رشد آموزش ریاضی

سال سوم ـ شماره ۴ ـ زمستان ۱۳۶۵ بها: ۱۰۰ ریال شماره مسلسل ۱۲

رشد آموزش ریاضی

سال سوم ـ شماره ۴ ـ زمستان ۱۳۶۵ شمارهٔ مسلسل ۱۲
نشریه گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
نشانی: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ وزارت آموزش و پرورش تلفن ۴ ـ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۵۰)
سردبیر: دکتر علیرضا مدقالچی
تولید: واحد مجلات رشد تخصصی
صفحه‌آرا: خالد قهرمانی ـ محمد پریسای

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و آشنایی آنان با شیوه‌های صحیح تدریس ریاضی منتشر می‌شود.

فهرست

پیشگفتار	سردبیر	۳
ریاضیات چیست	دکتر علیرضا مدقالچی	۵
مفهوم مدلهای زیست ریاضی	دکتر ملک منصور شریف	۸
مفاهیمی از حلقه‌ها و ایده‌آل‌ها ۱	دکتر حسین ذاکری	۱۳
دنباله‌ها (رشته‌ها)	جواد لآلی	۱۷
اثبات شرکتپذیری عمل تفاضل متقارن درمجموعه‌ها	مسعود یوسف‌نیا	۲۵
رسم نمودار توابع مرکب gof با استفاده از نمودار f و g	ابراهیم دارایی	۲۶
حل مسألهٔ مسابقه شماره ۹		۳۲
مسائل	جواد لآلی	۳۳
حل مسائل شماره ۱۰		۳۶
نامه و نظر		۴۵
قرینه‌سازی جبری به‌عنوان یك مسئلهٔ جهانی	دکتر ارسلان شادمان	۴۹
گزارشی از بیست و هفتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی	آزاد حسام‌الدینی	۵۴
اخبار گروه		۵۶
یادی از یك همکار		۵۷
رشد تفکر ریاضی	دکتر محمدحسن بیژن‌زاده	۵۸
مروری کوتاه بر تاریخچه مسئلهٔ ۴ رنگ	سعید ذاکری	۶۳

بسم الله الرحمن الرحیم

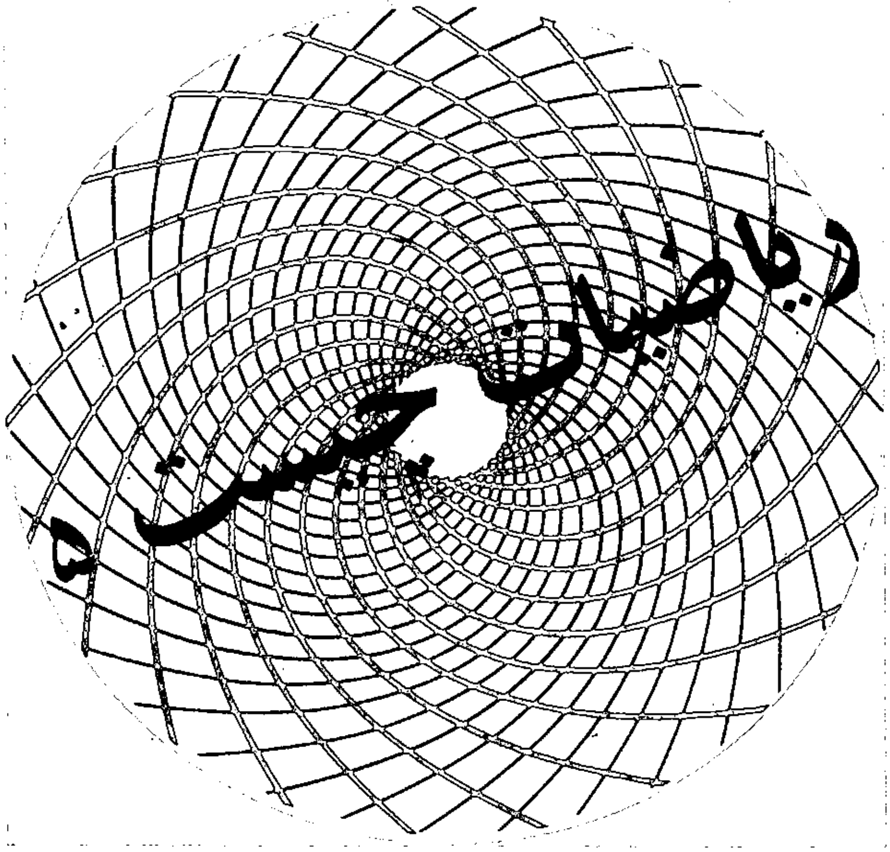
پیشگفتار

خدای را سپاس می‌گوئیم که با انتشار این شماره به پایان سومین سال نشریه رشد آموزش ریاضی می‌رسیم در این مقام مناسب به نظر می‌رسد که به بررسی وضع مجله بپردازیم. نخست به‌طور اجمال به اهداف اولیه مجله اشاره کرده وسپس با تطبیق مجله با این اهداف، وضعیت وخط مشی آتیه را تشریح می‌کنیم. قبل از هرچیز ذکر یك نکته را ضروری می‌دانیم وآن اینکه پیشرفت دانش ریاضی و تغییر وتحول در برنامه‌ها و شیوه‌های آموزش ریاضی درجهان، تکامل اهداف را نیز ایجاب می‌کند. به‌عبارت دیگر، باید درچهارچوب اهداف کلی مذکور، ازکاروان ترقی عقب نمانده و همواره خود را با آخرین پیشرفتها آشنا سازیم.

*

اهداف کلی مجله عبارتند از: دانش افزایی، آشنایی با روشهای تدریس، معرفی کتب و نشریات، نگاهی به تاریخ ریاضیات و... که در نخستین شماره این نشریه توسط ریاست محترم سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی برادر دکتر حداد عادل مطرح شده است. اولین هدف، دانش افزایی دبیران و دانش‌آموزان ذکر شده است. در این رهگذر مجله باید چون جویباری روان مقالات و مفاهیم اصلی و معتبر را به خوانندگان برساند و آنان را با دریای بیکران دانش ریاضی مرتبط ساخته ومشوق آنان باشد تا در حد امکان با آخرین پیشرفتهای این دانش آشنا گردند. در این رابطه مقالات مختلفی نظیر درسهایی از هندسه ونیز مقالاتی در زمینه‌های دیگر مانند جبر و آنالیز منتشر می‌شود که بنا به اظهار نظر خوانندگان برای رشد بینش ریاضی دانش‌آموزان وخوانندگان بسیار مفید بوده است. علاوه بر این، به‌منظور تقویت فکری دانش‌آموزان، درهر

بقیه در صفحه ۴۸



دکتر علیرضا مدقالچی

درشمارهٔ قبل قول داده بودیم که دراین مقاله درباب موارد استعمال نظریه اعداد در ارتباطات و ماشین‌های محاسب سخن بگوئیم. متأسفانه این‌بحث به‌اندازه زیادی پیشرفته است و خارج‌از اهداف علمی و آموزشی مجله قرار دارد به‌ویژه اینکه تحلیل و تبیین این پدیده‌ها و مدل سازی‌آنها وبالاخره تقلیل اینها به‌فرمول‌های ریاضی آن قسمت از دانش ریاضی را طلب می‌کند که حداقل می‌توان گفت که از حوزهٔ وقلمرو ریاضیات دبیرستانی خارج است. لهذا، درمقاله حاضر بر آن شدیم که به‌این‌مجموعه، یعنی دانش‌ریاضی واینکه ریاضیات چیست ازگوشهٔ دیگری نگریسته وآن نگرشی عمیق ولی مقدماتی به مسائل ریاضی و کندوکاوی در روش حل آنهاست. مسلماً دراین پژوهش چند مسأله مطرح می‌شود.

۱) اصولاً یک مسأله ریاضی چگونه شکل می‌گیرد. آیا این شکل‌گیری صرفاً ملهم ازپدیده‌های فیزیکی ویاطبیعی ویا اجتماعی است؟ ویااینکه طرح مسأله در ذهن انسان ایجاد می‌شود و یا تبلور پدیده‌های فوق‌الذکر در ذهن انسانی است.

۲) از نقطه‌نظر تاریخی چگونه یک مسأله ریاضی شکل گرفته است؟

۳) ماهیت یک‌مسأله ریاضی‌چیست و چگونه می‌توان آنرا حل کرد؟

۴) جهت‌گیری کلی درمباحث آتیه ریاضی چگونه خواهد بود؟

بدون شک پاسخ دقیق و کامل برای همه سؤالات فوق‌الذکر نه‌تنها از عهده این مقاله بلکه از عهده نگارنده‌هم خارج است و میزان اطلاعات و معلومات او نمی‌تواند به سوالاتی با این وسعت پاسخ دهد. امید است که دراین موارد تحقیقات بیشتری انجام‌گرفته وخوانندگان مجلهٔ رشد نیز از این تحقیقات بهره‌مند گردد. اما، به‌طور کلی می‌توان گفت که با توجه به گستردگی دانش‌ریاضی‌ازیک‌سو،و وسعت‌سؤالات‌فوق‌ازسوی‌دیگر امکان‌پاسخ مشخص‌سؤالات فوق از بین می‌رود، وتنها تحقیق‌کلی دراین‌زمینه می‌تواند راهگشای زمینه‌های‌بعدی تحقیقات باشد. به‌طور کلی درضمن‌مقالات مختلف‌خاطرنشان‌ساخته‌ایم که روند کلی اختراعات و ابداعات ریاضی طوری است که هیچ نظریه‌ای درآن نباید به‌تناقض منجر شود. زمینه بیشتر سؤال ۲ مربوط به‌تاریخ موضوعی است.

دراین‌مقاله بحث ما درمورد سؤال سوم است، یعنی اینکه یک مسأله ریاضی چیست و چگونه می‌توان آنرا حل کرد. قسمت اعظم این‌مقاله ازکتاب پولیا [۱] استفاده‌شده است (جورج‌پولیا ریاضیدان برجستهٔ معاصردرتاریخ۱۸۸۷درمجارستان چشم به‌جهان‌گشود. درسال۱۹۱۲ میلادی دکتری‌خودرا در رشته‌ریاضی در بوداپست اخذ نمود. از سال ۱۹۱۴ تا سال ۱۹۴۰ میلادی در انستیتوی تکنولوژی زوریخ به تدریس پرداخت، و از سال ۱۹۴۲ تا سال۱۹۵۳ میلادی در دانشگاه استانفورد

تدریس نمود. او عضو آکادمی ملی علوم امریکا وعضو وابسته آکادمی علوم پاریس بود. درسال ۱۹۶۳ میلادی جایزه‌ای راکه برای کارهای برجسته در ریاضیات اعطاء می‌شود دریافت کرد. او متجاوز از صد مقاله تحقیقی در زمینه‌های مختلف و وسیع و درموضوعات بسیارعمیق دارد، وتخصص خاصی در زمینهٔ طبیعت ابداعات ریاضی داشت که دراین زمینه کتاب HOW TO SOLVE IT را درسال ۱۹۴۵ میلادی به رشتهٔ تحریر درآورد که تا به‌حال به چهارده زبان ترجمه شده است. بطوری که اشاره کردیم دراین مقاله این کتاب مورد استفاده زیاد واقع شده است [۲].

او ریاضیدانی برجسته، معلمی فوق‌العاده و با تشخیص عالی بود [۴] و در ۷ سپتامبر ۱۹۸۵ میلادی درگذشت)

او می‌گوید: **یک ایده بزرگ و یک کشف بزرگ همواره یک مسأله بزرگ را حل می‌کند.**

یک مسأله ریاضی ممکن است ساده، متوسط ویامشکل باشد و درهرحال ممکن است مبارزطلب گردد. مثلاً، مسائلی که در ضمن دروس به‌عنوان تمرین به‌عهده محصلین گذاشته می‌شود و عموماً طوری هستند که از مسائل ساده شروع شده و به مسائل متوسط و بالاخره مشکل ختم می‌گردند. به‌هرحال وقتی می‌توان درمورد ماهیت یک مسأله اظهارنظر کرد که به‌اندازهٔ کافی تحقیق در آن انجام گیرد.

اگر محصلی بتواند خود مسائل ریاضی را حل کند حس‌اعتماد به‌نفس او تقویت گشته و بالنتیجه، درسنین نوجوانی وجوانی حلاوت و شیرینی کارهای فکری و تفکرات عمقی و منطقی وبینش منطقی‌را درمی‌یابد، که بدون شک تداوم این روش شخصیت علمی او را تشکیل و تقویت می‌کند.

بدون شک روش یک معلم ریاضی نقش عمده‌ای در پرورش حس اعتماد به‌نفس ایجاد می‌کند. ما عموماً دچار این مشکل هستیم که موقعی که محصلین ما مواجه با یک راه جالب و ابتکاری یک مسأله ریاضی می‌شوند، بلافاصله با تعجب می‌پرسند این راه‌حل ازکجا آمده است. آیا این راه‌حل از خود معلم است. برای پاسخگویی به‌این سؤال‌عمده وجدی نقش معلم بسیار اساسی است. اگر او اوقات خود را با حل تعداد زیادی مسائل ساده و شبیه به‌هم و عملیات مشابه صرف کند علاقه محصلین را نابود خواهد کرد و شکوفایی استعداد او را برای ایجاد ایده‌های جدید و گسترش و توسیع‌مفاهیم ازبین می‌برد. اما اگرمعلم مسائلی متناسب با استعداد آنها طرح و به‌جای حل کامل مسأله ــ با سؤالات مختلف ــ مرحله به مرحله در رسیدن به راه‌حل مسألهٔ کمک نماید که درنهایت مسأله حل گردد ممکن است به این روش در او طرزتفکر مستقل ایجاد نماید.

مسلماً در هر برنامه‌ریزی آموزشی هریک از دروس هدف مشخصی از نوع تلقی بالا را دنبال می‌کند و اگر مجموعه هر برنامه ریاضی بتواند بینش منطقی، حس اعتمادبنفس، و تفکر مستقل و قدرت تصمیم گیری درمحصل ایجاد نماید و درنهایت تکنیکهایی در ذهن او متبلور سازد، یک برنامه کاملی خواهد بود. گرچه بعضی از محصلین ما درابتدا دارای هوش و ذکاوت لازم برای درک مفاهیم ریاضی هستند، اما متأسفانه عدم برخورد صحیح حلاوت و زیبایی دانش ریاضی را در ذهن آنها ازبین می‌برد. مشکل عمده‌ای که ما گرفتار آن هستیم اینست که اکثر محصلین ما ویا شاید شیوهٔ آموزش ما بطریقی است که اینها دانش ریاضی راهم یک دانش فراگیری می‌پندارند و نه یک دانش تمتعی، و لهذا دریافت‌های ذهنی آنها به مرور زمان به فراموشی سپرده می‌شود. اما اگراحساس زیبایی وجاذبیت و کارایی دانش ریاضی درآنها تقویت گردد، دریافتهای ذهنی آنها بسادگی فراموش نمی‌شود و این احساس اولین عامل محرک برای تفکرات بعدی است به‌طوری‌که پولیا می‌گوید [۱] ریاضیات برای او به‌صورت یک عادت، یک حرفه، یک وسیله و بالاخره، یک آرمان بزرگ می‌شود با این ایده که او می‌خواهد یک ریاضیدان شود، یک ریاضیدان بزرگ با اندیشه‌های متحول و متحرک و محرک.

پولیا در خاطرات خود می‌گوید:

من هنگام محصلی، مشتاق فراگیری‌ریاضی و فیزیک بودم به‌کلیه دروس توجه کرده و کتابها را به‌دقت مطالعه می‌نمودم ولی یک سؤال همواره در ذهن من باقی بود که همواره مرا آزاد می‌داد وآن این بود که‌چگونه ممکن است راه‌حل یک مسأله‌را ابداع نمود؟ گرچه می‌توانستم مسائل‌حل شده را بفهمم و می‌دانستم که یک تجربه و راه‌حل برای یک مسأله حل شده کارساز است ولی‌خوب چگونه می‌توان این‌تجربه را کشف نمود. چگونه می‌توانم یک مسأله را خودم‌حل کنم [۱].

بطوری که اشاره گردید او یکی‌از ریاضیدانان برجسته و معلمی ممتاز است و می‌گوید امیدوارم که حالا بتوانم به‌این سؤالات محصلین خود پاسخ دهم. اوکتاب «HOW TO SOLVE IT» را به‌این‌منظور نوشته است.

خودما شاهد این مشکل‌درآموزش ریاضی هستیم. مثلاً موقعی که معلم برای یک مساله هندسه از یک نقطه به یک نقطه دیگر وصل می‌کند و به این روش مسأله حل می‌شود بلافاصله محصلین می‌پرسند از کجا فهمیدید که باید این کار را

انجام داد. یا مثلاً موقعی که می‌خواهیم ثابت کنیم $N\times N$ شمارا است بـرای این منظور تابع f از $N\times N$ به N را با ضابطهٔ

$$f(m,n)=\frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2)+m$$

تعریف می‌کنیم که مبتنی بر شمارش قطری اعـضاء $N\times N$ است [۳]. بـلافاصلـه می‌پرسند چگونه این‌فرمول را ساخته‌اند. بدون شك تجـربیات همهٔ معلمین ریاضی پراست از این نوع پیشامـدهایی که در کلاس‌های درس اتفاق می‌افتد.

حال بعداز این مقدمه نسبتاً طولانی به مراحل مختلف درك یـك مسأله ریاضی می‌پردازیم این مراحل با اندك تغییراتـی از کتاب پولیا اقتباس شده است[۱].

الف) باید مسأله را فهمید:

مجهـول یـا مجهـولات چیست؟ معلومات کدام است؟ شرایط چیست؟ آیا می‌توان شرایط را برقـرار کـرد؟ آیـا شرایط برای تعیین مجهول یـا مجهولات کافی است؟ یا ناکافی است؟ یازیادی است یا متناقض است؟ درصورت امکان‌دیاگرام مسألـه را رسم کنید. نمادهـای مناسبی انتخاب کنید. قسمتهای مختلف شرایط را جداکنید. آیا می‌توانید آنهارا بنویسید؟

ب: باطرح‌یك نقشه‌ارتباط‌بین معلوم (معلومات) و یـا مجهول (مجهولات) را بیابید شما ممکن است مجبور شوید کـه مسائل کمکی را ملاحظه کنید بـه‌طـوری دربـرهان بعضی از قضایا نخست یك لم کمکی ثابت می‌کنند اگر ارتباط فـوری بین مسألـه کمکـی و مسألـه اصلی پیدا نشود باید طرحی برای حل مسأله ریخت آیا این مسأله را قبلاً دیده‌اید؟ آیا همان مسأله را با تغییر جـزئی دیده‌اید؟ آیـا مسأله‌ای مربوط به‌این مسأله می‌دانید؟ آیا قضیه‌ای می‌شناسید کـه برای حل مسأله مفید باشد؟ بـا نگـرش بـه مجهول یـا مجهولات باید کوشش نمود که درمورد مسأله‌ای آشنا بامجهولات مشابه فکر کرد.

فرض کنیم مسأله‌ای در ارتباط با مسأله شما وجود داردکـه قبلاً حل شده است آیا می‌توان آنرا به‌کار برد؟ آیـا می‌توان‌نتایج آنرا به‌کاربرد؟ آیا می‌توان روشهای آنـرا به‌کار برد؟ آیا می‌تـوان بعضی اجـزاء کمکی معرفی کـرد تا آن روش را مفید سازد؟ آیا می‌توانید مسأله را به‌طریق دیگری بیان‌کنید؟ به تعریفات برگردید.

اگر امکان حل مسأله اصلی وجـود ندارد باید سعی کنیم که بعضی از مسائل در ارتباط بامسأله اصلی را حل کنیم. آیا می‌توان مسأله مربوط قابل‌قبول را تصور کرد؟ یك مسأله‌کلی ویا خاص ویا مشابه؟ آیا می‌توان قسمتی از مسأله را حل کرد؟ با مفروض کردن قسمتی ازشرایط وحذف قسمت دیگر چقدر می‌تـوان به مجهولات نزدیك شد آیا می‌توان از معلومات چیز مفیدی به‌دست‌آورد؟ آیا معلومات دیگری برای مشخص کردن مجهول (مجهولات) می‌دانید؟ به‌طوری‌که معلوم ومجهول جدید نزدیك به‌هم‌باشند. آیا همهٔ معلومات به‌کار رفته‌اند؟ آیا همهٔ شرایط به‌کار رفته‌اند؟

ج: انجام طرح‌فوق. با انجام نقشه حل (راه‌حل) هـر مـرحله را آزمـایش می‌کنیم. آیا واضح است که همهٔ مراحل راست هستند؟ آیا می‌توان ثابت کرد که چنین است؟

د: برگشت به‌عقب. آزمایش راه‌حل مسأله، آیا می‌تـوان نتیجه را آزمـایش کرد؟ آیا می‌توان بحث مسأله را آزمایش کرد؟ آیا می‌تـوان نتیجه را کاملاً درك نمود؟ آیا می‌توان این نتیجه و روش را درمورد یك مسأله دیگر به‌کار برد؟

حال به‌کمك امثله‌ساده سعی‌می‌کنیم که مراحل فوق را تبیین کنیم.

۱) مطلوب است محاسبهٔ قطرمکعب مستطیلی که طول اضلاع آن معلوم است.

مجهول: طول‌قطر مکعب مسطیل

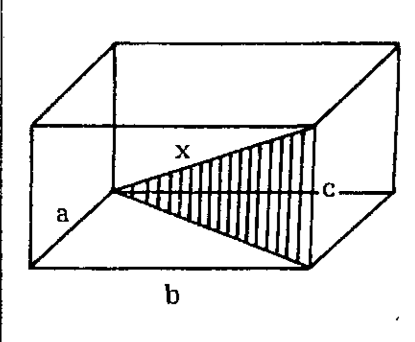
معلومات: طول، عرض و ارتفاع

مجهول را با x و معلومـات را با a و b و c نمایش می‌دهیم.

شرایط‌لازم: x طول مکعب‌مستطیلی با اضلاع a و b و c است. آیـا شرایط برای تعیین مجهول کافی است.

حال به‌منظور طرح مسأله یك مسأله درایـن ارتباط را مـورد بررسی قـرار می‌دهیم باملاحظهٔ مجهول کوشش می‌کنیم که یك مجهول مـربوط به مسأله را پیدا کنیم. در صورت عدم موفقیت، با تغییر و تبدیل‌مسأله را به‌صورت دیگری بیان‌کنیم و نیز کوشش می‌کنیم که مسأله جدید را حل کنیم:

درصورتی‌که مسأله حل‌نشد دوباره برمی‌گردیـم بـه‌صورت مسأله، مجهول چیست، مجهول محاسبهٔ طول یك‌پاره‌خط است. آیا مسأله مشابهی دیده‌اید آیا هیچ مثلث یامثلث‌قائم‌الزاویه‌ای در روی شکل وجود دارد.



(شکل ۱)

خوب، راهنمایی اخیر برای تهییج حس کنجکاوی کافی به‌نظر می‌رسد. حال بعداز این راهنمایی اگر امکان محاسبه طول‌قطر نیست درعوض این امکان وجود داردکه طول‌وتر یك مثلث قائم‌الزاویه‌را محاسبه نمود.

حال با جمعبندی نقاط فوق‌الذکر خواهیم داشت (شکل ۱)

$$x^2 = y^2 + c^2$$
$$y^2 = a^2 + b^2$$

و لهذا،

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

یعنی،

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

و بالاخره، برای آزمون مراحل استدلال باید به‌دقت‌تشخیص دادکه مثلث بااضلاع x و y و c انتخاب درستی بوده است. دراین قسمت محصل بایستی به‌دقت و با نهایت درستی بتواند خود را متقاعد کند که دقیقاً این راه را فهمیده است. البته پاسخگویی به سؤال آخر فوق‌العاده مشکل است.

بالاخره، جواب مسأله پیدا شد.

حال برای آزمون راه‌حل مسأله می‌توان سؤالاتی را مطرح کرد:

۱. آیاهمهٔ معلومات به‌کار رفته‌اند؟

۲. آیا عبارت x نسبت‌به a و b و c متقارن است؟

۳. اگر جای a و b و c عوض شود آیا مقدار آن عوض می‌شود؟

۴. اگر c نزول کند و بالاخره صفر گردد و آیا فرمول اخیر دقیقاً همان فرمول محاسبه قطر یك مستطیل است.

۵. اگرتمام اضلاع مکعب مستطیل در عددی ضرب شود آنگاه قطرهم درآن عددضرب می‌شود آیا این عمل با فرمول ما سازگاراست.

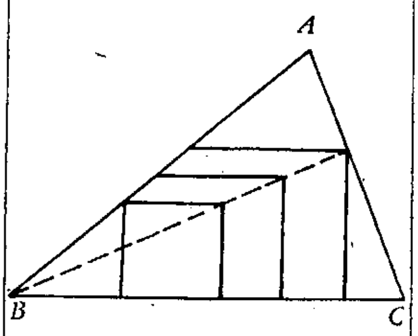
این سؤالات دارای آثار خوب بسیاری است. اولاً یك محصل باهوش وقت خودرا باسؤالات زیاد تلف‌نمی‌کند زیرا او به‌خوبی می‌داند که او جواب خودرا به‌کمك اعمال‌منطقی استنتاج نموده است. و لهذا جواب او درست است ولی حالا او بطور کامل متقاعد شده است که جواب او کاملاً درست است. زیرا، اطمینان او به‌طریق دیگری یعنی شهود تجربی، تأیید شده است. حال این فرمول را به‌خوبی می‌توان به‌خاطرسپرد ومعلومات محصل زیادتر شده است. بالاخره این نوع سؤالات را می‌توان به‌مسائل مشابه تعمیم داد. بعداز تجارب مشابه در مسائل مختلف، یك محصل می‌تواند ایده‌کلی را دریابد. همهٔ داده‌ها را به‌کار می‌برد، اگر بتوان توجه او را به‌مشابه نقاط فوق‌الذکر جلب کرد. قدرت او برای حل مسائل تقویت می‌گردد.

بالاخره آزمون مجدد این برهان به‌صورت‌مرحله‌ای‌کارمشکل‌ومهمی‌می‌باشد مثلاً آیا می‌توان ثابت‌کردکه x و y و c اضلاع یك مثلث قائم‌الزاویه هستند.

آیا محصل می‌تواند نتیجه و روش این مسأله را برای مسائل دیگر به‌کار برد.

حال دوباره به‌عقب برمی‌گردیم، گفتیم که معلم می‌تواند با سؤالات متنوع ذهن محصل را به‌حل مسأله متقارب‌سازد. دراینجا می‌توان نوع سؤالات را بررسی کردمثلاً به‌جای‌اینکه بپرسیم آیا مسأله‌ای درارتباط بااین مسأله وجود داردمی‌توان پرسید که آیا می‌توان ازقضیه فیثاغورث استفاده کرد.

حال برمی‌گردیم به‌یك مسأله ساختاری ساده دیگر،فرض می‌کنیم مثلث ABC مفروض است مربعی دراین مثلث طوری محاط کنید که دو رأس آن درقاعده و دو رأس دیگر آن‌روی دوضلع تغیر کند. با راهنمائیهای لازم محصل می‌تواند شکل زیر را رسم کند (شکل۲)



(شکل ۲)

ولی دراین شکل سه رأس مربع دارای شرائط مسأله است شرط چهارم یعنی‌اینکه رأس چهارم روی یك ضلع مربع باشد برقرار نیست. حال با رسم مربعهای مختلف می‌توان توجه محصل را به حل مسأله نزدیك‌کرد. اگر او بتواند مکان رأس چهارم راحدس بزند و دریابد که مکان آن یك خط مستقیم است مسأله حل شده است.

منابع

1) Polya, George, How to slove it, Anchor Books edition, 1957.
2) Polya, George, Mathematical Metheds in Science, New-Mathematical Library, 1977
3) Zena, P. W. & Johnson, R. L., Elements of Set Theory, Allyn & Bacon, 1972.
4) News lettrs of London Math. Soc. No 122, 1985.

مسائل روزمره در زمینه‌های علمی، اجتماعی، اقتصادی... را می‌توان به کمک مدل‌های ریاضی بررسی وحل نمود. در این مقاله، پس از ارائه و بررسی مدل ریاضی، مسئلهٔ نمونه‌سازی در امور زیستی مورد بحث قرارگرفته است. ساده‌ترین مسائل ازاین دست، ارائـه مدل‌های ریـاضی رشد جمعیت می‌باشدکه این‌کار را می‌توان به‌کمک مدل‌های رشد غائی ورشد لجستیکی مشخص نمود. هریک ازاین دومدل می‌تواند جنبهٔ معین وقطعی ویا احتمالی وشرطی داشته باشدکه دراین مقاله صرفاً به جنبه قطعی‌آن توجه شده‌است.

مفهوم مدلهای زیست ریاضی

دکترملک منصور شریف استادیار دانشگاه الزهرا

۱. مقدمه

تا اوائل سال ۱۹۶۰ ریاضیات عملی عبارت بـود از کاربرد ریاضیات درحل‌مسائل مکانیك. درحال حاضرریاضیات عملی، و یا ریاضیات کار بردی، عبارتست از مـوارد استفاده ریاضیات در رشته‌هـای مختلف از قبیـل اقتصاد، بیولوژی، جغرافیا، پزشکی وغیره. فصل مشترك تمام این کاربردها مبحث مدل‌های ریاضی می باشند.

به طور اختصار مدل ریاضی یعنی ساختن یـك الگوی ریاضی‌به منظور توصیف مبحث خاصی که تحت مطالعه‌می باشد، یا به عبارت دیگر مدل ریاضی پروسه‌ای است که یـك مسئله محیط زیست را تبدیل به مسئله ریاضی می‌نماید.[۱]

۲. مفهوم نمونه‌سازی وفرایندآن.

یك مدل، چهارچوبی ازیك پدیده می‌باشد که به ما در مورد درك وتفکر درباره جزئی ازیك واقعیت کمك می‌نماید. یك مدل بایستی تحت تجزیه وتحلیل منطقی قرار گیرد. ایـن تجزیه وتحلیل منطقی، جوابگوی سئوالات ما درمـورد مدل و دربارهٔ واقعیت می‌باشد.

به منظور حل یك مسئله، شخص بایستی تمـام جنبه های مربوط ازقبیل متغیرها وپارامترهای داخلی و یا اثرات متقابل آن‌ها را با فاکتورها وعوامل خارجی مد نظرقرار دهد. بعضی ازنتایج‌حاصله ازاین مراحل جنبهٔ کیفی دارد وبعضی‌جنبه کمی.

نمونه سازی شامل بـررسی دقیقی از اجزاء مقـداری می‌باشد زیرا بخش‌های ازاین اجزاء که قابلیت اندازه گیری دارند بایستی مشخص شوند. مقدار تأثیر فرایند تحت مطالعه بایستی ذکر شده ودرمدل نیز گنجانده شود[۲].

مسئلهٔ تحـت مطالعـه مـی‌تواند جنبه معین و قطعـی (*Deterministic*) داشته باشد و یا جنبه احتمالـی و شرطی (*Probabilistic*) [۷، ۳، ۲].

درحالت‌کلی، یك مسئله قطعی می‌تواند حالت توصیفی داشته‌باشد ودراین‌چهارچوب بااستفاده ازمعادلات ونامساوی‌ها

می‌توان متغیرهای مسئلهٔ را بههم ربط داد. یك چنین معادلات و نامساوی‌های به‌دست آمده می‌تواند به‌صورت جبری باشد و یا به صورت دیفرانسیل، تفاضل و انتگرال. نتیجتاً برای حالت توصیفی یك یا چندین حل می‌تواند میسر باشد[۲].

توصیف کیفی یك مسئله نه فقط بایستی شامل تعریف هدف باشد بلکه بایستی حاوی پروسه واقعی که به منظور برآورد هدف اتخاذ می‌گردد نیز باشد. در ضمن فاکتورهای کنترل پذیر وغیر قابل کنترل یك پروبه بایستی شناخته گردند.

برای تجزیه وتحلیل پروسه، بایستی داده‌ها واطلاعات را جمع‌آوری نمود. برای اینکه بنوان مسئله‌ای راحل نمود، ابتدا بایستی برروی نحوه تحقیق و بررسی، تصمیم گیری نمود وسپس براساس اطلاعات به‌دست‌آمده، فرضیات ساخته‌می‌شوند سرانجام این امر باعث پیدایش مدل است تا بتوان فرضیات ذکرشده را آزمایش نمود. آخرالامر مسئله را به توسط یك مدل مناسب بایستی تجزیه وتحلیل مقداری نمود [۲و۴]

درتجزیه وتحلیل نمونه‌سازی یك مسئله نکات زیادی را بایستی مورد نظر قرارداد که اولین نکته مهم تعیین هویت ویا شناخته شدن مسئله و درمرحلهٔ بعدی فرموله شدن آن می‌باشد. در پروسه فرموله کردن، بایستی متغیرهای مستقل و وابسته، تصادفی ویا قطعی را مشخص نمود وسپس کنترل‌پذیری ویاغیر قابل کنترل‌پذیری‌ویا غیرقابل‌کنترل بودن آن‌ها را موردتجزیه وتحلیل قرارداد.

یك مدل اولا بایستی باندازه کافی ساده باشد تا جمع‌آوری داده‌ها وتجزیه وتحلیل آن‌ها امکان‌پذیر باشد و درثانی جنبه عملی آن نیز حفظ گردد تا برای اجراء حل نیز مثمرثمر باشد وثالثاً، درصورت امکان، درطرح مدل‌ها باید دقت نمود که قابلیت پیش‌گوئی کردن رانیز دارا باشد.

با در نظر گرفتن اینکه روابط ریاضی بایستی با مفاهیم مسئله متناظر باشد لذا یك همریختی بین مدل ومسئله وجود دارد. نتیجتاً مدل، یك وسیله منطقی است برای مطالعه رفتار و رابطه اجزاء یك مسئله. نمونه‌سازی یعنی ساده‌کردن یك مسئله با استفاده ازحداقل تعداد متغیرهای اساسی.

یك مدل دو ایده اساسی را تلفیق مینماید، اول اندازه گیری متغیر ها و پارامترها و دوم رابطهٔ بین این متغیرها و پارامترها.

حال مسئله نمونه‌سازی را درمسائل زیستی موردبررسی قرار می‌دهیم. چون سیستم های موجودات زنده بسیار غامض وپیچیده می‌باشند. لذا نمی‌توان انتظار داشت که برای وضع ورفتار این دستگاهها یك توصیف کامل ریاضی فرموله نمود [۴و۵]. قبل ازارائه یك تجزیه وتحلیل ریاضی در این زمینه، بایستی غامض بودن سیستم زیستی را با ارائه «فرضیات ساده کننده» تعدیل داد. با استفاده ازاین فرضیات می‌توان سیستم واقعی بیولوژیکی را به‌وسیله یك دستگاه مدل تصوری تعویض نمود به‌طوریکه توصیف ریاضی برای آن امکان‌پذیر باشد برای اقدام وارائه یك تجزیه و تحلیل نظری * در مورد یك دستگاه بیولوژیکی مراحل ذکرشده درزیر مؤثر می‌باشند:

(الف)- هدف تجزیه وتحلیل نظری بایستی ارائه‌شود.

به‌طورمثال دربعضی موارد پیدا کردن یك معادله برای محاسبه یك کمیت مجهول از میان کمیت‌های دیگر مورد نظر می‌باشد درحالی‌که دربعضی مواقع آنچه مورد نظر می‌باشد پیداکردن یك‌رابطه صوری بین چندمتغیر است.

(ب) . انتخاب وتعیین یك مدل ساده شده مناسب برای دستگاه زیستی.

مجدداً تذکر داده میشودکه‌کاربرد ریاضیات دررابطه‌با این مدل است و نه دستگاه بیولوژیکی مورد مطالعه. معمولاً حذف یك فاکتور بیولوژیکی‌که اهمیت زیادی دارد از نظر زیست‌شناس‌ها ممکن است به سادگی قابل قبول نباشد ولی درغیراینصورت نیز تجزیه وتحلیل مدل ارائه شده ممکن‌است بی‌نهایت مشکل گردد. درضمن بایستی دقت نمودکه اگرمدلی بیش‌ازاندازه متعارف ساده شده‌ارائه شود ارتباط‌آن بادستگاه واقعی بیولوژیکی ازحقیقت بدورخواهد بود ویا نتیجه‌مطلوب ومورد نظر را نمی‌تواند ارائه نماید.

(ج)- تمام روابط ساده‌ای‌که مشخص‌کننده مدل نظری هستند باید ارائه شوند.

معمولاً هریك ازاین روابط به صورت یك معادله ساده ارائه ترکیب می گردد.

(د)- معادلات ساده مرحله بالا بایستی درصورت‌امکان‌با یکدیگر ترکیب گردند.

(ه)- تمام معادلات نهائی بایستی برای صحیح بودن موردآزمایش قرارگیرند.[۴].

۳. ساختمان یك مدل ریاضی- مدل‌های بیولوژی جمعیت

اگر فرایند نمونه‌سازی را باعبارت ساده‌ای در مورد تعداد افراد یك جامعه شروع کنیم، آنگاه مشاهده می‌شود که

* معادله گنجانده شده مابین داده‌های آزمایشی‌که توصیف کننده رابطه‌ای است‌که بین متغیرها مشاهده گردیده یك معادله تجربی یا آزمایشی خوانده می‌شود. معادله‌ای که از یك نظریه و یا یك فرضیه در مورد ماهیت یك دستگاه زیستی حاصل می‌گردد، یك معادله نظری نامیده می‌شود.

میزان ازدیاد یك جمعیت عبارتست از تفاضل بین میزان علاوه شدن به‌یك جامعه (بعلت تولد ومعاودت) ومیزان کم‌شدن از یك جامعه (بدلیل مرگ و مهاجرت). حال اگر N علامت تعداد افراد یك‌جامعه، dN/dt علامت‌میزان‌رشدجمعیت نسبت‌به‌زمان باشد* ودرصورتیکه‌علائم B ، I ، D و E بترتیب میزان‌تولد، معاودت، مرگ ومهاجرت افراد جامعه باشدآنگاه‌گزاره تغییر اندازه یك جمعیت را میتوان به‌صورت فرمول‌در آورد[۱۶].

$$\frac{dN}{dt}=B+I-D-E \qquad (۱)$$

ازمعادله(۱)می‌توان دومدل متفاوت‌برای رشدجمعیت به دست‌آوردکه بترتیب‌رشدنمائی‌جمعیت (EXPONENTIAL GROWTH) و رشد لجستیکی جمعیت (LOGISTIC GROWTH) خوانده میشوند.

الف- رشدنمائی.

درصورتیکه درمعادله (۱) فرضیه: «هیچ‌فردی از بیرون به جامعه وارد وخارج نمی‌شود» ارائه گردد آنگاه می‌توان نوشت $I=E=0$

در ادامهٔ تجزیه وتحلیل رشد جمعیت، باید دقت کنیم که دریك محدوده خاص زمانی، تعداد مطلق تولدومرگ در یك‌جامعه به‌تعداد افرادی‌که‌تشکیل جمعیت‌آن جامعه رامی‌دهند وابسته میباشد یعنی B و D با N متناسب می‌باشند یا به‌عبارت دیگر $B=bN$ و $D=dN$. ولی B و D میزان تولد ومرگ هستند و لذا اعداد ثابت b و d بترتیب بایستی میزان تولد و مرگ برای هرعضو یا فرد برحسب واحد زمان باشند.

$$\therefore \frac{dN}{dt}=bN-dN=(b-d)N=rN \ ، \ r=b-d \qquad (۲)$$

عدد ثابت r ؛ میزان ذاتی افزایش جمعیت خوانده میشود.

حال از $\frac{dN}{dt}=rN$ میتوان نتیجه‌گرفت‌که $\int\frac{dN}{N}=\int r\,dt$

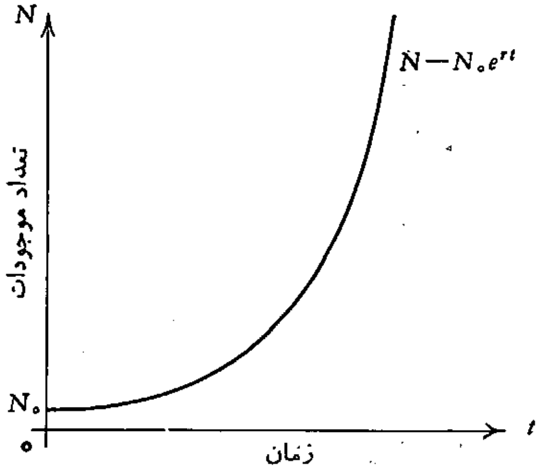
$$N=N_0e^{rt} \text{ ویا} \qquad (۳)$$

درمعادله (۳)، اندازه اولیه جمعیت باعلامت N_0 نمایش داده شده است. به‌عبارت دیگر N_0 تعداد افراد جامعه را درمرحله زمانی $t=0$ که مطالعه‌ویا تجربه‌به‌وسیله آزمایش‌کننده‌شروع می‌شود، مشخص می‌نماید.

معادله (۲) ویا معادله (۳) را معادله رشدنمائی جمعیت می‌نامند (بشکل (۱) مراجعه شود) [۳، ۶، ۸].

* درحقیقت زمان بایستی بصورت‌گسسته و مجزا نیز درنظرگرفته شود، در این حالت میزان رشد جمعیت نسبت به زمان، بطوریکه زمان $t_2>t_1$ است، با عبارت $\frac{N_{t_2}-N_{t_1}}{t_2-t_1}$ مشخص می‌گردد.

مجدداً تذکر داده میشودکه درصورتیکه زمان به‌صورت گسسته ومجزا درنظرگرفته شود، می‌توان با تجزیه و تحلیلی مشابه، دقیقاً معادله (۳) را به‌دست‌آورد(ازبحث دراین‌مقوله، به‌منظور حفظ تداوم مطالب دراینجا صرفنظر می‌گردد)



شکل (۱)

دقت شودکه اگر $b>d$ آنگاه اندازه جمعیت یا N مرتباً وبدون حد درحال افزایش می‌باشد وثانیاً این افزایش مرتباً وبطور سریعتر وسریعتر انجام می‌پذیرد.

ب- رشد لجستیکی.

افزایش بدون حد واندازه جمعیت عبث وپوچ به نظر می‌رسد، زیرا به‌طورمثال مواد غذائی کافی‌نخواهد بود ونمی تواند تکافوی‌چنین‌جمعیت نامتناهی را بدهد و یا ضیق مکان به افراد اجازه‌زیست ویا تولید مثل‌را نخواهد داد. اشکال‌اساسی را بایستی درانتخاب b و d که به‌صورت ثابت ومستقل از N انتخاب شده بودند جستجو نمود.

