیتهای امکانات تکنولوژی کند، وقتی که به آن می‌گوییم مجموعه امکان‌پذیری تولید (همانچه‌که ما در تحقیق در عملیات و ریاضی ناحیه امکان‌پذیر گوییم)، آن چیزی که مصرف‌کننده به دنبالش هست چیزی به نام تابع مطلوبیت است. مطلوبیت خودش را میخواهد ماکزیمم کند ویك بردار قیمتها از بیرون داده شده و بحث می‌شود که مجموعه امکان‌پذیری تولید مبتنی بر بروز رفتاری که ما برای تولیدکننده در نظر گرفتیم یك ناحیه امکان‌پذیر دارد که شرایط لازم را دارد. بعد بحث می‌شود که یك مجموعه محدب است و بعد بحث می‌شود که یك مجموعه کاملا محدب است و بعد بحث می‌شود که یك جواب یگانه خواهد داشت؛ تا میرسد به روشهای حل مسئله که تمام مقدماتی هست که در تجزیه و تحلیل اقتصاد فرد استفاده می‌شود. بعد وقتی این مسئله را برای یك ناحیه حل کردیم برای تمام جامعه تعمیم می‌دهیم.»

سپس بیش از یکساعت به سؤالات حضار پاسخ گفته شد و دکتر نجفی درخاتمه نتایج بحثها را چنین جمعبندی کردند: «از جمله پیشنهاداتی که شد اول اینکه مسئله تحقیقات در تمامی علوم درکشور باید جدی‌تر درنظر گرفته شود بخصوص تحقیقات درعلوم پایه؛ همچنین لازم است یك مؤسسه تحقیقاتی در ریاضیات تأسیس شود. دیگر اینکه امید است دوره‌های دکترای ریاضیات باکیفیت مطلوب در دانشگاههایمان هرچه زودتر تأسیس شود. دیگر اینکه دروس مهندسی و فیزیك و کامپیوتر بدرد دانشجویان رشته‌های ریاضی میخورد و بهتر است این دانشجویان را تشویق کرد که چنین دروسی را هم درکنار دروس اصلی خود بگیرند و متقابلا شاید لازم باشد که دروس ریاضی در سایر رشته‌های دانشگاهی تقویت شود. همچنین از جامعه ریاضی انتظار میرود که بیش از اینها در مسائل جامعه و مسائل روز از جمله نظام اقتصادی، جنگ وخودکفایی صنعتی وارد شوند. سابقه تاریخی هم نشان میدهد که ریاضیدانان در پیروزی کشورهای خود در جنگ نقشی کلیدی داشته‌اند. دیگر اینکه خوب است برنامه‌های مشترك منسجمتری بین بخشهای ریاضی دانشگاهها و بخشهای مهندسی دانشگاهها ودیگر بخشهای دانشگاهی، تدوین شود. از اشکالاتی که مطرح شد کمبود چنین بحثهائی است که در این جلسه انجام شد و برخی مطبوعات به نظر می‌رسد به چاپ چنین بحثهائی اگر بدستشان برسد علاقمند باشند. به نظام دروس ریاضی ودرآموزش پیش از دانشگاه نیز اشکالاتی وارد است که در سالهای اخیر شاهد افت علمی شدید دیپلمه‌های وارد شده به دانشگاه بخصوص در دروس ریاضی پایه می‌باشیم.»

بقیه از صفحه ۴۹

۱۳۲	علی‌اصغر	ورهرام	تهران ـ منطقه ۱	شهید مطهری	چهارم
۱۳۳	محمدرضا	ورزشی	خوزستان ـ بهبهان	شهید بخردیان	چهارم
	ه				
۱۳۴	محمدرحیم	همتیان	شیراز ـ ناحیهٔ ۲	توحید	چهارم
	ی				
۱۳۵	محمدرضا	یراقی	اصفهان ـ ناحیه ۲	شهدای ادب	چهارم
۱۳۶	مجتبی	یکرنگ	گیلان ـ رشت	شهید بهشتی	چهارم
۱۳۷	افشین	زهتاب آذری	تهران ـ منطقه ۱۶	رشد	سوم
۱۳۸	پدرام	صفری	تهران ـ کرج	دهخدا	چهارم

زندگینامه یک معلم

مرحوم سیدقوام‌الدین نحوی در تاریخ ۱۳۰۱ شمسی در شهرستان اصفهان و در خانواده‌ای روحانی چشم به‌جهان گشود. تحصیلات ابتدائی‌را در دبستان ایران به‌اتمام رسانید.

