رشد آموزش ریاضی

سال سوم ـ شماره ۱۱ ـ پائیز ۱۳۶۵
بها: ۱۰۰ ریال

جمهوری اسلامی ایران

هجدهمین کنفرانس ریاضی کشور

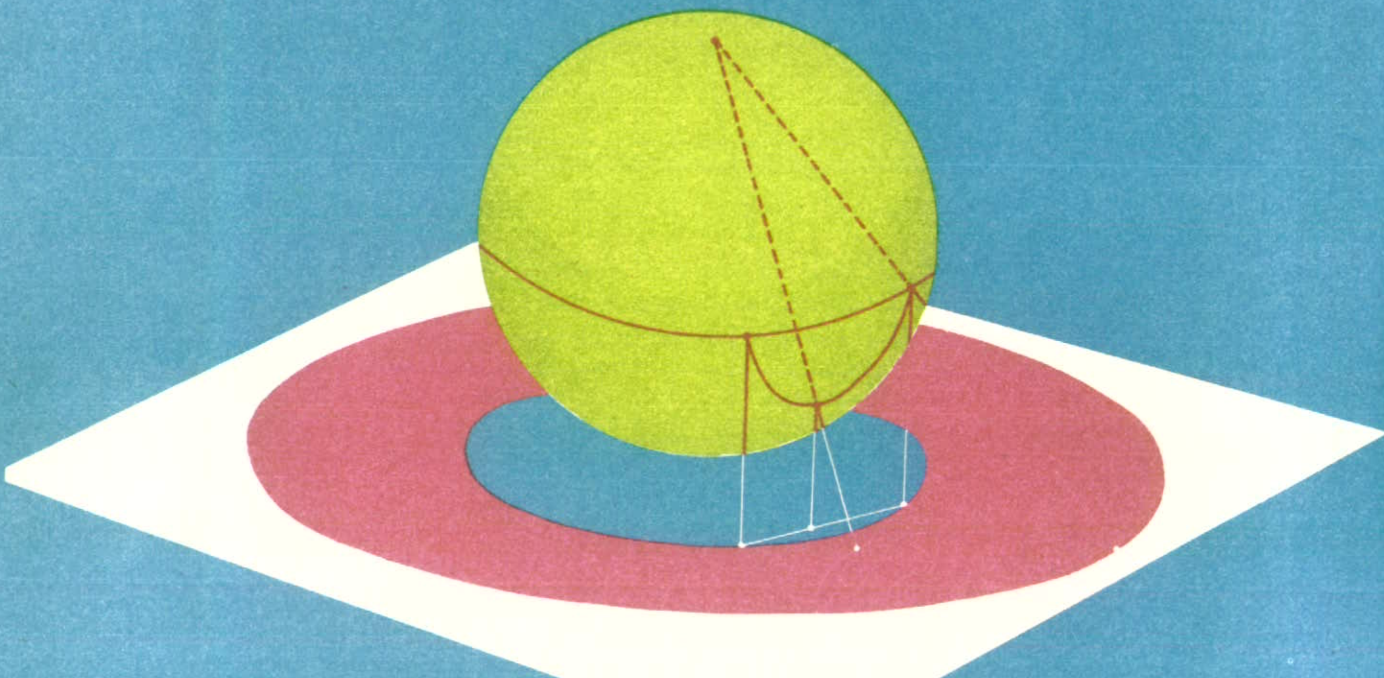
۸ تا ۱۱ فروردین ۱۳۶۶

مجتمع آموزش عالی بیرجند

گروه ریاضی

همراه

با چهارمین مسابقه ریاضی دانش آموزان ممتاز کشور



EIGHTEENTH ANNUAL
IRANIAN MATHEMATICS CONFERENCE
MARCH 28.31,1987
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF BIRJAND
BIRJAND.IRAN

بیرجند - مجتمع آموزش عالی بیرجند - صندوق پستی ۷۹

تلفن - ۷۰۴۴ - ۴۸۰۴

رشد آموزش ریاضی

سال سوم ـ شمارهٔ ۱۱ ـ پاییز ۱۳۶۵

نشریهٔ گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.

نشانی: خیابان ایرانشهر شمالی. ساختمان شماره ۴ وزارت آموزش و پرورش تلفن ۸۳۲۰۲۱

سردبیر: دکتر علیرضا مدقالچی

تولید: واحد مجلات رشد تخصصی

صفحه‌آرا: علی نجمی

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و آشنایی آنان با شیوه‌های صحیح تدریس ریاضی منتشر می‌شود.

فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

در سرمقالهٔ شمارهٔ مشترک (۵و۶) و شمارهٔ ۷، از دبیران محترم ریاضی کشور برای همکاری با مجله دعوت به عمل آمد. خوشبختانه پاسخ به این درخواست کاملا مثبت بود و ما به طور مستمر شاهد دریافت نامه‌ها، اظهارنظرها، ومقالاتی ازطرف دبیران محترم ودانش‌آموزان گرامی هستیم، و این خود گویای این واقعیت است که مجله جای خود را دربین خوانندگان باز نموده است ودرمسیر صحیحی برای رشد وتعالی دانش ریاضی گام برمی‌دارد.

درمسیر انتشار این نشریه کوشش ما براینست که اهداف اولیه مجله را که درشماره (۱) سال اول ذکرگردیده است جامهٔ عمل بپوشانیم. دراین رهگذر ازیک سو با عنایت به نظریات مسؤلین محترم و توجه به پیشنهادات خوانندگان گرامی، و از سوی دیگر با توجه به سرعت پیشرفت دانش ریاضی درجهان، سعی می‌شود که یک هماهنگی کامل بین مطالب مجله و خواسته‌های خوانندگان به عمل آید. لهذا کوشش می‌شود که اهداف آموزش ریاضی درکشور وجهان را مدنظرگرفته و نگرشی به‌مفاهیم ریاضی وخاستگاه مفاهیم ریاضی وارتباط این مفاهیم با سایر دانشها داشته باشیم، بطوری‌که این مجله برای دانش آموزان، دبیران ودانشجویان مفید افتد.

سعی ما براینست که درمورد موضوعات فوق‌الذکر مجله را بیش ازپیش باروز سازیم، ولهذا، ازدبیران محترم، دانش‌آموزان گرامی درخواست مجدد داریم‌که همکاری وهمفکری کامل با ما داشته باشند، تا با تبادل نظر یکدیگر بتوانیم‌تحرکی درآموزش ریاضی‌کشور ایجادکنیم واز افت دانش ریاضی بکاهیم.

مصاحبه با آقای میرزا جلیلی

مجلهٔ رشد ـ آقای جلیلی، اغلب دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی فیزیك، شما را از طریق تألیف کتابهای درسی، و دبیران ریاضی شمارا ازهمین‌طریق، ونیزخدماتی که‌در دفتر تحقیقات‌در رابطه باکارتألیف و ترتیب دادن کلاسهای آموزش ضمن خدمت و... می‌شناسند. مع‌هذا بسیارممنون خواهیم شدکه با تفصیل بیشتری به‌معرفی خود بپردازید وبه‌ویژه از دوران تحصیل وتدریس وخدمت در دفتر تحقیقات بیشتر سخن بگویید.

آقای‌جلیلی ـ اگرچه نام کوچك اینجانب «میرزا» وفامیلم جلیلی است‌ولی بسیاری از همکاران عزیز اینجانب را به‌عنوان «میرزاجلیلی» می‌شناسند و میرزا جلیلی‌را فامیل بنده می‌دانند. این‌یادآوری به‌این دلیل آورده شد که خواننده محترم بداند مصاحبه شونده چه‌کسی است.

اینجانب در اردیبهشت‌ماه ۱۳۱۲ در بندر بوشهر متولدشدم وتحصیلات‌ابتدائی را در دبستان فردوسی وتحصیلات دورهٔ اول دبیرستان را در دبیرستان سعادت آن شهرستان ادامه دادم. دورهٔ دانشسرای مقدماتی را در شیراز گذراندم و در سال ۱۳۳۵ بعنوان آموزگارشهرستان کازرون انتخاب شده ودرآن شهرستان عملاً به تدریس در دبیرستان پرداختم.

در سال ۱۳۳۶ به‌دانشسرای عالی راه یافتم ودورهٔ لیسانس‌را با معدل ۱۷ تمام کردم‌که اگرچه از نظر معدل شاگرد اول بودم ولی متأسفانه نتوانستم از مزایای شاگرداولی استفاده‌کنم.

در سال ۱۳۴۸ یك‌دوره یك ساله در «بارو رودکالج»، که یك‌انستیتوی تربیتی وابسته به‌دانشگاه لندن بود، در انگلستان دیدم ودراین‌یك‌سال در دوترم جبرمجرد- جبر خطی ـ منطق و مجموعه‌ها توپولوژی وآمار واحتمال‌رامطالعه نمودم‌وبه‌دریافت گواهی post graduate diploma with honour نائل‌آمدم.

در فروردین‌ماه ۱۳۵۰ به‌دفترتحقیقات منتقل و در قسمت برنامه‌ریزی مشغول کار شدم وبلافاصله به‌عضویت شورای برنامه‌ریزی وتألیف که‌کتابهای ریاضی فعلی را تنظیم می‌نمود درآمدم.

درسال ۱۳۵۲ یك‌دورهٔ۶ماهه‌دربرنامه‌ریزی آموزشی دردانشگاه تکزاس امریکا دیدم‌که در آن ضمن مطالعهٔ دروسی نظیر جبر مجرد ـ جبر خطی ونظریه اعداد به‌بررسی‌کتب ریاضی دبیرستان درامریکااز سال ۱۹۳۰ تا ۱۹۷۲ پرداختم.

تاکنون درسه کنفرانس بین‌المللی آموزش ریاضی دراسترالیا، انگلیس و هلند شرکت کرده‌ام و در سال ۱۳۶۳ با برنامه‌ریزان و مؤلفین ژاپنی در آن کشور به‌تبادل‌نظر در زمینهٔ برنامه‌ریزی وتألیف کتب‌ریاضی پرداختم.

مجلهٔ رشد ـ شما ازمعدود افرادی هستیدکه‌درسالهای اخیر درجریان‌تغییرات مداوم کتابهای ریاضی مقاطع مختلف تحصیلی قرار داشته‌اید، خواهشمند است دربارهٔ علل ونحوهٔ این‌تغییرات ونیزافراد و سازمانهای مسئول در این تغییرات توضیحاتی بفرمایید.

آقای جلیلی ـ در دهه ۱۹۴۰ قسمتی از ریاضی‌که تا آن موقع بیشتر به‌وسیلهٔ دانشمندان ریاضی مورد مطالعه و بررسی واظهارنظر قرار می‌گرفت، مثل: مجموعه‌ها، منطق‌ریاضی، نظریه گروهها، نظریهٔ‌حلقه‌ومیدان ... وسیلهٔ گروه‌بورباکی (انجمن ریاضی فرانسه). به‌دانشگاه منتقل شده و،رسماً جزء مواد دورهٔ لیسانس قرار گرفت. به‌طور معمول، چون الفبا، مطالبی که در دانشگاه تدریس می‌شود، در دورهٔ دبیرستان آموزش داده می‌شود لذاباتوجه به‌این مطلب ودلایل‌زیر، کشورهای‌مختلف جهان در صدد تجدیدنظر در برنامه‌های ریاضی خود برآمدند.