حال‌اثر افزایش جمعیت را برروی b و d موردبررسی قرار می‌دهیم. درمرحلهٔ نخست، با افزایش جمعیت، چون‌مواد غذائی وفضا ومکان به‌اندازهٔ‌کافی دردسترس‌افراد قرارنمی‌گیرد لذا احتمالاً میزان مرگ‌افزایش خواهد یافت وبالعکس‌میزان تولد نزول می‌نماید.

اگر وابستگی b و d را به N بصورت توابعی خطی برحسب N فرض‌کنیم(که معمولاساده‌ترین‌نوع‌توابع‌می‌باشند) آنگاه $b=b_0-cN$ و $d=d_0+kN$. دقت شودکه c و k بترتیب ضرایب میزان تولد ومیزان مرگ می‌باشند و b_0 و d_0 مقادیری هستندکه بازاء جمعیت خیلی‌کم حاصل می‌گردند.

$$\therefore \frac{dN}{dt}=\Big[(b_0-cN)-(d_0+kN)\Big]N \qquad (۴)$$

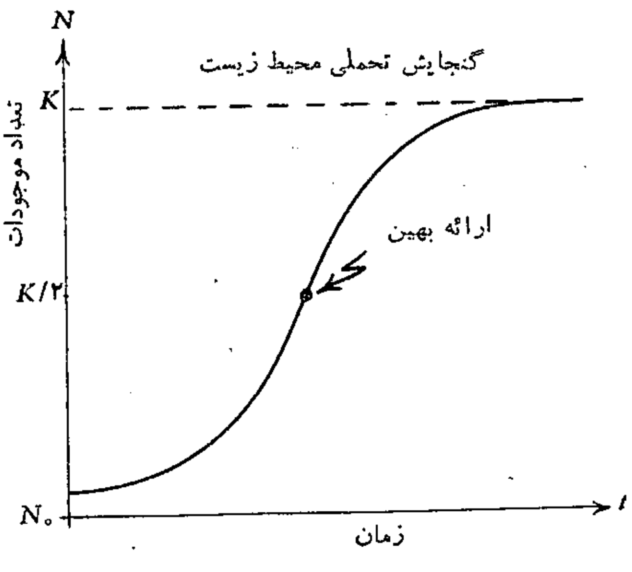
معادله (۴)، فرم ساده رشد و تنظیم لجستیکی جمعیت می‌باشد.

درصورتی که $b=d$، اندازه جمعیت به‌صورت پایدار درمی آید یعنی جمعیت موقعی پایدار و ثابت می‌باشد که $b_0-cN=d_0+KN$. نتیجتاً، بازاء $N=\frac{b_0-d_0}{c+k}$ تعداد جمعیت پایدار می‌باشد و این مقدار خاص N را با علامت K نمایش می‌دهند. مقدار $N=K$ را معمولاً «گنجایش تحملی محیط زیست» خوانند.

حال باجایگذاری مقادیر $K=\frac{b_0-d_0}{c+k}$ و $r=b_0-d_0$ در معادله (۴)، فرم آشنای معادله لجستیکی جمعیت بدست می‌آید (۶):

$$\frac{dN}{dt}=rN\left(\frac{K-N}{K}\right) \qquad (۵)$$

دقت شودکه درصورتیکه $N=K$ ، $\frac{dN}{dt}=0$ و لذا میزان رشد برابر صفر میباشد، نتیجتاً مقدار N نمی‌تواند از K بیشتر گردد. به عبارت دیگر، جمعیتی که به‌طور غائی رشد می‌نماید به‌حد K می‌رسد یعنی باافزایش N، مقدار $\frac{dN}{dt}$ کاهش پیدا می‌کند و بالعکس زمانی که مقدار N نزدیك صفرمی‌باشد (جامعه شروع به‌زیست درمحیط خودمی‌نماید)، آنگاه مقدار $\frac{K-N}{N}$ تقریباً برابر ۱ می‌باشد ولذا $\frac{dN}{dt}\approx rN$ یعنی رشد جمعیت تقریباً حالت‌نمائی را دارد (رجوع شود به‌شکل(۲))



شکل (۲)

درصورتیکه تعداد جمعیت از مقدار گنجایشی تحملی محیط زیست بیشتر باشد یعنی $N>K$، آنگاه مقدار ضریب زاویه یا dN/dt منفی است ولذا میزان رشد منفی بوده و N ازطرف بالا به‌سمت K میل خواهد نمود. به عبارت دیگر، تعداد افراد جمعیت به مقدار حدی K که «سطح تعادل» میباشد نزدیك خواهد شد (به‌شکل (۳) مراجعه‌شود).

برای حل معادله (۵)، کافیست ابتدا متغیرها را مجزا نمائیم وسپس با استفاده ازروش کسرهای جزئی انتگرال گیری کنیم یعنی $\frac{NdN}{N(K-N)}=rdt$ و یا $\int\frac{KdN}{N(K-N)}=rt+C$

ولی $\frac{K}{N(K-N)}=\frac{A}{N}+\frac{B}{K-N}$ ویا $K=A(K-N)+BN$ حال اگر $N=0$، آنگاه $K=AK$ ولذا $A=1$ ودرصورتیکه $N=K$ آنگاه $K=BK$ و لذا $B=1$

$$\therefore \int\frac{KdN}{N(K-N)}=\int\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{K-N}\right)dN$$

$$=\ln N-\ln(K-N)=\ln\left(\frac{N}{K-N}\right)$$

بنابراین $\ln\left(\frac{N}{K-N}\right)=rt+C$ و یا $\frac{N}{K-N}=Ae^{rt}$

نتیجتاً $N=KAe^{rt}-NAe^{rt}$ و یا $N=\frac{KAe^{rt}}{1+Ae^{rt}}$ ،

برای محاسبه مقدار ثابت A ، مشاهده می‌شود که در زمان $t=0$ مقدار $N=N_0$ ولذا $A=\frac{N_0}{K-N_0}$.

لذا

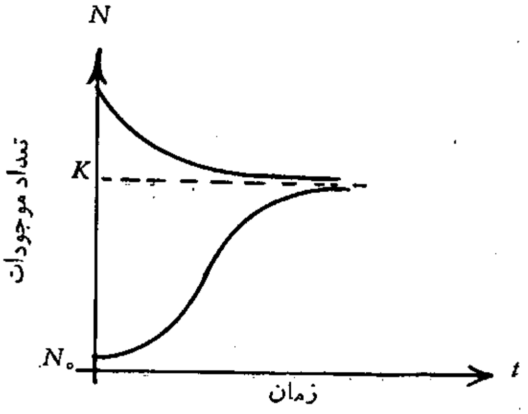
$$N=\frac{K\left(\frac{N_0}{K-N_0}\right)e^{rt}}{1+\left(\frac{N_0}{K-N_0}\right)e^{rt}}=\frac{KN_0e^{rt}}{(K-N_0)+N_0e^{rt}}$$

$$=\frac{K}{\frac{K-N_0}{N_0}e^{-rt}+1} \qquad (۶)$$

معادله (۶) را می‌توان به‌صورت زیرنوشت (۳):

$$N=\frac{K}{1+Le^{-rt}}$$

به‌طوریکه عدد ثابت L برابراست با $L=\frac{K-N_0}{N_0}$



شکل (۳)

برای پیدا کردن نقطه‌عطف منحنی S شکل رشد لجستیکی کافی است ابتدا $\frac{d^2N}{dt^2}$ را به دست‌آورده و سپس مساوی صفر قرار داده شود.

حال چون $\frac{dN}{dt}=rN\left(\frac{K-N}{K}\right)=rN\left(1-\frac{N}{K}\right)$

پس $\frac{d^2N}{dt^2}=r\frac{dN}{dt}\left(1-\frac{1}{K}N\right)+rN\left(-\frac{1}{K}\frac{dN}{dt}\right)=0$

و یا $\frac{dN}{dt}-\frac{1}{K}N\frac{dN}{dt}=\frac{1}{K}N\frac{dN}{dt}$

لذا نقطه عطف در $N=K/2$ می باشد. نقطه $N=K/2$ را نقطه «ارائه بهین» (*Optimal yield*) نام‌گذاری نموده‌اند [۶]. (به‌شکل (۲) مراجعه شود)

علت این نام‌گذاری بدین‌جهت بوده است که در نقطه مذکور، میزان‌رشد درتحت شرایط‌محیط مورد مطالعه‌ماکزیمم است. برای درک این‌مطلب‌کافی است دقت‌کنیم‌که در نقطه $N=K$ ، تعداد افراد جامعه برابر ماکزیمم است یعنی نقطه $N=K$ نقطه اشباع می‌باشد ولذا رشد جمعیت در این نقطه مساوی صفر است و جامعه قادر به «ارائه» ویا «عرضه» رشد نمی‌باشند. حال اگر تعدادی از افراد جامعه مذکور به محل دیگری انتقال داده شدند، اندازه جمعیت نزول پیدا خواهد نمود. نتیجتاً درنقطه عطف یعنی $N=K/2$ که درنیم‌راه نقطه اشباع واقع‌شده، میزان ارائه یا عرضه رشد جمعیت ماکزیمم است. لازم به‌یادآوری‌است که نقطه $N=K/2$ را می‌توان ازرابطه $\frac{d}{dN}\left(\frac{dN}{dt}\right)=0$ نیز به‌دست‌آورد زیرا،

$$\frac{d}{dN}\left(\frac{dN}{dt}\right)=r\frac{d}{dN}\left(N\left(1-\frac{N}{K}\right)\right)=r\left(1-\frac{2N}{K}\right)$$

منابع

1. Burghes, D., Huntley, I., and Mc Donald, J. Applying Mathematics, A Course in Mathematical Modelling John Wiley & Sons, 1982
2. Saaty, T. L. and Alexander, J. M, Thinking With Models. Mathematical Models in the Physical, Biological and Social Sciences. Pergamon Press, 1981
3. Pielou, E. C. Mathematical Ecology. John Wilay & Son, 1977
4. Riggs, D. S. The Mathematical APProoch to Physiological Problems: A critical Primer. The MIT Press, 1976
5. Finkelstein, L. and Carson, E. R. Mathematical Modeling of Dynamic Biological Systems. Research Studies Press, 1979.
6. Wilson, E. O. and Bossert, W. H. A Primer of Population Biology. Sinauer Associates. Inc. publishers, 1977.
7. Smith, J. M. Models in Ecology. Cambrdge university Prss, 1974
8. Haberman, R. Mathematical. Models. Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow. Prentice - Holl, Inc. 1977.

مفاهیمی از حلقه‌ها و ایده‌آل‌ها ۱

دکتر حسین ذاکری

درکتاب ریاضیات جدید برای سال چهارم ریاضی فیزیك مفاهیم مقدماتی حلقه و ایده‌آل به اختصار معرفی شده است، نظریهٔ ایده‌آل‌ها برای مطالعهٔ ساختمان داخلی حلقه‌ها و روابط حلقه‌های مختلف با یکدیگر بکاربرده می‌شود. در اینجا برخی از مفاهیم مربوط به ایده‌آل‌ها را بیان می‌کنیم و برای روشن شدن مطالب مثال‌های متنوعی می‌آوریم.

درسرتاسر این بحث، $(A, +, \bullet)$، یا به اختصار A، یك حلقه‌می‌باشد. عضو خنثای گروه‌آبلی $(A, +)$ را باعلامت «$\circ$» نشان می‌دهیم و آنرا صفر حلقه می‌نامیم. در صورتی که حلقهٔ A یکدار باشد، عضو واحد حلقه را با علامت «۱» نشان خواهیم داد. اگرحلقهٔ A فقط دارای یك عضو باشد، این‌حلقه یکدار است و صفر حلقه همان عضو واحد حلقه می‌باشد. چنین حلقه‌ای را حلقهٔ بدیهی می‌نامند. درسرتاسر این مقاله فرض خواهیم‌کردکه A یك‌حلقهٔ غیربدیهی ویکدار است. یادآوری می‌شودکه زیرمجموعهٔ غیرخالی U از A را یك ایده‌آل دوطرفه، یا به‌اختصار یك ایده‌آل، A نامیم هرگاه:

۱ــ برای هر دو عضو a و b از U، $a-b$ عضوی از U باشد،

۲ــ برای هر $a\in U$ و هر $r\in A$ داشته باشیم $ar\in U$ و $ra\in U$.

بدیهی‌است که‌خود A ومجموعهٔ‌یکانی $\{\circ\}$ ایده‌آل‌های حلقهٔ A هستند. این ایده‌آل‌ها را ایده‌آل‌های بدیهی حلقهٔ A می‌نامند. ایده‌آل U ازحلقهٔ A را یك ایده‌آل واقعی A نامیم درصورتی که U زیرمجموعهٔ واقعی A باشد. درحالت کلی مشخص کردن مجموعهٔ ایده‌آل‌های غیربدیهی یك حلقهٔ دلخواه امکان‌پذیر نیست. ولی، دربعضی حالت‌های خاص‌این مجموعه رامی‌توان مشخص‌کرد. برای نمونه به‌مثال‌های زیر توجه می‌کنیم:

مثال ۱. مجموعه‌ی ایده‌آل‌های غیربدیهی یك میدان مجموعهٔ تهی است. زیرا، اگر ایده‌آل U از میدان A دارای عضوی ناصفر مانند x باشد، آنگاه، برای هر $a\in A$، داریم

$$a=a(x^{-1}x)=(ax^{-1})x\in U$$

و در نتیجه $A\subseteq U$. بنابراین $U=A$.

مثال ۲. مجموعهٔ ایده‌آل‌های غیربدیهی حلقهٔ اعداد صحیح Z را مشخص کنید.

حل. به‌ازای‌هرعدد صحیح ونامنفی m مجموعهٔ مضارب صحیح m را با mZ نشان می‌دهیم. به‌سادگی می‌توان دید که mZ یك ایده‌آل Z است. ثابت می‌کنیم هرایده‌آل ناصفر Z به‌صورت mZ می‌باشد. فرض کنیم U ایده‌آل ناصفری از Z باشد. در این صورت U دارای عضوی ناصفر مانند x است. در نتیجه مجموعهٔ

$$B=\{y\in U : \text{عدد صحیح ومثبت است } y\}$$

تهی نیست. زیرا، $|x|\in B$. فرض‌کنیم m ابتدای مجموعهٔ B باشد. ثابت می‌کنیم که $U=mZ$. چون U یك ایده‌آل و m عضو U است، پس هر مضرب صحیح m نیز متعلق به U خواهد بود. به عبارت دیگر $mZ\subseteq U$. اینك ادعا می‌کنیم که $U\subseteq mZ$. فرض‌کنیم $a\in U$. باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم a بر m را به ترتیب r و q می‌نامیم. از تساوی $r=a-mq$، و اینکه $a\in U$ و $mq\in U$، نتیجه می‌شود که

$r\in U$. از آنجائی که $0\leqslant r<m$ و m ابتدای مجموعهٔ B می‌باشد، داریم $r=0$. لهذا $a\in mZ$. بنابراین $U\subseteq mZ$.
با توجه به‌آنچه که ثابت شد، معلوم می‌شود که مجموعهٔ

$\{mZ:$ عدد صحیح و بزرگتر از «۱» است $m\}$

مجموعهٔ ایده‌آل‌های غیر بدیهی Z می‌باشد.

در بالا متذکر شدیم که در حالت کلی مشخص کردن مجموعهٔ ایده‌آل‌های یك‌حلقه امکان‌پذیر نیست. ولی بعضی مواقع برای پاسخگویی به برخی از سئوالات مطرح شده در مورد حلقهٔ‌موردنظر، می‌توان‌زیر مجموعهٔ‌خاصی‌ازمجموعهٔ‌ایده‌آل‌های حلقه را مورد بررسی قرارداد. در بین زیرمجموعه‌های‌خاص، مجموعهٔ ایده‌آل‌های ماکسیمال و مجموعهٔ ایده‌آل‌های اول اهمیت ویژه‌ای دارند.

ایده‌آل واقعی M از A را یك ایده‌آل ماکسیمال A می‌نامند درصورتی که هیچ‌ایده‌آل واقعی‌از Aمانند U موجود نباشد به قسمی که $M\subset U$. مجموعهٔ ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقهٔ A ممکن‌است مجموعهٔ متناهی یا نامتناهی باشد. مثال‌های زیر برای روشن شدن این مطلب مفید می‌باشد.

مثال ۳. به سهولت می‌توان دید که مجموعهٔ

$$A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix}: \text{اعداد حقیقی‌اند } d \text{ و } b \text{ و } a\right\}$$

با اعمال جمع وضرب ماتریسها تشکیل یك‌حلقهٔ یکدارمی‌دهد. تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال این حلقه را بیابید.

حل. فرض کنیم U ایده‌آلی از A باشد. اگر U دارای عضوی مانند $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix}$ باشد به‌قسمی که $ad\neq 0$، آنگاه

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{ad} \\ 0 & \frac{1}{d}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix}\in U.$$

در نتیجه $U=A$، بنابراین، اگر U ایده‌آل واقعی A باشد، آنگاه U زیر مجموعهٔ یکی ازمجموعه‌های

$$M_1=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0\end{pmatrix}: \text{اعداد حقیقی‌اند } b \text{ و } a\right\}$$

$$M_2=\left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d\end{pmatrix}: \text{اعداد حقیقی‌اند } d \text{ و } b\right\}$$

است، به‌سادگی‌می‌توان دید که M_1 و M_2 ایده‌آل‌های‌حلقهٔ A هستند. بنابراین، M_1 و M_2 تنها ایده‌آل‌های ماکسیمال A می‌باشند.

مثال ۴: همهٔ ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقهٔ اعداد صحیح Z را مشخص کنید.

حل. در مثال ۲ مجموعهٔ ایده‌آل‌های نابدیهی حلقهٔ Z را مشخص کردیم. این مجموعه شامل مجموعهٔ ایده‌آل‌های ماکسیمال Z می‌باشد که اینك به تعیین آن می‌پردازیم.

بدیهی است که اگر P عددی اول باشد، آنگاه PZ یك‌ایده‌آل ماکسیمال Z است. اینك ادعا می‌کنیم که هر ایده‌آل ماکسیمال Z نیز به این صورت می‌باشد. فرض کنیم U یك ایده‌آل ماکسیمال Z باشد. با توجه به مثال ۲، عدد صحیح‌و بزرگتر از «۱» مانند m موجود است که $U=mZ$. گوییم m عددی اول است. زیرا، در غیر این صورت عددی صحیح مانند n موجود است که $1<n<m$ و $n|m$، و یا به‌عبارت دیگر $mZ\subset nZ\subset Z$. رابطهٔ اخیر با فرض ماکسیمال بودن U تناقض دارد. بنابراین m عددی اول‌است. درنتیجه مجموعهٔ $\{mZ:$ عدد اول است $m\}$ مجموعهٔ ایده‌آل‌های ماکسیمال Z می‌باشد.

مثال ۵:

زیرمجموعهٔ‌زیرازمجموعهٔ اعداد گویارا درنظرمی گیریم

$$A=\left\{\frac{p}{q}: \text{عدد صحیح و } q \text{ عدد صحیح فرد است } p\right\}$$

به‌سادگی می‌توان دید که A با اعمال جمع و ضرب معمولی تشکیل یك حلقهٔ جابجایی و یکدار می‌دهد. نشان دهید که A فقط دارای یك ایده‌آل ماکسیمال است.

حل. فرض کنیم U ایده‌آلی ازحلقهٔ A باشد. اگر برای برخی‌اعداد صحیح فردمانند p وq داشته‌باشیم $\frac{p}{q}\in U$، آنگاه $\frac{q}{p}\in A$ولهذا$\frac{p}{q}\frac{q}{p}\in U$ $=1$. در نتیجه U ایده‌آل واقعی نخواهد بود. بنابراین هر ایده‌آل واقعی A زیرمجموعهٔ ایده‌آل

$$M_1=\left\{\frac{2k}{p}: \text{عدد صحیح و } p \text{ عدد صحیح فرد است } k\right\}$$

از Aمی‌باشد. لهذا M_1 تنها ایده‌آل‌ماکسیمال A است. توجه شود که مجموعهٔ ایده‌آلهای غیربدیهی حلقهٔ A یك مجموعهٔ نامتناهی است. در واقع، برای هرعدد صحیح و مثبت n، مجموعهٔ

$$M_n=\left\{\frac{2^n k}{p}: \text{عدد صحیح و } p \text{ عدد صحیح فرد است } k\right\}$$

یك ایده‌آل غیر بدیهی A می‌باشد

تبصره: با توجه به مثال ۱ معلوم می‌شود که هرمیدان فقط دارای یك ایده‌آل ماکسیمال است. از طرف دیگر، مثال ۵ نشان می‌دهد که عکس این مطلب درحالت کلی درست نمی‌باشد. ولی به سادگی می‌توان قضیه زیر را در این مورد ثابت کرد.

قضیهٔ ۱. شرط لازم و کافی برای آنکه حلقهٔ جابجایی A یك میدان باشد آنست که ایده‌آل بدیهی $\{0\}$ ایده‌آل ماکسیمال A باشد.

در بالا ایده‌آل ماکسیمال یك حلقه را معرفی کردیم. اینك به‌معرفی ایده‌آل‌های اول حلقه می‌پردازیم. ایده‌آل واقعی U از حلقهٔ A را یك ایده‌آل اول می‌نامیم در صورتی که، به‌ازای هر a و $b\in A$، اگر

$$aAb=\{axb : x\in A\}\subseteq U,$$

آنگاه $a\in U$ یا $b\in U$. درصورتی که حلقهٔ A جابجایی باشد، قضیهٔ زیر در مورد ایده‌آل‌های اول برقرار است.

قضیهٔ ۲. فرض کنیم A یك حلقهٔ جابجایی و U ایده‌آل واقعی A باشد. در این صورت ایده‌آل U یك ایده‌آل اول A است اگر و فقط اگر، به ازای هر a و $b\in A$، از $ab\in U$ نتیجه شود که $a\in U$ یا $b\in U$.

برهان. ($\Longleftarrow$) فرض کنیم U یك ایده‌آل اول A باشد. فرض کنیم $a, b\in A$ چنان باشند که $ab\in U$. در این صورت برای هر $x\in A$ داریم.

$$axb=xab\in U$$

بنابراین، $aAb\subseteq U$. لهذا، بنابر تعریف ایده‌آل اول، $a\in U$ یا $b\in U$.

($\Longrightarrow$) فرض کنیم $a, b\in A$ چنان باشند که $aAb\subset U$. در این صورت هرعضو aAb، متعلق به U می‌باشد. بالاخص $ab=a1b\in U$. لهذا، بنابه فرض، داریم $a\in U$ یا $b\in U$.

اینك قبل از ادامهٔ بحث برای روشنتر شدن مطلب چند مثال می‌آوریم.

مثال ۶. تمام ایده‌آل‌های اول حلقهٔ Z را بیابید.

حل: فرض کنیم $m\neq 1$ عددی صحیح و نامنفی باشد. ثابت می‌کنیم که ایده‌آل mZ ازحلقهٔ Z یك ایده‌آل اول است اگر و فقط اگر $m=0$ یا m عددی اول باشد.

($\Longleftarrow$) فرض کنیم mZ ایده‌آل اول باشد و $m\neq 0$. نشان می‌دهیم که m عددی اول است. فرض کنیم چنین نباشد. دراین صورت اعداد صحیح بزرگتر از «۱» مانند n_1 و n_2 موجودند به‌قسمی که $m=n_1n_2$، $n_1<m$ و $n_2<m$. چون $n_1n_2\in mZ$ و mZ یك ایده‌آل اول است، پس $n_1\in mZ$ یا $n_2\in mZ$، در نتیجه $m|n_1$ یا $m|n_2$، واین ممکن نیست. زیرا $1<n_1<m$، $1<n_2<m$. بنابراین m عددی اول است.

($\Longrightarrow$) بدیهی است که برای $m=0$ ایده‌آل $\{0\}=mZ$ یك ایده‌آل اول است. بنابراین، فرض کنیم که m عددی اول باشد. فرض کنیم $a, b\in Z$ چنان باشند که $ab\in mZ$. در این صورت $m|ab$. در نتیجه $m|a$ یا $m|b$. به عبارت دیگر $a\in mZ$ یا $b\in mZ$. بنابراین mZ ایده‌آل اول است.

مثال ۷. در مثال ۳ نشان دهید که ایده‌آل‌های M_1 و M_2 ایده‌آل‌های اول حلقهٔ A می‌باشند ولی ایده‌آل $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ اول نیست.

حل. فرض کنیم

$$b=\begin{pmatrix}b_1&b_2\\0&b_3\end{pmatrix},\quad a=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\0&a_3\end{pmatrix}$$

دوعضو ازحلقهٔ A باشند به‌قسمی که $aAb\subseteq M_i$ ($i=1$ یا ۲) دراین صورت داریم

$$ab=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\0&a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&b_2\\0&b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1&b_2a_1+b_3a_2\\0&a_3b_3\end{pmatrix}\in M_i$$

در صورتی که $i=1$، خواهیم داشت $a_3b_3=0$. لهذا $a\in M_1$ یا $b\in M_1$. درصورتی که $i=2$، تساوی $a_1b_1=0$ برقرار است. در نتیجه $a\in M_2$ یا $b\in M_2$. بنابراین، در هر صورت M_i یك ایده‌آل اول است.

در این حلقه $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ ایده‌آل اول نیست. زیرا،

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$$

و

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\notin\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$$

در مثال‌های بالا دیدیم که هر ایده‌آل ماکسیمال یك ایده‌آل اول است ولی عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست (به‌عنوان نمونه، به مثال ۶ توجه کنید). در حالت کلی قضیهٔ زیر را می‌توان بیان کرد.

قضیهٔ ۳. هرایده‌آل ماکسیمال حلقه A یك ایده‌آل اول است.

برهان. فرض کنیم U یك ایده‌آل ماکسیمال حلقهٔ A باشد. فرض کنیم $a,b\in A$ چنان باشند که $aAb\subseteq U$. می‌توان

فرض کرد $a\notin U$. به‌سهولت می‌توان دید که مجموعهٔ

$$U+AaA=\{x+yaz : x\in U,\ y\in A,\ z\in A\}$$

یك ایده‌آل حلقهٔ A می‌باشد و $U\subset U+AaA$. در نتیجه، چون U ایده‌آل ماکسیمال حلقهٔ A است، $z\in A$ و y و $x\in U$ یافت می‌شوند که $x+yaz=1$، لهذا $b=xb+yazb$، چون بنا به فرض، $aAb\subseteq U$، پس $azb\in U$. بنابراین $b=xb+yazb\in U$.

قضیهٔ بالا نشان می‌دهد که مجموعهٔ ایده‌آل‌های اول شامل مجموعهٔ ایده‌آل‌های ماکسیمال می‌باشد. در برخی حالات خاص این دو مجموعه مساوی می‌شوند. مثال زیر نمونه‌ای از این حالات خاص است.

مثال ۸. فرض کنیم B یك حلقهٔ نابدیهی و جابجایی باشد به‌قسمی که، به ازای هر $x\in B$، عددی صحیح و بزرگ‌تر از «۱» مانند $n(x)$ یافت شود به طوری که $x^{n(x)}=x$. ثابت کنید که هر ایده‌آل اول B یك ایده‌آل ماکسیمال است.

برهان. فرض کنیم U ایده‌آل اولی از B باشد. فرض کنیم V یك ایده‌آل واقعی از B باشد به قسمی که $U\subset V$. دراین صورت $y\in V$ یافت می‌شود به طوری که $y\notin U$. بنابه فرض عددی صحیح و بزرگتر از «۱» مانند n موجود است که $y^n=y$. در نتیجه، برای هر x دلخواه از A داریم

$$y(y^{n-1}x-x)=y^nx-yx=0\in U$$

لهذا $y^{n-1}x-x\in U$. در نتیجه $y^{n-1}x-x\in V$. چون $y^{n-1}x\in V$، پس $x=y^{n-1}x-(y^{n-1}x-x)\in V$. بنابراین $V=A$. لهذا U یك ایده‌آل ماکسیمال A است.

تبصره. حلقهٔ جابجایی A را یك حلقهٔ بولی نامند در صورتی که تساوی $x^2=x$ برای هر $x\in A$ برقرار باشد. بنابر مثال ۸ و قضیهٔ ۳، مجموعهٔ ایده‌آل‌های ماکسیمال یك حلقه بولی با مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول آن مساوی می‌باشد.

منابع

1- Dan Saracino, Abstract algebra: Afirst Course, Addison-Wesley Publishing company, 1980

2- Joachim Lambek, Lectures on rings and modules, Chelsea Publishing ComPany, 1976

$(a^m-1, a^n-1)=a^d-1$

حمیدرضا فرهادی

دانشجوی ریاضی دانشگاه تربیت معلم

به‌استقراء ثابت می‌کنیم که اگر a و m و n اعداد طبیعی و $a>1$ آنگاه $(a^m-1,a^n-1)=a^d-1$ که $d=(m,n)$ است. ابتداحکم‌را درحالت خاص $(m,n)=1$ ثابت‌می‌کنیم.

گزاره‌نمای F را چنین تعریف می‌کنیم:

اگر $x=m+n$، $(m,n)=1$ آنگاه

$$F(x):(a^m-1,a^n-1)=a-1$$

ثابت می‌کنیم به‌ازاء هر x که $x\geqslant 2$، $F(x)$ برقرار است. اگر $x=2$ آنگاه $m=n=1$ و حکم برقرار است. فرض کنیم به‌ازاء هر $2\leqslant y<x$، $F(y)$ برقرار باشد، اگر $x=m+n$، $(m,n)=1$ و $m,n\geqslant 1$ چون $x>2$ پس $m\neq n$. فرض می‌کنیم $m<n$، آنگاه n دارای خاصیت F است: اولاً $n=(n-m)+m$ که $1\leqslant m$ و $1\leqslant n-m$ و ثانیاً اگر d' بزرگترین مقسوم علیه مشترك m و $n-m$ باشد آنگاه $d'|n-m+m=n$ ولذا، $d'|(m,n)=1$ پس $d'=1$ لذا n به‌صورت مجموع m و $n-m$ است که $(n-m,m)=1$ و $2\leqslant n<x$، پس بنابه فرض استقراء

$$(a^{n-m}-1,a^m-1)=a-1$$

حال اگر d'' بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a^m-1 و a^n-1 باشد آنگاه $d''|a^n-1-(a^m-1)=a^m(a^{n-m}-1)$ اما چون a^m-1 و a^m متباینند و چون $d''|a^m-1$ پس $d''|a^{n-m}-1$ یعنی $d''|(a^m-1,a^{n-m}-1)=a-1$ یعنی بزرگترین مقسوم علیه مشترك a^n-1 و a^m-1، $a-1$ را عاد می‌کند یعنی $(a^n-1,a^m-1)=a-1$.

حال برای تعمیم این حکم فرض می‌کنیم $(m,n)=d$ لذا $\left(\frac{m}{d},\frac{n}{d}\right)=1$

$$(a^m-1,a^n-1)=((a^d)^{m/d}-1,(a^d)^{n/d}-1)=a^d-1$$

دنباله‌ها (رشته‌ها)

جواد لألی

مقدمه

یکی از اهداف مجله رشد آموزش ریاضی طرح و گسترش مفاهیم کتابهای درسی است. مفاهیمی که ریشه وبنیان آن درکتابهای دبیرستانی است، و اگر قرار است برآن شاخ و برگی نهاده شود، باید متناسب با ظرفیت پذیرش دانش‌آموز باشد. معلمینی که درنقاط دوردست کشور به‌آموزش یکی از کتب دبیرستانی اشتغال دارند تنها وسیله‌ای که، جهت تدریس، در اختیاردارندکتابهای درسی است؛ واگر اینان بخواهند ازکتابهای دیگری به‌عنوان کتاب کمك درسی بهره بگیرند یا مطالب آن به اندازه‌ای پیشرفته است، که ظرفیت پذیرش دانش‌آموز، اجازه بهره‌بری از آن را نمی‌دهد؛ ویا به اندازه‌ای مقدماتی است که استفاده از آن کمکی به معلمین نمی‌کند. بنابراین، ما در پی آنیم که در میان مفاهیم طرح شده درکتابهای درسی قسمتهائی را انتخاب نموده، وپس ازطرح وبررسی موضوع موردنظردادرمجاورت کتابهای درسی به‌پیش ببریم. در این رهگذر شاخه‌ای ازاین موضوع را انتخاب کرده،ودرقلمروی‌آن، سعی‌برنگرش تازه‌ای داشته باشیم،تا بتوانیم دیدی، نه‌چندان وسیع بلکه عمیق، به‌این مفهوم پیداکنیم.

در اینجا، مفهوم دنباله (یا رشته) را، ازکتاب جبر دوم، انتخاب‌کرده‌ایم. در این‌کتاب، مفهوم رشته به‌صورت مقدماتی تعریف شده است. بدون اینکه از این مفهوم کاربرد عملی ارائه دهد و یا برای درك مفاهیم دیگری، بالاخص مفهوم حد، استفاده‌نماید مطلب‌رها گردیده است.دراین‌کتاب با طرح حاصلجمع تصاعدحسابی وهندسی،که خود قسمتی ازمفهوم سریها (یا سلسله‌ها) است، موضوع‌پایان‌یافته تلقی گردیده است. در صورتی‌که، رشته‌ها از مفاهیم اساسی ریاضی هستند و در اکثر شاخه‌های ریاضی‌کم بیش حضور دارند. ازآنجائی‌که طرح حد، آنهم از طریق ε و δ، مستلزم بینش و دقت ریاضی خاصی است، بسیاری از معلمین براین باورند که طرح چنین مفهومی به‌کمك رشته‌ها راه را برای بیان‌کلی آن هموار می‌سازد.زیرا رشته (یا دنباله) ساده‌ترین توابعی هستندکه‌گویای بسیاری ازمفاهیم پیچیده آنند، و با بیان‌آن روش‌تعلیمی مناسبی برای مفاهیم‌خاص تابع،بالاخص، مفهوم‌حدمی‌باشند.

رشته‌ها یا دنباله‌ها

یکی از ویژگی‌های ریاضیات جدید آنست که رابطه ملموسی با زندگی روزمره ما دارد. این ویژگی موجب آن می‌گرددکه‌هرپدیده‌ای راکه دراطراف‌ما روی می‌دهد، باسعی و کوشش بسیار، بتوان به وسیلهٔ الگوها و روشهای ریاضی قابل بیان وتفسیرکرد. البته، ریاضیات سطح عالی به‌اندازه‌ای اختصاصی و پیشرفته است که درك عمیق آن افراد خاص را می‌طلبد. درصورتی‌که ریاضیات مقدماتی مبتنی برنیازها و مشکلات جامعه است، و قابل پذیرش برای سطح وسیعی از افراد آن می‌باشد. امروزه، در اکثر آموزشگاهها و مؤسسات فرهنگی آن قسمت از ریاضیات مطرح می‌شودکه‌کاربرد عملی داشته باشد، تا توجیه‌کنندهٔ مسائل ومشکلات جامعه وپدیده‌های پیچیدهٔ اطراف آن باشد. اصولاً برای هرمفهوم ریاضی ــ در سطح مقدماتی‌ــ می‌توان مسئله اجتماعی را ارائه دادکه توجیه کننده آن مفهوم باشد. برای صدق چنین گفتاری، کاربردی از دنباله‌ها را،که تا حدودی‌گویای ابعاد مختلف‌آن است، ارائه می‌دهیم تا درك دقیقی ازاین مفهوم را داشته باشیم.

در یك شرکت تعاونی تصمیم برآن است‌که کالاهای اساسی را بین اعضای خود تقسیم‌کنند. این شرکت تعاونی حدود ۱۵۰۰ عضو دارد و می‌خواهد از طریق قرعه (یا هر روش دیگری‌که مستلزم امتیازبندی خاص خود است) کالاها را توزیع نماید. دفترچه‌اعضای شرکت تعاونی از ۱ تا ۱۵۰۰

شماره‌گذاری شده‌است. بدیهی است که در قرعه‌کشی هر شماره نماینده فردی است که جایگزین آن شخص می‌گردد. اگر در این قرعه‌کشی، به‌ترتیب، اعداد ۱۰۲، ۱۳، ۵،... حاصل شده باشد آنگاه اولین عدد؛ یعنی ۱۰۲، از نظر مسئولین شرکت تعاونی اهمیت خاص دارد. زیرا، که اولین کالا را، که از محسنات خاصی برخوردار است، می‌برد. دومین عدد؛ یعنی ۱۳، اهمیتی با یك درجه کمتر. سومی؛ یعنی ۵، با درجه‌ای کمتر و الی آخر. در این روش، بدون آنکه خود متوجه آن باشیم، تناظری بین اعداد طبیعی و شماره دفترچه‌ها (که نماینده اعضا است) برقرار کرده‌ایم؛ یعنی، تابعی تعریف نموده‌ایم که دامنه آن زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی (با همان ترتیب و خواص مربوط به‌خود) است و برد آن شماره دفترچه‌هاست، که به‌وسیله تابع مفروض، ترتیب اعداد طبیعی به آن منتقل گردیده و اولویتهای اشخاص مشخص شده است. با یك نگاه سطحی، به اعدادی که از قرعه‌کشی حاصل گردیده، در می‌یابیم که اولین نفر متناظر اولین عددی است که اولین کالا را می‌برد، دومین عدد متناظر دومین عددی است که دومین کالا را می‌برد وغیره. در روش فوق سعی بر آن بوده است که بین اعضای شرکت تعاونی، بر اساس قرعه‌کشی و یا هر امتیاز بندی خاصی، ترتیبی برقرار شود که متناظر ترتیب اعداد طبیعی باشد تا از این طریق کالاهای شرکت تعاونی به‌صورت معقولی توزیع گردد. به عنوان مثال دیگری در این زمینه، می‌توان به مسابقات دومیدانی، که درسال گذشته بین دانش‌آموزان مناطق مختلف آموزش و پرورش تهران روی داد، اشاره کرد. در این مسابقه حدود ۳۰۰۰۰ نفر شرکت کردند وقرار بر این بود که به هزار نفر اول جایزه‌ای، متناسب با رده‌بندی خود، داده شود. طبق روال مرسوم در چنین مسابقاتی، هر نفر با شماره‌ای که در پشت لباس او درج گردیده مشخص می‌شود، و معمولاً این شماره‌گذاری زیر مجموعهٔ متوالی از اعداد طبیعی ابتدا از یك تا تعداد شرکت‌کنندگان است. بدیهی است، ابتدا، شماره فردی به عنوان نفر اول ثبت می‌گردد که فاصله مورد نظر را در زمان کوتاهتری بپیماید. فرض کنیم اعداد ذیل، به‌ترتیب، به‌وسیله مسئولین مسابقه، از سمت چپ به‌راست، ثبت شود:

۱۰۲، ۷۰۲، ۶، ۷۰،...، ۲۰

در این صورت، اولین نفر فردی با شماره ۱۰۲؛ دومین نفر فردی با شماره ۷۰۲؛ و... و هزارمین نفر فردی با شماره ۲ خواهد بود. مجموعه اعداد فوق دنباله‌ای است که دامنه آن زیرمجموعه متوالی از اعداد طبیعی است. دسته مجموعه اعداد فوق یك دنبالهٔ متناهی است.

اینك، رشته یا دنباله را به صورت دقیق ریاضی تعریف می‌کنیم:

تعریف. دنباله (یا رشته) در S تابعی است که دامنه آن مجموعه اعداد طبیعی و برد آن زیر مجموعه‌ای از S است؛ یعنی، تابع

$$f=\{(n,f(n))|n\in N,\ f(n)\in S\}$$

یك دنباله است. اگر S برابر N یا Q یا R باشد، به ترتیب، آن را دنباله اعداد طبیعی، یا گویا، یا حقیقی می‌نامند.

از آنجائیکه مجموعه اعداد طبیعی دارای ترتیب خاص و عضو اقلی یك است، معمولاً مقدار تابع را درعضو دلخواه n، بجای $f(n)$ با نماد «f_n» نمایش می‌دهند که n را اندیس f، و f_n را جمله n ام دنباله گویند وچنین می‌نویسند؛

$$f=\{f_n\}_{n\in N}=\{(n,f_n)|n\in N\}=\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

در نمایش فوق علامت $\{f_n\}_{n\in N}$ را با علامت مجموعه نباید یکی دانست. برای اینکه این نمایش را با مجموعه خلط نکنیم باقید لفظ «دنباله»، یا $n\in N$، این تمایز را نشان می‌دهیم. نمایش دیگری برای دنباله مرسوم است و آن نوشتن مجموعه جمل دنباله، با ترتیب خاصی است، که این ترتیب از طریق اندیسها جمل به جمله‌های دنباله داده می‌شود؛ یعنی،

$$f_1,\ f_2, \dots,\ f_n, \dots$$

که در آن، f_1 را اولین جمله، f_2 را دومین جمله،... f_n را n امین جمله دنباله، یا جمله عمومی آن، می‌نامند.

تبصره ۱ــ اگر f تابعی باشد که قلمروی آن زیرمجموعه متناهی و متوالی از اعداد طبیعی ابتدا از یك باشد، آن را دنباله متناهی گویند. مانند،

$$\{f\}_{k=1}^{n}=\{(k,f_k)|1\leqslant k\leqslant n,\ k\in N\}$$

درغیر این صورت، آن «را دنبالهٔ نامتناهی» یا مختصراً «دنباله» نامند.

تبصره ۲ــ تعریف دنباله را می‌توان به‌صورت ذیل تعمیم داد تا اشیاء ریاضی بیشتری را دربرگیرد:

دنباله تابعی است که دامنه آن زیر مجموعه متوالی از اعداد صحیح با شروع از یك عدد صحیح مشخص باشد. مانند،

$$\left\{\frac{1}{(n-1)(n-2)}\right\}_{n=3}^{\infty} \text{ یا } \left\{\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

درچنین حالتی، جمله‌عمومی دنباله وجمله n م آن متمایز است.

مثلاً، دنبالهٔ $\left\{\frac{1}{(n-1)(n-2)}\right\}_{n=3}^{\infty}$، جملهٔ عمومی آن عدد

$\frac{۱}{(n-۱)(n-۲)}$، و جمله n م آن عدد $\frac{۱}{(n+۱)n}$ است.

موضوعی که در دنباله‌ها مورد نظر است مربوط به جملات دوردست آن است؛ یعنی، جملاتی از دنباله وقتی که n به قدر کافی بزرگ باشد. به عنوان مثال، دنبالهٔ $\left\{\frac{(-۱)^n}{n}\right\}$ به‌ازای مقادیر زوج n مثبت به ازای مقادیر فرد n منفی است. ولی باهمه این‌حال وقتی که n بزرگ شود، جملات این دنباله به‌صفر نزدیک می‌گردد. درصورتی که دنباله $\{(-۱)^n\}$ چنین خاصیتی را ندارد، و هرچه n را بزرگ و بزرگتر کنیم، جملات این دنباله ۱ یا ۱− است. چنین دنباله‌ها را، که رفتاری نامناسب دارند، «کج رفتار» و دنبالهٔ اولی را «خوش رفتار» می‌نامند؛ بررسی جملات دنباله را، وقتی که $n\to\infty$، رفتار دنباله می‌نامند.