سه سال اول دبیرستان را در دبیرستان اقدسیه گذرانید و سپس به‌دانشسرای مقدماتی اصفهان وارد شد و در خرداد ۱۳۲۰ تحصیلات خود را در دانشسرا با رتبه اول به‌پایان رسانید. در این اثنا که مصادف با جنگ جهانی دوم و اشغال ایران توسط متفقین بود با کمی تاخیر وارد دانشسرای عالی تهران گردید. در سال ۱۳۲۴ در سن ۲۳ سالگی موفق به‌اخذ درجه لیسانس ریاضی ازدانشسرای عالی تهران شد و ازمهرماه همان سال با سمت دبیری در شهرستان اهواز مشغول به‌خدمت گردید. مدت ۲۱ سال در اهواز به‌خدمت اشتغال داشت و در این دوران علاوه برتدریس به‌عنوان سرپرست و راهنمای انجمن دبیران ریاضی، مشاور تعلیمات متوسطه اداره فرهنگ اهواز و ریاست شورای صنفی رشته ریاضی، خدماتی شایان در پیشبرد امر تعلیم و تربیت آن استان ارائه نمود.

درشهریورماه سال ۴۵ بنا به‌تقاضای خویش به‌زادگاهش اصفهان منتقل شد و نیز همچنان با شوق و علاقه و جدیت به‌تدریس در دبیرستانهای اصفهان ادامه داد و به‌علاوه از سال ۱۳۴۹ در دانشسرای راهنمائی‌نیز مشغول به‌خدمت گشت.

تلاشهای مرحوم نحوی تنها به‌امر تدریس منحصر نمی‌گشت بلکه در کنار تدریس در تدوین برخی از کتب درسی دانشسرای راهنمائی، طراحی سؤالات امتحانات نهائی دبیرستانها و دانشسرای راهنمائی و مسابقات بین دانش‌آموزان، ارائه طرح وپیشنهاد جهت اصلاح آموزش ریاضی نقش فعالی داشت و در حدود یکصد مقاله و مسأله ریاضی از ایشان در مجله ریاضی یکان به‌چاپ رسیده است.

به‌خاطر تلاشهای صادقانه و دلسوزانه‌اش موفق به‌دریافت یك نشان از وزارت آموزش و پرورش، دو تقدیر وزارتی و سه‌تقدیر از جانب مدیرکل گردید و در سال ۱۳۴۹ به‌عنوان دبیر نمونه شهرستان اصفهان انتخاب شد. بالاخره‌پس از ۳۳ سال خدمت در مهرماه ۱۳۵۸ به‌افتخار بازنشستگی نائل آمد. در دوران زندگی همواره در امر تدریس جدی و علاقمند و وظیفه‌شناس بود. درس را با طرح و آمادگی قبلی آغاز می‌کرد در کلاس و امتحان همیشه جنبه‌ملایمت با دانش‌آموزان و دانشجویان را در نظر می‌گرفت.