الف ـ مطالب برنامهٔ گذشته خیلی خشك، مشکل وبی‌روح شده بود.

ب ـ بعضی ازمفاهیم ریاضی در سطح بالا عوض شده‌بود.

ج ـ بعضی از مفاهیم جدید وارد دانشگاه شده در نتیجه پل بین دانشگاه و دبیرستان ازبین رفته بود.

د ـ صنعت و تکنولوژی جدید نیاز به‌زبان ریاضی تازه داشت.

درسال ۱۳۳۱ (۱۹۵۲) در آمریکا از طرف دانشگاه ایلی‌نوی شورایی به‌نام «شورای مطالعه وبررسی ریاضی مدارس» تشکیل شد ودر همان سال پروژه‌هائی در این‌زمینه از طرف دانشگاههای استانفورد- وییل ارائه گردید که نتیجهٔ کار هرسه

گروه، که نهایتاً منجر به‌همکاری آنها شد، ارائهٔ اولین‌سری کتب ریاضی‌جدیدمدارس تحت‌عنوان کتب School Mathematics Study Group یا به‌طور مختصر سری معروف کتابهای S.M.S.G می‌باشد. از این‌سری درحدود ۸۰ جلدکتاب منتشرشده که بعضی ازآنها در دفتر تحقیقات‌موجود می‌باشد. آنچه‌درمورد این‌کتابها گفته شده، این‌است که ایـن کتابها به‌وسیله مغزهای متفکر ریاضی اعم از استاد ودبیر نـوشته شده است.

در سال ۱۹۶۱ در انگلستان شورایی مرکب از ۴۰ نفر دبیر واستاد دانشگاه در سوتمپتون تشکیل گردیدکه نتیجهٔ کار این شورا تألیف ونشر یك سری‌کتب ریاضی مدارس در سطح جهانی بود به‌نـام کتب School Mathematics Project یا به‌طور خلاصه S.M.P که ازاین سری تا کنون ۱۲۰ جلدکتاب تألیف ومنتشر شده است‌که اکثرآنهادر دفتر تحقیقات‌موجود می‌باشد.

در همین زمـان سری کتـاب هـای (S.S.M) Scottish School Mathematics (M.S.M) Midland School Mathematics چاپ ومنتشر شده که ازسری S.S.M صد کتاب چاپ شده کـه در دفتـر تحقیقات موجود است.

درهمین‌زمان کنفرانسی از کشورهای عضوبازارمشترك‌اروپاز یرنظرپروفسور بریانت درحومهٔ پاریس تشکیل‌شدکه دستورجلسه آن «فکرنو در ریاضی مدارس» بود. این کنفرانس نیز کمیته‌ای‌رامأموربرنامه‌ریزی و تألیف کتب ریـاضی نمود که از این کمیته نیز ۵۰ جلـد کتاب تحت عنـوان Modern Mathematics For Schools چاپ شده‌است.

در کشور بلژیك ریاضی جدید به‌طور افراطی‌تر پیاده شد. معلم و استاد بلژیکی جرج‌پاپی یك‌سری کتابهای ریاضی جدید که همه‌رنگی ومصور بود تألیف نمود که بعضی از آنها در دفتر تحقیقات موجود است.

در کشورهای عـربی از سال ۱۳۴۹ به‌بعد کتبی به‌نام «الریاضیات‌المعاصر» در میان کتب ریاضی آنها دیده می‌شود کـه محتوای آنها مطالب ریاضی جدید است. درهمهٔ این کتب ریاضی جدید، قسمتی از جبر مجرد، گروه، حلقه ومیدان قسمتی ازجبر خطی، مـاتریسها وتبدیلات قسمتی ازمنطق‌ومجموعه‌ها، قسمتی ازبرنامه‌ریزی‌خطی وهمچنین قسمتی از آمار و احتمال آمده است.

در کشور خودمان درسال ۱۳۵۰ که دفتر تحقیقات و برنامه ریزی درسی بـه طـور مستقـل تشکیـل شد، شورای برنامه‌ریزی آمـوزش متوسطه متشکل از جمعی از اساتید دانشگاهها ودبیران‌مجرب وقدیمی تشکیل گردید. برنامه‌های‌ریاضی کشورهای مختلف و همچنین کتب آنهـا مورد بررسی و مطالعه قـرار گرفت. این شورا بعد از دو سال ریز مـواد ریاضی دبیرستان را ارائه داد. برنـامه و کتب ریاضی ما درحقیقت ناشی ازموج ریاضی جدیدکه درآن‌زمان در دنیا بوجود آمده بود می‌باشد. به‌عبارت دیگـر در تألیف کتب ریاضی‌ازهمه‌کتب‌فوق‌الذکراستفاده شده است.

اینجانب به‌عنوان یکی از اولین‌مؤلفین کتب ریاضی‌جدید مدارس، درایران، باید عرض‌کنم‌که درتألیف‌کتب ریاضی جدید دورهٔ دبیرستان بیش از ۳۰۰ جلـد کتب ریاضی متوسطه ازکشورهای عربی-هند-اسکاندیناوی - ژاپن- انگلیس -آمریکا-شوروی - آلمان مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت ودر تألیف اولیه در حـدود ۲۰۰۰ صفحه مطالب ریاضی جدید تهیه گردیدکه از بین‌این ۲۰۰۰صفحه درحال حاضر ۵۰۰ صفحه آن انتخاب و تدریس می‌شود.

سازمانهایی‌که درپیاده‌شدن برنامه‌های جدید ریاضی درکشور همکاری داشته‌اند، عبارتند:

الف - دفتر تحقیقات و برنـامه‌ریزی درسی‌که در آن موقع «مرکز تحقیقات و برنامه‌ریزی درسی» خوانده می‌شد.

ب - سازمان کتابهای درسی ایـران که فعلاً دفتر چاپ وتوزیع کتب درسی شده است.

ج - دفتر آموزش ضمن خدمت.

د - دفتر آمـوزش متوسطـه (قبل از تشکیل دفتر آموزش ضمن‌خدمت).

باید توجه داشت که امـروزه هیجان ریاضی جدید درجهان فروکش کرده ونیز کشورهـا در برنامه های ریاضی خـود تجدیدنظر نموده وقسمتهای مجرد ریاضی جدیدرا ازبرنامه‌های ریاضی خود حذف کرده‌انـد و قسمتهای کاربردی را قـوت بیشتری بخشیده‌اند.

مجلهٔ رشد - به‌طـور کلی یك‌کتاب درسی ریاضی چگونه تدویـن و تـألیف می‌شود؟

آقای جلیلی - لازم بـه یادآوری است‌که ضرورت انقلابی وفرهنگی بعداز انقلاب ایجاب می‌کردکه کتابهای درسی تجدید تألیف‌شود. لذا گروه ریاضی دفتر تحقیقات بلافاصله بعـد از انقلاب دست به‌کارشده و تاکنون در حدود ۳۰ جلد از کتابهایش را تجدید تألیف نموده است:

الف - کتابهای ریاضی دوره پنجسالهٔ ابتدایی ۵جلد

ب ـ کتابهای «راهنمای معلم» دورهٔ پنجسالهٔ ابتدایی ۵جلد
ج ـ کتابهای ریاضی دورهٔ راهنمایی ۳جلد
د ـ کتابهای راهنمای معلم‌دورهٔ راهنمایی ۳جلد
هـ ـ کتابهای ریاضی دورهٔ مراکز تربیت معلم ۷جلد
و ـ کتابهای‌ریاضی دوره هنرستان ۷جلد
ز ـ کتابهای‌ریاضی‌رشتهٔ‌اقتصاد وفرهنگ و ادب ۲جلد

ریز مواد ریاضی دورهٔ دبیرستان نیز تنظیم شده‌است که به‌زودی‌تألیف‌کتابهای آن آغاز خواهدشد. برای تألیف‌هردوره از این کتابها شورایی مخصوص به‌خود، به‌صورت زیر، وجود داشته‌است.

الف ـ شورای ریاضی دفتر تحقیقات برای برنامه‌ریزی و تألیف ریاضی دورهٔ عمومی ونظری.

ب ـ شورای ریاضی تربیت‌معلم‌برای برنامه‌ریزی و تألیف کتب مراکز تربیت معلم.

ج ـ شورای ریاضی هنرستانها برای برنامه‌ریزی‌وتألیف‌کتب‌ریاضی‌هنرستانها.

د ـ شورای ریاضی رشتهٔ اقتصاد برای برنامه‌ریزی و تألیف کتب ریاضی رشته اقتصاد.

شورای ریاضی دفتر تحقیقات متشکل از ۲۵ نفر استاد ودبیر از دانشگاههای مختلف ودبیرستانها می‌باشد که از تاریخ ۵۹/۶/۲۹ کار خودرا شروع نموده و تاکنون کتب ریاضی دورهٔ ابتدائی و وراهنمائی‌را تألیف نموده وبرنامه‌ریاضی دبیرستان را تنظیم کرده است. در این شوراها به‌طور اعم وبخصوص درشورای ریاضی‌دفتر تحقیقات روی برنامهٔ‌هرکلاس به‌طور مفصل بحث می‌شود که چه مطالبی درهرکلاس باید خوانده شود واین‌مطالب چگونه ارائه گردد. لذا روی هر مفهوم ریاضی ساعتها بحث‌می‌شودکه این مفهوم باید ازچه‌کلاسی‌شروع وتا چه‌کلاسی‌ادامه پیداکند وارائه این مفهوم در هر کتاب چگونه باشد. بعداز اینکه برنامه‌ریزی‌یك مقطع مثلاً ابتدائی تمام‌شد، شوراگروهی از اعضای خود را که نام «گروه تألیف ریاضی آن‌کتاب» یا «گروه‌ریاضی‌تألیف آن‌دوره» نامیده می‌شود انتخاب می‌کند واین گروه باتوجه به‌ریز برنامه وتوصیه‌های شورا که در صورتجلسه‌ها منعکس است‌کار تألیف‌را شروع‌می‌کند. درتألیف مقدماتی ابتدا مفاهیم و مطالب در حدود دو برابر حجم کتاب مورد نظر به‌طور تحقیقی تهیه ومورد بررسی قرار می‌گیرد واز میان این‌مطالب کتاب آزمایشی چاپ می‌شود. کتاب آزمایشی به‌مدت یك‌سال در ۳۰ تا ۴۰مدرسهٔ تهران تدریس‌می‌شود ومعلمین این کلاسها هفته‌ای یکروز با مؤلفین کلاس داشته ودر آنجا باروش و مطالب‌کتاب جدیدالتألیف آشنا می‌شوند. در پایان سال آزمایش، نظرات معلمین جمع‌آوری شده وپس از بررسی، کتاب آزمایشی برمبنای آنها بازسازی شده و کتاب اصلی چاپ و در کشور تدریس می‌شود. نحوهٔ‌آشنا کردن معلمین با کتاب جدیدنیز در دو مرحله انجام می‌گیرد.