تعریف. دنباله $\{a_n\}$ به عدد حقیقی a میل می‌کند (یا دارای حد a است) در صورتی که به‌ازای هر ϵ مثبت، عدد طبیعی مانند N موجود باشد که به ازای هر n، اگر $n>N$ آنگاه

$$|a_n-a|<\epsilon$$

و چنین می‌نویسند: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ یا اگر $n\to\infty$ آنگاه $a_n\to a$.

تعبیر هندسی مفهوم حد: از آنجائیکه دنباله‌ها توابع خاصی هستند، مانند توابع، دارای نموداری درصفحه می‌باشند. نمودار آنها عبارت از مجموعه نقاطی به صورت (n,a_n) است که n عدد طبیعی برروی محور xهاست و a_n جمله متناظر آن بر روی محور y هاست. بنابراین، هرخط قائمی، مانند $x=n$، نقطه‌ای از دنباله را شامل است و نمودار دنباله را تنها دریک نقطه قطع می‌کند، و اگر n عدد حقیقی غیر صحیح باشد آنگاه خط قائم $x=n$ نمودار آن را قطع نخواهد کرد. حال اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ و ϵ عدد مثبت مفروض باشد، عبارت $|a_n-a|<\epsilon$ معادل این است که $a-\epsilon<a_n<a+\epsilon$. مجموعه

$$\{(x,y)|a-\epsilon<y<a+\epsilon\}$$

را نواری به مرکز a و شعاع ϵ می‌نامند. بنابراین، حد دنبالهٔ $\{a_n\}$ برابر a است اگر وفقط اگر به‌ازای هر نواری به‌مرکز a و شعاع ϵ، خط قائمی، مانند $x=N$، موجود باشد که به ازای هر خط قائم $x=n$ (که $n>N$)، تنها نقطه تقاطع با نمودار در داخل نوار باشد؛ به عبارت دیگر، مجموعه نقاطی از نمودار دنباله که درخارج نوار قراردارد مجموعه‌ای متناهی باشد.

مثال ۱. ثابت کنید که $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=۱$، و اگر a عدد حقیقی مثبتی باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=۱$.

حل: قسمت اول مثال فوق را ثابت می‌کنیم و قسمت دوم را به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

فرض کنیم که $h_n=\sqrt[n]{n}-۱$. بنابراین $h_n\geqslant ۰$. به‌ازای $n\geqslant ۲$،

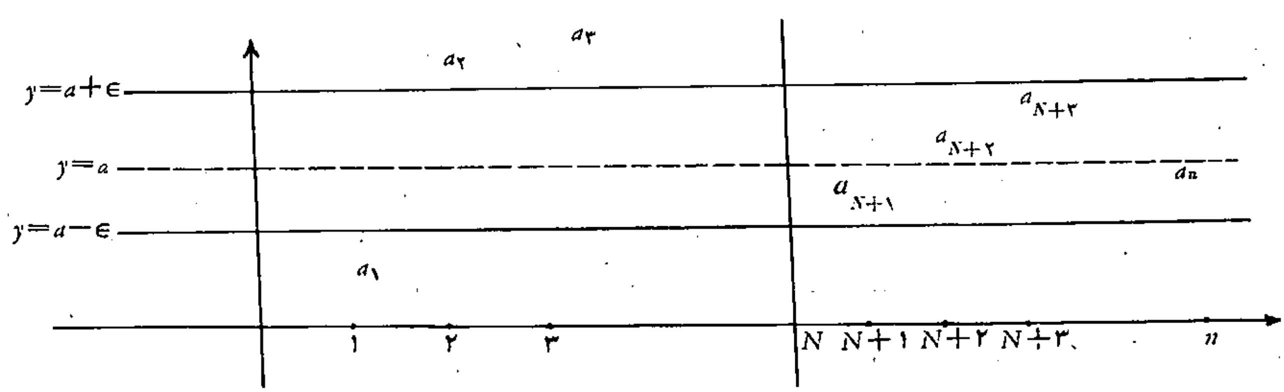
$$n=(۱+h_n)^n=۱+nh_n+\frac{n(n-۱)}{۲}h_n^۲+\cdots+h_n^n \geqslant \frac{n(n-۱)}{۲}h_n^۲.$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$۰\leqslant h_n\leqslant\sqrt{\frac{۲}{n-۱}}$$

فرض کنیم که ϵ عدد مثبت دلخواهی باشد. عدد n را طوری به‌دست می‌آوریم که

$$\sqrt{\frac{۲}{n-۱}}<\epsilon$$



یا $n > \frac{2}{\epsilon^2}+1$. حال اگر $N = \left[\frac{2}{\epsilon^2}\right]+2$ (نماد [ ] بـه معنی جزء صحیح است) به‌ازای هر n که $n>N$،

$$|\sqrt[n]{n}-1| = |h_n| < \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \epsilon$$

مثال ۲ـ فرض کنیم‌که a یك عدد حقیقی باشد. دراین صورت،

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & |a|<1 \\ 1 & a=1 \\ \infty & a>1\end{cases}$$

اگر $a \leqslant -1$. دنبالهٔ $\{a_n\}$ حد ندارد (گوئیم $\lim a_n=\infty$ درصورتی‌که به‌ازای هـر k مثبت N ی موجود باشدکه اگر $n>N$ آنگاه $a_n>k$)

حل. بـرهان آن چندان مشکل نیست و بررسی آن را به‌عهده خواننده می‌گذاریم.

مثال ۳ـ فرض کنیدکه $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد به طوری که به‌ازای هر n، $a_n\neq 0$ و $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}=l$. دراین‌صورت،

(الف) اگر $|l|<1$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(ب) اگر $l>1$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$

حل. قسمت (الف). چون $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ و $|l|<1$،

پس بـه‌ازای هر ϵ، بالاخص $\epsilon_0 = \frac{1-|l|}{2}$، عـدد طبیعـی مانند N موجود است که به‌ازای هر n، اگر $n>N$ آنگاه

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-l\right|<\epsilon_0$$

حال اگر $h=\epsilon_0+|l| \equiv \frac{1+|l|}{2}$ آنـگـاه $0<h<1$ (چرا؟). به‌ازای هر n که $n>N$،

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-l+l\right| \leqslant \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-l\right| + |l| < \epsilon_0+|l| = h$$

بنابراین،

$$|a_n| = \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\cdots\times\frac{a_{N+1}}{a_N}\times a_N\right|$$

$$= \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|\times\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\times\cdots\times\left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right|\times|a_N|$$

$$< h\times h\times\cdots\times h\times|a_N| = h^{n-N}|a_N| = h^n\frac{|a_n|}{h^N}$$

بنابر مثال ۲، چون $0<h<1$، پس $\lim_{n\to\infty} h^n = 0$. بنابـراین $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. بهمین ترتیب قسمت (ب) رامی‌توان ثابت کرد.

(توجه کنیدکه‌اگر $l=1$، هیچ حکم کلی نمی‌توان‌کرد؛کافیست دو دنبالـه $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ و $\{n\}$ را ملاحظه کنید)

مثال ۴ـ در رفتار دنباله $\left\{\frac{a^n}{n^k}\right\}$، که درآن، k عدد صحیح مثبت است، بحث کنید.

حل. فرض کنیدکه $a_n=\frac{a^n}{n^k}$. بنابراین،

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)^k}\times\frac{n^k}{a^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^k$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$. بنابرمثال ۳،

$$\lim\frac{a_n}{n^k}=\begin{cases}0 & |a|<1\\ \infty & a>1\end{cases}$$

درصورتی که $a=\pm1$، $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^k}=0$. به‌ازای $a<-1$، دنباله حد ندارد (چرا؟)

دنباله‌های تراجعی یااستقرایی

روش دیگری برای تعریف دنباله‌ها هست، وآن‌تعریف به‌استقراء است. یعنی، ابتدا k جمله اول دنبـالـه را تعیین و سپس قـاعده‌ای را بیان می‌کنند که جمله a_{k+1} را برحسب a_1، . . .، a_k، و یا احیاناً n، محاسبه می‌کند. این‌قاعده را رابطه تراجعی یا استقرایی می‌نامند. با توجه به‌چنین‌اطلاعاتی، جمله $a_n (n>k)$ را می‌توان برحسب $a_1,\ldots,a_k$ معین کرد.

به‌عنوان‌مثال، اگر $a_1=1$، به‌ازای $n\geqslant 1$، $a_{n+1}=3a_n$، در این‌صورت، دنباله $\{a_n\}$ به‌ازای هرعدد طبیعی n تعریف شده‌است. به‌سادگی‌می‌توان‌تحقیق کرد که‌این‌دنباله‌مشخص کننده دنباله‌ای است که جمله nم آن 3^{n-1} است. مثال دیگری در

این زمینه، فرض کنیم که $b_1=3$ ، $b_2=6$ و رابطه تراجعی این دنباله به‌صورت $b_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n+b_{n-1})$ است، که در آن، $n\geqslant 2$. در آتیه روشی را ارائه خواهیم داد که به‌کمك آن می‌توان جمله‌عمومی این‌دنباله‌را برحسب n بیان کرد. در اینجا، به‌استقراء می‌توان ثابت کرد که $b_n=5+4\left(-\frac{1}{2}\right)^n$؛ اما چگونه چنین عبارتی را به‌دست‌آورده‌ایم؟ این از جمله‌مطالبی است که بعداً به‌بررسی آن خواهیم پرداخت.

چون دنباله‌های تراجعی به‌استقراء تعریف می‌شوند، کاربرد عملی بسیاری در مسائل استقرائی دارند. در اینجا به‌توضیح یك‌مسئله نظریه اعداد، دراین‌زمینه، می‌پردازیم.

ثابت کنید که به‌ازای هرعدد طبیعی n، عدد

$$(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$$

عددی طبیعی است. اثبات حکم فوق به‌استقراء است. دنباله تراجعی تعریف می‌کنیم که جمله عمومی آن عبارت فوق باشد. فرض کنیم که $a_n=(3+\sqrt{5})_n+(3-\sqrt{5})_n$. ما به‌دنبال اثبات این‌حکم هستیم که همه‌جملات این‌دنباله‌اعداد طبیعی‌اند.

اینك می‌خواهیم a_{n+1} را برحسب جملات ماقبل آن بنویسیم؛

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=(3+\sqrt{5})^{n+1}+(3-\sqrt{5})^{n+1}\\&=[(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})][(3+\sqrt{5})^n\\&\quad+(3-\sqrt{5})^n]-(3+\sqrt{5})(3--\sqrt{5})\\&\quad[(3+\sqrt{5})^{n-1}+(3-\sqrt{5}^{n-1})]\\&=6a_n-4a_{n-1}\end{aligned}$$

چون a_{n+1} برحسب a_n و a_{n-1} بیان شده است، پس باید دوجمله ابتدای دنباله معین باشد. بامحاسبه $a_0(=2)$ و $a_1(=6)$، دنباله تراجعی تعریف می‌شود. (دنباله به‌ازای $n\geqslant 0$ تعریف شده است. اگر بخواهیم دامنه مجموعه اعداد طبیعی باشد، می‌توان به‌جای a_0 و a_1، جملات a_1 و a_2 را محاسبه کرد.)

اینك به‌استقراء بادو مقدمه، حکم فوق‌را ثابت‌می‌کنیم. a_0 و a_1 عدد طبیعی هستند. فرض کنیم که به‌ازای $n\geqslant 1$، a_{n-1} و a_n عدد طبیعی باشند (فرض استقراء). چون به‌ازای هر n، $a_n>0$ (چرا)، با توجه به‌رابطه تراجعی $a_{n+1}=6a_n-4a_{n+1}$، نتیجه می‌شود که a_{n+1} نیز عدد طبیعی است. بالنتیجه، به‌ازای هرعدد طبعی n، a_n یك‌عدد طبیعی است.

از دنباله‌های مهم تراجعی، دو دنباله فیبوناتچی و لوکا را می‌توان نام‌برد، اگر اولی‌را به $\{a_n\}$ ودومی را به $\{b_n\}$ نمایش دهیم، تعریف هردوی آنها ازاین قرار است:

$$\begin{cases}a_1=a_2=1\\ a_{n+1}=a_n+a_{n-1} & (n\geqslant 2).\end{cases}$$

$$\begin{cases}b_1=1,\ \ b_2=2,\\ b_{n+1}=b_n+b_{n-1} & (n\geqslant 2).\end{cases}$$

منشأ دنباله‌های فیبوناتچی ولوکا به‌خاطر مسئله‌ای است‌درباب زاد و ولد خرگوشهاست (سال ۱۸۷۷ میلادی). مسئله بدین‌مضمون است: فرض کنید در ماه فروردین یك‌جفت خرگوش در محوطه محصوری جا داده شده است. هرجفت خرگوش در ماه یك‌بار تولید مثل می‌کنند؛ تولید مثل هرجفت جدیدالولاده در ماه دوم بعد از تولد است. می‌خواهیم تعیین کنیم که عده خرگوشها را در پایان اسفند همان‌سال. البته فرض براین‌است که مرگ ومیر در میان خرگوشها نیست. با کمی تأمل درمی‌یابیم که عده جفتهای خرگوش، در آخر هر ماه، تشکیل یك دنباله فیبوناتچی می‌دهند؛ و تعداد آن در آخر اسفند همان سال $233(=a_{13})$ می‌شود.[1]

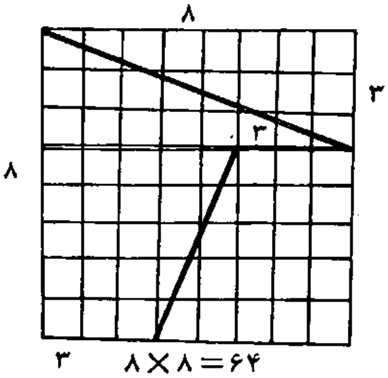
دنباله‌های فیبوناتچی و لوکا خواص جالبی در نظریه اعداد دارند. مثلاً اگر رقم اول اعداد فیبوناتچی را متوالیاً محاسبه کنید، درمی‌یابیم که a_{60}، مانند a_0 مختوم به ۰ است (توجه کنید که $a_0=0$ تعریف می‌کنند) و a_{61}، مانند a_1، مختوم به ۱ است و الاآخر.

حیله‌های هندسی: یکی از «حیله‌های هندسی» معروف این است که مربعی به‌ابعاد ۸×۸ مطابق شکل (الف) در امتداد خطوط می‌بریم، وقطعات حاصل را مطابق شکل(ب) کنار یکدیگر قرار می‌دهیم. شکل حاصل مستطیلی به‌ابعاد $5\times 13(=65)$ است. بالنتیجه، $65=64$!

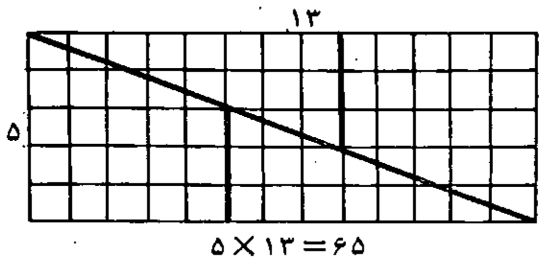
علت امر به‌خاطر این است که در بین قطعات، متوازی‌الاضلاعی به‌مساحت یك‌واحد مربع به‌وجود می‌آید که خطای باصره موجب ندیدن آن می‌گردد.

در حالت‌کلی؛ اگر مربعی با طول ضلع یك عدد فیبوناتچی (جمله‌ای از دنبالهٔ فیبوناتچی) باشد، می‌توان چنین حیله‌ای را ترتیب داد. و هرچه عدد فیبوناتچی بزرگ‌تر باشد، بعلت خطای باصره، متوازی‌الاضلاع مشخص نمی‌گردد.

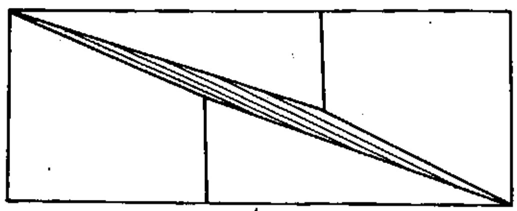
۱. برای محاسبه تعداد جفت خرگوش، به‌تئوری مقدماتی اعداد، جلد اول، قسمت I، صفحه ۱۰۵، دکتر غلامحسین مصاحب‌مراجعه کنید.



(الف)



(ب)



البته، خاصیت این‌اعداد به‌خاطر رابطه ذیل است، که به‌اتحاد سیمسن معروف است،

$$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2} + (-1)^n.$$

در مسئله فوق، به‌ازای $n=5$، خواهیم داشت؛ $8^2 = 5\times 13 - 1$، که در آن، $a_5=5$ و $a_6=8$ و $a_7=13$.

در دنباله‌ها تراجعی، برای به‌دست‌آوردن جمله nم، باید جملات ماقبل آن‌را محاسبه‌کرد. بنابراین، محاسبهٔ جملات دوردست دنباله‌کار پرزحمتی است و اگر محاسبات با اشتباهاتی همراه نباشد، به‌علت طولانی بودن عملیات، فرصت هرگونه بررسی وتحقیق دنباله‌را ازما می‌گیرد. مبحث‌اصلی‌در دنباله‌ها مفهوم حد است و مفهوم حد بستگی به جملات دوردست دنباله دارد. از آنجائی‌که امکان دسترسی به‌مقدار جملات «دنبالهٔ تراجعی» با مشکلات زیادی همراه است، بررسی‌احکام تحلیل آن‌روش خاص را می‌طلبد. در چنین مواردی، جهت تحقیق در احکام ریاضی، دنباله را یك تابع درنظر می‌گیرند و از خواص صعودی یا نزولی و قضایای مربوط به‌آن‌استفاده می‌کنند. اما نوع خاصی از دنباله‌های تراجعی موجود است، که به‌کمك روش خاصی، می‌توان مقدار جملهٔ عمومی آن‌را برحسب فرمول صریحی از n مشخص‌کرد. برای ارائه چنین روش، ابتدا، مقدماتی را می‌آوریم.

تعریف: دنباله $\{x_n\}$ را یك‌دنباله خطی ازبعد k نامیم در صورتی‌که

(الف) k جمله متوالی آن معین باشد (مثلاً، $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$)

(ب) جمله‌عمومی x_n ترکیب‌خطی از k جمله ماقبل‌خود باشد؛ یعنی، اعداد حقیقی ثابتی مانند $A_1,\ldots,A_k$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$x_n = A_1x_{n-1}+\cdots+A_kx_{n-k}\quad (n\geqslant k)$$

مثال. دنباله‌های فیبوناتچی ولوکا تراجعی خطی از بعد ۲اند؛ ولی، دنباله $\{x_n\}$ با رابطه تراجعی؛

$$x_1 = 2,\ x_n = \frac{2}{1+x_{n-1}}،$$

تراجعی خطی نیست.

دراینجا می‌خواهیم برروی دنباله‌ها عملی تعریف کنیم، تا به‌کمك آن، دنباله‌ها تشکیل یك‌دستگاه‌ریاضی بدهند. از آنجائی‌که که دنباله‌ها خود یك‌تابع‌اند، اعمال برروی توابع را به‌ارث می‌برند. اگر f و g دوتابعی باقلمرو، یادامنه، مشترك X باشند و λ عددی حقیقی باشد، ترکیب دوتابع وحاصلضرب یك‌عدد در یك تابع چنین تعریف می‌شود؛ به‌ازای هر x از X،

$$(f+g)(x)=f(x)+y(x) \text{ و } (\lambda f)(x)=\lambda f(x).$$

در ضمن، تساوی دودنباله تساوی دوتابع است. بنابراین دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ را مساوی خوانیم درصورتی‌که به‌ازای هر n، $a_n=b_n$ و مجموعه اندیسگذار برای هردو یکسان باشد.

تعریف: فرض‌کنیم‌که $x=\{x_n\}$ و $y=\{y_n\}$ و λ عدد حقیقی مفروض باشد. حاصلجمع دودنباله و حاصلضرب عدد ثابت λ درآن‌را چنین تعریف می‌کنیم:

$$x+y=\{x_n+y_n\},\quad \lambda x=\{\lambda x_n\}$$

ملاحظه کنیدکه عمل جمع، وضرب یك دنباله دریك‌عدد حقیقی، درطرف‌چپ متمایزازاعمال جمع وضرب طرف‌راست (مربوط به اعداد حقیقی) است. زیرا، عمل سمت‌چپ مربوط به دنباله‌ها است، درصورتی‌که اعمال سمت راست‌مربوط به اعداد حقیقی می‌باشد.

اگر V متشکل‌ازهمه دنباله‌های اعداد حقیقی بامجموعه اندیسگذار یکسان باشند، دستگاه $(+ \text{ و } V)$ تشکیل یك‌گروه

آبلی می‌دهد. عضو خنثای این دستگاه دنباله‌ای است که تمام جملات آن صفر است و قرینه هرعضو، دنباله متقابل آن است؛ یعنی، قرینه $\{x_n\}$ دنباله $\{-x_n\}$ است. بـه سادگی ثابت مـی‌شود کـه $(V, +)$ تشکیل یك فضـای بـرداری روی میدان اعداد حقیقی می‌دهد؛ البته، برای اثبات چنین حکمی احتیاج به‌تعاریفی داریم که ذیلاً به‌بیان آن می‌پردازیم.

تعریف: (الف) دنبالهٔ ناصفر دنباله‌ایست‌که حداقل یك جمله‌آن‌صفر نباشدو اگر تمام‌جملات آن‌صفر باشد" دنبالهٔ زادنباله صفر می‌نامند وما آن را به e نمایش می‌دهیم

(ب) دو دنباله نـا صفـر $x=\{x_n\}$ و $z=\{z_n\}$ را مستقل خطی نامیم درصورتی که اگر A و B دو عدد حقیقـی باشند به‌طوری‌که $Ax+By=e$ آنگاه $A=B=0$، و اگر در این رابطه حداقل یکی از A یا B مخالف صفر بـاشد، دو دنباله را نامستقل خطی (یا وابستهٔ خطی) می‌نامند.

تبصره: تعریف (ب) را می‌توان برای k دنبالـه تعمیم داد.

مثال: دنباله‌های فیبوناتچی و لوکا مستقل خطی‌اند. زیرا اگر $x=\{x_n\}$ و $y=\{y_n\}$، به ترتیب، دنباله‌های فیبوناتچی لوکا باشند به‌طوری که $Ax+By=e$، دراین‌صورت به‌ازای $n=1$ یا $n=3$ نتیجه‌می‌شودکه $A+B=0$ و $A+2B=0$ بنابراین $A=B=0$ ولی دنبالـه‌های $\{3^n\}_{n=1}$ و $t_1=1$، $t_{n+1}=3t_n$ نامستقل خطی‌اند. چرا؟

فرض‌کنیم‌که A و B دو عدد حقیقی ثابتی بـاشند و S مجموعه همه دنباله‌هایی ازاعداد حقیقی، مانند $\{x_n\}_0^\infty$ باشند به‌طوری‌که دررابطه تراجعی $x_n=Ax_{n-1}+Bx_{n-2}$ صدق کنند $(n\geqslant 2)$. بـسهولت ثابت می‌شود که $(S;+)$ یك فضای برداری روی میدان حقیقی‌است. زیرا، اگـر $x=\{x_n\}_0^\infty$ و $y=\{y_n\}_0^\infty$ دو عضـو دلـخواهـی از S بـاشد آنگـاه $x_n=Ax_{n-2}+Bx_{n-1}$ و $y_n=Ay_{n-1}+By_{n-2}$ $(n\geqslant 2)$. بنابراین، $x_n+y_n=A(x_{n-1}+y_{n-1})+B(x_{n-2}+y_{n-2})$ یعنی، $x+y=\{x_n+y_n\}_0^\infty$ دررابطه تراجعی صدق‌می‌کند. پس، $(x+y)\in S$؛ S بااین‌عمل بسته‌است. همچنین، $e=\{0\}_0^\infty$ دررابطه تراجعی صدق مـی‌کند، پس e عضو خنثای S است. اگر $x=\{x_n\}_0^\infty$ عضوی از S باشد، $-x=\{-x_n\}_0^\infty$ در رابطه تراجعی صدق‌می‌کند، پس $-x\in S$، یعنی هـر عضو S قرینه‌ای‌در S دارد. به‌همین‌ترتیب‌می‌توان‌سایر اصول‌موضوعه فضای برداری را تحقیق‌کرد. حال فرض‌کنیم دنباله متشکل‌از قوه nم یك‌عدد حقیقی ناصفر، مانند $\{x^n\}_0^\infty$، عضو S باشد.

پس‌این دنباله دررابطه تراجعی $x^n=Ax^{n-1}+Bx^{n-2}$ صدق می‌کند.

چون $x\neq 0$ دو طرف را بر x^{n-2} تقسیم می‌کنیم. بنابراین معادله درجه دوم

$$x^2=Ax+B$$

حاصل‌می‌گرددکه آن رامعادله ممیزه(یامعادله مفسر)می‌خوانند نتیجه‌ای‌که ازاین عمل حاصل می‌گردد این است‌که ریشه‌های این معادله عضو Sاند، و اگر α و β دو ریشه متمایز معادلـه ممیزه باشد. دو دنبالـه $\{\alpha^n\}_0^\infty$ و $\{\beta^n\}_0^\infty$ مستقل خطـی‌اند. یعنی، اگـر X و Y دو عـدد حقیقی باشند بـه طوری‌کـه $X\{\alpha^n\}+Y\{\beta^n\}=\{0\}$ $(n\geqslant 0)$ آنگاه به ازای هر عدد صحیح n، که $n\geqslant 0$، $X\alpha^n+Y\beta^n=0$ به‌ازای $n=0$ و $n=1$ نتیجه می‌شود $X+Y=0$ و $X\alpha+Y\beta=0$. ازاین‌دومعادله نتیجه می‌شودکه $X=Y=0$. بهمین‌ترتیب، ثابت می‌شود که اگر معادله ممیزه ریشه مضاعف α داشته باشد آنگاه دودنباله $\{\alpha^n\}_0^\infty$ و $\{n\alpha^n\}_0^\infty$ عضو S ومستقل خطی‌اند.

با توضیحات فوق نتیجه می‌شودکـه همواره در S دو دنباله موجود است‌که مستقل خطی‌اند. سئوالی‌که در این‌جا مطرح است این‌است‌که آیا می‌توان بیش‌از دوعضو از S را انتخاب کردکه مستقل خطی باشند؟ جواب منفی‌است‌وما تحت حکم ذیل این مقصود را بیان می‌کنیم وازاثبات آن، به خاطر جلوگیری ازاطاله کلام، می گذریم.

قضیه. اولاً، هر سه عضو S نا مستقل خطی‌انـد، ثانیاً، فرض‌کنیم α و β ریشه‌های معادلهٔ ممیزه باشند و $\{x_n\}_0^\infty\in S$، دراین صورت، دوعدد حقیقی، مانند X و Y، موجود است‌که

$$x_n=X\alpha^n+Y\beta^n$$

که X و Y ازدستگاه معادله ذیل به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases}X+Y=x_0\\X\alpha+Y\beta=x_1\end{cases}$$

توجه کنیدکه اگرشرایط اولیه معادلهٔ تراجعی x_1 و x_2 باشد، دستگاه معادله فوق به‌صورت ذیل درمی‌آید.

$$\begin{cases}X\alpha+Y\beta=x_1\\X\alpha^2+Y\beta^2=\alpha_2\end{cases}$$

مثال: دنباله فیبوناتچی ولوکارا برحسب فرمول‌صریحی از n به‌دست‌آورید.

حل- اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$، به ترتیب، دنباله فیبوناتچی

و لوکا باشد آنگاه $a_1=a_2=1$ ؛ $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ $(n\geqslant 3)$. همچنین $b_1=1$ و $b_2=2$ و $b_n=b_{n-1}+b_{n-2}$ $(n\geqslant 3)$. معادله ممیزه هردو دنباله، $x^2=x+1$ است:

بنابراین، اگر α و β دوریشه متمایز معادلهٔ ممیزه باشد،

$$\alpha=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \quad و \quad \beta=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$$

بالنتیجه، $a_n=X\alpha^n+Y\beta^n$ ، که درآن ،

$$\begin{cases} X\alpha+Y\beta=1 \\ X\alpha^2+Y\beta^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(1+\sqrt{5})+Y(1-\sqrt{5})=2 \\ X(3+\sqrt{5})+Y(3-\sqrt{5})=2 \end{cases}$$

پس ازمحاسبه X و y ، نتیجه می‌شود که $X=-Y=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

بنابراین،

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

برای به دست آوردن جمله عمومی دنباله $\{b_n\}$، به ازای $n=1$ یا $n=2$ ، دستگاه ذیل حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} X(1+\sqrt{5})+Y(1-\sqrt{5})=2 \\ X(3+\sqrt{5})+Y(3-\sqrt{5})=4 \end{cases}$$

که پس ازمحاسبه X و Y ، نتیجه می‌شود که

$$Y=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \quad و \quad X=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$b_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

مثال ۲: فرض کنیم که $a_1=3$ و $a_2=6$ و $a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2})$ $(n\geqslant 3)$. دنباله $\{a_n\}$ را برحسب فرمول صریحی از n مشخص کنید.

حل- اگر α و β ریشه های معادله ممیزه آن؛ یعنی، $x^2=\frac{1}{2}(x+1)$، باشد آنگاه $\alpha=1$ و $\beta=-\frac{1}{2}$.

بنابراین ، $a_n=X+Y\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ، که‌درآن ،

$$\begin{cases} X-\frac{Y}{2}=3 \\ X+\frac{Y}{4}=6 \end{cases}$$

بالنتیجه ، $X=5$ و $Y=4$. بنابراین،

$$a_n=5+4\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

مثال ۳: دنباله $\{a_n\}$ به استقراء چنین تعریف می‌شود: $a_0=0$ و $a_1=1$ و $a_{n+1}=4a_n-a_{n-1}$ ، a_n رابرحسب n بیان کنید؟

حل- معادله ممیزه آن به‌صورت $x^2=4x-1$ است که ریشه مضاعف دارد، بنابراین، $\alpha=\frac{1}{2}$ و $\beta=\sqrt{n}\alpha$.

بالنتیجه ، $a_n=X\left(\frac{1}{2}\right)^n+Yn\left(\frac{1}{2}\right)^n$، که پس ازتشکیل دستگاه دومعادله و دومجهولی ومحاسبه X و Y نتیجه می‌شود که

$$a_n=2n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

منابع

۱) آنالیز ریاضی، جلد اول و دوم، تألیف دکتر غلامحسین مصاحب

۲) تئوری مقدماتی اعداد، جلد اول تألیف دکتر غلامحسین مصاحب

3) J. C. Burkill, Afirst course in mathematical analysis.

4) M. K. Singal & Asha Rani sinyal Afirst course in peal analysis

معما

چگونه ازمحاسبات ذهنی شمامی توان آگاهی یافت:

عددی را انتخاب کنید؛ عدد ۶ را به آن اضافه کنید؛ حاصل را در ۲ ضرب کنید؛ سپس، عدد ۸ را از آن کم کنید؛ حاصل را بر ۲ تقسیم کنید؛ عددی را که انتخاب کردید از حاصل کم کنید. در این صورت حاصل اعمال فوق عدد ۲ است .

چرا؟

اگر جواب این معما را نمی‌دانید، می‌توانید آن‌را درصفحه ۶۲ مشاهده کنید.

اثبات قضایایی با تفاضل متقارن در مجموعه‌ها

مسعود یوسف‌نیا

تعریف: فرض کنیم M مجموعه مرجع باشد. تابع شاخص مجموعه A، $(A\neq\varnothing)$، را چنین تعریف می‌کنیم:

$$I_A : M \rightarrow R$$

$$I_A(x)=\begin{cases} ۱ & x\in A \\ ۰ & x\notin A \end{cases}$$

همچنین تابع شاخص مجموعه $\varnothing$ را تابع ثابت $I_\varnothing(x)=۰$ و تابع شاخص مجموعه M را تابع ثابت $I_M(x)=۱$ تعریف می‌نمائیم.

لم ۱: شرط لازم و کافی برای آنکه $A=B$ آنستکه

$$I_A=I_B$$

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $A=B$ و x را عضو دلخواهی از M درنظر می‌گیریم. اگر $x\in A$ آنگاه $x\in B$ و $I_A(x)=۱=I_B(x)$. و اگر $x\notin A$ آنگاه $x\notin B$ و $I_A(x)=۰=I_B(x)$. بنابراین $I_A=I_B$

بالعکس فرض کنیم $I_A=I_B$ و x عضو دلخواهی از A باشد در اینصورت $I_A(x)=۱$ و در نتیجه $I_B(x)=۱$ و از آنجا $x\in B$. به‌عبارت دیگر نشان دادیم که $A\subseteq B$، به همین روش می‌توان دید که $B\subseteq A$ و درنتیجه $A=B$.

لم ۲: شرط لازم و کافی برای آنکه $A=B$ آنستکه $I_A(x)\overset{۲}{\equiv}I_B(x)$ (که در آن $a\equiv b$ معادلست، با اینکه $(۲|b-a$

تمرین ۱: نشان دهید $I_{A^c}(x)=۱-I_A(x)$

حل. فرض کنیم x عضو دلخواهی از M باشد؛ اگر $x\in A$ آنگاه $I_A(x)=۱$ و $I_{A^c}(x)=۰$ و از آنجا $I_{A^c}(x)=۱-I_A(x)$. اگر $x\notin A$ آنگاه $I_A(x)=۰$ و $I_{A^c}(x)=۱$ و درنتیجه $I_{A^c}(x)=۱-I_A(x)$.

تمرین ۲: نشان دهید $I_{B\cap B}=I_A\cdot I_B$

حل. فرض کنیم x عضو دلخواهی از M باشد؛ اگر $x\in A\cap B$ آنگاه $x\in A$ و $x\in B$ و درنتیجه

$$I_{A\cap B}(x)=I_A(x)\cdot I_B(x)$$

اگر $x\notin A\cap B$ آنگاه $x\notin A$ یا $x\notin B$ به‌عبارت دیگر $I_A(x)=۰$ یا $I_B(x)=۰$ و در نتیجه

$$I_{A\cap B}(x)=I_A(x)\cdot I_B(x)$$

نتیجه: اگر n عدد طبیعی دلخواه باشد آنگاه $(I_A)^n=I_A$، اثبات این مطلب روش استقرائی را می‌طلبد.

تمرین ۳: ثابت کنید $I_{A\cap B}=I_A+I_B-I_AI_B$

حل. فرض کنیم x عضو دلخواهی از M باشد. بنابر قوانین دمورگان داریم: $A\cup B=(A^c\cap B^c)^c$ درنتیجه:

$$I_{A\cup B}(x)=I_{(A^c\cap B^c)^c}(x)=۱-I_{A^c\cap B^c}(x)$$
$$=۱-I_{A^c}(x)\cdot I_{B^c}(x)=۱-(۱-I_A(x))\times$$
$$(۱-I_B(x))=I_A(x)+I_B(x)-I_A(x)\cdot I_B(x)$$

تمرین ۴: نشان دهید $I_{A-B}=I_A-I_AI_B$

نتیجه: اگر $B\subset A$ آنگاه $B\cap A=B$ و

$$I_{A-B}=I_A-I_{A\cap B}=I_A-I_B$$

به عبارت دیگر $B\subset A\Rightarrow I_{A-B}=I_A-I_B$.

تعریف: عمل تفاضل متقارن درمجموعه‌ها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

تمرین ۵: یکبار با استفاده از نمودار ون و یکبار با استفاده از قوانین دمورگان نشان دهید که

$$A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$$

تمرین ۶: ثابت کنید

$$I_{A\Delta B}=I_A+I_B-۲I_AI_B$$

حل:

$$I_{A\Delta B}=I_{(A\cup B)-(A\cap B)}=I_{(A\cup B)}-$$
$$-I_{(A\cap B)}=(I_A+I_B-I_AI_B)-I_AI_B=$$
$$=I_A+I_B-۲I_AI_B.$$

نتیجه: $I_{A\Delta B}(x)\overset{۲}{\equiv}I_A(x)+I_B(x)$.

قضیه: ثابت کنید به‌ازاء هرسه مجموع دلخواه A و B و C داریم: $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$

برای اثبات دو برهان ارائه می‌دهیم:

برهان اول.

$$I_{A\Delta(B\Delta C)}=I_A+I_{B\Delta C}-۲I_AI_{B\Delta C}$$

$$=I_A+I_B+I_C-2I_BI_C$$
$$-2I_A(I_B+I_C-2I_BI_C)=I_A+I_B+I_C$$
$$-2I_AI_B-2I_AI_C-2I_BI_C+4I_AI_BI_C$$

اما از طرف دیگر:

$$I_{(A\Delta B)\Delta C}=I_{A\Delta B}+I_C-2I_{A\Delta B}I_C=I_A+I_B$$
$$-2I_AI_B+I_C-2(I_A+I_B-2I_AI_B)I_C$$
$$=I_A+I_B+I_C-2I_AI_B-2I_AI_C-2I_BI_C$$
$$+4I_AI_BI_C$$

بنابراین $I_{A\Delta(B\Delta C)}=I_{(A\Delta B)\Delta C}$ و ازآنجا بنابر لم ۱ حکم بر قرار است.

برهان دوم.

$$I_{A\Delta(B\Delta C)}(x)\overset{2}{\equiv}I_A(x)+I_{B\Delta C}(x)\overset{2}{\equiv}I_A(x)+$$
$$+I_B(x)+I_C(x)$$

و همچنین:

$$I_{(A\Delta B)\Delta C}(x)\overset{2}{\equiv}I_{A\Delta B}(x)+I_C(x)\overset{2}{\equiv}I_A(x)+$$
$$+I_B(x)+I_C(x)$$

بنابراین $I_{A\Delta(B\Delta C)}(x)\overset{2}{\equiv}I_{(A\Delta B)\Delta C}(x)$ و از آنجا بنابر لم ۲ حکم برقرار است.

تمرین ۷: نشان دهید بازاء هر سه مجموع دلخواه A و B و C داریم:

$$A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$$
$$(B\Delta C)\cap A=(B\cap A)\Delta(C\cap A)$$

تمرین ۸ : نشان دهید $\mathcal{P}(A)$، یعنی مجموعه تمام زیرمجموعه‌های مجموعه A ، با عمل تفاضل متقارن و عمل اشتراك تشکیل يك حلقه تعویضپذیر ویکدار می‌دهد. (یعنی $(\mathcal{P}(A)\ ,\ \Delta\ ,\ \cap)$ يك حلقه تعویضپذیر و یکدار است).

تمرین ۹: با يك مثال نقض نشان دهید که

$$(\mathcal{P}(A)\ ,\ \Delta\ ,\ \cap)$$

يك حوزه صحیح (درست) نیست.

تمرین ۱۰: فرض‌کنیم $B\subset A$، نشان دهید $\mathcal{P}(B)$ يك ایده‌ال و همچنین يك زیرحلقه $\mathcal{P}(A)$ است.

تمرین ۱۱: حلقه اعداد حقیقی را درنظر بگیرید، اگر Q مجموعه‌اعداد گویا باشد ثابت‌کنید Q يك‌زیرحلقه R است ولی ایده‌آلی از R نیست.

رسم نمودار توابع

همانطورکه می‌دانیم منظور از ترکیب دو تابع f و g با دامنه‌های D_f و D_g و بردهای R_f و R_g عبارت از تابعی است‌که دامنه آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_{f\circ g}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}$$

ایـن تابع را با نماد $f\circ g(x)$ نشان می‌دهند و تابع تابع هم می‌نامند.

دراین مقاله می‌خواهیم بدانیم آیا بدون در دست داشتن ضابطه $f\circ g(x)$ وتنها بااستفاده ازنمودارهای $f(x)$ و $g(x)$ می‌توانیم نمودار $f\circ g(x)$ را رسم‌کنیم؟ آیـا اصولاً اینکار به‌زحمتش‌می‌ارزد؟ جواب این‌سئوال مثبت است. علاوه برآن، خواهیم دیدکه با استفاده از این روش، چه امکانات وسیعی در رسم‌نمودارها دردسترس‌ماقرارمی گیرد. مثلاً رسم‌نمودار توابعی نظیر $y=\sin(\cos x)$ و $y=\cos(\log x)$ و $x=[|x|-1)]$ و ... از طریق معمولی مشکل و در عین حال وقت‌گیر هستند. درصورتیکه با اندك دقتی دراین نوع توابع‌پی‌خواهیم بردکه می‌توان معمولاً اینگونه توابع را ترکیب دوتابع (یاچندتابع) درنظر گرفت و نمودارآنرا بااستفاده از روشی‌که خواهدآمد، رسم کرد.

مثلاً تابع $y=\sin(\cos x)$ را می‌توان چنین نوشت:

$$f(x)=\sin x$$
$$\Rightarrow\ f\circ g(x)=\sin(\cos x)$$
$$g(x)=\cos x$$

پس‌بارسم نمودار $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ که منحنی‌های ساده‌ای هستند نمودار $y=\sin\ (\cos x)$ را بدست می‌آوریم.

همچنین:

$$f(x)=\cos x$$
$$\Rightarrow\ f\circ g(x)=\cos(\log(x))$$
$$g(x)=\log x$$

[ ] به‌معنی جزء صحیح است

$$f(x)=[x]$$

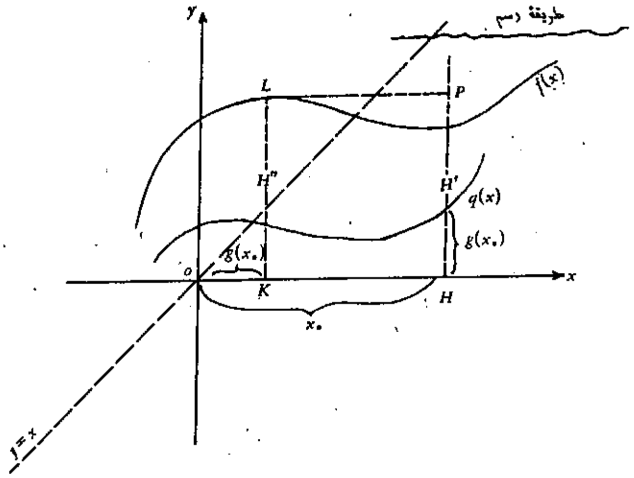
مرکب $g\circ f$ با استفاده از نمودار f و g

ابراهیم دارابی

$$\Rightarrow f\circ g(x)=[|x|-1]$$

$g(x)=|x|-1$

یعنی با رسم نمودارهای توابع $\cos x$, $\log x$, $[x]$, $|x|-1$ می‌توان نمودار توابع $\cos(\log x)$ و $[|x|-1]$ را بدست آورد.