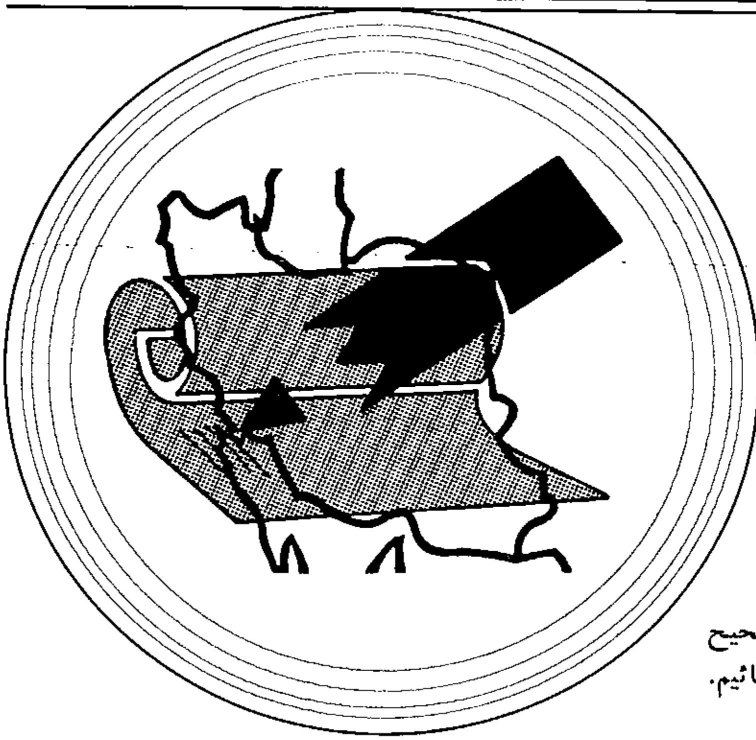
تمامی بیش از یکصد دفتری که از یادداشتهای ایشان به‌یادگار مانده است در صفحات اول خود و در لابلای‌اوراق مزین به‌آیات قرآنی است.

مرحوم نحوی علاوه برریاضیات به‌مباحث اعتقادی و قرآنی، علوم پزشکی، ادبیات و علوم انسانی، هیأت ونجوم علاقمند بود ویادداشتهایی ازاو در این‌زمینه‌ها باقیمانده است. گرچه روحیه مذهبی و جدیت در تحصیل علم در تمامی‌دوران زندگی او نمایان بود اما تبلور این دو خصوصیت در اواخر دوران عمرکه فراغت از تدریس و امور اداری دست داده بود جلوه دیگری داشت به‌طوری‌که اکثر اوقات خویش رادر کتابخانه‌ها ومجالس دینی به‌مطالعه و دعا می‌گذرانید. درطول زندگی نزد همکاران و دانشجویان از احترام ومحبوبیتی‌خاص برخوردار بود.

سرانجام‌با بیماری‌مرموزی که از عیدسال ۶۶ نشانه‌های آن‌دروی‌ظاهر گشت درسحرگاه‌جمعه ۱۷ مهرماه، در ۶۵سالگی شمع‌وجودش به‌خاموشی گرائید. روحش به‌ملکوت‌اعلی‌پیوست وخانواده و آشنایان و همکارانش را داغدار نمود. مرحوم نحوی در باغ رضوان اصفهان مدفون گشت. ازایشان‌یك‌دختر و سه پسر باقی مانده است.

خدایش رحمت کند و روحش با اولیاء و شهداء و اجداد طاهرینش محشور باد.

(این شرح‌حال توسط همکاران مرحوم نحوی‌دراصفهان تدوین شده است)



نامه‌ها

برادر صبحانعلی ـ کرج

ضمن آرزوی توفیق برای شما، از ارسال حل صحیح یك مسأله بیست‌وهشتمین المپیادبین‌المللی ریاضی تشکر می‌نمائیم.

خواهر متین مهریار ـ دانش‌آموز ـ رشت

برهانی که بـه روش استقراء برای مسأله ۲۱ شماره ۳ ارسال کرده‌اید درست است. ضمناً این مسأله درشماره مشترك ۵ـ۶ حل شده است.

برادر علی کرامتی ـ تهران

ارتباط قضایای کوچك فرمـا $a^{n-1} \equiv 1(n)$ و امتناع $x^n + y^n = z^n$ برای ماهم روشن نیست. درصورتی که دراین موردبه‌مطلب جالبی رسیدیم خوانندگان‌مجله را مطلع خواهیم کرد.