مرحله‌اول ـ ازهرمنطقه‌آموزشی‌کشور از یك‌نفر لیسانسیه واجد شرایط به‌تمام «مدرس راهنما» دعوت به‌عمل می‌آید که درکلاسهائی که باهمکاری دفتر آموزش ضمن‌خدمت ودفترتحقیقات تشکیل می‌شود شرکت نماید. این‌عده درهرتابستان در دو پاسه‌نوبت زیرنظر مؤلفین دوره می‌بینند (هر ۲۰۰نفر دریك‌دوره‌شرکت‌می‌کنند).

مرحله دوم ـ هرمدرس راهنما به‌منطقه آموزشی‌خود برگشته و برحسب تراکم منطقه ونیاز محل به‌۵۰ یا ۱۰۰ نفر معلم روش جدید آموزش کتاب‌را یادمی‌دهد. بدین‌صورت که معلمین هفته‌ای یکروز در کلاسهائی که ضمن خدمت منطقه در محل تشکیل می‌دهد شرکت نموده و مدرس راهنماها مطالب وروش‌جدید ارائه مفاهیم را به آنها آموزش می‌دهند.

مجلهٔ‌رشد ـ کتابهای ریاضی مقاطع مختلف ما، تاچه‌اندازه متأثر از کتابهای خارجی وتاچه‌اندازه در ارتباط بانیازهاو خصوصیات جامعهٔ‌کنونی است؟

آقای‌جلیلی ـ اعضای محترم‌شورای ریاضی دربرنامه‌ریزی وتألیف به‌برنامه‌ها وکتب ریاضی مختلف دنیاکه خوشبختانه در دفتر تحقیقات موجود است و هر سال به‌همت وکوشش ریاست محترم سازمان پژوهش برادر دکتر حداد عادل تازه‌های آنها می‌رسد مراجعه نموده واز آنها در برنامه‌ریزی‌وتألیف الهام می‌گیرند. لذا یك‌برنامه‌ریز می‌داندکه‌مثلاً جبریا آنالیزیا هندسه‌درهرمقطع تحصیلی‌درسطح بین‌المللی تا چه حدودی مطرح است. لذا بایدگفت که در عین‌حالی که ما توجه به‌استاندارد بین‌المللی‌داریم، دربرنامه‌ریزی وتالیف به نیازهای‌کشور خودمان‌هم توجه می‌کنیم.

مجلهٔ‌رشد ـ معلمین‌به‌طور اعم، تاچه اندازه درتألیف وتغییرات بعدی کتابهای درسی دخالت دارند؟

آقای جلیلی ـ همانطور که عرض شدهرکتاب جدیدالتألیف درسالهای‌اولیه تقریباً جنبهٔ تجربی داشته کتاب بوسیلهٔ معلمین به‌کلاس برده می‌شود ،مشکلات اجرائی مورد بررسی قرار می‌گیرد،سختی وآسانی کتاب، اغلاط چاپی وغیر چاپی موردتوجه واقع‌می‌شود وما اطلاعات‌لازم در این زمینه‌را مستقیماً با تماس با معلمین

وهمچنین از طریق مکاتبه همکاران به‌دست می‌آوریم. وهر کتاب جدیدالتألیف در سالهای بعد با توجه به‌همین نظرات باز - سازی می‌شود. لذا به‌طورمختصر می‌توان اظهار داشت که کتابهای درسی ما متأثر از نظریات و پیشنهادات همهٔ‌معلمین کشور است.

مجلهٔ‌رشد - برای تدریس بهتر هر کتاب چه‌نوع امکاناتی، علاوه بر خود کتاب، دراختیار معلمین قرار می‌دهید؟

آقای‌جلیلی - اولاً برای هر کتاب دانش‌آموز یك کتاب «راهنمای معلم» چاپ‌می‌شود که در آن کتاب مطالب‌تکمیلی مورد بحث قرار می‌گیرد.

ثانیاً در دورهٔ ابتدائی باطرح وپیشنهاد دفتر تحقیقات ودفتر کمك‌آموزشی صنایع آموزشی‌کشور وسائل کمك‌آموزشی‌تهیه کرده دراختیار معلمین قرار می‌دهد.

ثالثاً کتابهای جنبی کمك درسی با همکاری دفتر کمك‌آموزشی چاپ‌می‌شود.

رابعاً ازطریق‌مجلات رشد اختصاصی، رشد ریاضی، معلمین‌را با مفاهیم علمی و تازه‌های ریاضی آشنا می‌سازیم.

مجلهٔ‌رشد - لطفاً از تجارب خود به‌عنوان یك‌دبیر مجرب وباسابقه مواردی را ذکر فرمایید.

آقای‌جلیلی - به‌عنوان یك‌معلم‌عرض می‌کنم که هرکسی که به‌کلاس می‌رود‌باید آمادگی کامل برای تدریس داشته باشد و این‌آمادگی با مطالعهٔ‌کتاب درسی ومنابع مختلف علمی میسر می‌گردد.خوشبختانه بعداز انقلاب مرکز نشر دانشگاهی یك سری کتب علمی ترجمه و تألیف نموده است که برای دبیران محترم بسیار مفید می‌باشد.

دیگر آنکه اگر دبیری زبان خارجه بداند در کارش بیشتر موفق خواهد بود چه دراین‌صورت با منابع بیشتری سروکار خواهد داشت. به‌هر حال اگر دبیری بخواهد همیشه موفق بماند باید به‌طور مداوم مطالعه نماید ودرهر زمان خودرا با تازه‌های ریاضی آشنا سازد. در آموزش هرمطلب ریاضی باید به‌مفهوم نیز توجه شود وتنها به‌تکنیك بسنده نگردد.

مجلهٔ رشد - چه‌عواملی را در آموزش بهتر ریاضیات مؤثرمی‌دانید وچه‌توصیه‌ای دراین‌خصوص به‌دیگر همکاران‌وبخصوص همکاران جوان خود دارید؟

آقای‌جلیلی-عواملی‌که درآموزش بهتر ریاضیات مؤثر است عبارتند از:

الف - عامل رفاهی - بدیهی است که هرچه معلم ازنظر مادی بیشتر تأمین باشد بهتر آموزش می‌دهد ونتیجهٔ‌کاراو مطلوبتر است. وقتی معلم از زندگی خود راضی باشد کمتر احساس خستگی و فرسودگی می‌کند ودر تدریسش موفقتر است.

ب - عامل علمی - اگرمعلم درمراکز تربیت معلم یا دانشگاههای تربیت معلم خوب آموزش دیده باشد وواقعاً در طول سالهای تحصیلی بااوکار شده باشد، این معلم از نظر علمی قوی بوده و در تدریس خود موفق‌خواهد بود. به‌هنگام تربیت‌معلم باید به‌شکوفائی شخصیت معلمین و بالا بردن‌کیفیت علمی آنها توجه‌خاص مبذول گردد.

ج - علاقه به‌شغل معلمی و رشتهٔ درسی هردبیر نیز درآموزش‌او مؤثر است. بعضی از افراد هستندکه معلمی درخون‌آنهاست. اینهادرکارخوددبیشترموفق هستند. به‌هرحال باید شرایط مادی ومعنوی‌مطلوب به‌وجود آوردکه هرمعلمی به‌شغل خودعلاقمندشود وبه‌حرفه خویش عشق بورزد.

د - احساس مسئولیت و تعهد، اگر معلمی در قبال جامعه، پدر مادرها، مدرسه احساس مسئولیت بکند مسلماً‌کارش‌رابهتر انجام می‌دهد ودر کارش موفقتر خواهد بود.

مجلهٔ‌رشد - به‌نظر شما آیا باید دبیران درمورد شیوه‌های صحیح آموزش ریاضی تعلیم داده‌شوند یا هردبیر (یامعلم ریاضی) خود به‌مرور زمان وکسب تجربه باید شیوه‌های صحیحی برای آموزش ریاضیات پیدا کند. درصورتی که اعتقاد به‌روش اول دارید، بفرمایید که آموزش وپرورش تاچه اندازه معلمین را در این رابطه (صرفنظر از آموزشهایی که در دوره‌های تحصیلی خود دیده‌اند) آموزش می‌دهد؟

آقای‌جلیلی - روشن است که‌معلمی یك‌فن است وهر فن نیاز به‌کسب مهارت درآن‌فن دارد. روشهای آموزشی ریاضی مرتب درحال تحول است، مطالب درسی به‌طورمستمر تغییرمی‌کند. لذا اگر بخواهیم بازده معلمین خوب باشد باید آنهارا با شیوه‌های جدید آموزش آشنا سازیم.

در زمان فطرت دانشگاهها، عده‌ای از دانشگاهیان طرحی بنام «طرح آموزش مستمر» ارائه دادندکه روی این طرح‌یك شورای ۱۰ نفری به‌مدت ۲سال‌کار کرده بود. طرح ازنظرعلمی جامع بود، ولی از نظر اجرائی مشکلات داشت. چنانچه مشکلات اجرائی آن برطرف می‌گردید و اصلاحات جزئی‌طرح برطرف می‌شد می‌توانست در آموزش معلمین ما بسیار مفید واقع شود.

درحال حاضر گاهگاهی کلاسهائی از طرف آموزش ضمن‌خدمت برای آموزش دبیران تشکیل می‌شود که بیشتر وقت این دوره‌ها صرف بررسی کتابها می‌شود و معمولاً به‌ارائهٔ روشها بخصوص درسطح متوسطه چندان توجه نمی‌شود.

مجلهٔ رشد ــ چه انتظاری از یك مجلهٔ ریاضی بخصوص از مجلهٔ «رشد آموزش ریاضی» در رابطه با آموزش ضمن خدمت دبیران دارید ومجله را در این راه چقدر موفق می‌دانید؟

آقای جلیلی ــ آنچه از دور و نزدیك شنیده می‌شود این است که سطح علمی مجله قدری بالاست. باید توجه داشت که اگرچه مجله برای استفاده دبیران تهیه می‌شود ولی بیشتر خوانندگان آن دانش‌آموزان هستند. لذا باید مطالب در سطح متوسطه یا کمی بالاتر مطرح گردد. ولی به‌طور کلی مجله بسیار موفق بوده و در همین زمان کوتاه طرفداران فراوانی پیدا کرده است طوری که وقتی چاپ مجله به‌تاخیر می‌افتد این طرفداران مرتب زنگ می‌زنند وجویای مجله مورد علاقه‌شان می‌شوند.

با درج مقالاتی در مجله، همانطور که تاکنون عمل شده‌است، می‌توان یك مفهوم ریاضی از کتابهای متوسطه را انتخاب و کاملا بررسی وموشکافی کرد وجهات مختلف آنرا برای دبیران روشن نمود. البته مجله تعریف خاصی دارد ونمی‌توان درمجله ۴۰ صفحه مطلب راجع به حد یا پیوستگی یا ماتریس نوشت. به‌نظر می‌رسد که این مطالب باید در جزواتی خاص تهیه ودر اختیار دبیران قرار گیرد.