فرض می‌کنیم مطابق شکل نمودار، $f(x)$ و $g(x)$ را داشته باشیم. می‌خواهیم نمودار $f\circ g(x)$ را رسم کنیم. با توجه به تعریف دامنه $f\circ g(x)$ که در بالا به‌آن اشاره شد، طول دلخواه $\overline{OH}=x_0$ را روی محور طولها انتخاب می‌کنیم و به‌ازاء این طول، $g(x_0)=\overline{HH'}$ را به‌دست می‌آوریم. حال باید به‌ازاء طولی مساوی با $g(x_0)=\overline{HH'}$ مقدار تابع $f(x)$ را تعیین کنیم تا $f\circ g(x_0)$ حاصل شود.

برای اینکه طولی برابر $\overline{HH'}=g(x_0)$ به‌دست آوریم خط $y=x$ یعنی نیمساز ربع اول و سوم را رسم کرده و از نقطه H' خطی بموازات ox رسم می‌کنیم تا $y=x$ را در نقطهٔ H'' قطع کند. داریم:

$$g(x_0)==\overline{KH''}=\overline{HH'}=\overline{OK}$$

پس کافیست به‌ازاء طول $\overline{OK}=g(x_0)$ مقدار $f(x)$ را تعیین کنیم. از روی شکل دیده می‌شود مقدار آن $\overline{KL}$ می‌شود. یعنی:

$$f\circ g(x_0)=\overline{KL}$$

اما مقدار $f\circ g(x_0)$ را در نقطه H به‌طول x_0 لازم داریم. پس $\overline{KL}$ را به‌موازات خود انتقال می‌دهیم تا به‌صورت

$$\overline{HP}=f\circ g(x_0)$$

درآید. یعنی به ازاء طولی برابر x_0 نقطه P از نمودار تابع $f\circ g(x)$ حاصل می‌شود.

بنابراین برای رسم نمودار تابع $f\circ g(x)$ کافیست نقاط $g(x)$ را انتخاب کرده و نقاط نظیر آنها را به‌طریق بالا از تابع $f\circ g(x)$ به‌دست آوریم.

با استفاده از این روش، بسیاری از منحنی نمایش توابع به‌آسانی رسم می‌شوند:

مثال ۱ــ مطلوبست رسم نمودار تابع $y=\cos(1-x)$ می‌توان نوشت:

$f(x)=\cos(x)$

$$\Rightarrow f\circ g(x)=\cos(1-x)$$

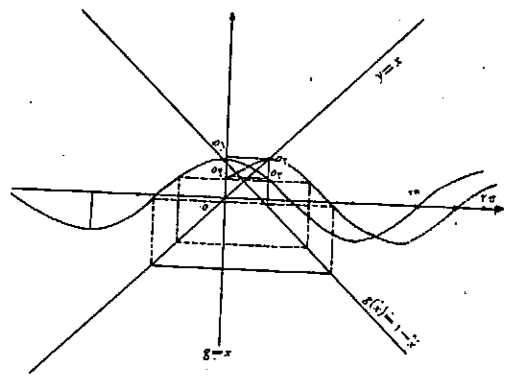
$g(x)=1-x$

پس ابتدا نمودار $f(x)=\cos x$ و $g(x)=1-x$ را مطابق شکل رسم می‌کنیم. (شکل ۱) و سپس نقطه‌ای مانند o بطول صفر روی محور طولها درنظرمی گیریم داریم: $g(0)=oo'=1$ از نقطه o_1 خطی به‌موازات ox رسم می‌کنیم تا $y=x$ را در نقطه o_2 قطع کند و مطابق آنچه که گفته شد از o_2 خطی به موازات oy رسم می‌کنیم تا $f(x)$ را درنقطه o_3 قطع کند. از o_3 خطی موازی با ox رسم می‌کنیم تا خط عمود برمحور ox درنقطه o را در o_4 قطع کند پس به‌ازاء $x=0$ نقطه o_4 از تابع

$\cos(1-x)$ را داریم.

اگر چند نقطه دیگر از تابع $\cos(1-x)$ را به دست آوریم و منحنی را بطور دقیق رسم کنیم خواهیم دید که در واقع طولهای نقاط نمودار $y=\cos x$ به‌اندازه ۱ واحد به موازات محور طولها انتقال پیدا کرده‌اند.

در شکل (۱) جزئی از نمودار $\cos(1-x)$ که در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ واقع شده رسم گردیده است.



شکل (۱) — نمودار $f\circ g(x)$ با نقطه‌چین رسم شده است.

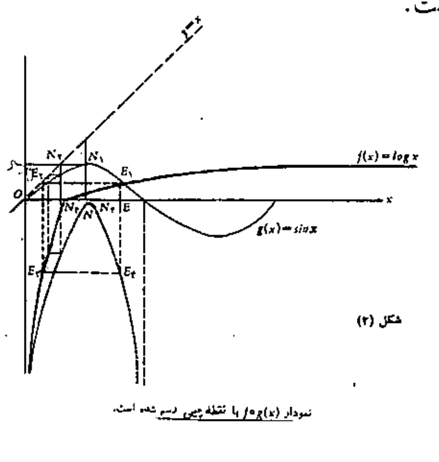
مثال ۲ـ مطلوبست رسم نمودار تابع $y=\log(\sin x)$

حل: داریم

$$g(x)=\sin x$$
$$\Rightarrow f\circ g(x)=\log(\sin x)$$
$$f(x)=\log x$$

برای طول برابر OE نقطه E_4 از تابع $f\circ g(x)$ به‌دست آمده است مراحل پیدایش نقطه E_4 به‌ترتیب با E_1، E_2، E_3 و E_4 نشان داده شده است.

درضمن چون $\sin x$ بین π و 2π منفی است واعداد منفی لگاریتم ندارند $f\circ g(x)$ دراین فاصله تعریف نشده درنتیجه دراین فاصله $f\circ g(x)$ رسم نشده است. همچنین به‌ازاء $x=0$ و $x=\pi$ که $\sin x$ صفر می‌گردد $f\circ g(x)$ به‌سمت $-\infty$ میل کرده است.



شکل (۲) — نمودار $f\circ g(x)$ با نقطه‌چین رسم شده است.

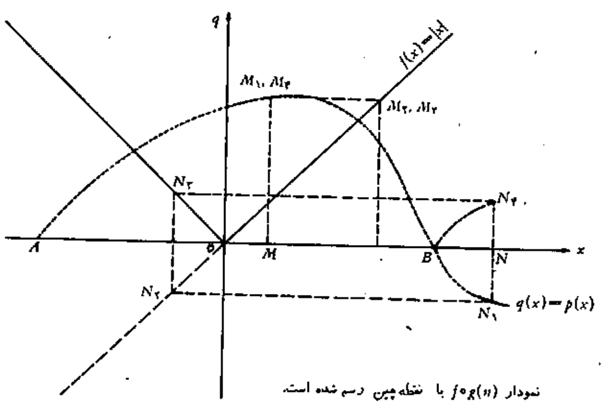
مثال ۳ـ مطلوبست رسم نمودار تابع $y=|P(x)|$ درصورتی‌که نمودار $P(x)$ را داشته باشیم.

حل: واضح است که منحنی را (و منحنی قبلی را) می‌توان از طریقی که در شمارهٔ ۶ـ۵ مجلهٔ رشد توضیح داده شده رسم کرد. یعنی ابتدا $P(x)$ را رسم نمود و سپس قرینهٔ آن را نسبت به محور طولها به‌دست آورد. و جزئی از شاخه‌های منحنی را که بالا و روی محور طولها قرار دارد انتخاب کرد. اما منظور ما دراینجا استفاده از خاصیت تابع مرکب است گرچه نتیجه یکی خواهد بود.

$$g(x)=P(x)$$
$$\Rightarrow f\circ g(x)=|P(x)|$$
$$f(x)=|x|$$

بنابراین مطابق شکل (۳) ابتدا نمودار $f(x)=|x|$ و سپس نمودار $P(x)$ رسم می‌کنیم.

با استفاده‌ازروش بالامنحنی‌نمایش $f\circ g(x)=|P(x)|$ به‌دست می‌آید.



نمودار $f\circ g(x)$ با نقطه‌چین رسم شده است.

شکل (۳)

به‌طوری‌که دیده می‌شود به‌ازاء هرطول درفاصلهٔ AB نقاط نظیر از $g(x)$ و $f\circ g(x)$ برهم منطبق می‌شوند. مثلاً به ازاء طول OM نقطه M_4 از $f\circ g(x)$ و M_1 از $g(x)$ به دست آمده‌اندکه برهم منطبق هستند.

اما به‌ازاء طول ON نقطه N_1 از $g(x)$ با نقطه N_4 از $f\circ g(x)$ نسبت به‌محور طولها قرینه یکدیگرند این موضوع درمورد تمام نقاط $g(x)$ که در زیر محور طولها قرار دارند همواره صادق‌است. پس‌عملاً همان‌روشی‌که دربالا به‌آن‌اشاره شد دراین روش هم تکرار می‌شود. منحنی AM_1BN_4 جواب

مسئله است.

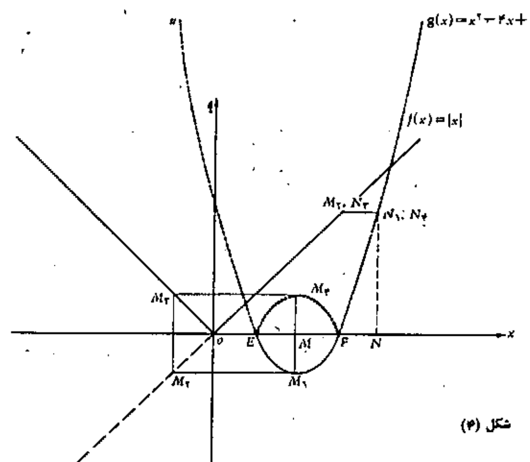
مثال ۴ـ مطلوبست رسم نمودار $y=|x^2-4x+3|$

حل : داریم:

$$g(x)=x^2-4x+3 \quad \Rightarrow f\circ g(x)=|x^2-4x+3|$$

$$f(x)=|x|$$

نمودار $f(x)$ و $g(x)$ را مطابق‌شکل رسم کرده و $f\circ g(x)$ را به‌دست آورده‌ایم. دیده می‌شود‌که به‌ازاء طول OM نقطه M_4 و به‌ازاء طول مساوی با ON نقطه N_4 از $f\circ g(x)$ به دست آمده است. شاخه uEM_4FV جواب مسئله است.



شکل (۴)

نمودار تابع $f\circ g(x)$ با نقطه‌چین رسم شده است.

مثال ۵ـ مطلوبست رسم نمودار تابع $Y=[x^2-2x]$

حل : می‌توان نوشت:

$$f(x)=[x] \quad \Rightarrow f\circ g(x)=[x^2-2x]$$

$$g(x)=x^2-2x$$

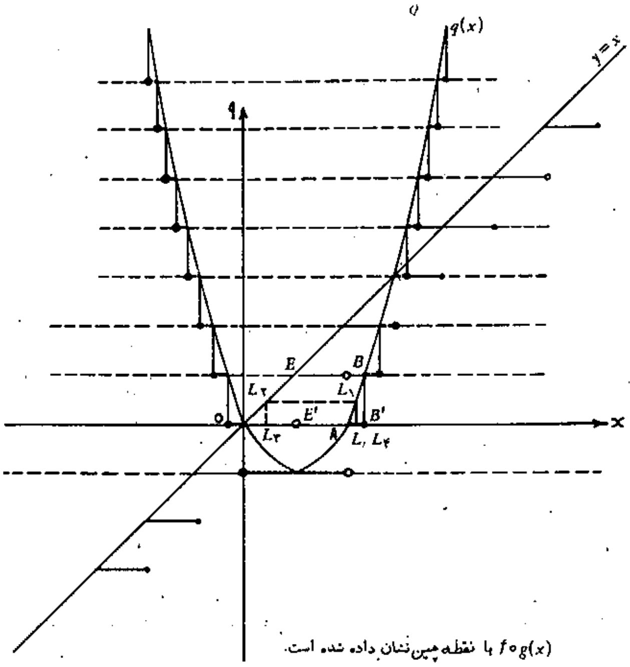
ابتدا مطابق شکل $f(x)$ و $g(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس طبق روش بالا $f\circ g(x)$ را بدست می‌آوریم. شکل (۵)

نکته: طریقه‌رسم نشان می‌دهد که عملاً جزئی ازمنحنی $g(x)$ که بین دو خط $y=n$ و $y=n+1$ واقع شده

$$(n=0,\pm1,\mp2\ldots\pm n)$$

روی خط $y=n$ تصویر می‌گردد. یک سر این خطوط تصویر که برروی منحنی قراردارند، جزء $f\circ g(x)$ محسوب‌می‌شوند و سر دیگر آنها جزء منحنی نیستند.

در واقع اگر قسمتی از نمودار $g(x)$ راکه بین خطوط $y=0$ و $y=1$ واقع شده به $\overset{\frown}{AB}$ نشان دهیم و همان روش



$f\circ g(x)$ با نقطه‌چین نشان داده شده است.

شکل (۵)

کلی را روی نقاط آن بکار بریم یعنی به‌ازاء مقادیری از x که درآن $x\in[AB']$ نقاط مختلف $\overset{\frown}{AB}$ را پیداکرده و از آن نقاط خطوطی به موازات محور طولها رسم‌کنیم تا خط $y=x$ را درنقاط مختلف پاره خط OE قطع‌کند و سپس از نقاط تقاطع خطوطی به‌موازات محور oy رسم‌کنیم تا تابع $f(x)$ را قطع کنند. مجموعهٔ نقاط پای عمودها، خط OE' را تشکیل‌خواهند داد. اکنون باید از این نقاط خطوطی به‌موازات محورطولها رسم‌کنیم تا عمودهـای مرسوم از نقاط مختلف AB' را قطع کنند. ازروی‌شکل‌دیده می‌شوداین‌نقاط برخورد، همان‌مجموعه AB' می‌شوند که‌تصویر $\overset{\frown}{AB}$ برروی‌خط $y=0$ است. روی‌شکل روش‌ترسیم به‌کمک‌نقطه L واقع برروی $\overset{\frown}{AB}$ نشان داده شده‌است

بنا براین عملاً برای رسم نمودارتابع $y=[f(x)]$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ـ منحنی نمایش تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم.

۲ـ خطوطی به معادلات $y=n$، $(n=0,\pm1,\pm2)$ را رسم می‌کنیم.

۳ـ قسمتی از منحنی تابع $f(x)$ راکـه بین دو خط به معادلات $y=n$ و $y=n+1$ واقع شده روی خط به معادلـه $y=n$ تصویر می‌کنیم.

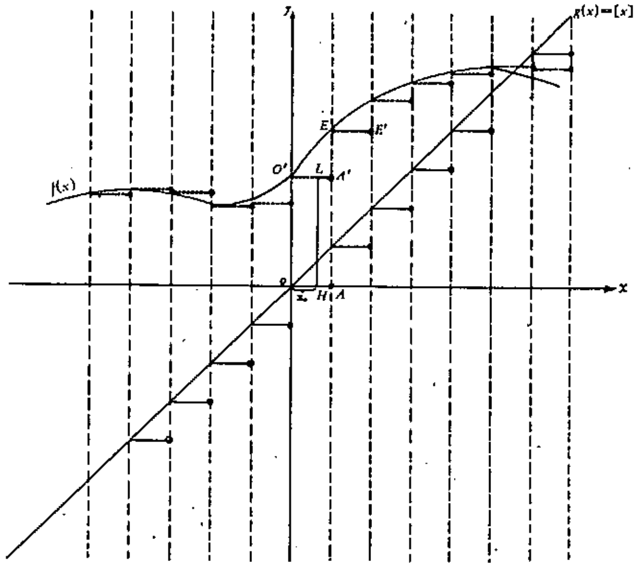
از پاره خطهـای حاصل آن سر پاره خطها کـه روی منحنی‌تابع $f(x)$ قـرار دارند جزء منحنی تابع $f\circ g(x)$ یا $[f(x)]$ محسوب می‌شوند. سر دیگر پاره خطهای تصویرجزء منحنی نیستند.

مثال ۶ـ مطلوبست رسم نمودار تابع $y=f[x]$

حل: می‌توان نوشت:

$$g(x)=[x]$$
$$\Rightarrow y=f\circ g(x)=f([x])$$
$$f(x)=f(x)$$

پس ابتدا نمودار توابع $g(x)=[x]$ و $f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس مطابق شکل نمودار $y=f([x])$ را به دست می‌آوریم. شکل (۶)



منحنی تابع $f\circ g(x)$ با نقطه‌چین نشان داده شده است.

همانطورکه از روی شکل دیده می‌شود به‌ازاء $x\in[0,1)$ مقدار $g(x)$ صفر می‌شود که نمایش منحنی آن پاره‌خط OA می‌باشد. اگر مطابق روش کلی برای رسم $f\circ g(x)$ عمل کنیم نقطه‌دلخواه H به‌طول x_0 را درفاصلهٔ $[0,1)$ درنظرمی‌گیریم و از آن نقطه عمودی اخراج می‌کنیم تا $g(x)$ را قطع کند نقطه تقاطع H به طول x_0 می‌شود. اکنون اگر از این نقطه خطی موازی ox رسم کنیم تا خط $y=x$ را قطع کند، نقطه تقاطع نقطه o مبدأ مختصات خواهدبود. عمودی که از o اخراج شود تابع $f(x)$ را درنقطه o' قطع می‌کند.

اکنون باید O' را به‌نقطه L منتقل کنیم. پس نقطه L به‌ازاء $x=x_0$ برروی $f\circ g(x)$ قرار می‌گیرد.

واضح است که اگر به‌ازاء هر x متعلق به‌فاصله $[0,1)$ همین کار را انجام دهیم نقاط نظیر L بر روی $O'A'$ قرار خواهدگرفت. یعنی به‌ازاء هرمقدار x که $x\in[0,1)$ نقاطی‌از از تابع $f\circ g(x)$ به دست می‌آیند که برروی $[O'A')$ قرار دارند. با اندك دقتی می‌توان فهمیدکه پاره‌خط $O'A'$ تصویر قسمتی از منحنی تابع $f(x)$ برروی $f(0)$ می‌باشدکه بین $x=0$ و $x=1$ واقع شده است. همچنین پاره خط EE' که جزئی از منحنی نمایش $f\circ g(x)$ را نشان می‌دهد، تصویر آن قسمت ازمنحنی تابع $f(x)$ برروی خط $f(1)$ می‌باشدکه که بین $x=1$ و $x=2$ واقع شده است. ازآنجا طرز عمل برای رسم نمودار تابع $f\circ g(x)=f([x])$ به طریق زیر به‌دست می‌آید:

۱ـ منحنی نمایش تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم.

۲ـ خطوطی به‌معادلات $x=n$، $(n=0,\pm1,\pm2\dots)$ را هم رسم می‌کنیم.

۳ـ آن قسمت از منحنی تابع $f(x)$ که بین $x=n$ و $x=n+1$ واقع‌شده برروی‌خط به‌معادله $f(n)$ تصویرمی‌کنیم.

۴ـ آن سر پاره خط‌های تصویرکه روی منحنی تابع $f(x)$ قراردارند، جزء منحنی‌تابع $f\circ g(x)$ محسوب‌می‌شوند. سر دیگرشان جزء منحنی تابع نیستند.

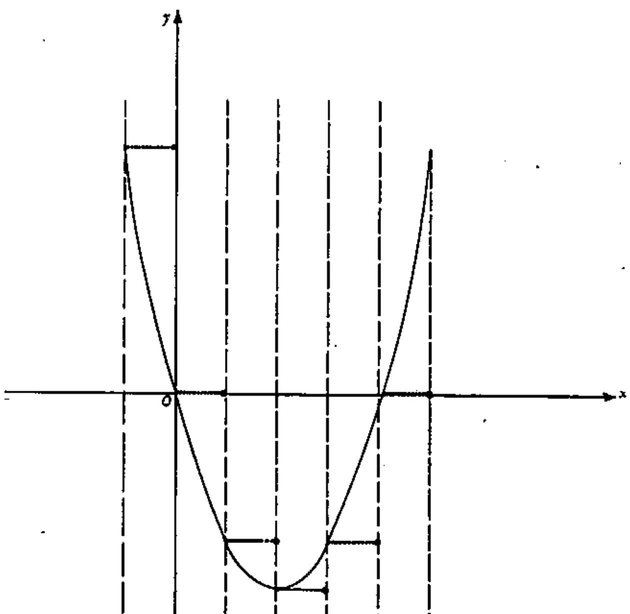
مثال ۷ـ مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y=[x]^2-4[x]$$

حل: می‌توان نوشت:

$$g(x)=[x]$$
$$\Rightarrow f\circ g(x)=[x]^2-4[x]$$
$$f(x)=x^2-4x$$

پس تابع $f(x)=x^2-4x$ و $g(x)=[x]$ را رسم کرده طبق دستور عمل می‌کنیم:



نمودار تابع $f\circ g(x)$ با نقطه‌چین نشان داده شده است.

شکل (۷)

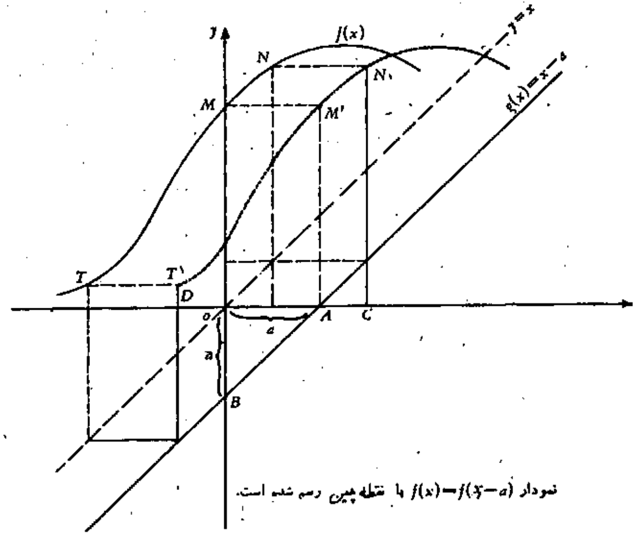
نکته: با استفاده ازخاصیت تابع مرکب می‌توان نمودار توابع نظیر $f(x-a)$ و $f(-x)$ و $f(kx)$ را هم از روی نمودار $f(x)$ به‌دست آورد.

مثال ۸ـ مطلوبست رسم منحنی نمایش تابع $y=f(x-a)$ از روی منحنی نمایش تابع $f(x)$.

حل: می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=x-a \\ f(x)=f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f\circ g(x)=f(x-a)$$

پس خط راست $g(x)=x-a$ و نمودار تابع $f(x)$ را رسم کرده طبق دستور عمل می‌کنیم. شکل (۸)



شکل (۸)

از روی شکل دیده می‌شود که نقاط M و N و T از نمودار تابع $f(x)$ به‌نقاط M' و N' و T' از تابع $f\circ g(x)$ یا تابع $f(x-a)$ تبدیل شده‌اند در واقع هر نقطه از نمودار $f(x)$ به‌اندازه a به‌موازات محور طولها انتقال پیدا کرده‌اند. (به‌مثال اول هم نگاه کنید)

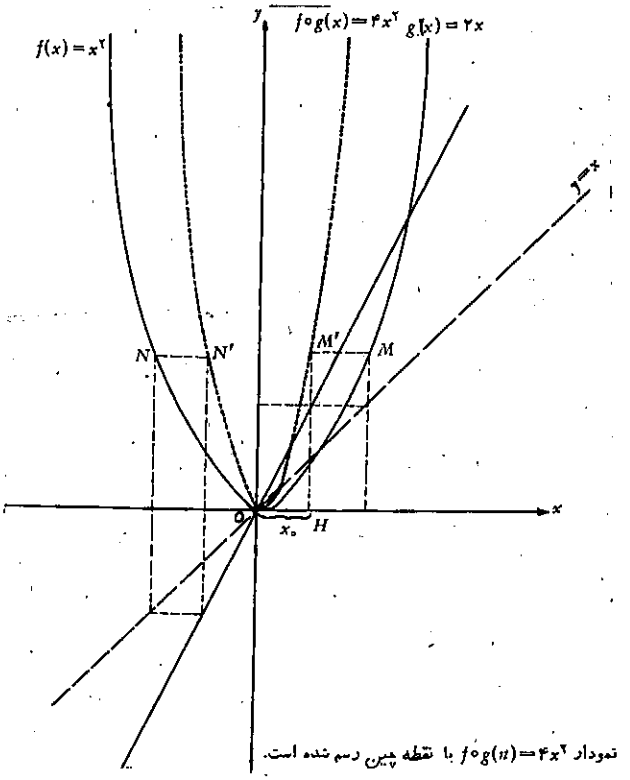
نکته: اگر خواسته باشیم نمودار $f(x+a)$ را از روی نمودار $f(x)$ رسم کنیم انتقال درجهت مخالف محور ox انجام می‌گیرد.

مثال ۹ـ مطلوبست رسم نمودار تابع $f(kx)$ از روی نمودار $f(x)$.

حل

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=kx \\ f(x)=f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f\circ g(x)=f(kx)$$

برای سادگی عمل فرض می‌کنیم ۲ $=k$ و $f(x)=x^2$ باشد. پس $g(x)=2x$ و $f(x)=x^2$ را رسم و طبق دستور عمل می‌کنیم. شکل (۹)

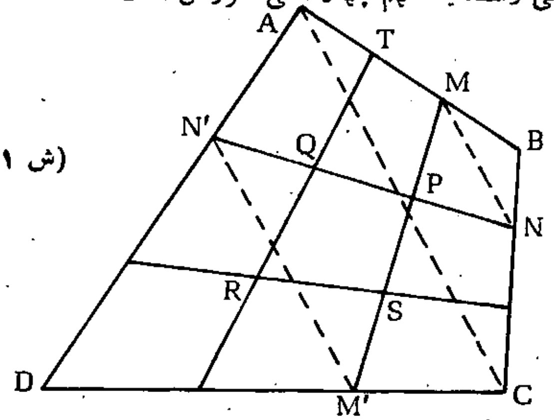


شکل (۹)

از روی شکل دیده می‌شود $f\circ g(x_0)=HM'$ و به‌آسانی ثابت می‌شود که طول نقاط M' و N' نصف طولهای نقاط M و N هستند. یعنی عملاً* اگر طول تمام نقاط نمودار $f(x)$ را نصف کنیم (K برابر کوچک کنیم) نمودار $f(2x)$، ($f(kx)$) به‌دست می‌آید.

حل مسأله مسابقه شماره ۹

هریك از اضلاع یك چهارضلعی محدب را بهسه قسمت متساوی تقسیم می‌کنیم و نقاط تقسیم هـر دو ضلع مقابل را به یکدیگر وصل می‌کنیم به قسمی‌که نقاط تقسیم دوضلع مقابل را بههم وصل می‌کنند ودر داخل چهارضلعی متقاطع باشند، چهار ضلعی بـه نـه قسمت تقسیم مـی‌شود ثابت‌کنید مساحت چهار ضلعی وسط، یك نهم چهارضلعی مفروض است.



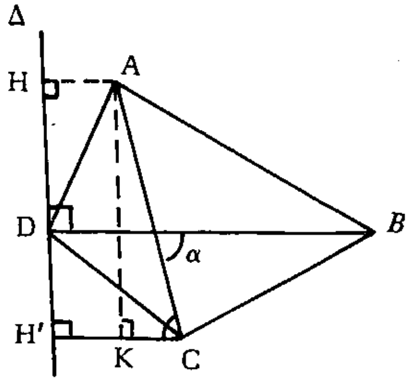
(ش ۱)

پاسخ از آقای جمال‌الـدین جهانتابی دبیر دبیرستانهای قروهٔ کردستان

ابتدا * لم زیر را ثابت می‌کنیم

لم. مساحت چهارضلعی محدب بـرابـر است با نصف حاصلضرب یك قطر در تصویر قطر دیگر برروی خطی که بر امتداد قطر اول عمود است.

برهان. اگر HH' تصویـر عمودی قطر AC روی خط Δ که بر امتداد BD عمود شده است ، بـاشد خواهیم داشت



(ش ۲)

$$S_{ABCD}=S_{ABD}+S_{BCD}=\frac{1}{2}BD\cdot DH+\frac{1}{2}BD\cdot DH'$$
$$=\frac{1}{2}BD\cdot HH'$$

تعبیر مثلثاتی. مساحت چهار ضلعی محدب برابر است با نصف حاصلضرب دو قطر در سینوس زاویه (حاده یا منفرجه) بین دو قطر

برهان. اگر زاویه بین دو قطر را α فرض‌کنیم و از A عمود AK را بر CH' وارد کنیم خواهیم داشت $\angle ACH'=\alpha$ (نسبت به خطوط موازی BD و CH' و قاطع AC) همچنین $AK=HH'$ بنابراین در مثلث قائم‌الزاویـه AKC خواهیم داشـت $AK=AC\sin\alpha$ و چـون $AK=HH'$ پـس $HH'=AC\sin\alpha$ خواهیم داشت

$$S=\frac{1}{2}BD\cdot HH'=\frac{1}{2}BD\cdot AC\sin\alpha.$$

اکنون بااستفاده ازلم فوق مسأله را حل می‌کنیم: اگرخطوطی که نقاط تقسیم هرضلع را به نقطه متناظر از ضلع روبرووصل می‌کند وتر بنامیم ثابت می‌کنیم هروتر بهوسیله وترهای دیگر به سه پاره خط مساوی تقسیم می‌گردد برای نمونه در شکل ۱ مقابل وتر NN' را درنظر می‌گیریم خواهیم داشت:

$$\Delta_{ABC}:\frac{BM}{BA}=\frac{BN}{BC}=\frac{1}{3}\Rightarrow MN\|AC,$$

$$MN=\frac{1}{3}A\cdot C \qquad (1)$$

$$\Delta_{ADC}:\frac{DM'}{DC}=\frac{DN'}{DA}=\frac{2}{3}\Rightarrow M'N'\|AC,$$

$$M'N'=\frac{2}{3}AC(2) \qquad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) می‌توان نتیجه‌گرفت که $MN\|M'N'$ و $MN=\frac{1}{2}M'N'$ دو مثلـث PMN و $PM'N'$ متشابهند

* البته لم فوق مقدماتی است و برهان آن شناخته شده است.

بنا براین $\frac{1}{2}=\frac{MN}{M'N'}=\frac{PN}{PN'}$ یعنی $PN=\frac{1}{3}NN'$ به‌طریق مشابه خواهیم داشت $QN'=\frac{1}{3}NN'$ پس $PQ=\frac{1}{3}NN'$ بنا براین NN' به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. درمورد سایر وترها نیز اثبات به همین شکل می‌باشد. چهار ضلعی $MNSQ$ متوازی‌الاضلاع است زیرا قطرهای MS و QN یکدیگر را نصف کرده‌اند می‌توان گفت $QS\|MN$ و $QS=MN$ یعنی $QS\|AC$ و $QS=\frac{1}{3}AC$ همچنین به دلیل متوازی‌الاضلاع بودن چهار ضلعی $TPRN'$ با دلایل مشابه خواهیم داشت: $PR\|BD$ و $PR=\frac{1}{3}DB$ بنا براین اقطار چهار ضلعی $PSRQ$ با اقطار چهار ضلعی $ABCD$ موازیند یعنی زاویه بین اقطار در هر دو چهار ضلعی برابرند داریم

$$\frac{S_{PRSQ}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{2}PR\cdot SQ\sin\alpha}{\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\alpha}=\frac{PR\cdot SQ}{AC\cdot BD}=\frac{\frac{1}{3}BD\cdot\frac{1}{3}AC}{BD\cdot AC}=\frac{1}{9}$$

برهان تمام است.

روش فوق در هیأت تحریریه بهترین راه حل مسأله تشخیص داده شد سایر افرادی‌که پاسخ‌های صحیح به مسأله ارسال نموده‌اند عبارتند از، آقایان:

۱ـ حسام بهزاد رضایی‌زند
۲ـ پیوند فلاح تهرانی
۳ـ شهاب صفرزاده
(۱ تا ۳: مشترکاً حل کرده‌اند)
۴ـ عزت‌اله جاملو
۵ـ فرهود پوریوسفی
۶ـ فریدون حیدری
۷ـ مسعود لنگری
۸ـ محمد ابراهیم نجفی
۹ـ سعید همتی
۱۰ـ سعید ذاکری

آقای سعید ذاکری قسمت اول مسأله یعنی اینکه پاره خط‌های و اصل نقاط تقسیم یکدیگر را به سه‌قسمت مساوی تقسیم می‌کنند دانسته فرض‌کرده‌اند قسمت دوم را با روش خاصی حل نموده‌اندکه علیرغم مفصل بودن جالب است و گویای استعداد، دقت وپشتکار ایشان می‌باشد.

ضمناً سایر نامه‌های ارسالی دراین مورد بعد از موعد مقرر به دستمان رسیدکه از ذکرنام فرستندگان آنها معذوریم.

مسائل شماره ۱۲

تهیه و تنظیم از: جوادلالی

۱ـ فرض‌کنید x_1, x_2, x_3 سه‌عددحقیقی باشند به‌طوری که $x_1x_2x_3=y^3$. ثابت‌کنید

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\leqslant(1+y)^3.$$

[مسابقات انگلستان، فرستنده، محمدرضا حقیقی از اصفهان]

۲ـ فرض‌کنید که L خطی به‌معادله $Ax+By+C=0$ و P_1 نقطه‌ای در صفحه به مختصات (x_1,y_1) باشد قاعدهٔ زیر را توضیح دهید:

اگر علامت Ax_1+By_1+C موافق علامت B باشد آنگاه نقطه $P_1(x_1,y_1)$ بالای خط L واقع است؛ اگرعلامت آن مخالف علامت B باشد آنگاه نقطه زیرخط L واقع است (درقاعده فوق فرض براین بودکه $B\neq 0$. ولی اگر $B=0$، قاعده چگونه خواهد بود.).

۳ـ بسجمله‌ای (کثیرالجمله‌ای) ذیل را به حاصلضرب عوامل تجزیه کنید

$$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$$

۴ـ تابع علامت، که با نماد $Sgn x$ نمایش داده می‌شود، چنین تعریف می‌شود؛ اگر $x>0$ آنگاه $Sgn x=1$، اگر $x<0$ آنگاه $Sgn x=-1$، $Sgn 0=0$. نمودار ذیل را رسم کنید

$$f(x)=(x+1)^2 Sgn(x^2-1)+x^2 Sgn[x]$$

(در نمایش $f(x)$ کروشه به معنی جزء صحیح است)

۴ـ فرض‌کنید α و β دو ریشه متمایز معادله $a\cos x+b\sin x=c$ باشند ثابت کنید که

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}$$

۵ـ فرض کنیم M نقطه تلاقی سه ارتفاع مثلث ABC (بازوایای حاده) و α، β، γ فاصله M از سه رأس A، B، C باشد. همچنین، فرض‌کنید R شعاع دایره محیطی و a و b، c

اضلاع مثلث باشد ثابت کنید.

$$\frac{\alpha}{bc}+\frac{\beta}{ca}+\frac{\gamma}{ab}=\frac{1}{R}$$

[فرستنده؛ فرهاد غلامی از اندیمشک]

۶ـ روی اضلاع یك کنج سه قائمه طولهای $OA=a$، $OB=b$، $OC=c$ را جـدا کرده‌ایم. ثابت کنید که در چهار وجهی $OABC$ (الف) تصویر نقطه O روی وجه ABC منطبق بر H، نقطه تلاقی سه ارتفاع مثلث ABC، است.

(ب) $S^2_{OCA}=S_{HCA}\cdot S_{ABC}$، $S^2_{OBC}=S_{HBC}\cdot S_{ABC}$

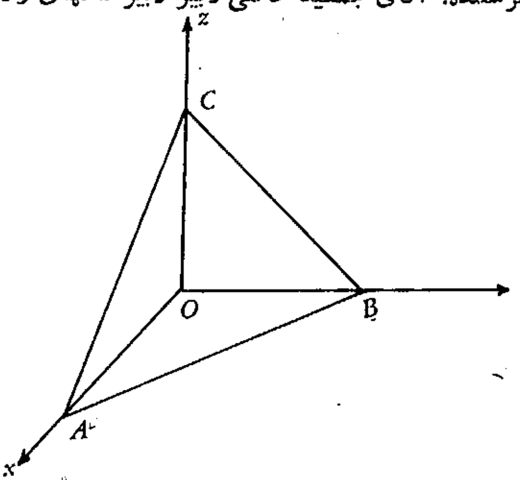
$$S^2_{OAB}=S_{HAB}\cdot S_{ABC}$$

(ج) $S^2_{ABC}=S^2_{OAB}+S^2_{OBC}+S^2_{OCA}$

ازحالت (ج) مساحت وجه ABC را برحسب a، b، c به‌دست آورید.

(د) ثابت کنید $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

[فرستنده؛ آقای جمشید خالقی دبیر دبیرستانهای زنجان]



۷ـ تعداد محورهای تقارن یك چهار وجهی منتظم کدام است؟

۲، ـد ۴، ـج ۱، ـب ۳، ـالف

[سئوال کنکور سراسری، فرستنده آقای حبیب‌الله گودرزی از تهران]

۸ـ فـرض کنـید r عـددی اصم بـاشـد انتگـرال $\int_0^r[x]|\sin x|dx$ را محاسبه‌کنید.

[فرستنده طاهر شفاعی]

۹ـ فرض‌کنید $(x\geqslant 0)$ $f(x)=\int_0^x[t]^2dt$

اولاً، نمودار تابع f را دربازه $[0,3]$ رسم‌کنید.

ثانیاً، معادله ذیل را در R حل کنید

$$\int_0^x[t]^2dt=2(x-1).$$

۱۰ـ دوشهر که‌دریك طرف رودخانه‌ای واقع‌اند توافق کرده‌اند که مشترکاً یك موتورخانه و تصفیه خانه آب درکنار رودخانه بنا کنند. اگـر فاصله دو شهر از رودخانـه a و b و فاصله خود آنها c باشد. نشان دهید که حداقل لولهٔ لازم برای اتصال این دوشهر به تصفیه‌خانه برابر است با

$$\sqrt{c^2+4ab}$$

۱۱ـ تعریف (۱) عنصر x از حلقهٔ A را یك عنصر پوچ توانA نامیم‌درصورتی که‌عددطبیعی مانندn یافت‌شود به‌طوری که $x^n=0$

۲) عنصر c از حلقهٔ یکدارA را یکال نامیم در صورتی که b وd ای از A موجود باشد به طوری که $dc=cb=1$.

(الف) فرض‌کنید که A حلقهٔ جابجایی و یکدار باشد. ثابت کنید که به‌ازای هرعنصرپوچ توان x ازA، عنصر $x-1$ از A یکال است (نسبت به‌عمل ضرب، حلقه دارای عضوعکس است.).

(ب) فرض‌کنیم n عـدد صحیح بزرگتر از یك باشد. باقیماندهٔ تقسیم هـرعـدد صحیح x بـر n را با $f(x)$ نشان می‌دهیم. در مجموعه

$$Z_n=\{0,1,\dots,n-1\}$$

دو عمل $\oplus$ و $\odot$ را چنین تعریف می کنیم:

$$a\oplus b=f(a+b)$$
$$a\odot b=f(ab)$$

ثابت‌کنیدکه $(Z_n,\oplus,\odot)$ یك حلقهٔ جابجائی و یکدار است. مقسوم‌علیه‌های صفر، یکالها، و عنصرهـای پوچ توان این حلقه را بیابید.

۱۲ـ فرض‌کنیم R یك‌حلقه یکدار وD وA ایده‌آلهایی از A باشند به‌طوری که

$$A+U=\{a+u|a\in A,u\in U\}=R$$

ثابت‌کنیدکه برای هرایدال U از R،

$$A+U=A+U\cap D$$

۱۳ـ فرض‌کنید a وb اعداد صحیح مثبت متمایزباشند. ثابت‌کنیدکه تعداد نامتناهی عـدد صحیح مانند x وجود دارد به طوری‌که

$$(a+x,b+x)\text{ بمعم }=1$$

۱۴ـ ثابت کنید کـه اگر x، y، z اعداد صحیح مثبتی باشند به‌طوری‌که

$$x^3+y^3\equiv z^3 \text{ (به هنگ ۹)}$$

آنگاه لااقل یکی از اعداد x, y, z بر ۳ بخشپذیر است.

۱۵ـ ثابت‌کنید که اعداد اصمی (گنگی) مانند α و β وجود دارند به طوری‌که α^β گویاست.

۱۶ـ تابع f بـر بـازه $[0,1]$ چنین تعریف می‌شود:

بهازای هر x از $[0,1]$، اگر x گویا باشد، $f(x)=x$؛ و اگر x گنگ باشد، $f(x)=1-x$. ثابت کنید:

(الف) بهازای هر x از $[0,1]$،

$$f(f(x))=x,\quad f(x)+f(-x)=1$$

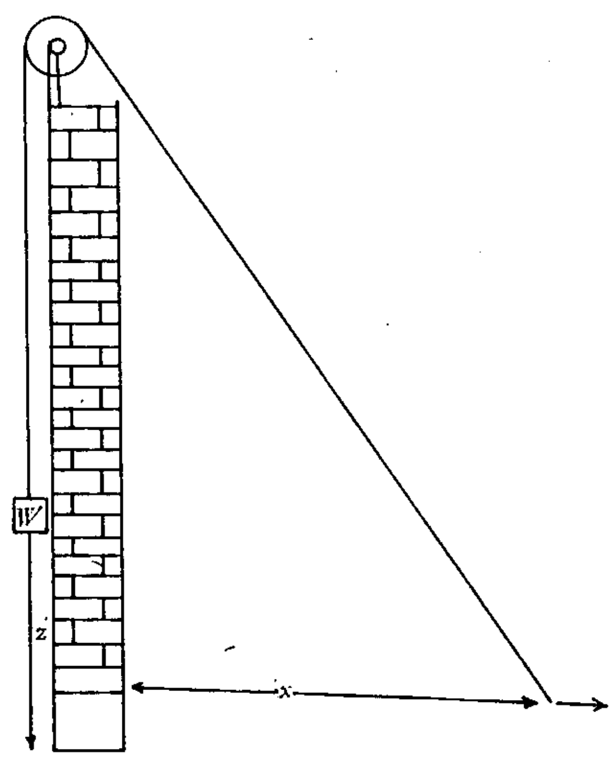
(ب) f فقط در نقطه $x=\frac{1}{2}$ پیوسته است.

(پ) بهازای هر x و y از $[0,1]$،

$$f(x+y)-f(x)-f(y)$$

گویاست.