برادر مجید خسروی‌پور ـ تهران

از ارسال چند مسأله با حل تشکر می‌نمائیم ولـی تذکر می‌دهیم‌که حل ارسالی آنها چندان کامل نیستند. امیدواریم که در ارائه براهین ریاضی دقیقتر باشید.

برادر محمد علیپور اسکندرانی ـ دانش‌آموز ـ تبریز

ازارسال‌حل بعضی ازمسائل شماره ۱۲ تشکر می‌نمایم. امیدواریم که همیشه موفق باشد.

برادر عبدالخالق آروین ـ دانش‌آموز ـ شیراز

ضمن‌عرض سلام‌متقابل، بهترین‌شیوه‌یادگیری‌درریاضیات کوشش در جهت درك دقیـق مفاهیم ریاضی و تقلا برای حل مسائل ریاضی می‌باشد. بدون شك، اگربرای‌حل مسائل کوشش نشود به‌هیچ وجه نمی‌توان ریاضیات را آموخت. برای تقویت پایه ریاضی خـود علاوه بر مطالعه عمیق کتب درسی، مطالعهٔ مقالات و حل مسائل شماره‌های مختلف رشدآموزش ریاضی‌و مجلات‌مشابه مفید خواهد بود. به‌هرحال دراین مرحله بیشترین کوشش شما برای ورود به دانشگاه خواهد بود. امید است که موفق باشید

برادر حسن خاتونی ـ دانش‌آموز ـ بانه

بطوری‌که بارها وبارها گفته شده، تثلیث زاویه باابزار اقلیدوسی (خط‌کش غیرمدرج وپرگار) غیر ممکن است. البته بابرداشتن این قید زاویه را می‌توان مثلاً به‌روش ارشمیدوسی تثلیث‌کرد یعنی دراین تثلیث ازخط‌کش مدرج استفاده‌می‌شود. متأسفانه روش ارسالی شما برای تثلیث زاویه درست نیست.

برادر مهدی ایزدی ـ دانش‌آموز ـ تهران

ازاظهار لطف‌شما نسبت به‌مجله تشکرمی‌نماییم. متأسفانه راه‌حل ارسالی‌شما برای مسأله پروانه درست نیست. امیدواریم که در مکاتبات خود دقیقتر باشید.

برادر حسین مخمدی ـ دانش‌آموز ـ اردکان یزد

سؤال کرده‌اید که‌اگردرمسأله‌شماره۴رشدآموزش‌ریاضی ۱۳ـ۱۴ (صفحه ۸۲) دایرهٔ به مرکز O بر پاره‌خطهای AB و BC مماس باشد، مسأله به‌چه‌صورت بیان می‌شود. استاد غیور به‌شکل زیر به‌سؤال شما پاسخ می‌دهند:

اگر دایرهٔ مذکور بر AB و BC مماس باشند باید A و C نقاط تماس باشند وبالنتیجه OA بر AB و OC بر BC عمود است و OA و OB بـرابـرند. مثلث BKN بر مثلث BAC منطبق است و دایره‌های محیطی آنها برهم منطبق‌اند. M نقطه مشترك دو دایره BAC و BKN است و $BMO = 90°$.

مسائل ارسالی شما برای مسائل مناسب و جالبی هستند.

امابرای‌درج‌مسائل‌درمجله‌لازم‌است‌که منابع‌آنها ارسال‌گردد.

برادر علی محمد حسنی ـ دانش‌آموز ـ احمدآباد اردکان یزد

مسائل‌شماره ۳ و ۴ ارسالی‌شما نسبتاً مسائل‌خوبی‌هستند. اما برای درج مسائل ذکر مآخذ آنها ضروری است.

برادر علی‌اصغر تن‌آرا‌ـدانش‌آموزـمرند

برای‌درج مسائل‌ارسالی، حتماً باید مآخذمسائل ذکرشود.