مجلهٔ رشد ــ لطفاً اطلاعات کاملی در بارهٔ آنچه «افت ریاضی» نامیده می‌شود و راههای مرتفع کردن آن در اختیار خوانندگان مجله قرار دهید.

آقای جلیلی ــ همزمان با پیاده‌شدن نظام جدید، یعنی از سال ۱۳۵۳ به بعد به‌علت تغییر ضربتی در برنامه‌ها و کتابها و عدم آماده ساختن دبیران برای تدریس مطالب جدید؛ علاقه دانش‌آموزان نسبت به‌ادامه تحصیل در رشته ریاضی کم‌شد. طوری‌که درسال ۱۳۶۰ تنها ۱۱٪ کل دانش‌آموزان دبیرستان در رشتهٔ ریاضی وفیزیك تحصیل می‌کردند. درسال ۱۳۶۱ سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی کمیسیونی به‌نام کمیسیون «بررسی مشکلات آموزش ریاضی دبیرستان» متشکل ازجمعی از اساتید دانشگاه، دبیران وصاحبنظران تشکیل داد که این کمیسیون بمدت ۲ سال هفته‌ای یك روز تشکیل جلسه‌داد و اقداماتی به‌صورت زیر انجام گرفت:

۱ــ نامه‌هائی به ائمهٔ محترم جماعات نوشته وخواهش‌شد که آنها با توجه به‌نیاز کشور اسلامی به‌متخصصین‌فنی درنمازهای جمعه مردم‌را ترغیب‌کنندکه فرزندان آنها دررشته‌ریاضی‌وفیزیك ادامه تحصیل دهند.

۲ــ بخشنامه‌هایی به‌ادارات کل آموزش و پرورش فرستاده و تأکید شدکه دانش‌آموزان‌را به‌ادامهٔ تحصیل دررشتهٔ ریاضی تشویق نمایند. همچنین برای‌دانش‌آموزانی که علاقه به‌تحصیل دررشته ریاضی دارند تسهیلات لازم فراهم گردد.

۳ ــ مسابقات ریاضی برای تشویق دانش‌آموزان ممتاز کشور ترتیب داده‌شد که سومین آن امسال در فاصله هشتم تا پانزدهم فروردینماه ۶۵ همزمان با برگزاری هفدهمین کنفرانس ریاضی کشور در زاهدان انجام گرفت وهمه‌ساله به‌نفرات اول تا دهم مسابقه ازطرف بنیاد فرهنگی البرز جوایزی داده می‌شود.

۴ــ تهیه هفت پرسشنامه به‌ترتیب زیر:

الف‌ــ برای دبیران دوم راهنمائی

ب ــ برای دانش آموزان سوم راهنمائی

ج ــ برای دبیران سال‌اول علوم

د ــ برای دانش‌آموزان سال‌اول‌علوم

هـ ــ برای‌دبیران سال‌اول علوم انسانی

و ــ برای دانش آموزان سال اول علوم انسانی

ز ــ برای دانش آموزان سال دوم تجربی

وارسال آنها به‌مناطق مختلف آموزشی کشور. در این پرسشنامه‌ها به‌طور علمی عوامل‌پیش بینی شده دسته‌بندی شده واز خواننده‌خواسته‌شده‌است‌که‌جواب بدهد. پس از استخراج نتایج پرسشنامه‌ها به‌طور علمی وآماری روشن خواهد شد که چه عواملی بیشتر در افت رشتهٔ ریاضی مؤثر بوده است.

ازعواملی که پیش‌بینی می‌شود بیشتر مؤثر بوده‌باشدکتاب ومعلم است که‌کتابها خوشبختانه تجدید تألیف شده وامید است که نسبت به‌تربیت معلم نیز توجه بیشتر مبذول گردد.

قابل یادآوری است‌که دراثر کوشش‌های مقامات وزارت آموزش وپرورش‌از سال ۶۲ به‌بعد باز دانش‌آموزان ازرشتهٔ ریاضی استقبال نموده و وضع بهتر شده است.

مجلهٔ رشد ــ لطفاً از تألیفات خودنام ببرید.

آقای جلیلی

الف‌ــ ریاضیات جدیدسال‌اول‌دبیرستان

ب ــ ریاضیات جدیدسال‌دوم‌دبیرستان

ج ــ ریاضیات‌جدیدسال‌سوم دبیرستان

دــ ریاضیات‌جدیدسال‌چهارم‌دبیرستان

هـ ــ راهنمای معلم ریاضی جدید سال اول

ز ــ تهیه جزوات‌متعدد آموزشی برای دبیران‌کشور در رابطه بامطالب درسی.

مجلهٔ رشد ــ متشکریم

محاسبهٔ مساحت

روزی در کلاس درس با این مسئله مواجه شدم که چگونه مساحت زیر منحنی $y=\frac{1}{x}$ را بین $x=1$ و $x=5$ پیدا نمایم.

از آنجا که نمی‌توان از تابع $y=x^{-1}$ انتگرال گرفت، سعی کردیم با محاسبه مساحت زیر دو منحنی مشابه $y=x^{-1/1}$ و $y=x^{-0/1}$ ومعدل گرفتن از این دو مساحت مورد نظر را پیدا کنیم.

محاسبات به‌قرار زیر است:

$$\int_1^5 x^{-0/9}dx=\left[\frac{x^{0/1}}{0/1}\right]_1^5=10(5^{0/1}-1)=1/746$$

$$\int_1^5 x^{-1/1}dx=\left[\frac{x^{-0/1}}{-0/1}\right]_1^5=10(1-5^{-0/1})=1/4866$$

$$\frac{1/746+1/4866}{2}=1/616$$

دو نتیجه حاصل زیاد نزدیك به‌یکدیگر نیستند بنابراین نمی‌توان گفت معدل آنها تاچه‌اندازه دقیق است. اگر دو نمودار فوق را با $y=\frac{1}{x}$ مقایسه کنیم انتظار خواهیم داشت پاسخ فوق تاحد قابل ملاحظه‌ای دقیق باشد. (شکل)

درقدم بعدی معدل مساحتهای زیر منحنی‌های $y=x^{-0/99}$ و $y=x^{-1/01}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_1^5 x^{-0/99}dx=\left[\frac{x^{0/01}}{0/01}\right]_1^5=1/6224$$

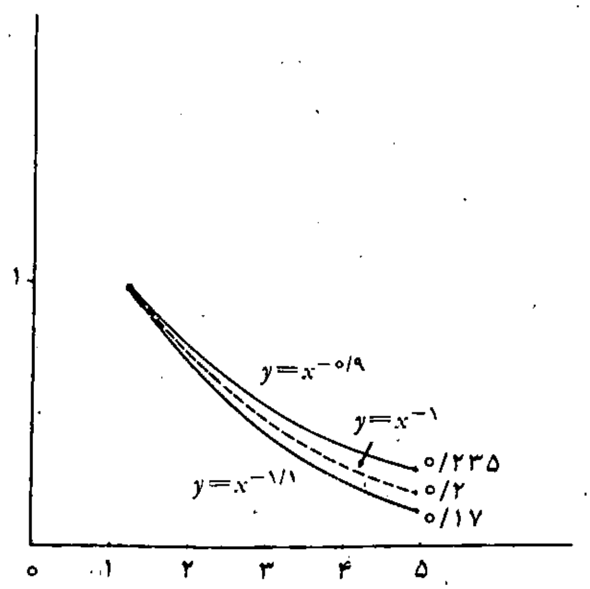
$$\int_1^5 x^{-1/01}dx=\left[\frac{x^{-0/01}}{-0/01}\right]_1^5=1/5966$$

$$\frac{1/6224+1/5966}{2}=1/60925$$

معدل دو مساحت فوق ۱/۶۰۹۲۵ می‌باشد. این اعداد به‌هم نزدیکتر می‌باشند و به‌نظر می‌رسد دقیقتر باشند. اگر بخواهیم حتی دقیقتر محاسبه کنیم می‌توان دو نمودار زیر را امتحان کنیم:

$$y=x^{-0/999}\ ,\quad y=x^{-1/001}$$

اگر محاسبات را انجام دهید به‌این نتیجه خواهید رسید که مساحتهای نامبرده ۱/۶۱۰۷۳۳ و ۱/۶۰۸۱۴۳۴ بوده و معدل آنها ۱/۶۰۹۴۳۸۶ می‌باشد.



منبع: Mathemarics in School May 1986
نویسنده: Robert van der Meulen

ریاضیات چیست؟ ۴

دکتر علیرضا مدقالچی

در مقاله پیشین نظریات مختلفی را که در مورد ریاضیات و دانش ریاضی بیان شده بود ارائه کردیم . این نظریات حاوی مفاهیم کلی درمورد این علم بود. دراین مقاله ومقالات آتی نظریات مختلفی راکه درمورد بخشهای گوناگون ریاضی اعم از نظریه اعداد، ریاضیات عمومی و آنالیز... ارائه شده است بیان می نمائیم. دراین پژوهش ناگزیر هستیم که گهگاهی هم به‌محتوی‌این‌بخشها بپردازیم. به‌طوری که درمقاله قبلی‌هم اشاره گردید بحث در فلسفه ریاضی، توجه به تاریخ موضوعی ریاضی را طلب می کند ولی باتوجه به اینکه مقالات تاریخ ریاضی به‌طور مفصل دراین نشریه منتشر می شود مافقط به‌اشاره بعضی ازموارد اکتفا می کنیم. ازنقطه نظر تاریخی اولین عنصر ریاضی که بشر به‌آن دسترسی داشته مفهوم عدد می‌باشد یعنی می‌توان گفت که عدد اولین آفرینش بشر در ریاضیات بوده است [۷]. دراین‌مقاله از نظریه اعداد شروع می کنیم، نظریهٔ اعداد بخشی از دانش ریاضی است که خواص اعداد طبیعی یعنی«۱,۲,۳,...» رامورد بحث قرار می‌دهد این نظریه در طول تاریخ بسیار متحول گشته و توجه بسیاری از ریاضیدانان را به خود جلب کرده است شاید این مطلب به‌این خاطر باشد که تمام تکنیکهای ریاضیات مدرن را می‌توان دراین‌نظریه به‌کاربرد. واقعیت این است که بسیاری از شاخه‌های مهم ریاضی، ریشه در نظریه اعداد دارند که متعاقباً این شاخه‌ها را ارائه خواهیم کرد [۲]

امروزه نظریه اعداد به دو صورت جبری وتحلیلی مورد تحقیق قرارمی‌گیرد. نظریه جبری اعداد ازسال ۱۸۳۰ میلادی شروع گردیده است، و ازآن تاریخ مسلم گردیدکه روش جبری بهترین وسیله‌برای کشف‌اسرار اعداد صحیح می‌باشد. دراین موردهم بحث بیشتری خواهیم داشت[۶] نظریهٔ تحلیلی‌اعداد به‌آن بخشی‌از ریاضیات اطلاق می‌شودکه خواص اعداد و مسائل مربوط به‌آنرا به‌وسیلهٔ توابع حقیقی و یا مختلط مورد بررسی قرار می‌دهد.