۱۷ـ طنابی که یك انتهای آن وزنه W آویخته شده و انتهای دیگر آن در دست شخصی مانند M است که در ۵ متری بالای سطح زمین، بـا سرعت ۶ متر بسر ثانیه، برروی یك خط راست می‌دود. همچنین، فـرض کنید کـه قرقره در ارتفاع ۲۵ متری از سطح زمین قرار گرفته باشد، وطول طناب ۴۵ متر باشد. اگر در یك لحظه فاصله شخص تا دیوار ۱۵ متر و شخص در حال دور شدن از قرقره باشد، در این لحظه وزنه با چه‌سرعتی بـه طرف بالا کشیده می‌شود [راهنمایی: بـا توجه بـه شکل $\frac{dx}{dt}=6$. اینك، $\frac{dy}{dt}$ را به‌دست آورید.]



۱۸ـ مردکفاشی با افسردگی به همسرش گفت: علیرغم آنکه ۷۰۰ سانتیمترمربع مواد خام درانبار داریم، ساختن هر جفت کفش‌مردانه ۲ ساعت‌کارلازم دارد و ۳۰۰ تومان به‌فروش می‌رسد؛ ساختن هرجفت‌کفش زنانه ۳ ساعت کار لازم دارد و ۲۴۰ تومان به‌فروش می‌رسد. نمی‌توانیم سر موعد مقرر اجاره بها را بپردازیم و مـواد خام برای ادامه کار بخریم. اگر این ۳۰ ساعت باقیمانده را تماماً کار کنیم، باز ۳۴۰ تومان برای پرداخت اجاره وخرید موادِ خام‌کم خواهیم داشت. همسر مرد کفاش گفت: اگر از بـرادرت کمك بگیریم آنگاه ساختن یك جفت‌کفش مردانـه یك ساعت و ساختن یك جفت‌کفش زنانه ۲ ساعت وقت خواهد گرفت. یکساعت برای مرد کفاش طول کشید تا با محاسبه جواب همسرش را بدهد با شگفتی ملاحظه کرد کـه نـه تنها می‌تواند با همکاری بـرادرش اجاره بها را پردازد و مـواد خام بخرد، بلکه مقدار پولـی اضافه خواهد آورد. می‌توانید بگوئید چه‌مقدار اضافه می‌آورد؟

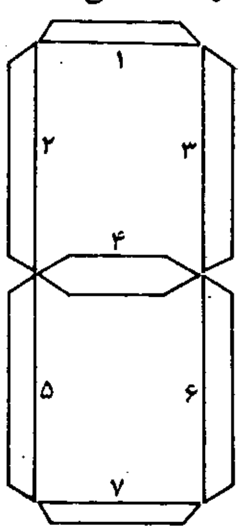
[ارسالی: دکتر عین‌الله پاشا]

۱۹ـ دراغلب دستگاههای الکتریکی مانندماشین حساب و ساعت‌کوارتز و غیره، برای نمایش علائم، از روشن کـردن بعضی از قطعات در شکل ذیل استفاده می‌کنند، مثلاً با روشن شـدن قطعات ۱، ۲، ۴ علامتی را ثبت می‌کند کـه بـا علامت ساخته شده از قطعات ۱، ۲، ۵ متمایز است.

(الف) چند علامت متمایز می‌توان ساخت.

(ب) چند علامت متمایزمی‌توان ساخت‌که برای ساختن آن حداقل سه قطعه روشن شود.

(پ) چند علامت، باروشن شدن حداقل سه‌قطعه، می‌توان ساخت به شرط آنکه هرقطعه روشن شده مجاور یك قطعه روشن شده دیگری باشد. مثلاً، اگر بـرای ساختن علامتی لازم باشد که قطعه ۲ روشن شود، باید یکی ازقطعات ۱، ۴، ۵ نیز روشن شود.



[ارسالی: دکتر عین‌الله پاشا]

حل مسائل شماره ۱۰

۱ـ ازواقعهٔ قتلی این اطلاعات به‌دست آمده که جملگی راست است:

۱) اگر حسین قاتل نیست، پرویز قاتل است.

۲) حسین قاتل نیست یا مقتول خواب بوده است.

۳) اگر مقتول خواب بوده است، قتل در مهمانخانه واقع نشده است.

۴) قتل در مهمانخانه واقع شده است.

قاتل کیست؟

حل: فرض کنید که P به‌معنی حسین قاتل است، q به‌معنی پرویز قاتل است، r به‌معنی مقتول خواب بوده است، S به‌معنی قتل درمهمانخانه واقع شده است. بنا براین،

۱) $\sim P \Rightarrow q$

۲) $\sim P V r$

۳) $r \Rightarrow \sim s$

۴) s

گزارهٔ (۱) و (۲)، به‌ترتیب، هم‌ارز گزاره‌های ذیلند:

۵) $\sim q \Rightarrow P$

۶) $P \Rightarrow r$

از (۵)، (۶)، (۳)، بنا برقانون قیاس، نتیجه می‌شود که

۷) $\sim q \Rightarrow \sim s$

گزاره (۷) هم‌ارز این گزاره است:

۸) $s \Rightarrow q$

از (۸) و (۴)، بنا برقانون انتزاع، q نتیجه می‌شود. به‌عبارت دیگر، پرویز قاتل است.

(برهانهای ارسالی از تهران آقای ایرج تقی‌زاده و از تبریز اکبر غفارپور)

۲ـ فرض کنید که $f(x)=x^2-2[|x|]$، $g(x)=f(\frac{1}{2}x)$، $h(x)=f(2x)$. اگر دامنه f بازه $(2$ و $-2)$ باشد آنگاه دامنه g و h را مشخص کنید؛ سپس، نمودار سه تابع را کشیده با یکدیگر مقایسه کنید.

حل: دامنه g عبارت ازمجموعه همه x هائی است که $\frac{1}{2}x \in D_f$. بنا براین، $-2<\frac{1}{2}x<2$ یا $-4<x<4$.

بالنتیجه، $D_g=(-4,4)$. به‌همین ترتیب، $D_h=(-1,1)$.

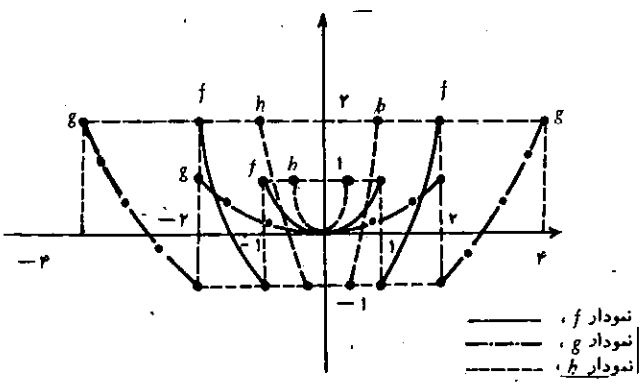
ضابطه تعریف تابع f چنین است:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & |x|<1 \\ x^2-2 & 1\leqslant |x|<2 \end{cases}$$

به‌کمک f می‌توان ضابطه تابع g و h را به‌دست آورد؛

$$h(x)=\begin{cases} 4x^2 & |x|<\frac{1}{2} \\ 4x^2-2 & \frac{1}{2}\leqslant |x|<1 \end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}x^2 & |x|<2 \\ \frac{1}{4}x^2-2 & 2\leqslant |x|<4 \end{cases}$$

نمودار تابع f، g، h چنین است:



ازمقایسه گراف f ، g ، و h نتیجه‌می‌شود که اولاً برد (حوزه مقادیر) سه‌تابع یکسان است. ثانیاً، فرض کنیم $y=f(kx)$، برحسب اینکه $k>1$ یا $0<k<1$ ، به‌ترتیب، منحنی‌حاصل از فشردن یاکشیدن‌منحنی f درامتداد خطافقی به‌دست‌می‌آید.

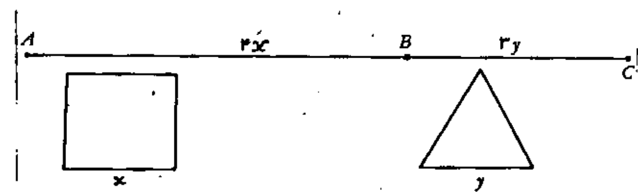
(برهان ارسالی از تبریز آقای غفارپور)

۳ـ یك‌قطعه سیم به‌طول l رابریده به‌دوقسمت می‌کنیم، یکی را به‌شکل مربع و دیگری را به شکل یك مثلث متساوی‌الاضلاع خم می‌کنیم. سیم را به‌چه نسبت قطع‌کنیم که:

(الف) مجموع مساحتها مینیموم شود.

(ب) مجموع مساحتها ماکزیموم شود.

حل: فرض‌کنیم که x و y، به‌ترتیب، اضلاع مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع باشد. دراین صورت، $4x+3y=l$ و $S=x^2+y^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ ، که درآن ، S مجموع مساحتهای مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع است.



چون y را می‌توان برحسب x محاسبه‌کرد، پس، $S(x)$ تابعی از x است و دامنه آن مجموعه x هائی است‌که $0\leqslant x\leqslant\frac{l}{4}$.

از دوتساوی فوق نسبت به x مشتق می‌گیریم. بنابراین،

$$\begin{cases}4+3y'=0\\ S'(x)=2x+\frac{\sqrt{3}}{2}yy'\end{cases}$$

چون $y'=-\frac{4}{3}$ ، پس $S'(x)=2\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}y\right)$ ، اگر $S'(x)=0$ آنگاه $x=\frac{\sqrt{3}}{3}y$. برای ما مشخص نیست کـه ریشه مشتق نقطه ماگزیموم یا مینیموم و یا نقطه عطف است . برای بررسی بیشتر بهتر است مشتق دوم را محاسبه‌کنیم؛

$$S''(x)=2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}y'\right)=2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)\right)=$$

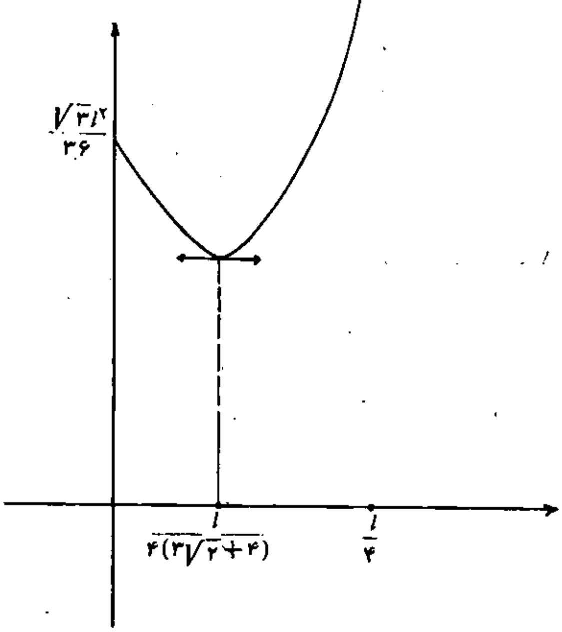
$$=2+\frac{8}{9}\sqrt{3}>0.$$

پس، در نقطه $x=\frac{\sqrt{3}}{3}y$، تقعر منحنی بـه سمت yهای مثبت است ومنحنی دراین نقطه مینیموم دارد. $S(x)$ ماکزیموم خود را در دوانتهای بازه $\left[0,\frac{l}{4}\right]$ اختیار مـی‌کند . بنابرایـن ، مجموع مساحتها موقعی ماکزیموم می‌شودکه سیم بریده نشود، وتمام طول سیم به‌شکل مربع دربیاید. اگر بااین بینش به‌مسئله بنگریم‌که سیم باید بریده شود بنابـراین قسمت (ب) جواب ندارد. ولی، به‌ازای $x=\frac{\sqrt{3}}{3}y$ مقدار $S(x)$ مینیموم می‌شود.

چون $4x+3y=l$، پس $x=\frac{l}{3\sqrt{3}+4}$ و $y=\frac{\sqrt{3}\,l}{3\sqrt{3}+4}$.

بنابراین، سیم را باید به‌نسبت $\frac{y}{x}=\sqrt{3}$؛ یعنی به‌نسبت ۱ و $\sqrt{3}$ بریـد تا مجموع مساحتها مینیموم شود . نمودار $S(x)$ چنین است:

x	0		$\frac{l}{3\sqrt{3}+4}$		$\frac{l}{4}$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S''(x)$		$+$		$+$	
$S(x)$	$\frac{\sqrt{3}l^2}{36}$		$\frac{l^2}{4(3\sqrt{3}+4)}$		$\frac{l^2}{16}$



۴ـ همه اعداد حقیقی x، y، z، w را طوری بـه‌دست آورید که جواب دستگاه ذیل باشند:

$$\begin{cases} x+y+z=w \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{w} \end{cases}$$

آیا این دستگاه در مجموعه اعداد طبیعی جـواب دارد؟ در مجموعه اعداد صحیح چطور؟

حل: ثابت می‌کنیم که w باید مساوی یکی ازمتغیرهای x، یا y، یا z باشد و دومتغیر دیگر قرینه یکدیگر باشند. اگر به جای w در رابطه دوم مساویش را قرار دهیـم، خواهیم داشت.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$$

$$(x+y+z)(yz+zx+xy)-xyz=0$$

درعبارت فوق قرارمی‌دهیم $x=-z$. اگرحاصل عبارت‌صفر شد، نتیجه می‌شودکه عبارت بر $x+z$ بخشپذیر است:

$$(x+y-x)(-yx-x^{2}+xy)+x^{2}y=-yx^{2}+x^{2}y=0$$

چون عبارت جبری نسبت به xوyوz متقارن است و بر $x+z$ بخشپذیر است. پس،

$$(x+y+z)(yz+zx+xy)-xyz=A(x+y)(y+z)(z+x)$$

کـه در آن، A عـدد ثابتی است (چـرا؟). با قـرار دادن $x=y=z=1$، نتیجه می‌شودکه $A=1$. بالنتیجه،

$$(x+y+z)(yz+zx+xy)-xyz=(x+y)(y+z)(z+x)=0$$

بنابراین، $x+y=0$ یا $y+z=0$ یا $z+x=0$؛ که در هرحالت، w برابر یکی ازمتغیرها z یا x یا y است. بـدون آنکه به‌کلیت برهان خللی وارد شود، و با توجه به‌تقارنی که متغیرها در عبارت فوق دارند، می‌توان فرض کـرد $w=x$ و $z=-y$ اگردامنه تغییرات x وy مجموعه $R-\{0\}$ باشد، چهارتائی حـاصل یك جواب دستگاه است. ایـن دستگاه در مجموعه اعـداد طبیعی جواب ندارد. زیرا، عدد طبیعی مانند z و y موجود نیست که $y+z=0$. اما در مجموعه اعـداد صحیح بینهایت جواب دارد.

۵ـ تابع $\frac{p(x)}{q(x)}$ را یك‌تابع گویاخوانیم درصورتی که $p(x)$ و $q(x)$ دو بسجمله‌ای (چندجمله‌ای) باشند. ثابت کنید، به‌ازای $0<x<1$ تابع

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2^{n}}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

یك‌تابع گویاست.

حل: چون

$$\frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}=\frac{1}{1-x^{2^{n}}}-\frac{1}{1-x^{2^{n+1}}},$$

پس،

$$A_{N}=\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{1-x^{2^{n}}}-\frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}\right)=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{2^{N+1}}}.$$

چون $0<x<1$، پس $\lim_{N\to\infty}x^{2^{N+1}}=0$. بالنتیجه،

$$f(x)=\lim_{N\to\infty}A_{N}=\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x}.$$

۶ـ فرض‌کنیم f، g، h توابعی ازاعداد حقیقی‌باشند که به‌ازای هرعدد حقیقی x چنین تعریف شوند:

$$h(x)=\frac{f(x+1)+f(x-1)}{2},$$

$$g(x)=\frac{f(x+4)+f(x+4)}{2}$$

$f(x)$ را برحسب g و h محاسبه‌کنید.

حل: ثابت می‌شود که، برای $f(x)$، تعداد نامتناهی‌عبارت برحسب f و g موجود است. بعضی از عبـارتهای ساده آن چنین است:

$$\begin{aligned} f(x)&=g(x)-h(x+3)+h(x+1)+h(x-1)-h(x-3) \\ &=-g(x+2)+h(x+5)-h(x+3)+h(x+1)+h(x-1) \\ &=g(x+4)-h(x+7)+h(x+5)-h(x+3)+h(x+1) \end{aligned}$$

فرض‌کنیم E یك‌تابع انتقالی برروی تابع A باشدکه به‌صورت $EA(x)=A(x+1)$ ولذا، $E^{-1}A(x)=A(x-1)$ تعریف می‌شود.

بنابراین،

$$E^{2}A(x)=EEA(x)=EA(x+1)=A(x+2)$$

$$E^{-2}A(x)=E^{-1}E^{-1}A(x)=E^{-1}A(x-1)=A(x-2)$$

با توجه به‌رابطه فوق، به‌استقراء می‌توان ثابت کرد که $E^kA(x)=A(x+k)$. از طرفی

$$\begin{aligned}(E+E^{-1})f(x)&=Ef(x)+E^{-1}f(x)=\\&=f(x+1)+f(x-1)=\\&=2h(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(E^4+E^{-4})f(x)&=E^4f(x)+E^{-4}f(x)=\\&=f(x+4)+f(x-4)=\\&=2g(x)\end{aligned}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$(E^2+1)f(x)=2Eh(x),\ (E^8+1)f(x)=2E^4g(x)$$

انگیزه ما به‌خاطر این امر است که E^2+1 و E^8+1 دوبسجمله‌ای (چندجمله‌ای) برحسب E هستند که نسبت به‌هم اولند و ما می‌خواهیم عدد ۱ را برحسب آنها بیان کنیم. بنابراین،

$$1=\frac{1}{2}(E^8+1)-\frac{1}{2}(E^8-1)=\frac{1}{2}(E^8+1)-\frac{1}{2}(E^6-E^4+E^2-1)(E^2+1)$$

بالنتیجه،

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}(E^8+1)f(x)-\\&-\frac{1}{2}(E^6-E^4+E^2-1)(E^2+1)f(x)\\&=E^4g(x)-(E^6-E^4+E^2-1)Eh(x)\\&=E^4g(x)-(E^7-E^5+E^3-E)h(x)\\&=g(x+4)-h(x+7)+h(x+5)-\\&-h(x+3)+h(x+1)\end{aligned}$$

توجه کنید که نمایش عدد ۱، درعبارت فوق، منحصر به‌فرد نیست. بنابراین، جواب آن نیز منحصر به‌فرد نخواهد بود.

با به‌کارگیری روابط ذیل می‌توان دو عبارت دیگر را به‌دست آورد:

$$\begin{aligned}g(y)&=-g(y-2)+h(y+3)+h(y-5)\\&=-g(y+2)+h(y+5)+h(y-3).\end{aligned}$$

۷ـ فرض کنید که A، B، و C سه‌عدد حقیقی مثبت و a و b و c سه‌عدد حقیقی دوبدو متمایز باشند. ثابت کنید که معادله

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}=1$$

دارای سه‌ریشهٔ حقیقی است.

حل: حل معادله فوق منجر به‌حل معادله ذیل می‌شود:

$$\begin{aligned}f(x)&=A(x-b)(x-c)+B(x-a)(x-c)+\\&+C(x-a)(x-b)-\\&-(x-a)(x-b)(x-c)=0\end{aligned}$$

برای سادگی بحث می‌توان فرض کرد که $a<b<c$. بنابراین،

$$\begin{aligned}f(a)&=A(a-b)(a-c)>0,\\f(b)&=B(b-a)(b-c)<0,\\f(c)&=C(c-a)(c-b)>0\end{aligned}$$

بنابرقضیه بولتزانو، چون $f(a)f(b)<0$ و $f(b)f(c)<0$، پس x_1 و x_2 ی موجود است که $a<x_1<b<x_2<c$ و $f(x_1)=f(x_2)=0$. ازطرف دیگر، $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$. بنابراین، x ی موجود است که $c<x$ و $f(x)<0$. چون $f(x)f(c)<0$، بنابرقضیه بولتزانو، x_3ی موجود است که $c<x_3<x$ و $f(x_3)=0$. بالنتیجه، x_1، x_2 و x_3 ریشه‌های معادلهٔ فوق است.

[این برهان از بابك فهیمی از تهران است]

برهان دوم: فرض کنیم

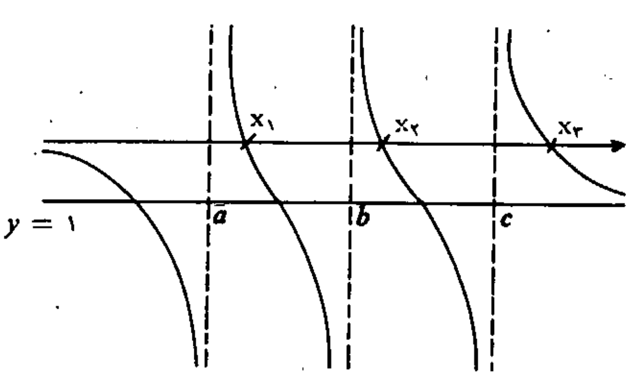
$$f(x)=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}-1.$$

در این صورت،

$$f'(x)=-\frac{A}{(x-a)^2}-\frac{B}{(x-b)^2}-\frac{C}{(x-c)^2}<0$$

و خطوط $x=a$، $x=b$، $x=c$ مجانبهای قائم منحنی است. و چون

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} f(x)&=-1,\ f(a-)=f(b-)=\\&=f(c-)=-\infty,\ f(a+)=\\f(b+)&=f(c+)=+\infty\end{aligned}$$



پس با توجه به‌نمودار منحنی تابع $f(x)$ در سه‌نقطه محور x ها را قطع می‌کند بالنتیجه معادله $f(x)=0$ دارای سه‌ریشه متمایز x_1 و x_2 و x_3 است.

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad a \quad b \quad c \quad y=-1$

۸ــ فرض کنید که عمل* بر بازه $[0, 1]$ با ضابطهٔ ذیل تعریف می‌شود:

$$x*y=\min\{x+y, 1\};\ \forall x, y\in[0, 1]$$

عمل * کدام‌یك از خواص گروه را داراست؟

حل: عمل * شرکت‌پذیر است؛ یعنی،

$$(x*y)*z=\min\{(x*y)+z, 1\}$$
$$=\min\{\min\{x+y, 1\}+z, 1\}$$

اگر $x+y+z<1$ آنگاه $(x*y)*z=x+y+z$، واگر $x+y+z\geqslant 1$ آنگاه دوحالت اتفاق می‌افتد.

اگر $x+y<1$ آنگاه $(x*y)*z=1$ و اگر $x+y\geqslant 1$ بازهم $(x*y)*z=1$ می‌باشد. برای محاسبه‌طرف دیگر چنین عمل می‌کنیم:

$$x*(y*z)=\min\{x+(y*z), 1\}=$$
$$=\min\{x+\min\{y+z, 1\}, 1\}$$

حال اگر $x+y+z<1$ آنگاه

$$x*(y*z)=x+y+z;$$

ولی، اگر $x+y+z\geqslant 1$ دوحالت رخ می‌دهد؛ $y+z<1$، یا $y+z\geqslant 1$. در هرحالت، $(x*y)*z=1$. بنابراین اگر $x+y+x<1$، دوطرف تساوی برابر $x+y+z$ است و اگر $x+y+z\geqslant 1$ دو طرف تساوی ۱ است.

بدیهی است که عمل * تعویض‌پذیر است. اگر e عضو خنثی عمل * باشد آنگاه $x*e=\min\{x+e, 1\}$. واضح است صفر در این رابطه صدق می‌کند. زیرا،

$$x*0=\min\{x+0, 1\}=x$$

هیچ عضوی قرینه ندارد زیرا اگر y قرینه x باشد باید

$$x*y=0 \Rightarrow \min\{x+y, 1\}=0$$

یعنی $x+y=0$ که امکان ندارد.

۹ــ فرض کنید که H یك‌زیر گروه (دارای h عضو) از گروه G باشد. همچنین، فرض کنید G دارای عضوی مانند a باشد به‌طوری که به‌ازای هر x در H

$$(xa)^3=1,$$

که در آن، ۱ عضو بی‌اثر (خنثی) در G است. اگر P زیرمجموعه همه‌اعضائی به‌صورت $x_1ax_2a\ldots x_na$ باشد، که n عدد صحیح مثبت است و $x_i\in H$،

(الف) ثابت کنید که P مجموعه‌ای متناهی است.

(ب) ثابت کنید، که در حقیقت، P بیش از $3h^2$ عضو ندارد.

حل:

چون H زیر گروه G است، پس $1\in H$ و، برای هر $x\in H$، $x^{-1}\in H$. لهذا از فرض نتیجه می‌شود که $a^{-1}=a^2$ و، برای هر $x\in H$،

$$xaxaxa=1 \quad \text{و} \qquad (1)$$
$$x^{-1}ax^{-1}ax^{-1}a=1 \qquad (2)$$

اینك به‌سادگی می‌توان دید که از (۱) تساوی

$$axa=x^{-1}a^2x^{-1} \qquad (3)$$

و از (۳) تساوی

$$a^2xa^2=x^{-1}ax^{-1}, \qquad (4)$$

برای‌هر $x\in H$، حاصل می‌شود. چون H دارای h عضو است، پس هریك از مجموعه‌های

$$A=\{xay: x, y\in H\},\ B=\{xa^2y: x, y\in H\}$$
$$C=\{xa^2ya: x, y\in H\}$$

حداکثر دارای h^2 عضو می‌باشد. در نتیجه مجموعه‌ی $Q=A\cup B\cup C$ حداکثر دارای $3h^2$ عضو می‌باشد. لهذا، برای اثبات حکم، کافی‌است نشان‌دهیم که اگر $x_1, \ldots, x_n\in H$، آنگاه $x_1ax_2a\ldots x_na\in Q$. این مطلب را به‌استقراء برروی n ثابت می‌کنیم.

اگر $n=1$، آنگاه $x_1a=x_1a_1\in A\subseteq Q$ و حکم برقرار است.

اینك فرض کنیم حکم به‌ازای عدد طبیعی n برقرار باشد $x_1, \ldots, x_{n+1}\in H$.

$x_{n+1}=z$، $q=x_1ax_2a\cdots x_na$ و $p=qza$ قرار می‌دهیم. بنا به‌فرض استقراء $q\in Q$، درنتیجه $q\in A$ یا $q\in B$ یا $q\in C$.

حالت‌اول $q\in A$. دراین‌صورت $x, y\in H$ یافت می‌شوند که $q=xay$. در نتیجه

$$p=qza=x(ayza)$$
$$=x(yz)^{-1}a^2(yz)^{-1}$$

(بنابر (۳))

لهذا $p\in B\subseteq Q$.

حالت دوم $q\in B$. در این‌صورت $x, y\in H$ به‌قسمی موجود است که $q=xa^2y$. در نتیجه

$$p=xa^2yza\in C\subseteq Q$$

حالت سوم $q\in C$. در این‌صورت $x,\ y\in H$ چنان موجوداند که $q=xa^{2}ya$. درنتیجه

$$p=xa^{2}yaza=(xa^{2}y)(aza)$$

(بنابر (۳))

$$=(xa^{2}y)(z^{-1}a^{2}z^{-1})$$

$$=x(a^{2}(yz^{-1})a^{2})z^{-1}$$

(بنابر (۴))

$$=x((yz^{-1})^{-1})a(yz^{-1})^{-1})z^{-1}$$

$$=(x(yz^{-1})^{-1})a((yz^{-1})^{-1}z^{-1})\in A\subseteq Q$$

بنابراین، درهرصورت، $p\in Q$، وحکم به‌استقراء نتیجه می‌شود.

۱۰ـ ثابت کنید که

$$\begin{bmatrix}1-a & b\\ a & 1-b\end{bmatrix}^n=$$

$$=\frac{1}{a+b}\begin{bmatrix}b & b\\ a & a\end{bmatrix}+$$

$$\frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{bmatrix}a & -b\\ -a & b\end{bmatrix}$$

حل: بدیهی است که

$$\begin{bmatrix}1-a & b\\ a & 1-b\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{a+b}\begin{bmatrix}b & b\\ a & a\end{bmatrix}+$$

$$+\frac{(1-a-b)}{a+b}\begin{bmatrix}b & b\\ a & a\end{bmatrix}$$

فرض کنیم

$$A=\begin{bmatrix}b & b\\ a & a\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}a & -b\\ -a & b\end{bmatrix}.$$

در این‌صورت،

$$AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=BA$$

بنابراین،

$$\begin{bmatrix}1-a & b\\ a & 1-b\end{bmatrix}^n=\left(\frac{1}{a+b}A+\frac{1-a-b}{a+b}B\right)^n=$$

$$=\frac{1}{(a+b)^n}A^n+\frac{(1-a-b)^n}{(a+b)^n}B^n$$

از طرف دیگر،

$$A^{2}=\begin{bmatrix}b(a+b) & b(a+b)\\ a(a+b) & a(a+b)\end{bmatrix}=(a+b)\begin{bmatrix}b & b\\ a & a\end{bmatrix}$$

به‌استقراء ثابت می‌شود که به‌ازای هر n که $n\geqslant 2$،

$$A^n=(a+b)^{n-1}\begin{bmatrix}b & b\\ a & a\end{bmatrix},\quad B=$$

$$=(a+b)^{n-1}\begin{bmatrix}a & -b\\ -a & a\end{bmatrix}$$

بنابراین، با قراردادن A^n و B^n در رابطه فوق نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

۱۱ـ اگر V یك زیرفضای R^2 باشد به‌طوری که $V\neq R^2$ آنگاه $V=\{0\}$ یا V خط مستقیمی است که ازمبدأ می‌گذرد. این مسئله را برای R^3 تعمیم دهید.

حل: به‌سهولت می‌توان دید که برای هر $m\in R$،

$$V^m=\{mx,\ x)|x\in R\},\ V_m=\{(x,\ mx)|x\in R\}$$

زیرفضاهای R^2 هستند. اینك نشان می‌دهیم که V^m, V_m، برای $m\neq 0$، زیرفضاهای ماکسیمال R^2 می‌باشند. یعنی؛ اگر U زیرفضایی از R^2 باشد که $V_m\subset U$ یا $V^m\subset U$ آنگاه $U=R^2$ این‌مطلب را در مورد V_m ثابت می‌کنیم. به‌طریق مشابه می‌توان نتیجه را برای V^m نیز ثابت کرد.

فرض کنیم $m\neq 0$ و U زیرفضایی از R^2 باشد به‌طوری که $V_m\subset U$. در این‌صورت، $(c,d)\in U$ یافت می‌شود که $(c,\ d)\notin V_m$. چون $(c,\ mc)\in V_m$ و $V_m\subset U$، پس $(c,\ mc)\in U$. درنتیجه، $(c,\ d)-(c,\ mc)\in U$. به‌عبارت دیگر، $(0,\ d-mc)\in U$. چون $(c,d)\notin V_m$، پس $d\neq mc$، بنابراین $d-mc\neq 0$. لهذا، $(0,1)=\frac{1}{d-mc}(0,d-mc)$.

در نتیجه، $(0,m)\in U$. چون $(1,m)\in V_m\subset U$، پس $(1,0)=(1,m)-(0,m)\in U$. فرض کنیم $(x,y)\in R^2$. چون $(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$، پس $(x,y)\in U$. بنابراین، $U=R^2$.

اکنون به‌اثبات مسئله‌می‌پردازیم. فرض کنیم که $V\neq\{0\}$. در این صورت $(c\ ,\ d)\in V$ موجود است به‌طوری که $(c,\ d)\neq(0,\ 0)$. اگر $d=0$ یا $c=0$، آنگاه، به ترتیب، $V^1\subseteq V$ یا $V_1\subseteq V$. در نتیجه، چون $V\subset R^2$، با توجه به‌آنچه‌که در بالا ثابت شد، به‌ترتیب $V^1=V$ یا $V_1=V$، و حکم برقرار است. بنابراین می‌توان فرض کرد که $c\neq 0$ و $d\neq 0$. دراین‌صورت، با فرض $m=\frac{d}{c}$ خواهیم داشت $V_m\subseteq V$. درنتیجه، بنابر آنچه که دربالا ثابت شد، $V_m=V$.

در مورد R^3 باید نشان دهیم که اگر $V\subset R^3$، آنگاه $V=\{0\}$ یا V مجموعهٔ نقاط خط راست یا صفحه‌ای است که از مبدأ می‌گذرد. خلاصه برهان چنین است: فرض کنید

$V\neq\{0\}$ و V مجموعه‌نقاط خطراستی نباشد که از مبدأ می‌گذرد. ثابت کنید V مجموعه‌نقاط صفحه‌ای است که ازمبدأ می‌گذرد.

۱۲ــ ثابت کنیدکه به‌ازای هردوعدد صحیح a و b، که $a\geqslant b\geqslant 0$، و هرعدد اول p

$$\binom{pa}{pb}\equiv\binom{a}{b}(\text{mod } p),$$

که درآن، $\binom{a}{b}=\frac{a!}{b!(a-b)!}$.

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر $1\leqslant i\leqslant p-1$ آنگاه $\binom{p}{i}\equiv 0(\text{mod } p)$. میدانیم که $\binom{p}{i}$ یك‌عدد طبیعی است.

فرض کنیم که $k=\binom{p}{i}$. بنابراین،

$$k=\binom{p}{i}=\frac{p!}{i!(p-i)!},$$

$$k(i!)(p-i)!=p!$$

چون عدد اول p طرف دوم تساوی فوق را عاد می‌کند، پس طرف اول آن‌رانیزعادمی‌کند.ازطرفی p نسبت‌به‌هریك ازاعداد $(p-i)!$ و $i!$ اول است. بنابرقضیه‌کاوس (یا اقلیدس)، p عدد k را عاد می‌کند. بنابراین،

$$\binom{p}{i}\equiv 0(\text{mod } p).\qquad (1\leqslant i\leqslant p-1)$$

اینك، بسط دوجمله‌ای نیوتن را درنظر می‌گیریم؛

$$(1+x)^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^k\equiv 1+x^p(\text{mod } p)$$

$$\sum_{k=0}^{pa}\binom{pa}{k}x^k=(1+x)^{pa}=[(1+x)^p]^a\equiv(1+x^p)^a$$

$$=\sum_{j=0}^{a}\binom{a}{j}x^{pj}$$

می‌دانیم که اگر $f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ و $g(x)=b_0+b_1x+\dots+b_mx^m$ آنگاه گوئیم

$$f(x)\equiv g(x)(\text{mod } p)$$

در صورتی که به ازای هر k

$$b_k\equiv a_k(\text{mod } p).$$

بنابراین، چون

$$\sum_{k=0}^{pa}\binom{pa}{k}x^k\equiv\sum_{j=0}^{a}\binom{a}{j}x^{pj}$$

پس به‌ازای هر b، که $a\geqslant b\geqslant 0$، ضرایب x^{bp} با یکدیگر همنهشت‌اند. بنابراین،

$$\binom{pa}{pb}\equiv\binom{a}{b}(\text{mod } p).$$

نتیجه جالبی که از برهان فوق حاصل می‌شود این است که به‌ازای هر k، $1<k<pa$ و $p\nmid k$،

$$\binom{pa}{k}\equiv 0(\text{mod } p),\ p\Big|\binom{pa}{k}.$$

۱۳ــ ثابت کنیدکه به‌ازای هرعدد طبیعی n، و هرعدد طبیعی فرد k، عدد $1+2+\dots+n$ یك مقسوم‌علیه

$$1^k+2^k+\dots+n^k$$

است.

حل: چون $n+1-r\equiv -r(\text{mod } n+1)$، باتوجه به‌اینکه k فرد است،

$$(1)\quad \sum_{r=1}^{n}(n+1-r)^k\equiv\sum_{r=1}^{n}(-r)^k\equiv-$$

$$-\sum_{r=1}^{n}r^k(\text{mod } n+1)$$

اما، از طرف دیگر

$$(2)\quad \sum_{r=1}^{n}(n+1-r)^k=\sum_{r=1}^{n}r^k$$

بنابراین، از (۱) و (۲) نتیجه می‌شودکه

$$(3)\quad 2\sum_{r=1}^{n}r^k\equiv 0(\text{mod } n+1)$$

در این عبارت، اگربجای $n+1$ عدد n را قراردهیم، خواهیم داشت

$$2\sum_{r=1}^{n-1}r^k\equiv 0(\text{mod } n)$$

بنابراین،

$$(4)\quad 2\sum_{r=1}^{n}r^k=2\sum_{r=1}^{n-1}r^k+2n^k\equiv 0(\text{mod } n)$$

n و $n+1$ نسبت بهم اولند. از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که

$$2\sum_{r=1}^{n}r^k\equiv 0(\text{mod } n(n+1)).$$

چون $n(n+1)$ عدد زوج‌است، اگر دوطرف همنهشتی فوق را بر ۲ تقسیم کنیم، خواهیم داشت

$$\sum_{r=1}^{n}r^k\equiv 0\left(\text{mod }\tfrac{1}{2}n(n+1)\right)$$

و این بدین‌معنی است که $1^k+2^k+\dots+n^k$ برحاصلجمع $1+2+\dots+n$ بخشپذیر است.

۱۴ــ فرض کنیدکه $f(x)=(-1)^{\left[\frac{x}{2}\right]}\cos\frac{\pi}{2}[x]$.

مقدار

$$\int_0^{2n} f(x)dx$$

را محاسبه کنید.

حل: ابتدا حالت خاص $n=1$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=$$

$$=\int_0^1 dx+\int_1^2 \cos\frac{\pi}{2}dx=1+\cos\frac{\pi}{2}=1.$$

اینك، انتگرال فوق را به‌حاصلجمع انتگرالهایی با طول بازهٔ ۲ تبدیل می‌کنیم؛ یعنی،

$$\int_0^{2n} f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k}^{2(k+1)} f(x)dx$$

عبارت تحت سیگما را I_k می‌نامیم و آن‌را، با تغییر متغیر $x=2k+t$، محاسبه می‌کنیم؛

$$I_k=\int_{2k}^{2(k+1)}(-1)^{[\frac{x}{2}]}\cos\frac{\pi}{2}[x]dx=$$

$$=\int_0^2(-1)^{[\frac{2k+t}{2}]}\cos\frac{\pi}{2}[2k+t]dt$$

$$=\int_0^2(-1)^{[\frac{t}{2}]}\cos\frac{\pi}{2}[t]dt=1$$

بنابراین،

$$\int_0^{2n} f(x)dx=\sum_{k=1}^{n} I_k=n$$

۱۵ ــ نقاط A,B,C که برروی یك خط نیستند طوری انتخاب شده‌اند که

$$AB^2\geqslant AC^2+BC^2$$

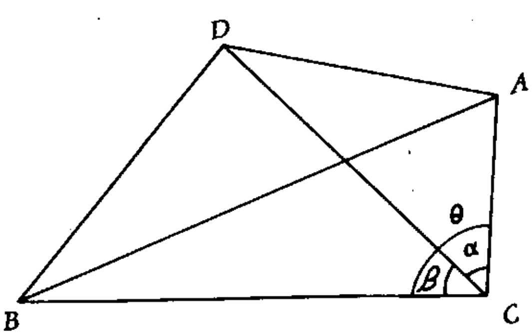
ثابت کنید که به‌ازای هر نقطه D درصفحه A،B،C،

$$CD^2\leqslant AD^2+BD^2$$

اگر D درصفحه A،B،و C نباشد، آیا رابطه فوق برقرار است.

حل: ابتدا فرض می‌کنیم D درصفحه A، B، C باشد.

در این شکل، $\angle ACD=\alpha$ ، $\angle BCD=\beta$ ، $\angle ACB=\theta$.



دراین صورت،

$$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos\alpha$$
$$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\beta$$

بالنتیجه،

$$AD^2+BD^2-CD^2=CD^2-2CD(AC\cos\alpha+BC\cos\beta)+(AC^2+BC^2).$$

عبارت سمت راست تساوی فوق یك سه جمله‌ای درجه دوم برحسب CD است که مبین آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=4[(AC\cos\alpha+BC\cos\beta)^2-(AC^2+BC^2)]$$
$$=4[2AC\cdot BC\cos(\alpha+\beta)-(AC\sin\alpha-BC\sin\beta)^2]$$
$$=4[2AC\cdot BC\cos\theta-(AC\sin\alpha-BC\sin\beta)^2]$$

ازطرفی،

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\theta,$$

بنابراین،

$$\Delta=4[AC^2+BC^2-AB^2-(AB\sin\alpha-BC\sin\beta)^2]$$

چون $AB^2\geqslant AC^2+BC^2$، این بدین معنی است که $\Delta\leqslant 0$. از اینجا نتیجه می‌شود که علامت $AD^2+BD^2-CD^2$، وقتی که D وضعیتهای مختلفی را اتخاذ می‌کند، تغییرنمی‌کند. باانتخاب $D=C$، مشاهده می‌شود که علامت عبارت فوق‌مثبت است.

اگر D در صفحه A، B، C نباشد، C' را در صفحه A، B، D چنان انتخاب می‌کنیم که $AC'=AC$، $BC'=BC$ و $C'D\geqslant CD$. دراین صورت، چون $AB^2\geqslant AC^2+BC^2$، پس، $AB^2\geqslant AC'^2+BC'^2$. بنابرقسمت اول،

$$CD^2\leqslant C'D^2\leqslant AD^2+BD^2.$$

بنابراین رابطه فوق درحالت کلی برقرار است.

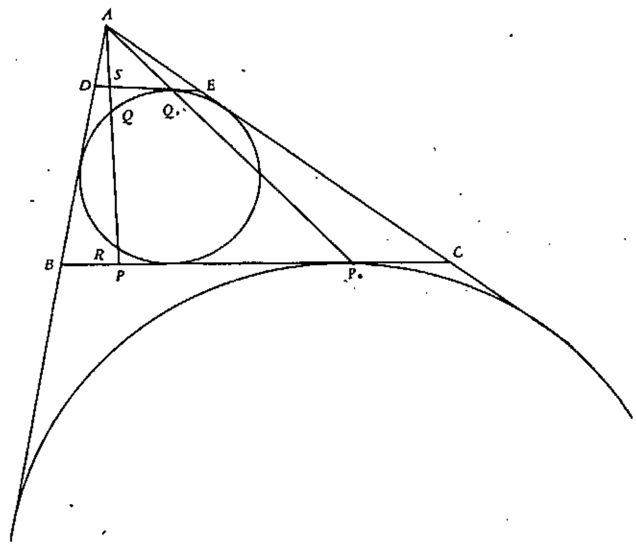
[برای قسمت دوم می‌توانستیم نقطه D' را تصویر نقطه D درصفحه ABC درنظر بگیریم، و با توجه به‌قسمت اول و مثلث قائم‌الزاویه حکم مطلوب را نتیجه بگیریم.]