برادرکاوه لاجوردی‌ـدانش‌آموزـتهران

ضمن تشکر ازارسال یك‌مسأله هندسه، لازم به‌تذکراست که این مسأله درمقاله‌های اول ودوم ثابت می‌شود ولازم نیست که برای برهان‌آن از روابط متری استفاده‌کرد.

برادر امیراعلم غضنفریان‌ـدانش‌آموزـزنجان

تعریفی‌که از آن برای‌محاسبه‌احتمال‌هریك ازپیشامدهای مختلف A و B... استفاده‌کرده‌اید فقط در حالت متناهی صحت دارد. برای بررسی در مسأله ۲ می‌توانید از رابطهٔ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ استفاده نمائید.

برادرکریم نصیری‌ـدانشجوـتهران

مسائل ارسالی شما به بخش مسائل ارجاع گردید. متأسفانه شماره‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ فعلاً نایاب است.

برادر اسماعیل بابکی‌ـدبیرـمینودشت

باعرض‌سلام‌متقابل وآرزوی موفقیت برای‌شما، فرمولی که‌برای‌محاسبهٔ تقریبی‌محیط بیضی‌ارائه کرده‌ایدد‌قیقاً مثل‌محاسبه طول قوس یك منحنی است و لذا تقریب نسبتاً مناسبی ازمحیط بیضی‌به‌دست می‌دهد. امید است که درآتیه بتوانیم مقاله‌ای در این زمینه ارائه نمائیم. موفقیت شما را از درگاه خداوند منان خواستاریم.

برادر محمد بیاتانی‌ـدانشجوـ بروجرد

در روی محورهای مختصات معمولی می‌توان sec و $cosec$ یك زاویه را مشخص کرد. ولی از معرفی این محورها چه نتایجی حاصل می‌شود مورد بحث است.

برادرکیوان کمالی ـ دانش‌آموز ـ تهران

برادرکریم نصیری ـ دانشجوی ریاضی ـ تهران

برادرعلیرضا دربی‌ـدانش‌آموزـتهران

برادر عابدین کامیاب ـ فولادشهر اصفهان

از ارسال حل مسائل شماره ۱۲ تشکرمی‌نمائیم. متأسفانه‌به‌علت دیر رسیدن نتوانستیم از آنها استفاده‌کنیم.

برادرآدم نقی‌پورـدانشجوی ریاضی‌ـتبریز

از ارسال حل مسائل شماره ۱۲ وچند مسأله دیگرتشکر می‌نمایم. مسائل شما به‌بخش مسائل ارجاع گردید.

برادر حجت عسگرخانی‌ـفوق دیپلم‌ـتهران

بطوری‌که می‌دانید بر دانش‌آموزان دبیرستان پرواضح است که یك تابع اولیه تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع $F(x)=\ln x$ است. ولی منظور از مقالهٔ راماکنت محاسبه انتگرال به روش خیلی مقدماتی و البته تقریبی می‌باشد.

برادر جلال بدری‌ـقم

مسأله ارسالی شما در کتاب «بازآموزی و بازشناخت هندسه، ترجمه مصحفی» آمده است لهذا، از درج آن‌معذوریم.

برادر سعید امینیان‌ـدانشجوی پزشکی‌ـتهران

از ارسال یك مسأله با حل تشکر می‌نمائیم.

برادر محمد حاجی زکی‌ـدانش‌آموزـاصفهان

نامه شما به‌بخش مسائل ارجاع گردید

برادر حسینعلی موحدی‌ـدبیر بازنشسته‌ـاصفهان

از ارسال راه حل شرکت پذیری تفاضل متقارن تشکر می‌نمائیم. راه‌حل ارسالی‌جنابعالی‌راه‌حل‌خوب ومناسب‌این‌مسأله است‌که عموماً این مسأله به‌همین شکل حل‌می‌شود. ولی غرض مقاله مندرج در شماره ۱۲ بیان اثباتی دیگر از شرکتپذیری تفاضل‌متقارن است. امیدوارم‌که بیش‌ازپیش ما را ازتجربیات خودآگاه‌گردانید.