«نظریه مقدماتی اعداد باید یکی‌از بهترین موضوع ما برای تعلیم اولیه ریاضیات باشد چندان اطلاع قبلی نمی‌خواهد؛ موضوعش‌ملموس ومأنوس است، طریقه‌های استدلالی که به کار می گیرد ساده ،کلی، و تعدادشان کم است؛ و از لحاظ تحریک کنجکاوی طبیعی آدمی در علوم ریاضی‌مانند ندارد» این جملات از ریاضیدان معروف هاردی است که خود از پیشگامان نظریه اعداد است. این فراز ازکتاب مرجع [۶] اقتباس شده است.

هیلبرت می گوید در نظریهٔ اعداد‌کهنه‌ترین مسائل مانند آثار هنری اصیل ایام گذشته همواره تازه است [۶]

ملاحظات تاریخی نشان می‌دهدکه سومریان در ۲۵۰۰ سال قبل ازمیلاد به قسمتی ازحساب دست یافته بودند. مطالعه سیستماتیک اعداد یعنی‌آن چیزی‌که‌امروزه نظریه‌اعداد خوانده می‌شود به‌یونانیان بر می گردد [۲]. درحدود ۶۰۰ سال قبل از میلاد فیثاغورث و پیروان او مطالعه نسبتاً دقیقی را دراعداد شروع کردند این‌مطالعه منجر به شناخت اعداد زوج و اعداد فرد واعداد اول گردید. فیثاغورثیان اعداد را با هندسه نیز مرتبط ساختند که این امر منجر به‌معرفی اعداد چند ضلعی گردید . طالبین اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توانند به مرجع [۶] مراجعه کنند. ارتباط دیگری نیز بین نظریه اعداد وهندسه مثلث فیثاغورثی است یعنی مطلوب است تعیین مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اضلاع آن اعداد صحیح باشد. فیثاغورثیان مثلث‌های‌زیادی رابامشخصات فوق‌می‌شناختند. بااصلاحات امروزی، اگر n عدد طبیعی باشد اعداد

$x=n$ و $y=\frac{1}{2}(n^2-1)$ و

$z=\frac{1}{2}(n^2+1)$ یك سه تایی فیثاغورثی است یعنی x و y و z به‌ترتیب اضلاع و وتر یك مثلث قائم‌الزاویه است‌که همگی اعدادصحیح‌اند. امروزه می‌دانیم‌که مسأله درحالت‌کلی به‌صورت زیر مطرح می‌شود: مطلوبست تعیین سه تایی (x, y, z) که

x و y و z اعداد صحیح باشند و $z^2=x^2+y^2$ این مسأله در حالت کلی حل می‌شود وجوابهای آن به‌صورت زیر است:

$$x=k(a^2-b^2)\quad y=2kab$$

$$z=k(a^2+b^2)$$

بعد از فیثاغورث کار زیادی در زمینه نظریه‌اعداد به‌عمل نیامدتا اینکه حدوده ۲۵۰ سال بعد ازمیلاد ریاضیدان‌دیگری از یونان باستان بنام دیو فانتوس سیزده جلد کتاب در زمینه کاربرد علائم جبری نوشت. او قادر بود معادلاتی را با دو یا سه مجهول حل نماید این معادلات بنام معادلات دیوفانتوس و یا سیاله معروف گشت. معادلات سیاله امروزه بسیار متحول گشته است. فرما حدس می‌زد که معادله سیالهٔ $x^n+y^n=z^n$ به ازاء $n\geqslant 3$ دارای جواب‌نیست. البته اوثابت‌نمودکه به‌ازاء $n=4$ این معادله دارای جواب نمی‌باشد این قضیه به‌نام آخرین قضیه فرما معروف شد. گرچه هنوز حدس فرما به‌صورت لاینحل باقیمانده است ولی‌کوشش درپیدا کردن راه حل این حدس منجر به ابداع نظریه جبری اعداد شده‌که قبلا اشاره گردیدکه از سال ۱۸۳۰ میلادی تحقیق در زمینه نظریه جبری اعداد آغاز شده است [۲].

به‌طوری‌که درمقالهٔ پیشین از قول کانتور ریاضیدان بزرگ آلمانی ذکر گردید اهمیت ریاضی درآزادی آن‌نهفته است مفهوم این جمله را در بسیاری از تحقیقات ریاضی درك می‌کنیم. شاید تعجب‌آور باشد که بگوئیم کوشش‌های اولیه برای حل قضیه اعداد اول منجر به‌توسیع نظریه توابع مختلط به‌ویژه توابع تحلیلی گردید. و شاید تکرار این جمله خالی‌ازلطف نباشدکه ملاحظه می‌کنیم که به‌چه صورت نظریه های مختلف باعث توسیع و رشد نظریه‌های دیگرشده وخود این نظریه ها به عنوان یك نظریه جدید به‌حیات‌خودادامه‌می‌دهند. طالبین‌اطلاعات بیشتردرزمینهٔ معادلهٔ فرما می‌توانند به‌کتاب مرجع [۳] مراجعه کنند در این جا فقط به ذکر بعضی از اهم پیشرفتهای حاصل اشاره می‌کنیم. به سادگی می‌توان ثابت کردکه معادله $x^4+y^4=z^4$ در اعداد صحیح جواب ندارد لهذا، اگر $n=4k$ آنگاه‌اگرمعادله $x^{4k}+y^{4k}=z^{4k}$ دارای جواب باشد با فرض $X=x^k$ و $Y=y^k$ و $Z=z^k$ نتیجه می گیریم $X^4+Y^4=Z^4$ دارای‌جواب است‌که متناقض باحکم‌قبلی است. لهذا، معادله $x^n+y^n=z^n$ به‌ازاء $n=4k$ دارای جواب نیست بالنتیجه، اگر معادلهٔ فرما به ازاء یك m مشخص دارای جواب نباشد به‌ازاء کلیه مضارب m دارای جواب نیست. یعنی، اگر ثابت شودکه به ازاء اعداد اول P معادلهٔ $x^p+y^p=z^p$ دارای جواب نیست، آنگاه حدس فرما ثابت می‌شود. ثابت شده است که به‌ازاء اعداد اول‌کمتر از 10^5 معادله فرما دارای جواب نیست‌ولی متأسفانه هنوز ثابت نشده است‌که تعداد نامتناهی عدد اول وجود داردکه به ازاء آنها معادلهٔ فرما دارای جواب نباشد. به هرحال، تحقیق، تحصیل، تدریس، حل مسائل بهترین راه برای درك و ابداع و اکتشاف مفاهیم ریاضی است که می‌بینیم در طول تاریخ حدس فرما ریاضیدانان به‌آن دست زده‌اند [۳] ذکریك‌نکته دیگر نیز ضروری به نظر می‌آید و آن اینکه صحبت ازمعادله فرما باعث گسترش نظریه معادلات سیاله‌شده است که‌نقش‌عمده‌ای‌در جهت‌دادن‌بمطالعات‌نظریه‌اعدادایفامی‌کنند به‌طوری که‌می‌دانیم‌منظوراز یك‌معادلهٔ‌سیاله معادله‌ای به صورت $f(x_1,\dots,x_n)=0$ است که طرف اول کثیرالجمله‌ای از n متغیر x_1 و... و x_n وبا ضرائب گویا است ومنظور ازحل یك معادله سیاله‌تعیین متغیرهای x_1 و... و x_n دراعداد صحیح و یا در اعداد گویا است مانند معادله $2x+3y=5$ که مثلاً یك جواب آن (۱و۱) است. لژاندر ریاضیدان معروف فرانسوی در مقدمه کتاب نظریه اعداد می‌گوید من به‌هیچوجه نظریه اعداد را از معادلات سیاله تفکیك نمی‌کنم و این دو موضوع را یك شاخه آنالیز جبری می‌دانم [۶].

بعد ازدیوفانتوس تاقرن هفدهم‌میلادی پیشرفت چشم گیری در غرب در نظریه اعدادبه‌وجود نیامدگرچه‌درهند درسالهای بین ۵۰۰ تا ۱۲۰۰ میلادی پیشرفت نسبتاً قابل ملاحظه‌ای به‌منصه ظهور رسید، ونیز از ریاضیدانان دوره اسلامی می‌توان از ابوبکر محمد کرخی (متوفی بین ۴۱۰ و ۴۲۰ هجری‌قمری) صاحب‌کتاب الفخری که مبتنی بر علم حساب است نام بردکه قسمت اعظم این‌کتاب به‌غیر ازکتاب دیو فانتوس‌است وکاملاً ابتکاری‌می‌باشد [۶].

یك‌قسمت دیگر ازمباحث نظریه اعداد مربوط به سرگرمیهای ریاضی است این سرگرمیها به‌طور عمده در خواص اعداد طبیعی نهفته‌است. مطالعه وتحقیق درمورد معماهای ریاضی برای تقویت حضورذهن بسیار ضروری است. طالبین اطلاعات بیشتر در این مورد می‌توانند به‌کتابهایی که تحت عنوان بازیهای ریاضی است مراجعه‌کنند.

فیثاغورث می‌گویدکه اعداد مبنای

همه‌چیز است. ومطمئناً قانون اعداد، کلیدی است که همهٔ مسائل را حل می‌کند، یعنی او چنان نقشی به اعداد قائل است که آنرا مبنای همهٔ اشیاء می‌داند لاگرانژ می‌گوید: یك نویسنده قدیمی اظهار داشت که حساب و هندسه پایه های ریاضیات هستند من معتقدم که این دو علم پایه و اساس همهٔ دانش‌هایی هستند که با کمیتها سر وکار دارند نه‌تنها پایه بلکه سنگ زیربنای این علوم‌اند. تعیین نتایج و قضایا هرچه باشند به‌اعداد و خطوط ترجمه می‌شوند [۵]. دکارت می‌گوید که حساب وهندسه مشخص‌تر از سایر علوم‌اند زیرا اشیاء آنها آنچنان ساده و روشن است که نیازی به‌فرض‌چیز زیادی نیست. مینکوفسکی ریاضیدان معروف بزرگ آلمانی که خود از محققین برجسته وممتاز درزمینهٔ نظریه‌اعداد است و ازشاگردان مکتب گتینگن و یار و همراه هیلبرت دراین مکتب بود [۹] می‌گوید اعداد صحیح اساس همهٔ ریاضیات است و بالاخره گاوس می‌گوید دانش ریاضی ملکه دانشها و علم حساب ملکه ریاضیات است [۷].