۱۶ــ فرض کنید P نقطه متغیری برروی ضلع BC از مثلث ABC باشد. قطعه خط AP دایره محاطی مثلث را در دو نقطه Q و R قطع می‌کند. (نقطه Q به A نزدیکتراست) ثابت کنید که نسبت $\frac{AQ}{AP}$ وقتی مینیموم است که نقطه P نقطه تماس دایره محاطی خارجی متقابل A نسبت به‌ضلع BC باشد.

حل: مطابق شکل DE را موازی BC رسم می‌کنیم، به‌طوری که‌در Q_0 بر دایره‌محاطی داخلی مثلث‌مماس باشد. تجانس به‌نسبت $\frac{AQ_0}{AP_0}$، و به‌مرکز A، نقاط D و E را به‌ترتیب‌به B و C

می‌برد. همچنین، این تجانس دایره داخلی (خطوط مماس DE ، AB ، AC) را به‌دایره خارجی (خطوط مماس BC ، AB ، AC) می‌برد، بنابراین نقطه Q_0 به P_0 برده می‌شود، بالنتیجه، نقاط A، Q_0، P_0، دریك امتدادند.
در این صورت،

$$\frac{AQ_0}{AP_0}=\frac{AS}{AP}<\frac{AQ}{AP}.$$



۱۷ــ فرض‌کنید که A نقطه تقاطع دو دایره C_1 و C_2، به‌ترتیب، به‌مرکز O_1 و O_2 با شعاعهای متمایز باشند. یکی از خطوط مماس‌خارجی‌دودایره،دایرهC_1را درنقطه P_1 ودایرهٔC_2 رادرنقطهP_2 قطع‌می‌کند. خط مماس‌دیگر، دایره C_1 رادرنقطه Q_1 ودایرهC_2را درنقطه Q_2 قطع می‌کند. همچنین، فرض‌کنید کهM_1 نقطه‌وسط P_1Q_1 و M_2 نقطه وسط P_2Q_2 باشد.ثابت کنید که زاویه O_1AO_2 برابر زاویه M_1AM_2 است.

حل: فرض‌کنیم‌که نقطه O نقطه تقاطع دومماس‌خارجی باشد، وفرض کنیم‌که OA دایره C_2 را درنقطه B قطع‌کند. همچنین، فرض‌کنیدکه C نقطه تقاطع دیگر دو دایره وE نقطه تقاطع AC با P_1P_2 باشد. با توجه به‌روابط متری دودایره؛

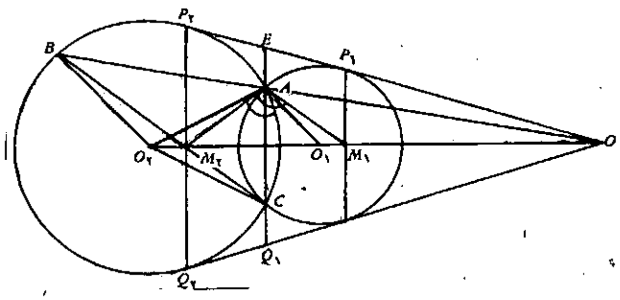
$$EP_1^2=EA\cdot EC=EP_2^2$$

نتیجه می‌شود $EP_1=EP_2$. از اینجا نتیجه می‌شودکه AC بر وسط M_1M_2 عمود است. بنابراین، $AM_1=AM_2$ و $\angle O_1M_1A=\angle O_1M_2A$ ، یا این معادل این است که $\angle O_2M_2B=\angle O_1M_2A=\angle O_1M_2C$. این تساوی ثابت می‌کندکه B،M_2،C برروی یك خط‌اند. بالنتیجه،

$$\Delta O_2CM_2\cong\Delta O_2AM_2$$

$$\angle O_2AM_2=\angle O_2CM_2=\angle O_2MB_2=\angle O_1AM_1$$

و این همان نتیجه مطلوب است.



۱۸ــ ازتقاطع سه‌خط متقارب در داخل مثلث، ومار برسه رأس آن، ۶ مثلث پدید می‌آید که مساحت سه مثلث آن یکی در میان با هم برابرند. ثابت‌کنید که سه خط متقارب منطبق برسه میانه مثلث است.

حل: مساحتهای مثلثها را، به‌طوری‌که در شکل مشاهده می‌کنید، به x، y، z و مساحت مشترك سه مثلث یك درمیان را به t نشان می‌دهیم. به‌آسانی می‌توان این تساویها را به‌دست آورد:

$$\frac{A'B}{A'C}=\frac{S_{ABA'}}{S_{AA'C}}=\frac{S_{BA'O}}{S_{A'CO}}=\frac{S_{ABA'}-S_{BA'O}}{S_{AA'C}-S_{A'CO}}=\frac{S_{ABO}}{S_{ACO}} \quad (۱)$$

فرض کنیم

$$\frac{C'A}{C'B}=\frac{z}{t}=r ، \frac{B'C}{B'A}=\frac{y}{t}=q ، \frac{A'B}{A'C}=\frac{x}{t}=p$$

تساوی (۱) را می‌توان به‌این‌شکل نوشت:

$$p=\frac{x}{t}=\frac{t+z}{t+y}=\frac{1+\frac{z}{t}}{1+\frac{y}{t}}$$

بنابراین،

$$p=\frac{1+r}{1+q} \quad (۲)$$

به‌همین ترتیب تساویهای ذیل به‌دست می‌آید؛

$$r=\frac{1+q}{1+p} \quad (۴) ، \quad (۳)\ q=\frac{1+p}{1+r}$$

ازضرب‌طرفین تساویهای فوق،نتیجه می‌شود $pqr=1$ (۵) ، با ضرب تساویهای (۲)، (۳)، (۴) و جمع آنها نتیجه

می‌شود که $pq+qr+rp=۳$ (۶). تساویهای (۵) و (۶) را به‌شکل ذیل می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{۳}\left[\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}+\frac{۱}{r}\right]=۱=\sqrt[۳]{\frac{۱}{p}\cdot\frac{۱}{q}\cdot\frac{۱}{r}}$$

چون، به‌موجب تساوی اخیر، واسطه عددی وواسطه هندسی سه‌عدد $\frac{۱}{p}$، $\frac{۱}{q}$، $\frac{۱}{r}$ مساوی با یکدیگرند. پس

$$p=q=r=۱$$

بنابراین، سه‌خط متقارب منطبق برمیانه‌های سه‌مثلث است.

۱۹- به‌چندطریق می‌توان ۴۰ عدد سیب را بین سه‌نفر توزیع کرد.

حل: مسئله را به‌این‌صورت حل می‌کنیم که هرنفرحداقل یك‌سیب دریافت کند. برای به‌دست‌آوردن طریقه‌های ممکن می‌بایستی تعداد جوابهای معادله $x+y+z=۴۰$ را در اعدادطبیعی، پیداکنیم. فرض می‌کنیم که ۴۰ سیب راکنارهم، مطابق شکل ذیل، قرارداده‌ایم.

برای تقسیم سیبها به‌سه قسمت‌کافی است در بین آنها ۲ نقطه تقسیم قراردهیم. اگـر اولین نقطه تقسیم بین دوسیب ابتدائی باشد، نقطه‌تقسیم دیگر بین سیب سوم تا بعد از سیب سی‌ونهم تغییر می‌کند. در چنین حـالتی ۳۸ طریقه امکانپذیر است.

حال اگر ۲ سیب را کنـار بگذاریم برای تقسیم بقیه سیبها، به ۲ قسمت، ۳۷ طریق حاصل می‌گردد. عمل را بهمین ترتیب ادامه می‌دهیم، تعداد طریقه‌های ممکن عبارت است از

$$۱+۲+۳+\ldots+۳۸=\frac{۱}{۲}\times ۳۸\times ۳۹$$

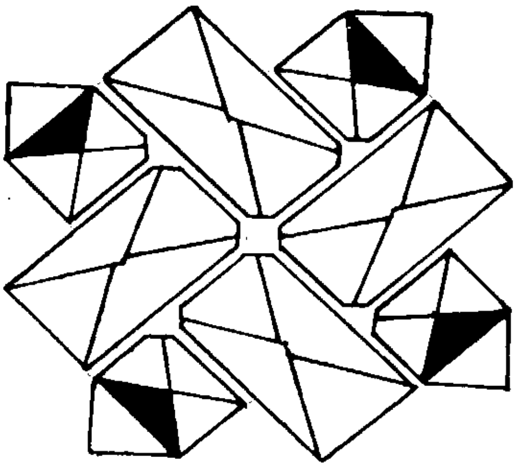
به‌عبارت دیگر، تعداد طریقه‌های ممکن برابر است با $\binom{۳۹}{۲}$.

۲۰- به‌چند طـریق می‌توان ۱۰ عدد سیب، ۱۵ عدد گلابی، و ۶ عدد هلو را بین چهارنفر توزیع کرد.

حل: ما حل را به‌گونه‌ای ارائه می‌دهیم که هریك از افراد حداقل، از هریك از میوه‌ها، یك‌میوه دریافت می‌کنند. بنابرمسئله ۱۹ طریقه‌های ممکن برابر است با

$$\binom{۹}{۳}\times\binom{۱۴}{۳}\times\binom{۵}{۳}=۱۰۱۹۲$$

نامه و نظر



برادرمحمود نکوئی - دانش‌آموز

تفکر شما درمورد مسائل مایه امیدواری است. اما لازم است به‌اطلاع برساندکه جسمی‌راکه‌کشیده‌اید جسم افلاطونی نیست. زیرا چند وجهی منتظم چند وجهی محدبی است‌که تمام وجوه آن چند ضلعی‌های منتظم متساوی وتمام فـرجه‌های آن باهم برابرند لوزی چهارضلعی منتظم نیست.

برادر ع. ت. ف - تهران

مقاله شما تحت عنوان خـواص اصلی انتگرالهای معین دریافت‌گردید امیداست که درمحاسبات دقت بیشتری به عمل آورد به‌هرحال‌این مقاله ازسطح مسائل‌دبیرستانی بالاتر است.

برادر حمیدرضا فنائی - دانش‌آموز

درمورد معادلات درجـه سوم وبالاترمطالبی خـواهیم داشت‌ضمناً دراین مورد می‌توانید به‌کتاب تئوری‌اعداد تألیف (مرحوم) غلامحسین مصاحب صفحه ۵۵۶ مراجعه فرمائید لازم به توضیح است‌که اگر a و b دوعدد مختلط باشند از $a^۳-b^۳$ نمی‌تـوان نتیجه گـرفت کـه $a=b$، زیـرا ممکـن است $a^۲+ab+b^۲=۰$ باشد. امیدواریم که موفق باشید

برادر حبیب‌الله گودرزی

ازرابـطه $۲a+nd-d=۴n+۲$ نمی‌تـوان نتیجه

گرفت که $2a-d=2$ و $d=4$ ولی راه‌حل دوم شما صحیح است و $l_n=4n$ است.

برادر غفارپور رهبر - تبریز

ضمن آرزوی موفقیت بیشتر برای شما، در آتیه در بخش مسائل ازمقاله ارسالی شما استفاده خواهد شد، امید است که مقالات خود را با خط خوانا ارسال دارید.

برادر فرهودپور یوسفی - تهران

از ارسال اشتباهات چاپی شماره ۹ نهایت تشکر را داریم. امیدواریم که این نوع اشتباهات در شماره‌های بعدی کاهش یابد. موفق و سربلند باشید.

برادر جعفردلیر - دبیر ریاضی - سبزوار

ما نیز برای شما آرزوی موفقیت متقابل می‌کنیم. نامه شما جهت بررسی به‌دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی ارجاع گردید.

برادر بهروز عسگریان - دانش‌آموز - تهران

از ارسال پاسخ بعضی ازمسائل شماره ۸ صمیمانه تشکر می‌نمائیم. امیدواریم که همکاری شما با مجله بیش‌ازپیش باشد.

برادر؟ مشهد درگز خیابان پاسداران کوچه گرایل پلاک ۲۴

از ارسال پاسخ به‌مسائل مسابقات ریاضی دانش‌آموزی تشکر می‌نمائیم. متأسفانه نام و نام خانوادگی خود را فراموش کرده‌اید. امید است که همکاری شما با مجله بیش‌ازپیش باشد.

برادر رضا حریری - دبیر ریاضی - جلفا

با تشکر فراوان از ارسال حل مسائل شماره ۸ امیدواریم که همکاری شما با مجله بیش‌ازپیش باشد و از تجارب خود مجله را مستفاد فرمائید.

برادر صهبا - دانش‌آموز - اصفهان.

ضمن آرزوی موفقیت برای شما به‌اطلاع می‌رساند که اکثر کتب ریاضی واژه‌نامه انگلیسی - فارسی و فارسی - انگلیسی دارند که می‌تواند نیاز شما را برطرف کند. لازم به یادآوری است که انجمن ریاضی ایران واژه‌نامه‌ای در دست تهیه دارد که در آتیه چاپ خواهد شد.

درمورد سؤال دوم باید بگوئیم که ما نمی‌دانیم شما بر چه اساسی تشخیص داده‌اید که ریاضیات در کشورهای بلوک شرق بالا و تکنولوژی پائین است. بررسی این موضوع مستلزم تحقیقات وسیعی است که ازقلمرو کارما خارج است وعلاوه‌براین به اعتقاد ما این کار غیرضروری است. اما به طورکلی می‌توان گفت که درطول تاریخ شرایط مختلف (فرهنگی - اجتماعی - اقتصادی) ایجاب می‌کند که یک کشور سرآمد و مرکز علوم (ازجمله ریاضی) باشد این مرکز ممکن است زمانی یونان، ایران، هند، مصر، آلمان، لهستان، امریکا، شوروی و... باشد. بدون شک می‌توان گفت که بین پیشرفتهای ریاضی (به‌ویژه در قلمروکاربردی) و تکنولوژی رابطهٔ مستقیم وجود دارد.

برادر یوسف رضاپور - دانش‌آموز - تهران

ضمن تشکر از ارسال حل مسائلی ازشمارهٔ ۸ متأسفانه نامهٔ شما وقتی به‌دست مارسید که شماره ۱۰ در زیرچاپ بود. امید است با ارسال به‌موقع راه‌حل مسائل ما را یاری فرمائید.

برادر محمد طایرشعاعی - تهران

متأسفانه حل مسائل ارسالی شما دیرتر از موعد مقرر به دست مارسید. به‌هرحال زحمت شما قابل تقدیر است. سؤال دوم شما را به‌بخش مسائل ارجاع کردیم که درآنجا چاپ گردد. معادلات پارامتری یک هذلولی به طریق زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

با فرض $\frac{x-\alpha}{a}=cht$, $\frac{y-\beta}{b}=sht$ معادلات پارامتری هذلولی به‌صورت $x=acht+\alpha$ و $y=bsht+\beta$ درمی‌آید

لازم به‌یادآوری است $cht=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$ و $sh=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$ می‌باشد

برادر سیدشهریار شاه‌محمدی - دانش‌آموز - تهران

از زحمات و نکته‌سنجی شما تشکر می‌نمائیم. درآتیه‌در موردحل‌معادلات مقالاتی خواهیم داشت. درموردتمرین ۱۱ صفحه ۷۵ کتاب مثلثات (دوم ریاضی فیزیک) نظر شما صحیح است و باید شرط $x>y$ به تمرین اضافه شود. در مورد سؤالات بند (ز) باید گفت که اگر جمله n ام، t_n و جمله k: t_k باشد آنگاه $t_k=t_n+(n-k)d$ که درحالت $k=1$ همان‌فرمول $t_k=t_1+(n-1)d$ به‌دست می‌آید.

برادر مهران استادرحیمی ـ تهران

نامه شما به آقای حسن نصیرنیا ارجاع گردید.

برادر بابك فهیمی ـ دانش‌آموز ـ دماوند

ضمن تشکر از ارسال پاسخ مسائل مسابقه دانش‌آموزی، حل مسائل ارسالی ۲، ۳، ۵ صحیح است. راه حل مسأله هندسه جالب است. امید است که همکاری شما بیش از پیش باشد.

برادر هادی ولادی ـ دانش‌آموز

از اظهار لطف شما نسبت به هیأت تحریریه تشکر می‌کنیم در مورد سؤال اول شما باید گفت که تساوی $\sqrt[۲]{(-۱)^{۲}} = (-۱)^{۲/۲}$ درست نیست زیرا $\sqrt{a^{۲}} = |a|$. در مورد سؤال دوم، متأسفانه اشارات کتاب «ریاضیات جدید» چهارم در این مورد کامل نیست، درمورد این سؤال می‌توانید به مقالات «ریاضیات چیست» و نیز کتاب «آنالیز ریاضی» تألیف (مرحوم) غلامحسین مصاحب مراجعه کنید. متأسفانه اثبات وجود انتگرال ریمان از سطح مجله بالاتر است در آتیه اگر روش ساده‌تری پیدا شود در مجله درج خواهد شد.

برادر مسعود ساروی ـ دانشگاه مازندران ـ بابلسر

از لطف شما نسبت به هیأت تحریریه تشکر می‌کنم. گرچه دستور ارسالی جنابعالی برای محاسبه معکوس ماتریس بسیار جالب است ولی به‌نظر می‌آید که در حالت کلی برای محاسبه $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ نیاز به‌محاسبات زیادتری باشد.

برادر علیرضا مردانی

ضمن تشکر از ابراز محبت شما، در آتیه مقالاتی در معادلات خواهیم‌داشت.

برادر محمد مهدی کاوه یزدی ـ دانشجو ریاضی ـ یزد

از اظهار لطف شما نسبت به‌مجله تشکر می‌نمائیم امیدواریم که در کار علمی خود موفق باشید متأسفانه بازخوانی ترجمه شما از قلمرو فعالیت ما خارج است.

برادر عمران مرسلی آقاجری ـ کرج

حل مسأله مسابقه در این شماره (شماره ۱۲) چاپ‌شده است. ضمناً مسأله پیشنهادی شما برای مسابقه قبلاً در این مجله حل شده است.

برادر محمدرضا بهشتی ـ دبیر ـ ابهر

ضمن تشکر از اظهار محبت شما نسبت به مجله به‌اطلاع می‌رساند که بخش علمی مجله (هیأت تحریریه) از بخش توزیع جدا است، ولی به هرحال نامه شما به بخش توزیع ارجاع می‌گردد.

برادر یعقوب فرجامی ـ دانش‌آموز ـ قم

از ابراز محبت شما نسبت به‌مجله تشکر می‌نمائیم. در مورد مجله رشد لازم است بگوئیم هیأت تحریریه بخش علمی مجله را به عهده‌دارد و به‌طورکلی مجله از انتشارات سازمان پژوهش برنامه‌ریزی وزارت آموزش وپرورش است که هدفش صرفاً ارتقاء سطح ریاضی‌وجلوگیری از افت ریاضی است و هیچ هدف مادی را دنبال نمی‌کند. پیشنهادات شما در هیأت تحریریه مطرح خواهد شد.

برادر سید مجتبی صدوقی ـ شمیران

از ارسال دو راه حل‌مسأله شماره ۲ هندسه مجله شماره ۹ تشکر می‌نمائیم.

برادر عبدالله رنجبر ـ دانش‌آموز ـ سنندج

با عرض سلام متقابل به‌طوری که قبلاً هم گفته‌ایم فرمول دقیق محاسبهٔ محیط بیضی به‌انتگرالی تبدیل می‌شود که این انتگرال را نمی‌توان به روشهای مقدماتی محاسبه کرد به عبارت دیگر مقدار این انتگرال به سریها بر می‌خورد که تنها می‌توان به‌روش تقریبی مقدار آنرا محاسبه نمود به‌هرحال یکی از روشهای امتحان فرمول شما اینست که $a=b$ قرار داده و جواب خود را امتحان کنید.

برادر خالقی ـ دبیر ـ زنجان

مقاله شما درمورد موارداستعمال اعداد مختلط درهندسه جهت بررسی به‌هیأت تحریریه ارجاع گردید. موفقیت شما را از خداوند متعال خواستاریم.

برادر احمد عباسی ـ دانشجو ـ مشهد

به‌طوری که‌می‌دانیداین‌مجله‌ازانتشارات‌سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی وزارت آموزش و پرورش می‌باشد وهدف آن در وهلهٔ اول ارتقاء سطح دانش ریاضی‌دانش‌آموزان ودبیران و در وهلهٔ ثانی ارتقاء دانش ریاضی دانشجویان است. در مورد سؤالتان واضح است که $dim_Q R = \infty$ زیرا اگر $dim_Q(R) = n$ باشد (فرض خلف) آنگاه $۱, \pi, \dots, \pi^n$ نامستقل خطی‌اند لهذا اعدادگویایی مانند $a_۰, a_۱, \dots, a_n$ موجودند به طوری که $a_۰ + a_۱\pi + \dots + a_n\pi^n = ۰$ واین خلاف متعالی بودن π است.

برادر مجید سعادت پژوه ـ دانش‌آموز ـ تهران

فعالیت شما درمورد حل مسائل موجب امیدواری است. موفقیت شما را از درگاه خداوند متعال خواستاریم.

بقیه پیشگفتار

شماره مساله‌ای تحت‌عنوان مساله مسابقه درج می‌گردد تا باحل آنها قدرت ابتکار، خلاقیت و اعتماد به نفس خوانندگان تقویت‌گردد. خوشبختانه، در این رابطه محصلین گرامی همکاری قابل تحسینی با ما به‌عمل می‌آورند. در این مقام مناسبت‌دارد ازمساعی جمیله‌کلیه دانش آموزانی که با ما همکاری مستقیم دارند و با ارسال مقاله وحل مسائل ما را یاری می کنند تشکر کنیم و موفقیت همه آنها را آرزونمائیم. ازسوی دیگر، جادارد‌به مسأله‌ای دیگرنیزاشاره‌کنیم وآن اینکه سؤالات ومقالات‌مکرری در ارتباط بابعضی ازمسائل ریاضی ازقبیل تثلیث زاویه، محاسبه محیط بیضی وغیره به‌دست‌ما می‌رسدکه‌حاوی ادعاهایی‌مبنی برحل این مسائل می‌باشد.گرچه ما در پاسخ نامه‌ها، به‌حل‌ناپذیری این مسائل اشاره‌کرده‌ایم، ولی‌گویا این پاسخ‌ها قانع کننده نبوده است. اجمالا اشاره می‌کنیم‌که در ریاضیات سه نوع‌مسأله داریم: الف) مسائل‌حل شده، نظیربسیاری ازقضایا ومسائل‌حل شده ریاضی‌مانند قضیه فیثاغورث... ب) مسائلی‌که حل ناپذیری آنها ثابت شده است که مسائل فوق از این نوع است. یعنی، ثابت شده است‌که تثلیث زاویه به‌کمك خط‌کش وپرگار امکان ندارد و این حکم بیان می‌کندکه تثلیث زاویه به‌حکم خط‌کش وپرگارممتنع است. یا درمورد محیط بیضی، بطورکلی می‌دانیم که طول هرخم‌بین A و B را می‌توان به‌وسیله یك انتگرال‌معین محاسبه‌کرد و بیضی هم از این قاعده مستثنی نیست. اما بعضی از انتگرالها قابل محاسبه نیستند. به‌عبارت دیگر، توابع اولیه عبارت تحت انتگرال را نمی‌توان با توابع مقدماتی محاسبه نمود. انتگرال‌مربوط به‌بیضی هم‌ازهمین نوع است. البته‌روشهای تقریبی برای انجام این‌عمل وجود دارد. ج) نوع سوم مسائلی است‌که هنوز حل نشده‌اند، به‌عبارت دیگرتاکنون‌کسی موفق به حل آنها نشده است. نمونه‌هایی از این‌مسائل درمقالهٔ «ریاضیات چیست شماره ۱۱» آمده است. امید است که دانش آموزان گرامی و خوانندگان عزیز مجله با عنایت به‌نقطه نظرهای بالا اوقات‌گرانبهای خودرا بیهوده تلف نکنند و در موارد مشابه راهنمائیهای لازم را از مجله درخواست نمایند. یك محصل ریاضی می‌تواند با مطالعه دقیق‌کتابهای ریاضی، پایه‌های فکری، منطقی و ریاضی خود را مستحکم کند و با یادگیری دقیق مفاهیم وحل مسائل قدرت تفکرخودرا تقویت نماید. این بهترین شیوه برای باروری ذهنی و فکری در حال و آینده خواهد شد، وگرنه با اتلاف وقت خود نهایتاً به‌حالت انفعالی افتاده وبه‌یکباره علاقه خود را به‌دانش ریاضی از دست خواهد داد.

*

مساله بعدی که‌گهگاهی بعضی ازخوانندگان عزیز عنوان می‌کنند اینست که بعضی ازمقالات‌مجله‌متناسب باسطح دبیرستانی نیست. انتظار ما اینست‌که‌این‌اظهار نظرها به‌طورمشخص انجام گیرد، تا راهنمای ما درمورد پذیرش مقالات‌گردد. ما نظر هیأت تحریریه را در مورد نوع مقالات درپیشگفتار شماره ۱۱ اعلام کرده‌ایم و بازهم یادآوری می‌کنیم‌که این مجله از انتشارات وزارت آموزش وپرورش است ولهذا در وهله اول متعلق به‌همه دبیران محترم ودانش‌آموزان‌گرامی است. نظرآنها درموردنوع مقالات نه تنها مؤثربلکه تعیین‌کننده است. اما، به‌طوری‌که‌قبلا هم اشاره‌کرده‌ایم این نوع‌تلقی‌ها نبایدما را ازپیشرفتهای‌دانش ریاضی و ریاضیات‌کاربردی غافل سازد. ما هرسال شاهدانتشار صدها مقالهٔ تحقیقی در زمینه‌های ریاضیات مجرد، کاربردی، آمار وکامپیوتردرجهان هستیم. امروزه با به‌کارگیری تکنیکهای‌دانش ریاضی رایانه‌هایی ساخته می‌شودکه به‌جای یك‌انسان‌وهزاران برابرسریعتر ازاوکارفیزیکی انجام‌می‌دهد. چگونه می‌توانیم‌وقت خودرا فقط صرف‌مسائل تکراری بنمائیم. باید سطح مقالات را توسیع دهیم، واین بخش بزرگی از رسالت ما است که دانش دبیران هم‌میهن خودرا باآخرین پیشرفتها آشنا سازیم. درغیراین صورت، خطربزرگی مجله شما را تهدید می‌کند وآن افتادن در ورطهٔ انتشارمقالات تکراری وعامه‌پسند ومطرح‌کردن‌موضوعاتی نظیرمسائل شعبده‌بازی خواهد بود، که نه تنها مفید فایده نیست بلکه مضروگمراه‌کننده است. به‌ویژه‌آنکه، این مجله‌ازانتشارات یك موسسه پژوهشی است‌که هیچ غرض مادی را دنبال‌نمی‌کند وجنبه آموزشی وتحقیقاتی آن برهرجنبه دیگرغلبه دارد.

*

درمورد تاریخ‌ریاضیات: اعتقاد ما براینست‌که‌این‌مقالات را به‌سمت مقالات موضوعی سوق‌دهیم لهذا از صاحبنظران و همکاران محترم دانشگاهی و دبیران گرامی‌درخواست‌می نمائیم در این زمینه ما را یاری نمایند تا درآتیه بتوانیم مقالاتی در زمینه تاریخ شاخه‌های مختلف ریاضی داشته باشیم.

ازکلیه همکاران دانشگاهی، دبیران، دانشجویان‌ودانش آموزانی‌که‌باارسال مقاله ما راموردلطف قرارمی‌دهندصمیمانه تشکرمی‌نمائیم‌ومصرانه می‌خواهیم که‌همکاری خودرا بیش‌ازپیش عملی سازند و از ارشاد، راهنمائیها و انتقادات خود ما رابی نیاز نداننـد.

*

درپایان، لازم است که از مساعی جمیلـهٔ کلیه بخشها و اشخاصی‌که در انتشار این نشریه ما را یاری می نمایند تشکر و قدردانی نمائیم. ابتدا باید ازاعضاء محترم هیأت تحریریه تشکر نمائیم‌که با صرف اوقات‌گرانبها خود، نهایت دقت را دربررسی مقالات به‌عمل می‌آورند تا حتی‌المقدورمجله خالی از اشکال منتشرگردد. مسولین‌تولید وتوزیع همکاری زائدالوصفی‌بامجله دارندکه لازم است ازطرف هیأت تحریریه سپاس خود را تقدیم این افراددلسوزبنمائیم ازهمکاری وهماهنگی پیوسته‌گروه‌ریاضی دفترتحقیقات با مجله تشکرمی‌نمائیم.

*

فرض است‌که ازبانی خیراین مجله ومجلات رشد دیگر، برادرگرامی آقای دکترغلامعلی حداد عادل معاون محترم وزیر و رئیس سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی‌که مشوق و پشتیبان اصلی مجله بوده وهستند سپاسگزاری نمائیم.،بدون‌شك، بدون پشتیبانی وحمایت بی‌دریغ ایشان امکان انتشارمجله‌باکیفیت فعلی مقدور نیست.

*

بالاخره، تکرارمی‌کنیم اهداف ما اعتلاء دانش ریـاضی است و بهترین اجرما، راهنمایی ، ارشاد وحتی انتقاد دبیران، دانش‌آموزان ودانشجویان‌گرامی است.

سردبیر

بقیهٔ مقاله

قرینه سازی جبری به عنوان یك مسئلهٔ جهانی

مندرج در شماره قبل

دکتر ارسلان شادمان

۵. زیرگروه پدید آمده درحالت آبلی وکاربرد در نشاندن

در گـروه آبلی $(A\ ;\ \oplus\ ;\ \alpha)$ قـرینهٔ عضو a را $\ominus a$ نمایش دهیم. جواب معادلهٔ $x\oplus a=b$ را **حاصل تفریق** a از b نامیده بـا $b\ominus a$ نمایش دهیم ، یعنی $b\ominus a=b\oplus(\ominus a)$. یك زیرمجموعهٔ A مانند Z را **زیرگروه** نامیم هـرگاه : اولاً پایدارباشد، ثانیاً حاوی‌عضو α باشدثالثاً قرینهٔ هرعضو Z یك عضو Z باشد. واضح است که اشتراك دلخواه زیرگروه است. خصوصاً بادردست‌داشتن‌زیرمجموعهٔ‌مفروض‌ازAمانندY ،اشتراك همهٔ زیرگروههائی که شامل Y اندکوچکترین زیرگروه شامل Y است‌کـه به‌نام «زیرگـروه پدیدآمده با Y» نامیده می‌شود. زیرگروه پدیدآمده با Y را با نماد $\langle Y\rangle$ نمایش می‌دهیم.

قضیهٔ ۴. اگر Y یك‌زیرمجموعهٔ ناتهی وپایدار درگروه آبلی $(A\ ;\ \oplus\ ;\ \alpha)$ باشد ، آنگاه $\langle Y\rangle$ برابر است بامجموعهٔ

$$\{b\ominus a | a\in Y \wedge b\in Y\}.$$

برهان. این مجموعه را Z بنامیم. اولاً Z پایداراست، زیرا

$$(b\ominus a)\oplus(d\ominus c)=(b\oplus d)\ominus(a\oplus c)$$

ثانیاً $\alpha\in Z$ ، زیـرا Y ناتهی است و می‌تـوان عضوی از آن مانند a را درنظرگرفت و ملاحظه کـردکـه $\alpha=a\ominus\alpha$. ثالثاً قرینهٔ $b\ominus a$ می‌شود $a\ominus b$ داریم $Y\subset Z$ ، زیرا

$$a\in X \Rightarrow a=a\ominus(a\ominus a) \Rightarrow \alpha\in Z$$

ازطرف دیگـر، هرزیرگروه‌که شامل Y باشد، اجباراً حـاوی اعضای $b\ominus a$ خواهدشد، یعنی‌شامل Z است. پایان برهان. ■

یادداشت. به‌سادگی، زیـر گروه پدیدآمده با یك بخش

دلخواه (تهی یا ناپایدار) در یك گروه آبلی تعیین می‌شود. در حالت غیرآبلی نیز مطلب فقط اندکی پیچیده‌تر است، از این حالت صرفنظر می کنیم: در گروه آبلی $(A ; \oplus ; \alpha)$، اگر $Y=\varnothing$ آنگاه $<\varnothing> = \{\alpha\}$. اگر $Y\neq\varnothing$،
$<Y> = \{ma\ominus nb \mid m\in \mathbf{N} \wedge n\in \mathbf{N} \wedge a\in Y\wedge b\in Y\}$.
تعریف na برای $a\in A$ و $n\in \mathbf{N}$ چنین است: عضو $a\in A$ را در نظر بگیریم. نگاشت $n \to na$ از $\mathbf{N}$ به A را با استقراء روی n تعریف می کنیم

$$\begin{cases} 1a=a \\ (n+1)a=(na)\oplus a \end{cases}$$

به طور شهودی na یعنی $a\oplus a\oplus\cdots\oplus a$ (n مرتبه). اگر بیم ابهام نباشد، به‌جای نماد na از نماد $\bigoplus\limits_{k=1}^{n} a$ استفاده می‌شود که خود حالت خاصی از $\bigoplus\limits_{k=1}^{n} a_k$ است: اگر (a_k) و $1\leqslant k$ دنباله‌ای از اعضای A باشد و $n\geqslant 1$، این نماد نیز با استقراء تعریف می‌شود:

$$\bigoplus_{k=1}^{1} a_k = a_1, \qquad \bigoplus_{k=1}^{n+1} a_k = \Big(\bigoplus_{k=1}^{n} a_k\Big)\oplus a_{n+1}$$

کاربرد قضیهٔ ۳ در نشاندن. فرض کنیم $\varphi: X\to A$ یك نشاندن دستگاه $(X ; T)$ در گروه آبلی $(A;\oplus;\alpha)$ باشد. قرار دهیم $Y=\varphi(X)$. واضح است که Y یك بخش پایدار و ناتهی A است، درنتیجه زیرگروه پدیدآمده با Y چنین است:

$$<Y> = <\varphi(X)> = \{\varphi(b)\ominus\varphi(a) \mid a\in X\wedge b\in X\}$$

دو عضو $<Y>$ مانند $\varphi(b)\ominus\varphi(a)$ و $\varphi(d)\ominus\varphi(c)$ برابرند اگر و تنها اگر

$$\varphi(a)\oplus\varphi(d)=\varphi(c)\oplus\varphi(b),$$

و یا

$$\varphi(a\top d)=\varphi(c\top b)$$

و یا با توجه به‌یك به‌یك بودن φ،

$$\boxed{a\top d=c\top b}$$

بنابراین، هرعضو زیرگروه $<Y>$، به‌وسیلهٔ یك زوج مرتب $(a,b)\in X\times X$ به‌دست می آید و برای آنکه زوجهای مرتب (a,b) و (c,d) هردو یك عضو را مشخص کنند لازم و کافی است که بین آنان «تناسب» $a\top d=c\top b$ برقرار باشد. همین نکتهٔ ساده اساس ساختمان «قرینه‌سازی» است که برمبنای تناسب وابسته به‌عمل $\top$ بنا می‌شود.

پیش از پرداختن به‌تناسب، کاربرد بیشتری از این نکته را در نشاندنها ارائه می‌دهیم. دوگروه آبلی $(A ; \oplus ; \alpha)$ و $(A' ; \oplus' ; \alpha')$ را درنظر بگیریم و فرض کنیم $\ominus$ و $\ominus'$ به ترتیب نماد قرینه و تفریق درگروه یکم و گروه دوم باشد. نشاندنهائی مانند

$$\varphi : X\to A \quad \text{و} \quad \varphi' : X\to A'$$

را درنظر می گیریم و فرض می کنیم:

$$G=<\varphi(X)>=\{\varphi(b)\ominus\varphi(a) \mid a\in X\wedge b\in X\},$$
$$G'=<\varphi'(X)>=\{\varphi'(b)\ominus'\varphi'(a) \mid a\in X\wedge b\in X\}.$$

نگاشتهای $\varphi: X\to G$ و $\varphi': X\to G'$ را با ضابطه‌های $\varphi(x)=x$ و $\varphi'(x)'=\varphi'(x)$ تعریف می‌کنیم. واضح است که φ نشاندنی از $(X ; \top)$ به $(G ; \oplus ; \alpha)$ و φ' نشاندنی از $(X ; \top)$ به $(G' ; \oplus' ; \alpha')$ است. بدین‌ترتیب، نشاندنهای مفروض φ و φ' تقلیل یافته‌اند. اما در واقع جالبتر آن است که G و G' ایزومورف‌اند. به‌صورت دقیقتر:

قضیه ۴. باعلامتگذاریهای پیش، یك ایزومورفیسم
$$f : G\to G'$$
موجود است به‌قسمی که $\varphi'=f\circ\varphi$.

توضیح بیشتر صورت قضیه، جابجایی بودن نمودار زیر است:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\varphi"'] & X \arrow[l, "id"'] \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\varphi"] & X \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\varphi'"] & X \arrow[d, "\varphi'"] \\
A & G \arrow[l, "\partial"] \arrow[r, "f"'] & G \arrow[r, "\partial'"'] & A'
\end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} \partial(y)=y \\ \partial'(y')=y' \end{array}$$

برهان. به ازای $u\in G$، زوج مرتب (a, b) از اعضای X هست که

$$u=\varphi(b)\ominus\varphi(a)$$

$f(u)$ را چنین تعریف‌کنیم:

$$f(u)=\varphi'(b)\ominus'\varphi'(a)$$

$f(u)$ فقط بستگی به u دارد و نه (a,b)، به‌عبارت دیگر، اگر

$$\varphi(d)\ominus\varphi(c)=\varphi(b)\ominus\varphi(a)$$
$$\varphi'(d)\ominus'\varphi'(c)=\varphi'(b)\ominus'\varphi'(a)$$

در واقع، دیدیم که هریك از این برابریها معادل است با $a\top d=c\top b$. پس f خوشتعریف است و یك نگاشت

$$f: G\to G'$$

است. این نگاشت یك هومومورفیسم است: زیرا اگر

$$u=\varphi(b)\ominus\varphi(a),$$
$$v=\varphi(d)\ominus\varphi(c),$$

آنگاه

$$\begin{aligned}u\oplus v&=[\varphi(b)\ominus\varphi(a)]\oplus[\varphi(d)\ominus\varphi(c)]\\&=[\varphi(b)\oplus\varphi(d)]\ominus[\varphi(a)\oplus\varphi(c)]\\&=\varphi(b\top d)\ominus\varphi(a\top c)\end{aligned}$$

درنتیجه

$$\begin{aligned}f(u\oplus v)&=\varphi'(b\top d)\ominus'\varphi'(a\top c)\\&=[\varphi'(b)\oplus'\varphi'(d)]\ominus'[\varphi(a)\oplus'\varphi'(c)]\\&=[\varphi'(b)\ominus'\varphi'(a)]\oplus'[\varphi'(d)\ominus'\varphi'(c)]\\&=f(u)\oplus' f(v).\end{aligned}$$

نگاشت f دوسوئی است زیرا در واقع نگاشت عکس آن با دستور مشابه تعریف می‌شود:

$$f'(\varphi'(b)\ominus'\varphi'(a))=\varphi(b)\ominus\varphi(a),$$

ایزومورفیسم بودن f ثابت شد. اکنون برای $x\in X$، می‌توان نوشت

$$\varphi(x)=\varphi(x\top x)\ominus\varphi(x)$$

درنتیجه، بنابرتعریف f،

$$\begin{aligned}f(\varphi(x))&=\varphi'(x\top x)\ominus'\varphi'(x)\\&=\varphi'(x).\end{aligned}$$

و همین اثبات قضیه را به‌پایان می‌رساند.■

۶. حل مشروط مسألهٔ جهانی

نتیجه‌ای از قضیهٔ ۴ این است که مسألهٔ جهانی مورد بحث، مشروط بر آنکه نشاندن $(X;\top)$ درگروهی آبلی موجود و در دست باشد، به‌کلی حل می‌شود.

قضیهٔ ۵. چنانچه $\varphi: X\to A$ یك نشاندن دستگاه $(X;\top)$ درگروه آبلی $(A;\oplus;\alpha)$ و φ نشاندن تقلیل یافتهٔ φ، یعنی

$$\varphi: X\to G,\quad G=\langle\varphi(X)\rangle,\quad \varphi(x)=\varphi(x)$$

باشد، دراین صورت زوج مرتب (G,φ) جواب مسألهٔ جهانی است: برای هرنشاندن

$$\varphi: X\to B$$

از $(X;T)$ به یك گروه آبلی دلخواه $(B;+;O)$ یك و تنها یك هومومورفیسم گروه

$$g: G\to B$$

هست که $\varphi=g\circ\varphi$.

برهان. مانند قضیهٔ قبل، نمودار زیر را در نظر بگیریم

$$\begin{tikzcd}X \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\varphi"'] & X \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\psi'"] & X \arrow[d] \\ G \arrow[r, "f"'] & \langle\psi(x)\rangle \arrow[r, "g"'] & B\end{tikzcd}$$

که f ایزومورفیسم موضوع قضیهٔ ۴ و d نگاشت مشمولیت $j(y)=y$ است. قرار دهیم $g=j\circ f$ که در واقع با ضابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$g(\varphi(b)-\varphi(a))=\psi(b)-\psi(a),$$

که منظور از $-$ تفریق وابسته به $+$ درگروه B است. خوشتعریفی و هومومورفیسم بودن g و برابری $\psi=g\circ\varphi$ از قضیهٔ قبل روشن است. فقط یکتایی g باید ثابت شود: چنانچه g_1 نیز هومومورفیسم از G به B باشد و $\psi=g_1\circ\varphi$، ناچار

$$g_1(\varphi(b)\ominus\varphi(a))=\psi(b)-\psi(a)$$

پس g_1 و g_1 به‌ازای اعضائی از G که به شکل $\varphi(b)\ominus\varphi(a)$ باشند، برهم منطبق‌اند. اما G عضو دیگری ندارد. پایان برهان.■

۷. تناسب وحل نهائی مسأله

دیدیم که کافی است فقط یك نشاندن دستگاه مفروض در یك گروه آبلی را بسازیم. فرض‌کنیم شرایط لازم قضیهٔ ۱ برقرارباشند: $(X;\top)$ مفروض وعمل آن شرکتپذیر، جابجائی وپیروقاعدهٔ حذف فرض می‌شود. چون X ناتهی است،یك عضو آنرادرنظر گرفته a_0 می‌نامیم.

قضیه ۶. درمجموعهٔ X^2 رابطهٔ دوتایی R را بادستور

$$(a,b)R(c,d)\iff a\top d=c\top b$$

تعریف می‌کنیم. دراین‌صورت R یك رابطهٔ هم‌ارزی است.