برادرسید مهردادجلالیان حسینی‌ـدانش‌آموزـمشهد

بطوری‌که خودتان هم اشاره‌کرده‌اید روش مثلثاتی حل معادلات‌درجه‌سوم که‌توسط‌شما ارسال گردیده است‌فقط بعضی‌از معادلات خاص درجهٔ‌سوم وچهارم را دربرمی گیرد. امیدواریم که‌موفق باشید. مسائل‌ارسالی شما به‌بخش‌مسائل‌ارجاع گردید.

برادر مهرداد دیده‌ور

آقای مهرداد دیده‌ور درتعمیمی‌که ازمسأله مسابقه‌شماره ۹ به‌عمل‌آورده‌ایدکاملاً درست است. گرچه روش‌حل این‌تعمیم بسیارطولانی است ولی دال برعلاقه وذوق شما است‌امیداست که موفق باشید.

برادرفرهنگ مصطفی‌زاده ـ دانش‌آموز ـ ارومیه

مسأله ارسالی شمابه بخش مسائل ارجاع گردید.

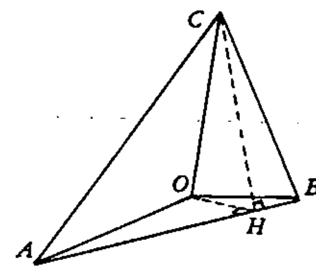
برادر اسماعیل بابکی ـ دبیر ـ مینودشت

همکار ارجمند، باعرض سلام متقابل، ما خود را شایسته این همه تحسین نمی‌دانیم. امیدواریم که کوشش کنیم تا مجله را به‌همان مرتبه‌ای‌که شما بیان‌کرده‌اید برسانیم. ضمن تشکر ازارسال راه‌حل هندسی‌قضیه «فیثاغورث درسه‌بعد» (شماره ۱۳

ـ ۱۴ صفحه ۵۷) ذیلاً عین برهان هندسی شما را می‌آوریم:

درچهاروجهی $OABC$ سه‌وجه OAB و OAC و OBC برهم عمودند. حکم اینست که

$$S_{ABC}^{2}=S_{AOB}^{2}+S_{AOC}^{2}+S_{BOC}^{2}$$



درمثلثهای قائم‌الزاویه COH و OAB داریم

$$AB^{2}=OA^{2}+OB^{2} \quad \text{و} \quad CH^{2}=OC^{2}+OH^{2}$$

پس

$$S_{ABC}^{2}=\left(\frac{1}{2}AB\times CH\right)^{2}=\frac{1}{4}[AB^{2}\times CH^{2}]$$

ولهذا؛

$$S_{ABC}^{2}=\frac{1}{4}[((OA)^{2}+(OB))^{2}((OC)^{2}+(OH^{2}))]$$

$$=\frac{1}{4}OA^{2}\times OC^{2}+\frac{1}{4}OB^{2}\times OC^{2}+\frac{1}{4}OH^{2}\times AB^{2}$$

$$=S_{OAC}^{2}+S_{OBC}^{2}+S_{OAB}^{2}$$

برادر فرهود پوریوسفی ـ تهران

ازدقت ونکته‌سنجی شما صمیمانه تشکر می‌کنیم. اعلام اغلاط چاپی ازجانب شما هشداری است برای ما که درکار خود دقیقتر باشیم. نکته‌ای که از تکرار پاراگراف دوم ستون دوم صفحه ۶۴ شماره ۱۲ اشاره‌کرده‌اید برای ما بسیارمفید است‌که بدینوسیله بـه اطلاع خوانندگان برسانیم. البته لازم به‌تذکر است‌کـه در مقالـه اصلی نویسنده جمله‌ای به‌صورت «شکل‌ها بطور جداگانه ضمیمه نامه هستند» ذکر شده بود که ما ضمن حذف این جمله این پاراگراف را هم دوباره نوشته بودیم متأسفانه هردو نوشته پشت سرهم چاپ شده است وجملهٔ مذکور هم درتکرار دوم آمده است.