اشاره کردیم که تحقیق در مسائل نظریه اعداد باعث توسیع سایرزمینه‌ها و بخشهای ریاضی گردیده است خود این مینه‌ها باعث به‌کارگیری روش‌های جدیدتری در زمینه نظریه اعداد شده است. مثلاً در پایان قرن نوزدهم ددکیند وسایرین به‌منظور ارائه روش سیستماتیك نظریه جبری اعداد مفاهیم حلقه ومیدان و ایده‌آل را مطرح ساختند که بحث دراین‌مورد منجر به‌توسیع جبر و نظریه‌های پیشرفته جبری گردید که درجای خود به‌بحث پیرامون این مسأله خواهیم پرداخت [۲]

مسأله جالب دیگری که در نظریه اعداد وجود دارد تعیین اعدادی است که این‌اعداد مجموع مقسوم‌علیه‌های کوچکتر از خود هستند این اعداد را اعداد کامل می‌نامند مانند عدد ۲۸ که برابر است با ۱۴+۷+۴+۲+۱ . اقلیدوس در کتاب چهارم خود ثابت کرد که یك عدد زوج کامل است که به‌صورت $2^{p-1}(2^p-1)$ باشد که p و 2^p-1 هر دو اولند. دوهزارسال بعد اویلر عکس این قضیه را ثابت کرد یعنی هرعدد کامل باید به‌صورت $2^{p-1}(2^p-1)$ باشد که p و 2^p-1 اولند. اعدادبه شکل 2^p-1 را اعداد مرسن می‌نامند که در سال ۱۶۴۴ میلادی توسط مرسن ابداع و به‌خاطر این ابداع به‌صورت M_p نمایش داده می‌شود که M حرف اول کلمه انگلیسی مرسن است هیچ عدد فرد کاملی شناخته نیست وحتی اثبات وجود ویا عدم وجودآن هم شناخته‌نیست ولی اگر موجود باشد از 10^{50} بزرگتر است [۱۲]

بطوری که قبلا اشاره کردیم در غرب تا اوائل قرن هفدهم میلادی وقفه‌ای ایجاد شده بود تااینکه به‌وسیله ریاضیدان معروف فرانسوی پیردوفرما (۱۶۶۵ - ۱۶۰۱) این وقفه شکسته شد ونظریه‌اعداد دوباره زنده گردید او ملهم از کارهای دیوفانتوس‌بود وفی‌الواقع اورا پدرنظریه جدید اعداد می‌نامند به‌طوری که می‌دانیم هنوز هم بعضی از قضایای نظریه اعداد به‌نام او معروفند. مثلااگر P اول باشد a^P-a بر P بخشپذیر است و یا هرعدد اول به‌صورت $4n+1$ را می‌توان به‌صورت مجموع مربعات دو عدد صحیح نوشت [۲].

اجمالا می‌توان گفت اویلر(۱۷۸۳-۱۷۰۷)، لاگرانژ (۱۸۱۳ - ۱۷۳۶)، لژاندر (۱۸۳۳-۱۷۵۲)، گاوس(۱۸۵۵-۱۷۷۷)، و دیریکله (۱۸۵۹-۱۸۰۵) از معروفترین پیشگامان این دانشند. اولین کتاب درسی دراین زمینه درسال ۱۷۹۸ توسط لژاندر تدوین گردید. بالاخره گاوس آنرا به‌یك دانش زیبا ومدون‌تبدیل نمود. به طوری که می‌دانیم گاوس در زمینه‌های مختلف ریاضی و ریاضی‌فیزیك دارای‌تحقیقات ومقالات زیادی است ولی کتاب حساب خود را بهترین کار خود می‌داند [۲]. بعد از گاوس اکتشافات و ابداعات بسیار زیادی در نظریه اعداد صورت گرفته است ومسائل بسیار متنوع ومختلفی مطرح گردیده است. این مسائل در زمینه ها و جهت‌های بسیار مختلفی صورت گرفته‌است حوزه عمل نظریه‌اعداد بسیار وسیع است و به طوری‌که اشاره گردید حتی شامل مفاهیم بسیار پیشرفته هم می‌شود. معهذا، مسائل زیادی وجود داردکه ازنظر بیان بسیارساده ولی ازنظر حل بسیار مشکلندکه حتی بعضی ازآنها تاکنون هم حل نشده است، بعضی از این مسائل حل نشده را ذیلا درج می‌کنیم.

۱ - آیا عدد زوجی وجود دارد که بزرگتر از ۲ باشد و مجموع دو عدد اول متمایز نباشد (گلدباخ)؟

۲- آیا عدد زوجی بزرگتر از ۲ وجود دارد که تفاضل دوعدد اول متمایز نباشد؟

۳- آیا اعداد اول بشکل 2^p-1 نامتناهی است (p اول است)؟

۴- آیا اعداد مرکب مرسن نامتناهی است؟

۵- آیا تعداد اعداد اول یا مرکب بشکل $2^{2^n}+1$ نامتناهی است؟

۶- آیا تعداد اول به شکل x^2+1 نامتناهی است؟

۷- اگر n عددی طبیعی باشد آیا عدد اولی بین n^2 و $(n+1)^2$ وجود دارد؟ و یا عدد اولی بین n^2 و n^2+n وجود دارد ($n>1$).

۸- آیا تعداد اعداد اولی که در مبنای ۱۰ کلیه ارقام آنها یك است نامتناهی است مانند ۱۱.

البته مسائل دیگری نیز درسطوح بالاتر وجود داردکه شاید مطرح کردن آنها در این مقاله مفید فایده نباشد، اما مسائل فوق‌الذکر نشان دهنده گستردگی نظریه اعداد می‌باشد یعنی می‌توان با اطلاعات خیلی کمی مسائل بسیار متنوعی مطرح کردکه چه بسا این مسائل به‌سادگی قابل حل نباشد. هرمان منیکوفسکی می‌گوید منبع اصلی همهٔ ریاضیات اعداد صحیح‌اند [۷].

بعضی از ریاضیدانان اهمیت نظریه اعداد را درزیبائی خواص اعداد می‌دانند و نظریه اعداد را مجموعه‌ای از زیبائی‌ها می‌دانند که در واقع بیانگر آفرینش هنرمندیهای بشر در زمینه نقش اعداد می‌باشد.

علیرغم زیبائی نظریه اعداد و جالب‌بودن مباحث آن، این مقاله را بایك دید دیگری به‌پایان می‌بریم و آن دیدکاملا متفاوت ازدیدگاه فوق وبررسیهای اجمالی کاربردهای نظریه اعداد در علوم مختلفه است. هرمان منیکوفسکی در این باره می‌گوید که عمیقترین روابط آنالیز در طبیعت عددی آن نهفته است. او زمانی این‌جملات رابیان می‌کندکه مشغول‌تحقیق در بعدچهارم درنسبیت‌خاص بوده‌است[۷].

اخیراً کتابی‌درزمینهٔ مواردا‌ستعمال نظریه اعداد درعلوم وارتباطات منتشرشده است‌که شامل بخشهای مختلفی در موارد استعمال نظریه اعداد در فیزیك، زیست‌شناسی، ارتباطات، اطلاعات دیجیتال و کامپیوتری است. نویسنده با مطرح کردن یازده مسأله ازمسائل نظریه اعداد به‌موارد استعمال هریك درمسائل فیزیکی وزیست‌شناسی ونظریه گراف می‌پردازد [۷]. در مقالهٔ آتیه به‌تشریح این نظریات خواهیم پرداخت.

به‌طوری‌که قبلا نیز اشاره‌کرده‌ایم دانش ریاضی از کاربردترین بخش آن تا نظریه‌های بسیارمحض‌جملگی یك‌مجموعهٔ واحدند وتفکیك‌ناپذیر،که روی یك خط سیرمشخص و با یك سیستم منطقی منجسم به‌پیشرفت خود ادامه می‌دهند. با عبارتی از ماکس پلانك فیزیك‌دادن معروف این مقاله را به‌پایان می‌بریم ، چندان نیازی به‌یادآوری این امر ندارم که ثمرات پژوهشهای علمی، چون به تربیت توالی تاریخی در نظرگرفته شوند زاده اتفاق نیستند و نتایجی‌که ازآنها ناشی می‌شود نه به‌دلخواه و بی‌دلیل، بلکه به‌نواخت و آهنگی‌گاه‌کند وگاه تند از پی یکدیگر آمده‌اند و به مفاهیمی منتهی شده‌اندکه روز به‌روزکاملتر ودقیقتر گشته‌اند، به‌قسمی که می‌توانیم معارف‌خودرا دارای‌خصلتی پایدار بشماریم. همو می گوید که این معارف براندازه‌گیریها مبتنی‌اندکه بدون شك ریشه در اعداد دارند [۴]

منابع

۱- آدامز ویلیام و. آشنایی با نظریه اعداد، ترجمه آدینه محمد نیارنجانی، مرکز نشردانشگاهی، ۱۳۶۲.

2- Apostol, T.M. Introduction to analytic number theory, Springer-Verlag 1976.

3- Edwards, H. M., Fermat's last theorem, Springer-Verlag 1977.

۴- ماکس‌پلانك، تصویر جهان در فیزیك جدید، ترجمه مرتضی صابر، چاپخانه سپهر، ۱۳۵۹.

۵- مدقالچی،علیرضا، ریاضیات‌چیست ۳، رشدآموزش ریاضی، سال سوم، شماره ۹ بهار ۱۳۶۵

۶- مصاحب غلامحسین، تئوری‌مقدماتی اعداد، انتشارات دهخدا، ۱۳۵۵

7. Schroeder, M. R. Number theory in science and communication, Springer-Verlag, 1984.

۸- وحیدی‌اصل، محمدقاسم، ریاضیات در عهد باستان، رشدآموزش ریاضی، سال اول شماره ۲ تابستان ۱۳۶۳.