برهان. خاصیتهای انعکاس وتقارن بدیهی‌انـد. خاصیت تعدی را ثابت‌کنیم. فرض کنیم

$$(a,b)R(a',b')\wedge(a',b')R(a'',b'').$$

پس

$$a\top b'=a'\top b\wedge a'\top b''=a''\top b'$$

$$(a\top b')\top(a'\top b'')=(a'\top b)\wedge(a''\top b')$$

وبنابر شرکتپذیری وجابجائی

$$(a\top b'')\top(a'\top b')=(a''\top b)\top(a'\top b')$$

وباحذف $a'\top b'$ ازدوطرف،معلوم‌می‌شود $a\top b''=a''\top b$، یعنی $(a,b)R(a'',b'')$. ■

تعریف. رابطهٔ هم‌ارزی R را که در X^2 تعریف‌کردیم، «تناسب وابسته‌به‌عمل $\top$»می‌نامیم. ردهٔ هم‌ارزی عضو (a,b) از X^R را با $R(\{(a,b)\})$ طبق معمول ویا با $R(a,b)$ برای سهولت‌نمایش می‌دهیم. مجموعهٔخارج‌قسمت $\frac{X^2}{R}$ را با A نمایش دهیم. قرارمی‌دهیم $\alpha=R(a_\circ,a_\circ)$. یك عمل روی A تعریف می‌کنیم بانماد $\oplus$ وثابت می‌کنیم $(A;\oplus;\alpha)$ یك گروه آبلی است. سپس یك نشاندن X در A راتعریف خواهیم کرد ومسأله پایان می‌یابد.

لم. اگر $(a,b)R(a',b')$ و $(c,d)R(c',d')$، آنگاه

$$(a\top c,b\top d)R(a'\top c',b'\top d')$$

برهان. بنابرفرض

$$a\top b'=a'\top b$$
$$c\top d'=c'\top d$$

پس. باترکیب طرفین چپ وطرفین راست و استفاده از شرکتپذیری وجابجائی

$$(a\top c)\top(b'\top d')=(a'\top c')\top(b\top d)$$

واین همان است‌که می‌خواستیم.

$$R(a,b)\oplus R(c,d)=R(a\top c,b\top d)$$

بنابر لم پیش، بـدین ترتیب یك عمل روی مجموعهٔ $A=\frac{X^2}{R}$ تعریف می‌شود : حاصل ترکیب فقط بستگی به رده‌ها دارد و نـه نماینده‌هـای رده‌هـا. از طرف دیگـر، واضح است کـه $\alpha=R(a,a)=R(a_\circ,a_\circ)$ و $a\in A$. ردهٔ وابسته به یك عضو X. به‌ازای $x\in Y$، $a\in X$، $b\in X$

$$R(a\top x,a)=R(b\top x,b)$$

زیرا

$$(aTx)Tb=(bTx)Ta$$

ردهٔ وابسته به x بنابر تعریف، $R(a\top x,a)$ است‌که‌بستگی به a ندارد.

قضیه ۷. باعلامت‌گذاریهای پیش، $(A;\oplus;\alpha)$ یك‌گروه آبلی ونگاشت

$$\varphi:X\to A$$

که باضابطهٔ $\varphi(x)=R(a\top x,a)$

تعریف می‌شود یك نشاندن $(X,\top)$ دراین‌گروه است.

برهان. فـرض کـنیـم $\xi=R(a,b)$، $\eta=R(c,d)$ و $\zeta R(m,m)$. داریم

$$\begin{aligned}(\xi\oplus\eta)\oplus\zeta&=[R(a,b)\oplus R(c,d)]\oplus R(m,m)\\&=R(a\top c,b\top d)\oplus R(m,m)\\&=R((a\top c)\top m,(b\top d)\top m)\\&=R(a\top(c\top m),b\top(d\top m))\\&=R(a,b)\oplus R(c\top m,d\top m)\\&=R(a,b)\oplus[R(c,d)\oplus R(m,m)]\\&=\xi\oplus(\eta\oplus\zeta).\end{aligned}$$

پس $\oplus$ شرکتپذیر است. به‌همین شیوهٔ اثبات جابجائی $\oplus$ ساده است. به‌علاوه:

$$\xi\oplus\alpha=R(a,b)\oplus R(a_\circ,a_\circ)=$$
$$=R(a\top\alpha_\circ,b\times a_\circ)=R(a,b)=\xi$$

اگر $\xi'=R(b(a)$ آنگاه $\xi\oplus\xi'=\alpha$. پس $(A;\oplus;\alpha)$ گروه است. نگاشت φ یکبیك است: فرض کنیم $\varphi(x)=\varphi(y)$ یعنی

$$R(a\top x,a)=R(a\top y,a)$$

پس $(a\top x,a)R(a\top y,a)$

و یا $(a\times x)\top a=(a\top y)\top a$.

بااستفاده از قاعدهٔ حذف، نتیجه خواهد شد $x=y$.

نگاشت φ هومومورفیسم $(X;\times)$ در $(A;\oplus)$ است:

$$\begin{aligned}\varphi(x\times y)&=R(a\times x\times y,a)\\&=R(a\times x\times y\times a,a\times a)\\&=R(a\times x,a)\oplus R(y\times a,a)\\&=\varphi(x)\oplus\varphi(y).\end{aligned}$$

به‌همین‌جا اثبات قضیه پایان می‌یابد. ■

حل مسألهٔ جهانی نیزهمراه‌آن به‌پایان‌می‌رسد. مثالها وخصوصاً نمایشهای گوناگونی برای‌نمایش Z درمرجع [آذری ودیگران] آورده‌ایم. خواننده می‌تواند مراجعه کند.

۸. واژه‌ها

برخی‌ازواژه‌های‌متن‌را بامعادل انگلیسی آنها می‌آوریم. چنانچه معادل فرانسه شبیه معادل انگلیسی یا همریشهٔ آن نبوده باشد، معادل فرانسه را نیز با قید «F:» اضافه می‌کنیم. بدیهی است‌که این واژه‌ها یك واژه‌نامهٔ کامل اصطلاحات ریاضی متن نیست.

انعکاس (= بازتابی)	*reflexivity*
بخش(= زیرمجموعه)	*past(= subset)*
بخشبندی (= افراز)	*partitioa*
برد (درمورد رابطه)	*range*
پایدار	*invariant (= stable)*
تقارن	*symmetry*
پاد —	*antisymmetry*
حذف	*cancellatian (F : simplificadim)*
دامنه	*domain*
دستگاه جبری	*algebraic system*
رابطه (= نسبت)	*relation*
ـ پوشا	*onto — (= F : — surjective)*
ـ دوتایی	*binary —*
ـ یکبیك	*one — to — one — (= F : — injective)*
رده	*class*
ـ هم‌ارزی	*equivalence*
زیرگروه پدیدآمده با	*subgroup generated by*
سایه مستقیم	*image*
سایه معکوس	*coimage (F : umaye reciproque)*
عضو بی‌اثر	*neutral element*
عمل (= قانون ترکیب)	*operation*
قرینه (= وارون= متقابل)	*symmetric (= inverse) = opposite).*
مجموع خارج‌قسمت	*quotient set*
نشاندن	*embedding (F : plonjemcnt)*
ـ تقلیل یافته	*reduced —*
ـ متعارف	*canonical —*
نموداد جابجائی (ن‌ج)	*commutativ diagram (CD, F : DC)*

۹. مراجع

[۱] آذری، باهمت، ثقفی، شادمان، فرهودی مقدم؛ ۱۳۶۴: راهنمای‌معلم ریاضی سال‌اول دورهٔ راهنمایی‌تحصیلی، دفتر تحقیقات وبرنامه‌ریزی و تالیف‌کتابهای درسی، وزارت آموزش وپرورش، تهران.

[۲] آوانسیان؛ ۱۳۴۰: مقدمه برآنالیز نوینی، دانشگاه ملی ایران، تهران.

[۳] پیزو، زامانسکی؛ ۱۹۵۹ میلادی
generafes, Dumod, Paris.

[۴] دوبری ۱۹۷۲:

[4] *Dubreil; 1972: Theorie der qroupes, Dunod, Paris.*

[۵] کهن: ۱۹۷۴:

[5] *Cohn; 1974: Algedra, vol. I, Tohn Wiley*
جلد دوم‌کتاب چاپ ۱۹۷۷ ودر سطح پیشرفته است.

[۶]للهی؛ ۱۳۵۴:درآمدی‌برمنطق ومجموعه‌ها، دانشگاه ابوریحان، تهران.
چاپ دوم‌کتاب، ۱۳۶۲، نشرآفتاب، تهران.

[۷] لیپ‌چوتز، (ترجمهٔ‌فارسی مهدی‌زاده ۱۳۶۲:نظریهٔ مجموعه‌ها و مباحثت مربوط به‌آن، امیرکبیر، تهران):

[7] *Lipschutz; 1964 Set Theory and. Related Topics, McGraw – Hipp, New York.*

[۸] مصاحب؛ ۱۳۴۸: آنالیز ریاضی، جلد اول تئوری مقدماتی اعداد حقیقی، انتشارات فرانکلین، تهران. چاپهای متعدد بعدی منتشر شده است.

[۹] هالموس، ۱۹۶۰ (ترجمهٔ فارسی داراﷲ ۱۳۶۲از چاپ ۱۹۷۴): نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها مرکز نشر دانشگاهی، تهران:

[9] *Halmos; 1960: Naive Set Theory, Van Nosirand, New York.*

محاسبهٔ اصلی‌نو متن اصلی نیز موجود است.

گزارشی از بیست و هفتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی (لهستان ـ ورشو ـ تیرماه ۶۵)

ترجمه: آزاد حسام‌الدینی

مسائل روز اول: وقت ۴:۳۰

۱ ـ اگر d عددی طبیعی و $d\notin\{2, 5, 13\}$، نشان دهید درمجموعه $A=\{2, 5, 13, d\}$ دوعدد متمایز a و b وجود دارد به طوری که $ab-1$ مربع کامل نباشد.

۲ـ مثلث $A_1A_2A_3$ ونقطه P_0 در یك‌صفحه مفروضند؛ برای هرعدد طبیعی S $(S\geqslant 4)$ $A_s=A_{s-3}$ تعریف می‌کنیم دنبالهٔ نقاط P_1 و P_2 و P_3 و ... راطوری در نظرمی‌گیریم که نقطه P_{k+1} تصویر نقطه P_k دردوران بمرکز A_{k+1} باندازه‌زاویه $120°$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد ($K=0$ و ۱ و ۲ و ۳ و ...) ثابت کنید اگر $P_{1986}=P_0$ باشد آنگاه مثلث $A_1A_2A_3$ متساوی‌الاضلاع است.

۳ـ به‌هررأس‌ازرؤس یك پنج‌ضلعی منتظم عددی صحیح نسبت داده شده است بطوریکه مجموع این ۵ عدد مثبت‌است. اگرسه‌رأس متوالی پنج‌ضلعی به‌ترتیب با x و y و z مشخص شده باشند $y<0$ باشد آنگاه عملیات زیرمجاز است:

اعداد x و y و z به ترتیب با $x+y$ و $-y$ و $z+y$ جایگزین می‌شوند واین عمل آنقدر ادامه می‌یابد تاحداقل یکی ازپنج‌عدد منفی شود. تعیین کنید آیا این عمل بعداز تعداد متناهی به‌پایان‌میرسد یاخیر.

مسائل روز دوم: وقت ۴:۳۰

۴ـ A و B دورأس مجاور یك n ضلعی منتظم $(n\geqslant 5)$ درصفحه وبمرکز O می‌باشد.

مثلث xyz که بامثلث OAB ودر ابتدا برآن منطبق است (x روی o و y روی A و Z روی B) طوری تغییر مکان میدهدکه y و z روی‌محیط چندضلعی‌ونقطه x درداخل آن است مکان هندسی نقطه x را پیداکنید

۵ـ همه توابع f را بیابیدکه در مجموعه اعداد نامنفی تعریف شده ومقادیر تابع‌نیز براعدادحقیقی نامنفی‌باشد وداشته باشیم:

۱) $f[xf(y)]f(y)=f(x+y),\quad x,y\geqslant 0$

۲) $f(2)=0$

۳) $f(x)\neq 0,\quad 0\leqslant x<2$

۶ـ تعداد متناهی نقطه در صفحه مفروضند، به‌قسمی که مختصات‌آنها اعداد صحیح‌اند. آیاممکن است‌که این نقاط را با دورنگ قرمز وسفیدرنگ‌کرد به‌قسمی که‌برای‌هرخط D موازی یکی ازدومحور مختصات؛ قدر مطلق اختلاف بین اعداد نقاط قرمز وسفیدروی خط D کوچکتر یا مساوی۱ باشد: جواب‌خودرا تحقیق کنید.

۳۷ کشور با ۲۱۰ دانش‌آموزکه‌ده نفرآنها دختر بودند دراین مسابقه شرکت کردند؛ حداکثر امتیازات هرتیم ۶نفره از یك‌کشور $6\times 6\times 7=252$ بوده است. نتایج به‌شرح زیراست:

۱ـ	امریکا واتحادشوروی	۲۰۳ امتیاز
۳ـ	جمهوری فدرال‌آلمان	۱۹۶ «
۴ـ	چین	۱۷۷ «
۵ـ	جمهوری‌دمکراتیك آلمان	۱۷۲ «
۶ـ	رومانی	۱۷۱ «
۷ـ	بلغارستان	۱۶۱ «
۸ـ	مجارستان	۱۵۱ «
۹ـ	چکسلواکی	۱۴۷ «
۱۰ـ	ویتنام	۱۴۶ «
۱۱ـ	انگلستان	۱۴۱ «
۱۲ـ	فرانسه	۱۳۱ «
۱۳ـ	اتریش	۱۲۷ «
۱۴ـ	رژیم‌اشغالگرقدس(اسرائیل)	۱۱۹ «
۱۵ـ	استرالیا	۱۱۷ «
۱۶ـ	کانادا	۱۱۲ «
۱۷ـ	لهستان	۹۳ «
۱۸ـ	مراکش	۹۰ «
۱۹ـ	تونس	۸۵ «
۲۰ـ	یوگسلاوی	۸۴ «
۲۱ـ	الجزایر	۸۰ «
۲۲ـ	بلژیك	۷۹ «
۲۳ـ	اسپانیاباچهارشرکت‌کننده	۷۸ «
۲۴ـ	برزیل	۶۹ «
۲۵	نروژ	۶۸ «

۲۶ـ یونان، فنلاند، کلمبیا،
سوئد ۵۷ «
۳۰ـ ترکیه، مغولستان، قبرس،
کوبا ۵۱ «
۳۴ـ ایتالیا باسه‌شرکت‌کننده ۴۹ «
۳۵ـ کویت با ۵شرکت‌کننده ۴۸ «
۳۶ـ ایسلاند با۴شرکت‌کننده ۳۷ «
۳۷ـ لوکزامبورك با۲شرکت
کننده ۲۲ «

نتایج مسابقهٔ انفرادی:

۱ـ مجارستان یك‌نفر وشوروی
دونفر هرکدام ۴۲امتیاز
۴ـ امریکا، آلمان دموکراتیك،
چین هرکدام ۴۱ «
۷ـ رومانی ۴۰ «
۸ـ چین ۳۹ «
۹ فرانسه ۳۸ «
۱۰ـ برزیل، چین ۳۷ «
۱۲ـ آلمان فدرال، امریکا ۳۶ «
۱۴ـ امریکا ۳۵ «
۱۵ـ بلغارستان، آلمان فدرال،
رومانی‌و ویتنام هرکدام ۳۴ «

که ۱۸ نفراول مسابقه بودند
۴۱نفر درردیف دوم که امتیازات آنها از ۲۶تا۳۴بوده است.
۴۸نفر درردیف سوم که امتیازات آنها از ۱۷ تا۲۶ بوده‌است
یك‌دختر شرکت‌کننده‌ازچین درردیف‌دوم ویك‌دختر ازایتالیا ویك دختر ازاسترالیا درردیف سوم امتیاز گرفتند
یکی ازشرکت‌کنندگان استرالیائی چینی‌تبار باقدی‌کمتر ازیك‌متر وسن‌کمتر از۱۲سال شرکت‌کرده بودکه با داشتن ۱۹ امتیاز درردیف سوم قرارگرفت.

دو مسئله

دو حل زیر رابا هم‌مقایسه و ازآنجا فرق ریاضی جدید و سنتی را بیان‌کنید.

دفتر تحقیقات

ریاضی‌جدید: ثابت‌کنید (A و B و C مجموعه هستند)

$$[(B-C)\cup A=B-(C-A)]\Rightarrow A\subset B$$
$$(B\cap C')\cup A=B\cap(C-A)'$$
$$(B\cap C')\cup A=B\cap(C'\cup A)$$

ازاین تساوی نتیجه می‌شود:

$$B\cup[(B\cap C')\cup A]=\underbrace{B\cup[B\cap(C'\cup A)}_{\text{جذب } B}$$
$$\underbrace{[B\cup(B\cap C')]}_{\text{جذب } B}\cup A=B$$
$$B\cup A=B\Rightarrow A\subset B$$

سنتی: حل‌کنید.

$$\begin{cases} x+\sqrt{y}=۱۱ \\ \sqrt{x}+y=۷ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+\sqrt{y}=۱۱ \\ \sqrt{x}+y=۷ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x-۹+\sqrt{y}-۲=۰ \\ \sqrt{x}-۳+y-۴=۰ \end{cases}$$

$$(\sqrt{x}-۳)(\sqrt{x}+۳)+(\sqrt{y}-۲)=۰ \qquad (۱)$$
$$(\sqrt{x}-۳)+(\sqrt{y}-۲)(\sqrt{y}+۲)=۰ \qquad (۲)$$

از (۲) مقدار $\sqrt{x}-۳$ را در (۱) قرار می‌دهیم:

$$-(\sqrt{x}+۳)(\sqrt{y}-۲)(\sqrt{y}+۲)+(\sqrt{y}-۲)=۴$$
$$(\sqrt{y}-۲)(۱-(\sqrt{x}+۳)(\sqrt{y}+۲))=۰$$
$$\sqrt{y}-۲=۰ \qquad \sqrt{y}=۲ \qquad \begin{cases} y=۴ \\ x=۹ \end{cases}$$

اخبار گروه

گزارش شرکت کارشناسان گروه ریاضی، درسی و هشتمین کمیسیون بین‌المللی مطالعه و بررسی و پیشرفت ریاضی

CIEAEM38

کمیسیون بین‌المللی مطالعه و بررسی برای آموزش و پیشرفت ریاضی درمقاطع پیش دانشگاهی درتابستان هرسال دریکی ازکشورهاکه از طرف کمیسیون به‌عنوان محل تشکیل جلسات پیشنهاد می‌شود، تشکیل می گردد دراین کمیسیون مطالب و مسائل مربوط به‌آموزش وپیشرفت‌ریاضی موردمطالعه وبررسی‌وتحقیق قرارمی گیرد و دانشمندان و محققین در امر آموزش ریاضی نتیجه مطالعات خودرا به کمیسیون ارائه می‌نمایند.

در سال جاری (۱۳۶۵) اجلاس از تاریخ ۶۵/۵/۲ لغایت ۶۵/۵/۱۲ در دانشگاه سوتامتون انگلستان برگزار شد، در این کمیسیون حدود ۲۵۰ نفر از کشورهای مختلف جهان شرکت نمودند. جای بسی افتخار و سربلندی است که حکومت جمهوری اسلامی ایران و دست اندرکاران آگاه وزارت آموزش‌وپرورش وبخصوص‌ریاست‌محترم‌سازمان‌پژوهش و برنامه‌ریزی درسالهای اخیر تسهیلات‌لازم را برای شرکت کارشناسان گروه ریاضی دفتر تحقیقات در این کمیسیون فراهم نموده است. درنتیجه مشارکت‌دراجلاس آخرین اطلاعات ومطالعات و تحقیقات در زمینه پیشرفت ریاضی وآموزشی آن در اختیار برنامه‌ریزان آموزش ریاضی کشور قرارمی گیرد؛ دراینجا لازم به‌تذکر است‌که شرکت متخصصان وبرنامه ریزان کشور جمهوری اسلامی ایران در این کمیسیون‌که جنبه علمی و تخصصی دارد، نشان دهنده علاقمندی مسئولین امور جمهوری اسلامی ایران به‌این مسائل‌است وعملاً تبلیغات مغرضانه‌ای‌که علیه کشور ما وجود دارد خنثی می کند ونشان میدهد که کشورما باوجود شرایط جنگی، دست اندرکار مطالعه و برنامه ریزی برای پیشرفت علوم ریاضی است و همواره علاقمنداست‌ازآخرین مطالعات‌وتحقیقات در زمینه مسائل علمی و تکنولژی استفاده نماید. برنامه اجلاس سی‌وهشتم‌کمیسیون عبارت بود از:

۱ــ جلسات عمومی‌که در آن استادان و دانشمندان ومتخصصان‌ومحققان درمورد پیشرفت‌آموزش ریاضی درسطح دبیرستان مطالعات‌وتحقیقات خودرا ارائه میدادند؛ از جمله تحقیقات ارائه شده به جلسات عمومی‌کمیسیون‌عبارتند از: «جامعه،مدرسه و ریاضی»، و «ریاضیات برای عموم»، «نیازهای جامعه درآموزش ریاضی»، «ریاضیات وجامعه»

دراین‌تحقیقها چگونگی‌کاربرد ریاضی در حل مسائل اجتماعی و زندگی روزمره وهمچنین تأثیراتی‌که آموزش ریاضی می‌تواند از مسائل اجتماعی بگیرد و آن را به‌صورت قالبهای ریاضی درآورد، مطرح شد و عمدتاً تأکید براین است‌که آموزش ریاضیات‌توأم باجنبه‌های‌کاربردی آن باید آموزش داده شود.

(متن سخنرانیهای جلسات عمومی در اختیار گروه ریاضی است وترجمه بعضی ازآنها درمجله رشد ریاضی خواهد آمد)

۲ــ شرکت کنندگان درکمسیون برحسب علاقه ومطالب مورد نیاز وهمچنین زمینه‌های مطالعاتی خود درگروههای کار که ازطرف مسئولین کمسیون پیشنهاد گردیده‌بود،شرکت‌می کردند ودرمباحثات و بررسیها وتحقیقات مربوط به‌موضوع خاص‌مورد مطالعه‌گروه شرکت می کردند؛ در این‌گروهها بعضی ازاعضاء مطالعات و تحقیقات انجام شده در طی سال قبل را مطرح می کردند و سئوالاتی مطرح می‌شد و با بحث مذاکره وپیشنهاد اعضاء گروه، نتیجه مشترکی حاصل می‌شد واین‌نتایج و پیشنهادها ازطرف‌گروههای‌کار به‌جلسات عمومی کمسیون ارائه می‌شد و پس از مذاکره به‌عنوان نتیجه نهائی‌که دربرنامه ریزی و آموزش ریاضی باید بآن عمل شود توصیه میشد.

ازجمله، فعالیتهای گروههای کار درزمینه مسائل زیر بود:

*I*ــ چگونگی تصمیم گیری برای برنامه‌ریزی آموزش ریاضی با توجه به‌تأثیرات عوامل اجتماعی و روانی

*II*ــ چگونه می‌توان روشها در

سازماندهی برای آموزش ریاضی دوره دبیرستان را پیشرفت داد،

III – چگونگی نیازهای ریاضی دانش آموزان تیز هوش و برنامه ریزی آن؛

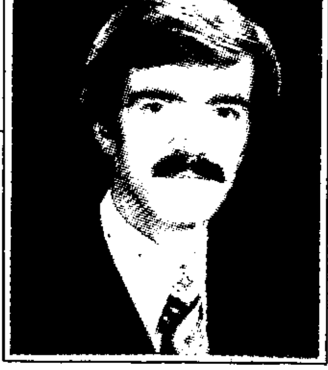
IV – چگونه می‌توان به آموزش ریاضی دانش‌آموزان کم استعداد کمك کرد؛

V – علوم طبیعی، تکنولژی، تجارب زندگی روزمره، چه رابطه‌ای باریاضیات دوره دبیرستانی دارد؛

VI – چگونه در آموزش ریاضی دانش آموزان پیش از دوره دبیرستان می‌توان پیش‌بینی‌های لازم را برای آموزش دوره دبیرستان نمود.

هر کدام ازمطالب ومباحث فوق ومطالعه آنها می‌تواند اطلاعات مفیدی باشد که بالفعل مورد استفاده قرار گیرد، ضمناً در بعضی از گروههای کار مقالات تخصصی درموردآموزش یك مبحث خاص ریاضی دوره دبیرستان و یا کاربرد کامپیوتر و مسائل مربوط به‌آن مطرح می‌گردید در خاتمه چون گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی دست اندرکار تغییر بنیادی برنامه‌های ریاضی مقاطع تحصیلی است، استفاده از تجارب و دست آوردهای آموزش ریاضی در سطح جهان ومبادله اطلاعات وتجارب وتحقیقات برای هرچه بهترشدن برنامه‌های‌آموزش ریاضی لازم وضروری است وبا توجه باینکه آموزش ریاضی‌زمینه‌ساز آموزش تکنولوژی وفهم مسائل ومطالب علمی است، توجه هرچه بیشتر بآن موجبات ارتقاء سطح علم و تکنولژی را فراهم خواهد آورد و در نهایت به‌هدف والای‌خودکفائی همه‌جانبه جمهوری اسلامی کمك شایانی خواهد نمود انشاءالله.

گروه ریاضی دفتر تحقیقات



یادی از یك همکار

دوران طفولیت: در روز ۱۳/۱۲/۱۳۲۹ هجری شمسی در خانواده‌ای، در شهرستان ارومیه (رضائیه سابق) طفلی چشم به‌جهان گشود، او را محمد نام نهادند و به‌نام خانوادگی جلیل‌زاده برای او شناسنامه‌ای صادر نمودند که در سایه الطاف خداوند متعال، وزحمات پدر و مادر، رشد جسمی پیدا کرد. نامبرده از بدو تولد بچه‌ای هوشیار وکنجکاو بود.

دوره تعلیمات ابتدائی و دبیرستانی: درمهرسال ۱۳۳۴ به‌مدرسه رفت، باتوجه به‌اینکه دریك خانواده متوسط به‌دنیا آمده بود، به‌علت عدم بضاعت مالی و با توجه به‌علاقه وافر به‌تحصیل، کلاس‌اول دبستان را بدون کتاب با دلسوزی معلمان وظیفه‌شناس ومتعهد به‌اتمام رسانید. سپس، در سال ۱۳۳۵، با خانواده، به شهرستان سلماس انتقال یافت نامبرده درتمام دوران تحصیل شاگردی ممتاز بود ومکرراً توسط مسئولین شهرستان جوائزی دریافت می‌کرد.

دوران تحصیلات عالی: درسال ۱۳۴۵، پس از اخذ دیپلم، در کنکور سراسری شرکت کرد و دررشته ریاضی در دانشگاه تبریزقبول شد. دوران تحصیل دانشگاه را بادرجه ممتاز به‌پایان رسانید وچون علاقه وافری به‌ریاضیات داشت، در کنکور مؤسسه ریاضیات، به‌سرپرستی مرحوم‌دکتر غلامحسین مصاحب، شرکت کرد. و با موفقیت این دوره را به‌پایان رسانید. کار آموزشی خود را، پس از اتمام دوره مدرسی، در دانشسرای عالی زاهدان (وابسته به دانشگاه تربیت معلم) شروع نمود و مدت سه سال در آن محل مشغول تدریس بود. سپس به‌مدرسه عالی علوم اراك منتقل گردید و به‌علت ابراز لیاقت وشایستگی تا مقام معاونت آموزشی آن مدرسه‌ارتقاء یافت. دراین رهگذرجزوات درسی زیادی را تنظیم و بیشتر دروس دوران لیسانس را تدریس کرد.

دانشجویان این مدرسه از او به‌عنوان استادی منظم ومرتب وباسواد یادمی‌کنند. جزوات درسی‌که از ایشان باقیمانده و با خط زیبائی که‌خود تهیه نموده است، گواه این ادعاست.

نامبرده علاوه‌براینکه یك معلم ومدرس خوب دانشگاهی بود، در دبیرستان نیز تدریس می‌کرد، معتقد بود که نظام آموزشی باید از دبستان پایه‌گذاری‌شود وما باید ازمحصلین دبیرستان شناخت‌کافی داشته باشیم تا بتوانیم درتدریس دانشگاه موفقیت لازم راکسب نمائیم. او از نظر ادب، اخلاق، تربیت فرد نمونه‌ای بود و بین افرادفامیل،همکاران دانشگاهی‌شهرت خاصی داشت. او فردی متأهل و پایبند به‌نظم خانواده بود و ثمره زندگی او دو پسر و یك دختر است‌که بزرگترین آن ۹ سال دارد.

در تابستان ۶۴ دوران بیماری مرموز او شروع شد و بعد ازمدتی معلوم گردید به‌مرض جان‌سوز سرطان (ازنوع سرطان خون‌حاد)مبتلا گردیده‌که در ۲۹/۱۱/۶۴ جهان فانی را، با یکدنیا امید و آرزو وداع‌کرد. روحش‌شاد ویادش‌گرامی‌باد.

رشد تفکر ریاضی

قسمت اول

دکتر محمدحسن بیژن‌زاده

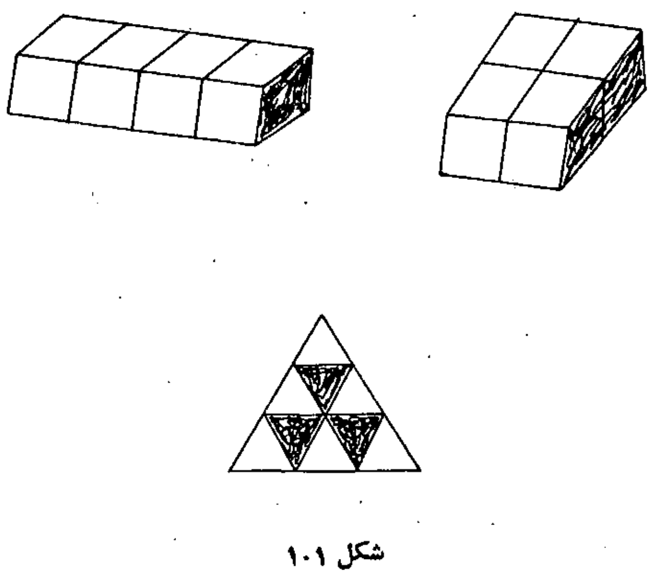
خلاصه مطالب

دراین مقاله ومقالات‌آتیه کوششمان این است تا رشد قوهٔ بچه‌ها را درجهت تفکر ریاضی و انجام اعمالی کـه روشهایی اساسی برای بررسی خـواص عددی، کمی و فضایی اشیاء و موقعیتها هستند ردیابی‌کنیم. مطالعه این رشد برای معلمین و دست‌اندرکاران برنامه‌ریزی آموزشی اهمیت حیاتـی دارد زیراکـه هدف اصلی معلمین از آموزش ریاضی بـه بچه‌ها باید شکوفایی استعداد آنها از درك روابط و باروری تفکرصحیح درآنها باشد تا برای‌کسب علوم و فنونی‌که جامعه بدان محتاج است آماده باشند. برای اینکه معلم بتواند به بچه‌ها کمك کند تا قوه و استعدادی را که خداوند به‌آنها هدیه داده است رشد بدهند باید قادر باشد تا در هر زمانی از راه اموری‌که بچه‌ها انجام می‌دهند نوع تفکر آنان را بشناسند. فقط دراین صورت است که می توان رشد بیشتر بچه‌ها را برنامه‌ریزی کرد. آگاهی‌مان از مراحل رشد تفکر بچه‌ها ما را بـه لزوم این امر متقاعد می‌کند کـه باید به بچه‌ها در فرصتهای بسیار اجازه داد تا بـا اشیاء و مواد مختلف و متنوعی تجربه و کار کرده احساسات خود را بـه زبان خودشان بیان کرده، خودشان قضاوت کنند و از راه کشفیاتی که می‌کنند فکر بکنند و به راه حلهای مسایل پی ببرند.

نخستین نمودهای تفکر

ریاضیات با ساختارهـا و اعمـال سروکار دارد. این ساختارها و اعمال تصویرهایی ذهنی هستند. همچنین راههـای انجام‌این امور یك‌فعالیت ذهنی‌است. به‌عبارت دیگرریاضیات به‌تفکر وابسته است.

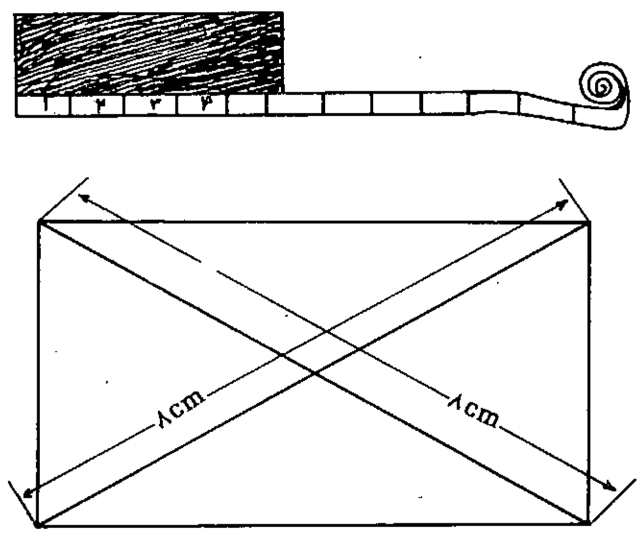
نوزاد تازه متولد شده فکـر نمی‌کند؛ او به بعضی از احساسات فیزیکی پاسخی فیزیکی می‌دهد. استعداد تفکـر که به‌طورفطری‌دراو وجود دارد به‌تدریج شکل گرفته و به‌اصطلاح از قوه به فعل درمی‌آید. البته این شکل‌گیری تفکـر با رشد بدنی نوزاد، تجربیات وی ازحرکت ورشدفعالیت مغزی‌برای ثبت‌تجربیات‌وسازماندهی‌تصورات توأم می‌باشد. این تصورات ممکن است نتیجهٔ تأثیرات محیط خارج و یا تحـریکات خود نوزاد باشد. به محض آنکه او بتواند حرکت و جنبش‌کند و ببیند شروع به سازش با محیطش می کند. وی مجبور است تا آگاهی خود را از فرمانهای مختلفی‌کـه به او داده می‌شود و ارتباطاتی‌که به‌وی‌کمك می‌کند تا هم اعمال خود وهم رفتار اشیاء وافراد مجاورش را تنظیم وپیش‌بینی بکند گسترش‌دهد. سه حوزه تجربی ریاضی وجود دارد که هر کدام خصوصیات ارتباطی خاص خود را داراست و بچه‌ها باید با هر سه اینها آشنا شوند. این حوزه‌ها عبارتند از تجربهٔ فضا، تجربهٔ‌عدد، و تجربهٔ مقدار. این سه حوزه کاملاً از هم جدا نیستند. اعداد در جهان فضا به کار می‌روند و می تـوانند بعضی از خواص این جهان را برای ما بازگو کنند. بعضی از اشکال را می‌توان‌چنان سازماندهی کـرد که راههایی راکـه در آن اعداد با هم در ارتباطند نمایش بدهند. شکل ۱۰۱ دو طریق قراردادن ۴مکعب را کنار هم نشان می‌دهد؛ همچنین در این شکل تـرتیب قرار گرفتن۹ موزائیك مثلثی درسطرهایی‌شامل ۱، ۳، ۵ موزایك نشان داده شده‌است. در دوتصویراول (ازطرف چپ) ارتباط اعداد ۴با۱ و نیز۴ با ۲ مشخص شده در حالیکه درتصویرسوم ارتباط عدد ۹ با اعداد ۱، ۳، و ۵ نشان داده شده است.



شکل ۱۰۱

بدون عدد نمی‌توانیم کمیت‌ها را اندازه بگیریم، چون که باید واحدهای اندازه‌گیری را بشماریم. از طرفی دیگر مقایسه کمیت‌ها ما را به درک عمیقتر اعداد و نیز آشکار کردن بعضی ازخواص فضا رهنمون‌می‌کند. برای مثال، اندازه‌گیری طولها نشان می‌دهدکه اعداد درست (طبیعی) جوابی که به‌قدر کافی دقیق باشد به ما نمی‌دهد و لذا مجبوریم در مورد کسرها بیندیشم. اندازه‌گیری دوقطر یک مستطیل این ایده را بهمامی‌دهد که باید این قطرها مساوی باشند. (شکل ۱۰۲).

تفکر ریاضی ازطریق تجربیات فعال درهرسه این‌حوزه رشد می‌کند. عمل و تجربه از ملزومات تفکر هستند. همچنانکه پیاژه[1] می گوید: «فکر فقط وقتی‌می‌تواند جایگزین عمل گردد که مبنای این فکر داده‌هایی باشدکه خود عمل ارائه می‌کند.»



شکل ۱۰۲

روانشناسان طی‌قرون گذشته مطالعات گسترده‌ای درمورد رشد تفکر در بچه‌ها انجام داده‌اند. بخصوص پیاژه ومحققینی که با وی درمؤسسه تحقیقاتی ژنو همکاری می کردند[2] سالهای بسیاری را مصروف این کردند تا رشد تدریجی ایده‌های عدد، کمیت و فضا را در بچه‌ها ردگیری کرده و همچنین راههایی را که درآن تفکر بچه‌ها توأم با رشد سنی آنها تغییرمی کند مطالعه بکنند، بچه‌هاهمچون بزرگسالان فکر نمی کنند مگر آنکه به سن بلوغ برسند. مکانیزم‌های پیچیدهٔ تفکر به‌تدریج حاصل می شود، این‌مکانیزم‌ها ازرشد اشکال کاملاً سادهٔ آن که‌درنوزاد جوان‌وجود دارد نشأت می گیرد. مشاهدات روانشناسان برای معلمین در برنامه‌ریزی‌تجربیاتی که به‌بچه‌ها ارائه‌می‌دهند اهمیت به‌سزایی دارد. به‌واسطهٔ چنین تجربیاتی‌است که بچه‌ها ازراه اعمالی که خود انجام می‌دهند به‌کشف می‌پردازند وکوشش به بیان این کشفیات است که بچه‌ها را قادرمی کند تا به ریاضی تفکرکنند به عوض آنکه اعمالی‌را ماشین‌وار انجام بدهند بدون آنکه درکی واقعی از آنها داشته باشند. به علاوه، آشنایی با خصوصیات رشد تفکر بچه‌ها به معلمین کمک می کند تا دریابند که یک بچه به‌کدامیک از مراحل رشد رسیده است. بسیاری‌از تجربیات و مشاهداتی‌که بوسیله مدرسه ژنو انجام گرفته در بعضی از کشورهای دیگر و نیز با روشهایی متفاوت انجام گرفته و نتایج بدست آمده تأیید شده است. البته انتظار برآن است‌که دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی درسی که تنها ارگان برنامه‌ریزی درسی پیش دانشگاهی است به‌کمک متخصصین دلسوز وآگاه به اصول برنامه‌ریزی تحقیقاتی در مورد رشد تفکر ریاضی دانش‌آموزان و چگونگی کیفی وکمی آموزش ریاضی در مدارس تحقیقاتی را انجام دهد. ضمناً باید متذکر شویم که گرچه‌همهٔ یافته‌های پیاژه تأیید نشده است لیکن‌تعداد قابل ملاحظه‌ای از این‌کشفیات محقق شده و به‌نظر می‌رسدکه یک الگوی کلی برای رشد تفکر برقرار شده است.

مراحل رشد

مراحل ذیل برای رشد تفکر شناخته شده است اگر چه بعضی از متخصصین آنها را به‌گونه‌ای متفاوت شماره گذاری کرده‌اند. ابتدا این دوره‌ها را به‌اختصار تعریف می‌کنیم و سپس به تفصیل آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

(۱) **دورهٔ هوشی موتور ـ حسی[2].** این دوره از بدوتولد تا ۱۸ ماهگی یا دوسالگی است. خصوصیت این‌دوره این است‌که اعمال و احساسات مهمترین چیز در تجربه نوزاد و نیز مهمترین ابزاری هستندکه وی از راه آنها یاد می گیرد.

(۲) **دوره آمادگی برای اعمال ملموس و سازماندهی آنها.** این دوره خود به‌سه دوره‌کوتاهتر تقسیم می‌شود.

(آ) از ۱۸ ماهگی (دو سالگی) تا ۴ سالگی. در این دوره نمایش دهی[2] امکان‌پذیر می‌شود: این نمایش دهی از طریق زبان، فعالیت و بازی خیالی و ترسیم و نقاشی انجام می گیرد.

(ب) از ۴ تا ۷ (۸) سالگی. دراین دوره **تفکر شهودی**[2] شکل می گیرد و از این جهت این دوره را دوره تفکر شهودی می‌نامند. دراین دوره قضاوت‌های بچه در مورد اندازه، شکل و روابط براساس تجربیات بچه و تعبیر او ازاین تجربیات صورت می‌گیرد واین قضاوتها بدون استدلال است. (هنوز توانایی استدلال منطقی را ندارد.)

(ج) از ۷ (۸) تا ۱۱ (۱۲) سالگی. این دوره وقتی است که بچه می‌تواند **اعمال منطقی**[4] را با **مواد ملموس** و یا به‌کمك وضعیت خاص انجام دهد. لذا نقش وسایل کمك آموزشی و یا طرح وضعیت‌های خاص برای درك اعمال منطقی اهمیت اساسی دارد.

(۳) دوره اعمال صوری[5] یا اعمال منطقی. این دوره از ۱۱ یا ۱۲ سالگی شروع می‌شود و تا پایان عمر ادامه دارد. در این دوره اعمال منطقی بدون کمك از مواد ملموس (وسایل کمك آموزشی) می‌تواند در ذهن انجام گیرد. این دوره را می‌توان دوره تفکر منطقی نامید.