برادر امیر مسعود قزلباش ـ دانشجوی فیزیك

در مقالهٔ ارسالی خود نوشته‌اید کـه α را می‌توان به‌صورت $\alpha=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i\beta$ نوشت. برای ما روشن نیست‌که چگونه این نمایش امکانپذیر است.

برادر صدیق حیدریان‌ـ‌دانش‌آموزـ‌قروهٔ کردستان

بطوری‌که حتماً تا به‌حال ملاحظه کرده‌اید چهار مسأله از بیست وششمین المپیاد ریاضی درشماره ۱۳ ـ ۱۴ حل شده است.حل دو مسألهٔ دیگر در شماره‌های آتیه خواهد بود.

متأسفانه شماره‌های ۱ تا ۴ فعلاً نایاب هستند ازارسال حل بعضی مسائل شماره ۱۱ تشکرمی‌کنیم ولی متأسفانه به‌علت دیـر رسیدن نتوانستیم از آنها استفاده نمائیم امیدواریم که موفق باشید.

برادر محمدرضا ملا ـ دانش‌آموز ـ ری

برای ابـداع مطالب نو، نیاز به‌مقدمات بیشتری است. کوشش‌کنید وقت خود را صرف یادگیری مفاهیم نمائید ودر این‌گونـه موارد ازمعلمان ریاضی خود استفاده نمائید. فرمول ارسالی شما برای محاسبه فاصله کانونی آئینه‌ها درست است ولی بهتر است به‌مجله فیزیك ارسال گردد.

برادر پیام سنائی ـ دانش‌آموز ـ اصفهان

بـرهان ارسالی شما بـرای مسألـه ۲ بیست وهشتمین المپیاد ریاضی‌کاملاً برهان صحیح وخوب است امیدواریم‌که موفق باشید وبیش ازپیش باما همکاری‌کنید.

برادرعنایت امینیان ـ دانش‌آموز ـ گرگان

حل ارسالی شما بـرای مسأله هندسه چهارمین مسابقه ریاضی‌دانش‌آموزی‌کشوردرست‌است، ولی راه‌حل‌ساده‌مسأله اینست کـه از روابط $Arc\,tg\alpha=1/2$ و $Arc\,tg\beta=1/3$ به‌سهولت ثابت می‌شودکه $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

برادر فیروز ناصری ـ دانش‌آموز ـ میاندوآب

مسلماً از رابطهٔ واضح $0=[(1+a)-(1+a)]A$، $A=0$ به‌دست نمی‌آید.

سایر روابطی که به‌دست آورده‌اید عمومـاً ازخواص مقدماتی اعداد هستند. امیدواریم‌که موفق باشید.

خواهر معصومه سادات هاشمی ـ دانش‌آموز ـ ری

روش ابداعی شما بـرای ضرب دوعدد دورقمی دلیل بر ذوق وپشتکارشما است امیدواریم‌که موفق باشید. البته این روش درعمل چندان‌کوتاه‌تر از روش معمولی نیست.

برادر میرهاشم حسینی ـ دبیر ـ میانه

با عرض سلام متقابل ازاینکه اغلاط چاپـی مقالهٔ خود را «π اصم است»که درشماره ۱۱ مجله چاپ شده‌است ارسال داشته‌ایـد تشکر می‌نمائیم و بـدینوسیله به‌اطلاع خوانندگان می‌رسانیم: اشتباهات چاپی مقالهٔ «π اصم است شماره ۱۱»

صفحه	ستون	سطر	نادرست	درست
۴۶	۱	آخر	مشتق nام	مشتق kام
۴۷	۱	۶	C_{2a}	C_{2n}
۴۷	۲	۱۳	$20^{k}4$	$2^{k}4$
۴۷	۲	۲۶	$G(x)=b[$	$G(x)=b^{n}[$
۴۸	۱	۲۶ و ۲۸	$G(1)-G(0)$	$G(1)+G(0)$
۴۸	۲	۱۸	$\frac{2}{309n}$	$\frac{2}{309^{n}}$

کشور را بـه برکت این جوانهای عزیز به جایـی می‌رسانیم که احتیاجش در هر امری از کشورهای دیگر منقطع گردد.