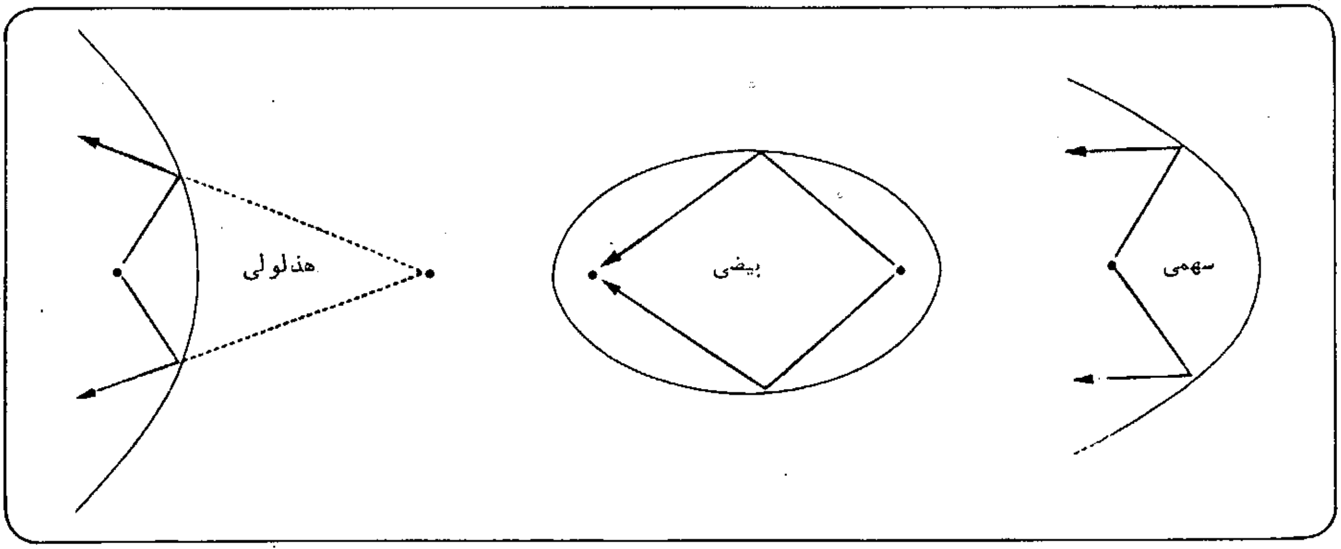
9- Warden, Van. Der, the school of Hilbert and Emmy Noether, the Ball. London Mathematical. soc. 15, 52 1983

استدلالهای معمایی
(بازی بـــا آئینه‌ها)

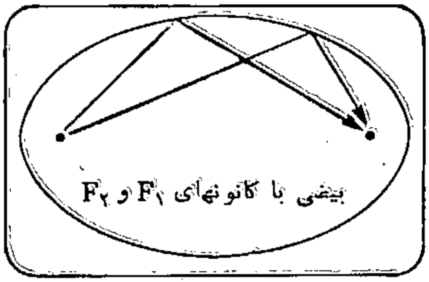
ترجمة: حسن نصیرنیا

آینه‌ها اشیاء آشنائی‌اند. ما در آغاز هرروزچهرهٔ خود را درآیینه می‌بینیم، از موارد گونـاگون آن بخوبی آگاهیم و وبرای نمونه می‌دانیم که آینه‌های مقعردر چراغهای قـوه، نورافکنها ونظیر آنهـا چه نقشی دارند. معماهای زیر، که همگی بـراساس قانون بازتاب نور درآینه‌های کروی مقعرو تخت استوارند، باکمک‌یکی ازکارشناسان فیزیـك نـور تهیـه وتنظیم شده‌اند. تاحدامکان بکوشید خودبه‌پاسخها برسید، با این حال چنانچه موفق بـه حل معماها نشدید، به‌پایان مقاله مراجعه‌کنید.

۱ــ بیضی ، سهمی و هــذلولی سه نــوع مختلــف از شکلهای منحنی هستند. همان‌گونه‌کــه در شکل می‌بینید، هرکدام ویژگیهای نوری‌خاص خود را دارند.هر یك ازایــن منحنیها دارای یك یا دو نقطهٔ مشخص بـه نام کانون هستند. چنانچه یك نقطهٔ نورانی (چشمهٔ‌بسیارکوچك) دریکی از کانونهای این سطوح منحنی قرار گیرد پرتوهای نوری بازتابیده ازهریك ازآنها مسیر مشخصی را دنبال می‌کنند. هذلولی پرتوها را طوری بـاز می‌تابد،که گویی ازیك‌چشمهٔ نور(یك لامپ) واقع درپشت آن گسیل‌می‌شوند. درمورد بیضی پرتوهای تابیده شده از یك کانون، در کانون دیگر متمرکز میشونـد و بازتاب پـرتـوهای نــور درسهمی بــه‌صورت موازی انجام می‌گیرد(آینهٔ پشت‌لامپ چراغ‌قوهٔ‌سهموی شکل است).

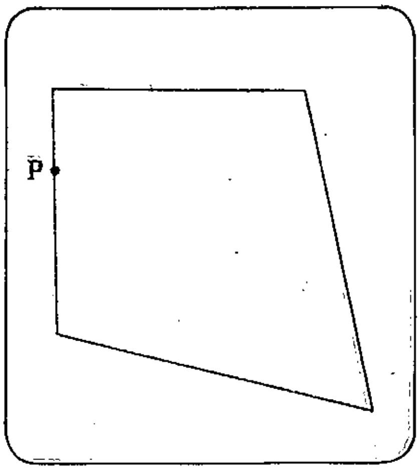


با توجه بـه‌این مقدمـات، از شما می‌خواهیم یك سیستم نوری دو بعدی در درون یك‌محفظهٔ بزرگ (که‌دارای‌خاصیت بازتابش نـور باشد) برای هریك از سه منحنی مـذکـور چنان طراحی کنید کـه پرتوهای تابیده از یك نقطهٔ نـورانی در درون آن بتوانند بخشی از فضای تاریك آنجا را اشغال کنند. به‌طوری که درشکل زیـر مـی‌بینید، فراهم آوردن یك چنین سیستمی برای بیضی آسان است، اما در مورد سهمی وهذلولی تامل وتعمق بیشتری رامی‌طلبد. لازمهٔ دستیابی به‌پاسخ آن‌است که درارتباط بـاهر یك ازسطوح منحنی، ازدیگر شکلهای هنـدسی کمك بگیریـد. استفاده از حتی یك پاره خط دراین زمینه می‌تواند یك راه حل ممکن باشد.

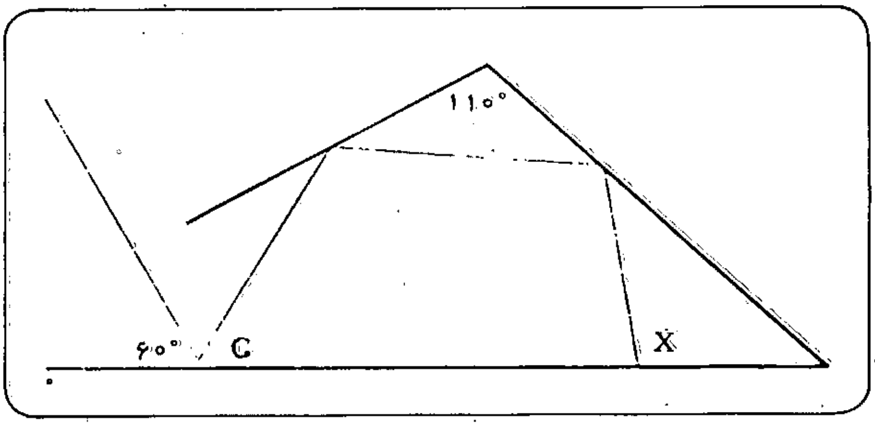


۲ـ شخصی‌دربرابریك آینهٔ‌دیواری (آینهٔ تخت قدنما) ودرست روبه‌روی آن ایستاده است. می‌خواهیم بدانیم که اوباید درچه‌فاصله‌ای از آینه قرارگیرد تابتواند، بی‌آنکه سـر یا چشمانش را تکان بدهد، تمامی اندام خود را درآن ببینید.

۳ـ جزیره‌ای داریم به شکل چهار ضلعی کوژ(محدب) که‌مطابق تصویر دارای چهارضلع‌است. ازشما می‌خواهیم‌جاده‌ای برروی این جزیره چنان‌طراحی‌وبنا کنیدکه ازبندر P شروع شود وپس ازتلاقی باسه خط‌مرزی دیگرجزیره (سه‌ضلع دیگرچهار ضلعی)، بـه نقطهٔ آغاز برسد. البته روشن است کـه برای حل مسئله می‌توان چندین پاسخ ارائه داد، امـا جادهٔ مـورد نظرما بایدکوتاه‌ترین طول ممکن را داشته‌باشد. مسئله پاسخ ساده دارد که به‌کمك آینه‌ها می‌توان‌بدان دست‌یافت. آیا شمامی‌توانید این پاسخ را دریابید؟



۴ـ درشکل زیر، یك پرتونور به‌سه آینهٔ‌تخت متقاطع برخوردکرده وبازتابیده شده‌است. باتوجه‌به‌شکل وخاصیت‌بازتاب نور، می‌خواهیم اندازهٔ زاویهٔ x را معین کنیم. البته اندازه‌گیری زاویهٔ x به شیوهٔ معمول وازراه چند محاسبهٔ متعارف امکان‌پذیراست. با این‌حال بااستفاده‌ازیك‌روش معما گشایی راحت و سـرراست نیز ـ که بسیاری از دبیران وطراحان آزمـون آن را شیوه‌ای فریب‌آمیز وانحرافی می‌دانند ـ می‌توان مسئله را حـل کرد. (همگی از درسهای دوران دبیرستان به یاد داریم که زاویهٔ تابش با زاویهٔ بازتابش نور برابر است، یعنی زاویهٔ C نیز ۶۰ درجه‌است).

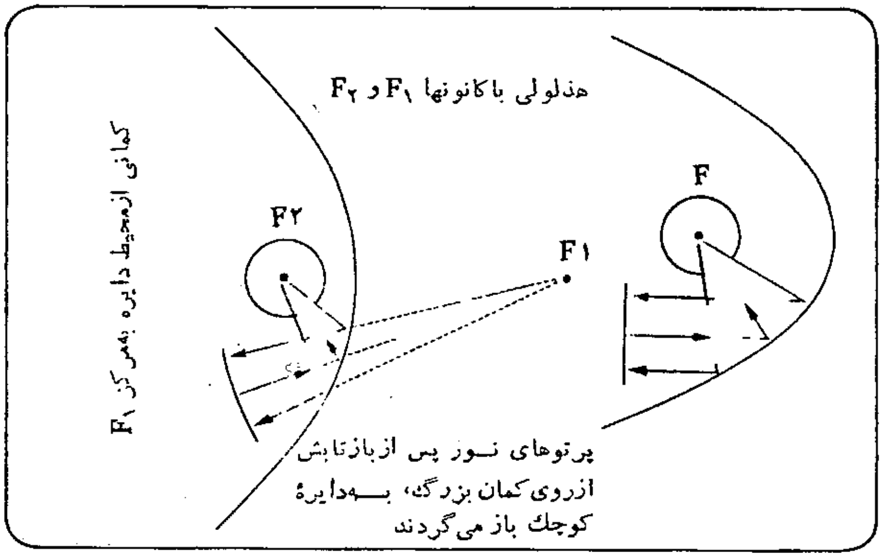


پاسخ استدلالهای معمایی

۱ـ دراینجادوراه حل ممکن برای هذلولـی و سهمی را ملاحظه می‌کنید. ما تصورنمی‌کنیم که به‌جزاستفاده‌ازدایره‌هایی مانندشکل صفحه‌بعد کـه قسمتی‌ازمحیط‌آنها دارای گسستگی بـاشـد، بتوان شکلهای دیگری یافت‌که امکان خروج نور ازآنها برای اشغال‌کردن بخشی ازفضای تاریك میسر باشد.

پاسخ مورد نظر

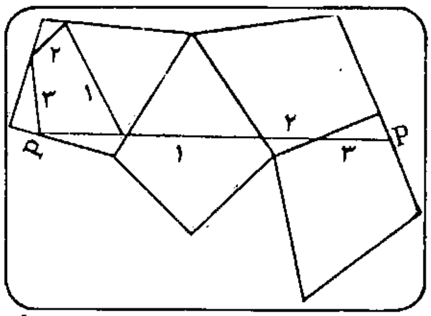
دایره‌ای است که مرکزش (F) بر کانون سهمی منطبق است. پرتوهای نور پس از بازتـابیدن ازآینهٔ‌تخت (پاره‌خط‌مستقیم) دوبـاره بـه سهمی و ازآنجا بـه دایره برمی‌گردند.