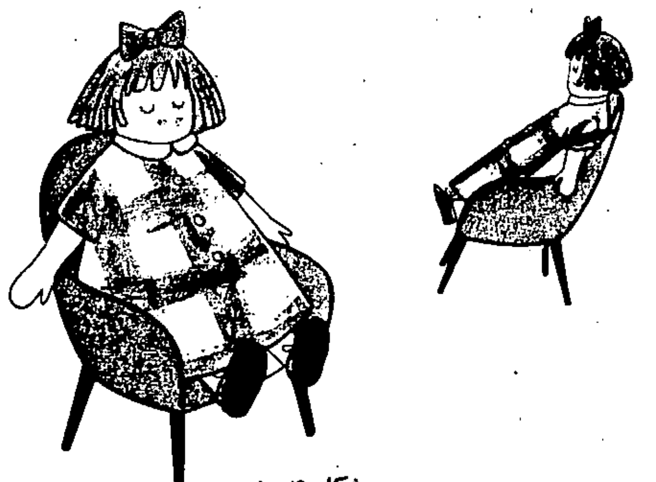
این دوره‌ها به‌خوبی فصلبندی شده‌اند لیکن سنین مربوطه در بین بچه‌ها متفاوت است. نسبت رشد تفکر بچه‌ها تااندازه‌ای به توانایی‌های فطری آنها بستگی دارد. اما شواهد محکمی وجود دارد که دلالت دارد بر اینکه این رشد به‌مقدار قابل ملاحظه‌ای متأثر از نوع و تنوع فعالیت‌های سازایی[6] و نمایشی است که امکان آن‌ها برای یك بچه وجود داشته است. انتقال از یك مرحله به مرحلهٔ دیگر ناگهانی نیست. یك بچه ممکن است حین مرحله ۱ گاهی بعضی از مشخصات تفکری مرحله ۲ را ازخود بروز دهد، و یا در دوران مرحله ۲ گاهی همچون مرحله ۱ عمل می‌کند. ضمناً بازگشت به یك مرحله ابتدایی‌تر تفکر ممکن است در هرسنینی رخ دهد واین دروقتی است که با مسئله‌ای بسیار مشکل مواجه باشیم. اینك هر یك از این مراحل را مفصلتر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مرحله ۱: دوره هوشی موتور ـ حسی[7]

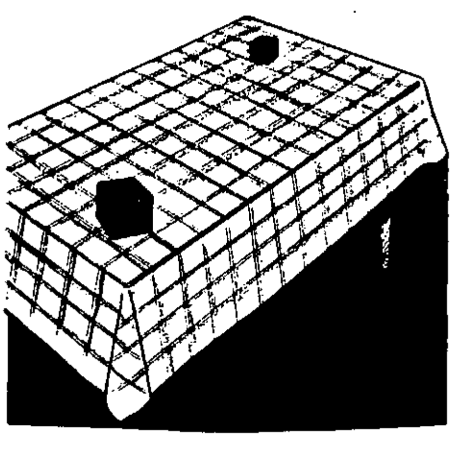
دراین دوره بچه از اعمالی صرفاً حسی، که به مثابه وقایعی نامرتبط برای اونمایان می‌شود، به‌همسوسازی تصاویر ذهنی دریافت شده و سازماندهی اعمال خود گذر می‌کند.

در واقع گر چه بچه‌ها خیلی زود شناسایی اشیاء را شروع می‌کنند، معهذا در آغاز وجود این اشیاء را وقتی‌که نتوانند آنها را ببینند نمی‌توانند درك کنند. برای مثال، وقتی که یك اسباب بازی آنها پنهان می‌شود، در دوران اولیه تولد (اوایل مرحله ۱) آنها عقیده دارند که این اسباب بازی برای همیشه ناپدید شده است. به مرور زمان، ازراه قراردادن اشیاء درجای مشخص و بازیابی آنها و نیز از راه مشاهده ناپدید شدن و پدیدار شدن اشیاء، و یا جاسازی یك اسباب بازی در یك جعبه، یاد می‌گیرند که اشیاء به‌وجود خود ادامه می‌دهند حتی وقتی‌که دیده نمی‌شوند. دراین مرحله است که بچه‌ها کشف می‌کنند که وجود اشیاء حتی وقتی‌که نتوان آنها را دید ادامه دارد. این بدین معنی است که آنها یك تصویر ذهنی از اشیاء دارند واین تصویر ذهنی متمایز از تصویر مستقیم قابل رؤیت از یك شیئی است که درمقابل آنها قرار داشته باشد. پیدایش یك تصویر ذهنی از شیئی که دیده نمی‌شود پیش نیاز تفکر است. سپس این آگاهی که اشیاء وجود دارند حتی‌وقتی که‌دیده نشوندتوسعه و گسترش می‌یابد. می‌توان شیئی را به‌یك بچه نزدیکتر و یا دورتر کرده ویا آنکه آنرا در جهتی دیگر گرداند. شیئ چیزی متفاوت بنظرمی‌آید ولی اکنون اومی‌داند که این همان شیئ است با وجودیکه اندازه و شکل ظاهری آن تغییر کرده است.

بررسی شکل‌های ۱۰۳ و ۱۰۴ نشان می‌دهدکه تا چه اندازه این تشخیص یکسانی عملی ماهرانه است. به‌نظر می‌رسدکه این مهارت ازراه جابه‌جایی اشیاء (مکعب درشکل ۱۰۳) و دیدن نماهای مختلف شکلی آن، در حالیکه دستهای بچه‌آنرا می‌گرداند، حاصل می‌شود. این تنوع اشکال آن‌منجر به‌یك تصویر ذهنی مرکبی از شیی شده و به کمك این تصویر ذهنی است که‌آجر باهرتصویربخصوصی ازآن شناخته می‌شود.



شکل ۱۰۴



شکل ۱۰۳

به‌طریق مشابه جابه‌جایی یك شیی ، ویا تغییرمکان بچه نسبت به‌شیی، منجر به آگاهی از ثبات شیی علیرغم تغییرات ظاهری در اندازه وشکل آن می‌شود.

مشاهده می‌شود که چیزهایی‌راکه یك‌بچه درموقعیت‌های مختلف تشخیص می‌دهد همگی در ارتباط با خودش است. با وجودی‌که اشیاء را حرکت می‌دهدآنها را در ذهن خود باهم در ارتباط نمی‌بیند. در تفکر یك‌بچه آنها مستقل از یکدیگر باقی می‌مانند.

طبقه‌بندی اعمال که در این‌دوره رخ می‌دهد از اهمیت خاصی برخوردار است زیرا سازماندهی نقل و مکان‌های ساده اساس ساختارهای‌ذهنی است‌که درمراحل بعدی‌رشد و گسترش می‌نماید. برای مثال ، وقتی بچه یاد می‌گیرد تا یك **عمل را برگرداند** ، همانند بلندکردن و پایین‌گذاشتن یك‌شیی ، این مقدمه‌ای برای تفکر بازگشتی است، همچنانکه وقتی اومی‌بیند که ۵ = ۲ + ۳ نتیجه می‌گیرد که ۳ = ۲ — ۵. همچنین او یك **سلسله از اعمال** را که منجر به‌یك نتیجه موفق‌آمیز شود انجام می‌دهد؛ برای نمونه، او یك‌عروسك را در یك‌صندلی می‌بیند، روی‌کف اطاق چهاردست و پا **حرکت می‌کند** ، **بدان‌میرسد** و آن‌را **برمی‌دارد** . این یك پیش‌درآمدی برای‌تعقیب زنجیره‌ای فکری‌جهت‌رسیدن به‌یك درك جدید ویا انجام یك‌طرح‌می‌باشد. سپس این‌دو جریان بازگشت‌پذیری فکری و تشکیل زنجیره‌یا سلسله‌ای از اعمال می‌توانند باهم درآمیخته وکل‌رشته‌عملیات می‌تواند بازگشتنی بشود . در اواخر این‌دوره بچه‌ها شروع به‌تجربه با اشیاء می‌کنند. برای مثال،آنها یك‌مکعب پلاستیکی را روی دیگری می‌گذارند تا ببینند آیا قرار می‌گیرد تا یك‌ستون ساخته بشود . اینگونه تجربیات با مواد ملموس‌که توأم باپیش‌بینی نتایج آنهاست به‌صورت‌ذهنی برای‌بزرگسالان به‌هنگامی که با وضعیت مشکلی مواجه می‌شوند نیز انجام می‌شود: آنها برای خود مصور می‌کنندکه اگر یك‌خط‌مشخصی از اعمال را انجام بدهند چه‌اتفاق می‌افتد. او ممکن است دو یا چندین امکان زنجیره عملیاتی را تصورکرده ، نتایج آنها را پیش‌بینی نموده وسپس یکی راکه منجر به‌موفقیت‌باشدانتخاب کند. همچنانکه پیاژه می‌گوید ، «منطق عمل مقدم برمنطق فکر است».

این وابستگی رشد فکری به‌الگوهای عملی در سرتاسر مراحل ۱ و ۲ ادامه دارد.

انواع جدید تفکر به الگوهای جدید عملی ، همچون پیشنیازی لازم، نیازمند است.

مرحله ۲ (آ). رشد نمایش‌دهی . در این مرحله قوهٔ نمایش‌دهی بروز می‌کند . این‌قوهٔ احتمالاً یکی از قویترین وسایل تفکر ریاضی است. این‌مطلب را به‌هنگام بررسی نقشی که نمادها در ریاضی دارند در مراحل بعدی ملاحظه خواهیم کرد. تکلم نخستین نمادها را که برای بیان و نمایش تصاویر مرکب و الگوهای عملی که در دوران مرحلهٔ ۱ در ذهن بچه رشدکرده‌اند فراهم می‌کند. یك‌بچه برای بیان خلاصه‌گونه موقعیت‌های ذیل ازنمادهای‌کلمه‌ای استفاده می‌کند:

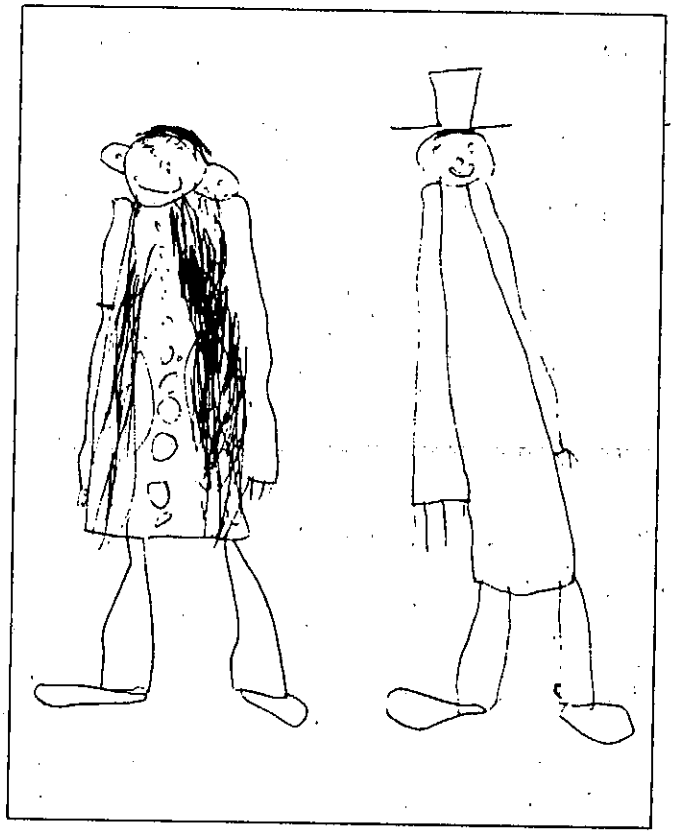
(۱) یك‌الگوی عملی ، برای مثال وقتی بخواهد **برود** تا یك‌اسباب‌بازی را **بیاورد** .

(۲) ارتباط بین دو چیز، مانند آنکه بگویدکه عروسك **در** کارتن (زنبیل) است. اوسپس می‌تواند از این نمادها برای نمایش‌دهی یك سری اعمال پیچیده‌تر استفاده کند: مانند آنکه بگوید که **همهٔ** توپها را خواهد **آورد** و آنها را در کارتن **می‌گذارد** . استفاده ازکلمات، دامنه فعالیت‌های ذهنیی را که بچه‌ها می‌توانند انجام بدهند به‌طرزچشمگیری افزایش‌می‌دهد. اکنون آنها فقط به تصاویر ذهنی به‌عنوان تنها وسیله تفکرشان محدود نیستند.

در اثنای این مرحله بازیها و سرگرمی‌های تصوری بچه‌ها نشانگر احساسات آنهاست و این امور آنها را قادر می‌کند تا تجربیاتی را که برای آنها مهم است به‌نمایش گذاشته وانجام بدهند. وقتی به‌یك بچه مجموعه‌ای‌ازجعبه‌های کوچك (یا مکعب‌های پلاستیکی‌کوچك) چند قوطی و حلقه داده شود با آنها شکلی می‌سازدکه برای **او** یك خانه، یك پل ویا چندین انسان رانمایش می‌دهد. بدین‌گونه ازراه‌نمادسازی اشیاء واقعی، او قدرت خود را برای درك رفتار این اشیاء و اینکه او چگونه می‌تواند روی آنها تأثیر بگذارد توسعه می‌دهد. اینگونه بازیها این واقعیت را آشکار می‌کند که او هنوز هم وقتی به‌اشیاء می‌نگرد **خودش** را مرجع قرار می‌دهد وعمده توجهش، به‌این است‌که این اشیاء چه مفهومی برای **او** دارند و **او** باآنها چه‌کار می‌تواند بکند.

به‌اندازه استفاده ازکلمات، نقاشی نیزمی‌تواند مثمرثمر باشد. نقاشی‌هم به‌ما نشان می‌دهدکه یك بچه واقعاًچه‌چیزهایی را مشاهده کرده وهم تحریکیی است برای خود او تا بینش خود را گسترش دهد. این‌گونه نقاشی‌ها نقاشی‌های اصولی نیست بلکه نمایشگر این است‌که یك بچه چه‌چیزهایی رادرك کرده است. ساخت این نقاشی‌ها متناظر تصاویر ذهنی است‌که در ذهن او نقش بسته است. این نقاشی‌ها به‌وضوح نشان می‌دهدکه تا چه‌اندازه باورهای او ناموزون است ویا تا چه حد او از ارتباطات بین خود اشیاء آگاهی دارد. برای مثال، وقتی یك بچه $۳\frac{۱}{۲}$ ساله تصویر یك مرد را می‌کشد ممکن‌است

سر و بدنی را ارائه دهدکه با یك گردنی مرتبط نباشند، یا آنکه دستها، بدون بازو، مستقیماً به بدن وصل شده باشند. (شکل ۵۰ ۱).



(شکل ۵۰ ۱)

تصور او از بسیاری موقعیت‌های دیگر نیز نامربوط و گسسته است. برای نمونه، یك بچه در این مرحله ممکن است دو فکر متناقض را توأماً قبول بکند، مثلاً، وقتی دومیله هم‌اندازه را، که یکی را به‌طور افقی ودیگری را به‌طورعمودی گرفته‌ایم، به‌اونشان بدهیم ممکن است بگویدکه یکی بزرگتر ازدیگری است؛ ولی‌وقتی که هردومیله را به‌طور افقی(عمودی) نشانش بدهیم بگویدکه مساوی هستند.

نمایش‌دهی از راه مکالمه (کلمات) ویا رسم ونقاشی به‌بچه‌ها این امکان را می‌دهد تا با دیگران ارتباطات برقرار کنند. مکالمه با بچه‌ها به‌بچه‌ها کمك می‌کند تا تناقضات‌وفقدان دقت را درنقاشی‌ها و توصیفاتشان کشف‌کنند، البته باید این مکالمه‌ها به‌گونه‌ای باشد تا بچه‌ها خود به این نارسایی‌ها واقف شوند (کشف). بنابراین، این سنین مرحلهٔ رشد قابل‌ملاحظه‌ای است، درجهت مرتبط‌کردن ساختارهای ذهنی با صورت‌ها و روابط واقعی.

پاورقی‌ها وفرهنگ واژه‌ها

۱. Piaget، روانشناس مشهور اطریشی‌که تحقیقات سودمندی در چگونگی یادگیری بچه‌ها انجام داده‌است. پیاژه به‌سال ۱۹۸۴ درسن ۸۶ سالگی درگذشت،

۲. Representation

۳. Intuitive thinking

۴. Logical operation

۵. Formal operation

۶. Constructive

۷. Sensori - Motor Integence

منابع و مآخذ

1. Primary Mathematics Today, E. L. William & Hillcery Shuard, Longman 1980.
2. The Psychology of Learning Mathematics, Richard R. Skemp, Pelican 1982.
3. Mathematics 5—11, HMI Sereies, HMSO 1980

جواب معما

۱) عددی را انتخاب کنید

n

۲) عدد ۶ را به‌آن اضافه‌کنید

$n+۶$

۳) حاصل را در ۲ ضرب‌کنید

$۲(n+۶)=۲n+۱۲$

۴) سپس عدد ۸ را ازآن‌کم‌کنید

$۲n+۴$

۵) حاصل را بر ۲ تقسیم‌کنید

$\frac{۲n+۴}{۲}=n+۲$

۶) عددی را که انتخاب کردید از حاصل کم‌کنید

$n+۲-n=۲$

۷) دراین صورت حاصل اعمال شما عدد ۲ است

برداشتی آزاد از کتاب: Induction in Geometry
نوشته : L. I. Golovina & I. M. yaglom
ناشر : Mir Publishers. 1979 (English Tr.)

«مروری کوتاه بر تاریخچه مسئله ۴ رنگ»

ترجمه: سعید ذاکری

فرض کنید که یك نقشه معین روی یـك صفحه داده شده باشد. اگر هریك از کشورها یا نواحی آن بایك رنگ خاص مشخص‌شده ونیز هردو کشور یاناحیه مجاور(یعنی‌دو کشوری که مرز مشترك دارند) دارای دو رنگ متفاوت باشند، گوئیم این نقشه به‌طورصحیح رنگ‌آمیزی شده است. هرنقشه جغرافیائی می‌تواند مثالی برای اینگونه نقشه‌ها باشد. مثلا یـك راه برای رنگ‌کردن نقشه‌ها آنست که هرکشور آن‌را به‌رنگ مخصوصی درآوریم، اما این‌کار ازنظراقتصادی مقرون بـه صرفه نیست. طبعاً دراینجا سوآلی پیش‌می‌آید و آن اینکه «حـداقل تعداد رنگهائی که برای رنگ آمیزی یك نقشه بـه‌طورصحیح لازم وکافیست چقدر است؟». یك حقیقت مهم در رابطه بااین سؤال آنست که تاکنون نقشه‌ای پیدا نشده که بـرای رنگ آمیزی صحیح آن به بیش‌از ۴ رنگ نیاز باشد.

«آگوست فردیناند موبیوس[1]» ریاضیدان ومنجم مشهور آلمانی اولین‌کسی‌بودکه درحدود ۱۴۰ سال قبل‌به‌این حقیقت توجه نشان داد. چند دهه بعد «فرانسیس گاتری[2]» انگلیسی با این مسئله‌که مآلاً مسئله ۴ رنگ نامیده شد برخوردکرد واین مواجهه در نتیجه آن بود که گاتری برروی مسئله علمی رنگ آمیزی نقشه جزیزه انگلستان‌کارمی‌کرد کـه درآن سرزمینهای مختلف میبایستی رنگهای مختلفی‌داشته باشند. گاتری سعی‌کرد که این‌مسئله راحل‌کند، اماتلاش‌اوبه شکست انجامید (به‌خاطر همین کوشش استکـه در زبان انگلیسی گاهی بـه مسئله ۴ رنگ، مسئله‌گاتری نیز گفته‌میشود) اونامه‌ای به‌برادرکوچکش فردریك‌که در دانشگاه کمبریج زیـرنظر ریـاضیدان معروف «آگوستوس دمورگان[3]» تحصیل ریـاضیات میکرد نوشت و درآن خاطرنشان‌کرد که به‌نظر می‌رسد فرض ۴ رنگ درست باشد. همچنین‌از اوخواست‌که درصورت امکان روشی ریاضی برای اثبات این مدعا ارائه دهد. فردریك گاتری نیزپـاسخی برای آن پیدا نکرد، ازاینرو روش حل آنرا از دمـورگان، استاد مشهور خود خواست. دمورگان هـم مانند سایرین حلی

(1) A. F. Mobius
(2) Francis Guthrie
(3) Augustus De Morgan

برای آن نیافت اما میان همکارانش به‌مسابقه گذاشت. بدین‌ترتیب هم مسئله ۴ رنگ وهم روش اصلی اثبات آن عمیقاً در ریاضیات ریشه دوانید. درسال ۱۸۷۸ ریاضیدان بـزرگ و پیشرو انگلیسی «آرتورکیلی» دراثبات یاعدم اثبات حدس ۴ رنگ توفیقی نیافت، بنابراین مسئله را به‌انجمن ریاضی لندن ارائه داد و درپایان گزارش خود ازهمگان دعوت‌کرد‌که در حل این مسئله همکاری و شرکت کنند وبدین ترتیب «غول را ازبطری بیرون بیاورند[1]».

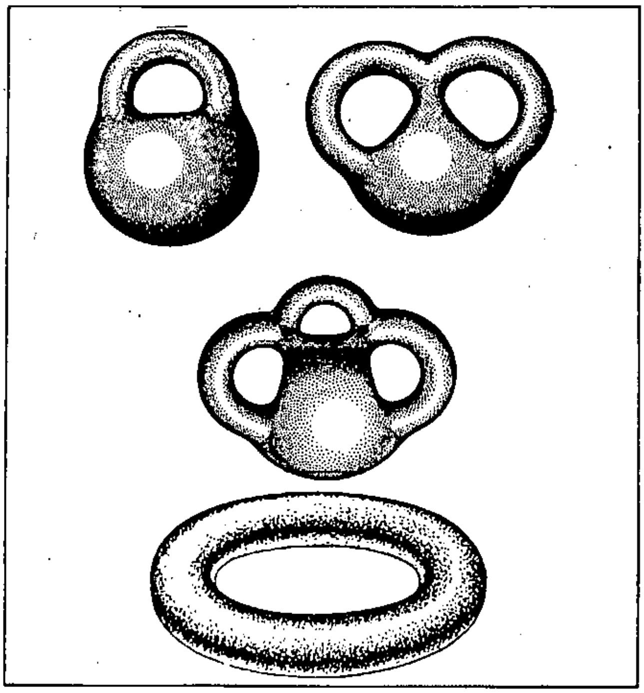
مسئله ۴ رنگ حقیقتاً بیك مسئله مشهورتبدیل‌شد. ازآن‌سال به بعد تقریباً برای مدت یك قرن، هر ریاضیدان بـرجسته‌ای حداکثر کوشش خود را برای حل این مسئله به‌کار برد، امـا مـوفقیتی به دست نیاورد. از سال ۱۸۸۰ وخیلی زود پس‌از گزارش کیلی‌درانجمن‌ریاضی‌لندن‌اولین روشهای حـل‌مسئله ۴ رنگ پیدا شد. ارائه دهندگان این روشها «آلفردبری‌کمپ[2]» و «پیتر.گ. تیت[3]» بودند. نه‌تنهاکیلی بلکه سایر ریاضیدان‌ها من‌جمله «فلیکس‌کلاین[4]» این راه حلها را قابل قبول ندانستند. «گرهاردرینگل[5]» که بعدا نیزاز او سخن خواهیم‌گفت تاکید کرد: «ممکن است‌که برای ۱۰ سال آینده روش استدلال بی رقیب،کمپ،همچون مدرکی چنان مورد استناد قرارگیرد،که ریاضیدانان آن زمان بیش‌از امروز استعداد وتوانائی بررسی روشهای حل دیگران را نداشته باشند».

(1) Arthur Cayley
(2) Alfred Bray kempe
(3) Peter. G. Tait
(4) Felix klcin
(5) Gerhard Ringel

اما درسال ۱۸۹۰ ریاضیدان نامی انگلیسی «پرسی‌جان هیوود[۶]» تـحلیل دقیقی بـرروی روشهای اثبات کمپ وتیت بعمل آورد ونشان دادکه در آنها اشتباهی وجود دارد. از آن به‌بعد روشهای حل بسیاری برای این مسئله درکتب و مجلات ریاضی ارائـه شد امـا ثابت شده است که تمام آنها دارای اشتباهاتی هستند (به‌غیر ازآخرینشان‌که ذیلا در بارهٔ آن‌بحث خواهیم کرد) استدلالاتی‌که به‌وسیله‌کمپ و تیت پیشنهاد شد همانندبسیاری ازروشهای‌اثبات دیگرواشتباه‌این مسئله برمبنای روش‌استقراری‌ریاضی‌بناشده بود. بااینحال اثبات‌کمپ‌دربین سایرروشهای‌ناقص‌قابل‌ملاحظه‌ترین‌روش بود. علیرغم‌اشتباهی که‌ارائه‌دهنده‌این‌روش مرتکب شده‌بود، راه‌استدلال اوایده‌ای مفید ومعقول در برداشت‌که نقش عمده‌ای درپیشرفتهای بعدی ایفا کرد.

پی. جی. هیوودکشف کردکه از استدلال کمپ مستقیماً نتیجه میشودکه هرنقشه جغرافیائی رامی‌توان به‌صورت صحیح با ۵رنگ رنگ‌آمیزی‌کرد. این نتیجه قضیه ۵ رنگ (یاقضیه کمپ هیوود) نامیده میشود. بدین‌ترتیب یك خلاء ناامیدکننده بوجودآمد:ازطرفی‌نقشه‌هائی‌وجود داشت‌که‌برای رنگ کردن آنها ۳رنگ‌کفایت نمی‌کرد و ازطرف دیگرثابت شده بودکه هرنقشه را می‌توان بـا ۵ رنگ به‌طور صحیح رنگ آمیزی کرد. یافتن شرایطی‌که امکان رنگ‌کردن یك نقشه را با ۲ یا ۳ رنگ فراهم‌کندکار دشواری نیست. از سوی دیگر درطول صد سال از زمان مورد بحث، این شرایط (حتی به‌طورلازم و کافی) برای رنگ‌آمیزی نقشه‌ها با ۴ رنگ ارائه شد. اما این سوال‌که‌آیا این شرائط برای همه نقشه‌ها وجود دارند همچنان برای یك مدت مدید بی‌پاسخ باقیمانده بود. هیوود تمام عمر خود را بر روی مسئله ۴ رنگ وتدریس گذاشت. بدین روی او در پیشبرد این مبحث سهم بسزائی دارد. هیوود بـا ناکامی درحـل مسئله ۴ رنگ بـر روی صفحه (یـاکره‌که خـواص توپولوژیکی‌آن باصفحه یکیست) به سطوح بسیارپیچیده‌تری روی آورد. اوکارخود را باچنبره‌که شبیه به یك توئی لاستیك اتومبیل‌است‌آغازکرد وبطورغیرمنتظره‌ای دراین مرحله موفق شد. او بر روی چنبره نقشه‌ای شامل ۷ کشور مجاور (یعنی ۷ کشوریکه هر دوتای آنها مرز مشترك دارند) را ترسیم کرد و این درحالی بودکه موبیوس ثابت‌کرده بود: هیچ نقشه‌ای بر روی صفحه نمی‌تواند شامل ۵ یا تعداد بیشتری کشور مجاور (دوبدو دارای مرز مشترك) باشد. کاملاً روشن است کـه نقشه هیوود برروی چنبره باکمتراز۷ رنگ نمی‌تواند رنگ‌آمیزی شود. ازسوی دیگرهیوود ثابت‌کردکه «هر» نقشه برروی‌چنبره با ۷ رنگ، قابل رنگ آمیزی است. بدین ترتیب، در مـورد چنبره، هرچندکه روشهای پیچیده‌تری را به‌نسبت صفحه یاکره ایجاب‌میکرد، مسئله نقشه‌کاملاً حل‌شد: «کمترین تعداد رنگهای لازم برای نقشه‌های روی چنبره ۷ میباشد (قضیه هیوود)». این نتیجه هیوود را به ادامه کارش درمورد رنگ‌آمیزی نقشه‌ها بر روی سطوح پیچیده‌ترغیب نمود.

هرسطح بسته (یاسطح دوطرفه یعنی سطحیکه یك داخل ویك خارج دارد) ساختمانی شبیه به‌کره دارد بااین تفاوت‌که دارای تعداد معینی سوراخ (یا دسته) می‌باشد. با این حساب، چنبره را می‌توان هم‌ازر توپولوژیکی کره‌ای بایك‌سوراخ یا کره‌ای با یك‌دسته دانست. شکلهای زیرهم ارز توپولوژیکی کره‌هائی‌با ۱ سوراخ،۲سوراخ،و۳سوراخ(یا باهمین‌تعداددسته)



هرسطح بسته (یاسطح دوطرفه یعنی سطحیکه یك داخل ویك خارج دارد) ساختمانی شبیه به‌کره دارد بااین تفاوت‌که دارای تعداد معینی سوراخ (یا دسته) می‌باشد. با این حساب، چنبره را می‌توان هم‌ازر توپولوژیکی کره‌ای بایك‌سوراخ یا کره‌ای با یك‌دسته دانست. شکلهای زیرهم ارز توپولوژیکی کره‌هائی‌با ۱ سوراخ،۲سوراخ،و۳سوراخ(یا باهمین‌تعداددسته) می‌باشند. شکل‌ها بطور جداگانه ضمیمه نامه هستند. هیوودکه ریاضیدانی پرشور وباعلاقه‌بود فکرکردکه باید فرمول‌ساده‌ای یافت‌که کمترین تعداد رنگهای مورد نیاز برای رنگ کردن هرنقشه را برروی سطحی‌کروی با P سوراخ به‌دست دهد. اگر M_p تعداد مینیمم رنگهای لازم برای رنگ‌آمیزی نقشه‌ای بر

(6) Percy John Heawood

روی سطح Σp باشد ، فرمول هیوود را می‌توان بدین ترتیب نوشت:

$$(*) \qquad Mp=\left[\frac{7+\sqrt{1+48P}}{2}\right]$$

که در آن [ ] یعنی جزء صحیح عـدد داخل آن. مثلا بـرای P = ۱ (چنبره) به دست می‌آید Mp = ۷ (یعنی قضیه هیوود). برای P = ۰ داریم Mp = ۴ یعنی‌همان نتیجه ایکه موبیوس حدس زده بود. برای P = ۲ داریم Mp = ۸ و قس علیهذا. باید اینرا نیزبگوئیم که هیوود معتقد بود ایـن مسئله را فقط برای P>۰ ثابت کرده است. هیوود این فرمـول را درسال ۱۸۹۰منتشرکرد وآنرا «قضیه رنگ نقشه» نامید. اما در۱۸۹۱ ریاضیدان آلمانی «ل ـ هفر[1]» ثابت کرد در استدلال هیوود اشتباهی رخ داده است ، بهمین جهت از آن سال تـا ۱۹۶۸ فرمول (*) حدس‌هیوود یافرض هیوود خوانده میشد. بهرحال فرمول هیوود برای چنبره مطلقاً درست بود (P = ۱) امـا در حالت کلـی از استدلال او فقط نتیجه میشد: $Mp \leqslant Hp$ که Hp عدد سمت راست تساوی در فرمول (*) است. هفرثابت کرد که فرمول (*) برای چند مقدار اولیه و مثبت p صحیح است. بدیـن ترتیب مسئله درحـالت $p = 0$ (مسئله ۴ رنگ) بلاتکلیف ماند. در دهه‌هائیکه هفردراینمورد سهیم بـود هیچ موفقیت‌چشمگیری بدست نیامد. عاقبت در دهه ۵۰ قرن بیستم فرض هیوود بوسیله ریاضیدان پرذوق «گرهارد رینگل» کـه بعدها در دهه ۶۰ ریاضیدان امریکائی «یانگز[2]» به اوپیوست، مورد بررسی قرارگرفت.

حدود ۲۰ سال زحمات طاقت فرسای ایندوتن، آنها را بایك موفقیت عظیم شادمان‌کرد. در ۱۹۶۸ تلاش‌مشترك ایندو، آنها را بـه‌حل تمام ۱۲ حالتی‌کـه اثبات حدس هیوود یعنی فرمول (*) درآنها خلاصه می‌شد، راهنمائی کـرد. روشهای ترکیبی زیبائی برای اثبات فرمول هیوود بوجودآمده، توسعه پیدا کردند. آنها همچنین نتایج مستحکمتری درمورد سطوح جهت ناپذیر(مثل‌نوار موبیوس وبطری‌کلاین) بدست‌آوردند بوسیله فرمول (×) تمام حالات برای $P>0$ ثـابت شد و تنها حالت $P = 0$ باقیمانده بودکه همان جواب مسئله۴ رنگ یا مسئله‌گاتری است.

بنظرمی‌رسد هنریخ هس[1] اولین‌کسی باشد (البته بعداز کمپ) که معتقد بود حدس ۴ رنگ می‌تواند به‌وسیله یـافتن مجموعه‌ای «اجتناب ناپذیراز اشکال ساده شدنی[2]»اثبات شود. اوکار خود را برروی مسئله ۴ رنگ در ۱۹۳۶ شروع کرد و بدین ترتیب سهم عمده‌ای را باید برای او درتئوریهای فعلی قائل شد. او اولین‌کسی بودکه استفاده از رایانه (کامپیوتر) را دراستدلالات مربوط به این مسئله پیشنهاد کـرد. درهمین بین يك نفرریاضیدان امریکائی بنام «کنت‌آپل[3]» دراین‌کار دستیار هس شد. اما همکاری فعالانه ایندو وقتی در ۱۹۷۱ شایع شد که این مسئله خیلی وقت پیش بوسیله رایانـه حـل‌شده است متوقف‌گشت. بعدها معلوم شدکه این اخبارتاحدودی بی‌اساس بوده‌است. آپل‌که دیگردرآنزمان درایالات متحده به‌سرمیبرد، دنباله کارهایش را بکمك «ولفگانگ‌هاکن[4]» وبـا استفاده از يك رایانه IBM-360 در دانشگاه ایلی نویز ادامه داد. ایندو را يك گروه از برنامه ریزان رایانه به سرپرستی «جان‌کخ[5]» یاری میکردند. در ژوئن ۱۹۷۶ این‌گروه پژوهشگران (آپل، هاکن، کخ و IBM-360)کارترسیم مجموعه‌ای اجتناب‌ناپذیر از اشکال ساده شدنی را که شامل ۱۴۸۲ شکل اکثرا پیچیده بود بپایان رساند. اثبات وجود چنین مجموعه‌ای به‌اضافه این حقیقت‌که «هرنقشه شامل حداکثر۴کشور را میتوان با ۴رنگ بطور صحیح رنگ آمیزی‌کرد «حدس ۴ رنگ را بـه کمك اصل استقرای ریاضی ثابت کرد. بدین ترتیب ظاهراً امروزه میتوان مسئله را ثابت شده انگاشت. کلمه ظاهراً مؤیـد ایـن معناست‌که بالاجباربایدصحت‌کار IBM-360 را قبول داشته باشیم، زیرا تحقیق درستی اثبات مورد نظر بـادست خالی و بدون کمك رایانه غیرممکن است. ضمناً در۱۱۷۸ ریاضیدان امریکائی«دانیل‌کوهن[6]» بررسیهای آپل وهاکن را اساساً تکمیل کرد، زیرا روشیکه او برای حل‌مسئله ۴ رنگ ارائه دادکاملاً می‌تواند بدون استفاده از رایانه کنترل شود. البته تذکرایـن نکته نیزجالب است‌که کارآپل وهاکن به هزاران ساعت وقت برای محاسبه نیاز دارد ، درحالیکه برنامه کـوهن چند ثانیه بیشتر بدرازا نمی‌انجامد. حل مسئله ۴ رنگ موضوعی برجسته وقابل توجه است نه‌فقط به‌جهت‌آنکه باآن یکی ازمشهورترین فرضهای ریاضی اثبات شد، بلکه از اینجهت که روح همکاری میان انسان و رایانه (کامپیوتر) را بنمایش گذاشت.

---

(1) L. Heffter (2) Youngs

(1) Heinrich Heesch : Professor of University of Hannover

(۲) ازآنجاکه بحث ماصرفاً جنبه تاریخی دارد، ازتـوضیحات مبسوط مؤلف پیرامون این عبارت خودداری میکنیم.

(3) Kenneth Appel (4) wolfgang Haken

(5) John Koch (6) Daniel Cohen

اطلاعیه

دربارهٔ نشریات رشد آموزش تخصصی

مجلات رشد آموزش مواد درسی مدارس کشور نشریاتی است که از سوی گروههای درسی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش با همکاری دفتر امور کمک آموزشی هر سه ماه یکبار ــ چهار شماره در سال ــ منتشر می‌شود.

این نشریات در حال حاضر عبارتند از:

۱ ــ رشد آموزش ریاضی
۲ ــ رشد آموزش زبان
۳ ــ رشد آموزش شیمی
۴ ــ رشد آموزش فیزیک
۵ ــ رشد آموزش زمین‌شناسی
۶ ــ رشد آموزش ادب فارسی
۷ ــ رشد آموزش جغرافیا
۸ ــ رشد آموزش زیست‌شناسی

هدف از انتشار این نشریات در وهلهٔ اول ارتقاء سطح معلومات معلمان و در مرحلهٔ بعد ایجاد ارتباط متقابل میان معلمان هر رشته و دفتر تحقیقات به منظور تبادل تجارب و مطالب جنبی و مفید درسی است.

دبیران، دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر علاقه‌مندان به اشتراک این مجلات می‌توانند جهت اشتراک هر چهار شماره از یک مجله در سال مبلغ ۴۰۰ ریال به حساب ۹۲۹ خزانهٔ بانک مرکزی ــ قابل پرداخت در کلیهٔ شعب بانک ملی ــ واریز و فیش آن را همراه با فرم تکمیل شدهٔ زیر به نشانی تهران، صندوق پستی شماره ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱ دفتر امور کمک آموزشی ــ مرکز توزیع ارسال دارند. شماره تلفن مرکز توزیع: ۸۳۱۴۸۱

محل فروش آزاد

الف ــ تهران:

۱ ــ کتابفروشی شهید سیدکاظم موسوی ــ اول خیابان ایرانشهر شمالی
۲ ــ فروشگاه انتشارات رشد ــ خیابان انقلاب بین ولی‌عصر و کالج.
۳ ــ مرکز نشر دانشگاهی ــ نمایشگاه دائمی کتاب.
۴ ــ نمایشگاه دائمی کتاب کودک ــ روبروی دانشگاه تهران.
۵ ــ کتابفروشی صفا ــ روبروی دانشگاه تهران.
۶ ــ کیوسکهای معتبر مطبوعات
۷ ــ شرکت کتاب طب و فن روبروی دانشگاه
۸ ــ کتابفروشی انجمن اسلامی دانشگاه تربیت معلم

ب ــ شهرستانها:

۱ ــ باختران ــ کتابفروشی دانشمند ــ خیابان مدرس پاساژ ارم.
۲ ــ آذربایجان شرقی (تبریز) ــ مطبوعاتی ملازاده.
۳ ــ آذربایجان غربی (ارومیه) ــ مطبوعاتی زینال‌پور.
۴ ــ اصفهان ــ کتابفروشی مهرگان و کتابفروشی جنگل.
۵ ــ مازندران (ساری) هماهنگی گروههای آموزشی استان
۶ ــ کرمان ــ پارک مطهری ــ فرهنگسرای زمین.
۷ ــ خرم‌آباد ــ خیابان شهدای شرقی، کتابفروشی آسیا
۸ ــ مشهد ــ فروشگاه شماره یک انتشارات آستان قدس
۹ ــ تبریز ــ کتابفروشی علامه دهخدا
۱۰ ــ اصفهان ــ کتابفروشی رودکی
۱۱ ــ رشت ــ کتابفروشی فرهنگستان
۱۲ ــ گرگان ــ کتابفروشی جنگل
۱۳ ــ قم ــ کتابفروشی طوس
۱۴ ــ آستارا ــ کتابفروشی نیما
۱۵ ــ سقز ــ نمایندگی روزنامه کیهان

توجه، دانشجویان مراکز تربیت معلم می‌توانند با ارسال فتوکپی کارت تحصیلی از ۵۰٪ تخفیف برخوردار شوند.

فرم اشتراک مجلات رشد تخصصی

اینجانب .... با ارسال فیش واریز مبلغ ۴۰۰ ریال، متقاضی اشتراک یکسالهٔ مجلهٔ رشد آموزش .... هستم.

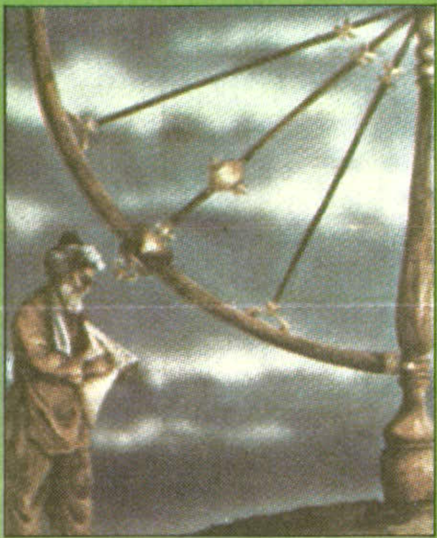
نشانی دقیق متقاضی: استان .... شهرستان .... خیابان ....

کوچهٔ .... پلاک .... تلفن ....

Preface 3
What is the mathematics Dr. A. R. Medgalchi 4
Biological Models Dr. M. M. Sharief. 8
Rings and Ideals Dr. H. Zakeri 13
Sequences Dj Laali 17
The Proof of associative law in Symmetric difference. M. Yasef Nia 25
To sketch gof by sketching f and g. A.Darabi 26
The Solution to the Contest Problem of No 9 32
The Problems Dj Laali 33
The Solution to the Problems of No 10 36
Answer to the letters 45
A universal Problem Dr.A. Shadman 49
A report on 27^{th} International olympiad Transtated by A.Hosamadini 54
A report on 38^{th} Mathematical Education 56
A note in remmebrance of a Colleague 57
Growing of mathematical thinking Dr. M. H. Bijan zadeh, 58
A brief revission to the four colour Problem, Translated by S.Zakeri 63

Roshd, Magazine of Mathematical Education, Vol III No. 12,. Winter 1986 Mathematics Section, 274 BLDG-No. 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave., Tehran - Iran.

A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.



ابوریحان محمّدبن احمد بیرونی

متولد سال ۳۵۲ ش در اطراف شهر خوارزم که بیش از ۱۵۰ کتاب نوشته است ۷۰ کتاب در نجوم، ۲۰ کتاب در ریاضی و ۱۸ کتاب ادبی، تاریخ‌نویس مشهوری است و کارهای او در زمینه جغرافی، فیزیک و زمین‌شناسی است.

نخستین کسی است که در ریاضیات ریشه سوم کعب را بطریق بسیار ساده‌ای کشف کرده است. فرضیه قوه جاذبه و حرکت وضعی زمین از کارهای اوست. محاسبه علمی جهت‌یابی قبله را تعیین کرد و اولین کسی است که فکر تصویر برجسته را ارائه کرده است. در باره صید مروارید، ارتباط دریاها، اثرات مهتاب ـ خواص طبیعی گیاهان و آهنربا ـ کرویت زمین، سنگ معادن، وزن مخصوص اجسام، آب شیرین و شور و در ادبیات و داروسازی و گیاه‌شناسی تحقیقات ارزنده‌ای را نموده است. نخستین اثر بزرگ بیرونی (آثار الباقیه عن قرون الخالیه) است که از تقویم‌ها ـ دوره‌ها ـ مسائل مهم ریاضی، نجومی، هواشناسی و غیره سخن می‌گوید. از کتابهای مهم او قانون مسعودی و التفهیم فی صناعه التنجیم است.