«امام خمینی»

سؤالات مرحلهٔ نهایی پنجمین دورهٔ مسابقات ریاضی دانش‌آموزان کشور

توضیح: ایـن سؤالات در آخـرین مراحل چـاپ این شماره بدست ما رسید، لذا عین آنرا در صفحهٔ اشتراک قرار دادیم، مشروح نحوهٔ برگـزاری و پاسخ سؤالات در شمارهٔ ۱۷ چـاپ خواهد شد.

آزمون بعدازظهر	مدت: ۳ ساعت
تاریخ برگزاری ۶۷/۲/۱	

۱ـ اعـداد صحیح و مثبت a و b و c را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\begin{cases} a^{3}-b^{3}-c^{3}=3abc \\ a^{2}=2(b+c) \end{cases}$$

۲ـ فرض کنید تابع حقیقی f در فاصله $[0+\infty)$ تعریف شده و f' و f'' در این فاصله موجود باشند و داشته باشیم:

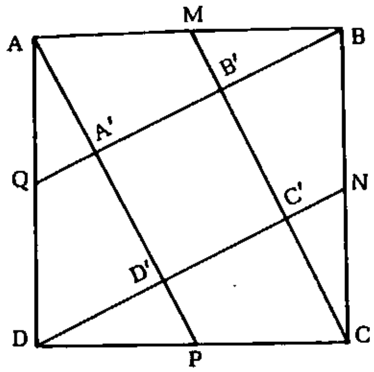
$$f''(x)=\frac{1}{x^{2}+f'(x)^{2}+1}\ ;\ f(0)=f'(0)=0\ .$$

ثابت کنید تابع g با ضابطهٔ:

$$g(0)=0 \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{f(x)}{x}\ (x>0)$$

کراندار است.

۳ـ در شکل زیر نقاط M، N، P و Q بترتیب در وسط اضلاع مربع ABCD قراردارند. ثابت کنید مقدار مساحت چهارضلعی $A'B'C'D'$ برابر $\frac{1}{5}$ مساحت مـربع ABCD است.



(هر سؤال هفت نمره دارد)

آزمون صبح	مدت: ۳ ساعت
تاریخ برگزاری ۶۷/۲/۲	

۱ـ مطلوبست محاسبهٔ عبارت:

$$A=\sin 1^{\circ}\times\sin 2^{\circ}\times\ \cdots\ \times\sin 89^{\circ}$$

۲ـ تابع پیوسته $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ را چنان تعیین کنید کـه بـه ازاء هر $y\in\mathbb{R}$ و x داشته باشیم:

$$f(x^{2}-y^{2})=(f(x))^{2}-(f(y))^{2}$$

۳ـ چهارخط متمایز L_1، L_2، L_3 و L_4 را در فضا درنظر بگیرید کـه هیچ سه‌تای آنها در یك صفحه قرار نداشته باشند. فـرض کنید محل تقاطـع خطوط L_1 و L_2 نقطهٔ A و محل تقاطع خطوط L_2 و L_3 نقطهٔ B و محل تقاطع خطوط L_3 و L_4 نقطهٔ C باشند. حداقل و حداکثر تعداد خطوطی را کـه در فضا هرچهار خط فوق را قطع می‌نمایند تعیین کرده وادعای خود را ثابت کنید.

(راهنمایی): در مسألـه شماره ۱ می‌توانید از رابطهٔ زیر استفاده کنید:

$$\sin\alpha\sin(60^{\circ}-\alpha)\sin(60^{\circ}+\alpha)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha$$

(هر سؤال هفت نمره دارد)

Content

Roshd, Magazine of Mathematical Education, Vol IV No. 16, Winter 1988 Mathematics Section, 274 BLDG-No. 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave., Tehran - Iran.

A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.


رشد آموزش زبان
رشد آموزش زیست شناسی
رشد آموزش معارف اسلامی