۲ـ فاصلهٔ ناظر با آینه تاثیری در این زمینه ندارد، زیرا او همواره و در هر فاصله‌ای که باشد، اندام خود را به‌نسبت یکسان در آینه خواهد دید. این امر درمورد تمام آینه‌های تخت صدق می‌کند، حتی اگر ناظر در فاصلهٔ یك مایلی آینه باشد و با دوربینی تصویر خود را در آن ببیند و یا حتی در فاصلهٔ چند اینچی از آن قرار گیرد (مشروط بر آنکه تمامی آینه درمیدان دید او باشد). تنها تفاوت درمورد ناظر نزدیك، در خطای دید وی است که جزئی‌ترین حرکت سر او باوضوح بیشتری (درمقایسه باحرکت سر ناظر دور) در آینه نموده می‌شود.

۳ـ کوتاه‌ترین راه همان مسیر پرتو نوری است که از چشمهٔ P گسیل می‌شود وپس از برخورد وبازتابش از روی سه ضلع دیگر به نقطهٔ نورانی P بازمی گردد. یك پرتو نور در نقطهٔ بازتابش همواره زاویه‌های برابر تشکیل می‌دهد.

راه حل دیگر آن است که اضلاع چهار ضلعی را آینه‌هایی فرض کنیم، و هر



بار به ترتیب شکل را در یکی از آنها «انعکاس» دهیم، تامطابق شکل، چهارچهار ضلعی پیوسته به‌وجود آید. دراین‌صورت کوتاه‌ترین راه باید خط مستقیمی باشد که نقطهٔ P (مبدأ) را به نقطهٔ P جدید وصل کند. با ترسیم این خط، نقطه‌های دقیق تابش وبازتابش درروی هریك ازاضلاع مشخص خواهند شد.

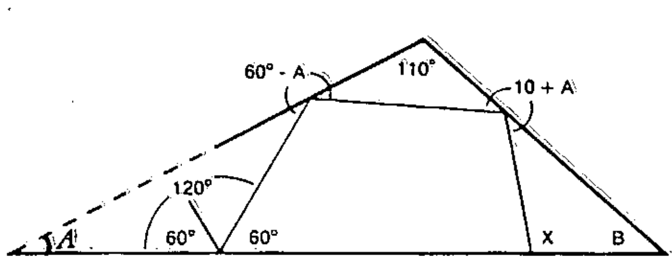
۴ـ زاویهٔ x صد درجه است. مثلث حادث از برخورد سه آینه را با خط نقطه چین تکمیل می‌کنیم تا شکل (۱) به‌دست آید. سپس زاویه‌ها را، همان گونه که می‌بینید، نامگذاری می‌کنیم. باتوجه به مثلث بزرگ داریم: $B+110+A=180$.

درمورد مثلث پایین سمت راست، می‌توان این رابطه را نوشت:

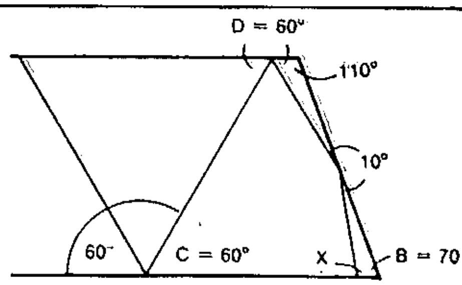
$$B+x+(10+A)=180.$$

چنانچه طرفهای چپ این دومعادله را برابر یکدیگر قرار دهیم و Aها و Bها را از طرفین حذف کنیم خواهیم داشت: $x=100$

با این همه پاسخ را نیز می‌توان به شیوهٔ بسیار ساده‌تری به‌دست آورد فرض کنیم که مسئله تنها یك پاسخ داشته باشد. چون اندازهٔ زاویهٔ B مشخص نیست، پس می‌تواند هرمقدارمعقولی بگیرد (بیشتر حل کنندگان معما به این نکته توجه ندارند). اجازه‌دهید برای زاویهٔ B یك مقدارمناسب مثلاً ۷۰ درجه در نظر بگیریم. بااین حساب دو آینهٔ بالا و پایین باید موازی باشند (شکل ۲). بدین ترتیب چون زاویهٔ D مساوی زاویهٔ C می‌شود، از آنجا سایر زاویه‌ها واز جمله زاویهٔ x (مساوی ۱۰۰ درجه) به‌دست می‌آید.



(شکل ۱)



(شکل ۲)

تعیین بزرگترین قوهٔ عدد اول p در ضریب دوجمله‌ای $\binom{n}{r}$

دکتر آدینه محمد نسارنجانی
دانشکدهٔ علوم، دانشگاه مشهد.

در این مقاله، تعیین بزرگترین قوهٔ یك عدد اول در ضریب دو جمله‌ای یعنی $\binom{n}{r}$ مورد بحث قرار می‌گیرد. جذابیت مقاله از آنجا ناشی می‌شود که این روش نه تنها یك روش کاملاً ریاضی است، از نظر عملی‌هم مفید است، یعنی امکان تعیین بزرگترین توان عدد اول p را در $\binom{n}{r}$ برای استفاده درکامپیوتر به‌دست می‌دهد. این روش کاملاً دقیق و منطقی ولی بسیارساده وبسهولت قابل درك است.

رشد آموزش ریاضی

می‌دانیم که اگر $E(p,n)$ بزرگترین قوهٔ عدد اول p در $n!$ باشد، داریم

$$E(p,n)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]$$

رجوع شود به [۱] یا [۲].

همچنین

$$(1)\qquad \binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

واضح است که اگر $r=0$ یا $r=n$، $\binom{n}{r}=1$ وتوان p در آن برابرصفر است. پس فرض کنیم $1\leqslant r\leqslant n-1$. n و r را درمبنای p می‌نویسیم. بالنتیجه k ی‌موجود است که

$$(2)\qquad n=C_kp^k+C_{k-1}p^{k-1}+\cdots+C_1p+C_0=\overline{C_kC_{k-1}\cdots C_0}_{(p)}$$

$$(3)\qquad r=d_kp^k+d_{k-1}p^{k-1}+\cdots+d_1p+d_0=\overline{d_kd_{k-1}\cdots d_0}_{(p)}$$

(که‌درآن‌البته $C_k\neq 0$ ولی‌چون $r<n$ بعضی‌از d_iها حتی d_k ممکن است صفرباشد.)

حال اگر $e_p\binom{n}{r}$ نمایش بزرگترین قوهٔ p در $\binom{n}{r}$ باشد، بنابر (۱) داریم

$$e_p\binom{n}{r}=E(p,n)-E(p,r)-E(p,n-r).$$

حال روش لژاندر را برای محاسبهٔ عوامل طرف راست به‌کار می‌بریم

$$n-r=(C_k-d_k)p^k+(C_{k-1}-d_{k-1})p^{k-1}+\cdots+(C_1-d_1)p+(C_0-d_0)$$

$$\begin{aligned}(4)\quad E(p,n-r)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n-r}{p^i}\right]&=(C_k-d_k)p^{k-1}+(C_{k-1}-d_{k-1})p^{k-2}+\cdots+(C_1-d_1)+a_0\\&+(C_k-d_k)p^{k-2}+(C_{k-1}-d_{k-1})p^{k-3}+\cdots+(C_2-d_2)+a_1\\&\ \vdots\\&+(C_k-d_k)+\varepsilon_{k-1}\\&+\varepsilon_k\end{aligned}$$

که دراینجا به‌ازای $0\leqslant i\leqslant k$، $\varepsilon_0=\left[\frac{C_0-d_0}{p}\right]$ و

$$\varepsilon_i=\left[\frac{C_i-d_i+\varepsilon_{i-1}}{p}\right]$$

پس

$$E(p,n-r)=C_k(p^{k-1}+\dots+1)+C_{k-1}(p^{k-2}+\dots+1)+\dots+C_1-d_k(p^{k-1}+\dots+1)-d_{k-1}(p^{k-2}+\dots+1)-\dots-d_1+\varepsilon_0+\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_k=\frac{1}{p-1}(\overline{C_k\cdots C_0}-(C_0+\dots+C_k))-\frac{1}{p-1}(\overline{d_k\cdots d_0}-(d_0+\dots+d_k))+\sum_{i=0}^{k}\varepsilon_i$$

بنابر روابط (۲) و (۳) و دستور لژاندر [۱] داریم

$$E(p,n-r)=E(p,n)-E(p,r)=\sum_{i=0}^{k}\varepsilon_i$$

ویا

$$e_p\binom{n}{r}=E(p,n)-E(p,r)-E(p,n-r)=-\sum_{i=0}^{k}\varepsilon_i$$

اینك می‌پردازیم به محاسبهٔ ε_iها. با توجه به‌روابط (۲)، (۳)، و (۴) و اینکه c_iها و d_iها رقم‌اند، داریم:

اگر $c_0\geqslant d_0$، $0\leqslant c_0-d_0\leqslant p-1$ پس

$$\varepsilon_0=\left[\frac{c_0-d_0}{p}\right]=0$$

اگر $c_0<d_0$ پس $-(p-1)\leqslant c_0-d_0<0$ و بنابراین

$\varepsilon_0=-1$

حال ادعا می‌کنیم که به ازای هر i، $0\leqslant s\leqslant k$، $\varepsilon_i=-1$ یا $\varepsilon_i=0$

این موضوع را با استقراء نسبت به i ثابت می‌کنیم. هم‌اکنون به‌ازای $i=0$، این موضوع را دیده‌ایم. پس فرض‌کنیم حکم به‌ازای i برقرار باشد یعنی ε_i عددی صحیح است و $-1\leqslant\varepsilon_i\leqslant 0$. بنابر (۴)

$$\varepsilon_{i+1}=\left[\frac{c_{i+1}-d_{i+1}+\varepsilon_i}{p}\right]$$

$$-p=0-(p-1)-1\leqslant c_{i+1}-d_{i+1}+\varepsilon_i\leqslant p-1+0+0=p-1$$

ویا

$$-1\leqslant\frac{c_{i+1}-d_{i+1}+\varepsilon_i}{p}\leqslant\frac{p-1}{p}<1$$

پس $-1\leqslant\varepsilon_{i+1}\leqslant 0$

و چون ε_{i+1} عددی صحیح است پس مقدارش صفر یا ۱ — است. حال به‌طور صریحتر مقدار ε_i را مشخص می‌کنیم. اولاً

$$\varepsilon_0=\begin{cases}0 & c_0\geqslant d_0 \quad \text{اگر}\\ -1 & c_0<d_0 \quad \text{اگر}\end{cases}$$

ثانیاً، به‌ازای $0<i\leqslant k$

$$(5)\qquad \varepsilon_i=\begin{cases}0 & c_i>d_i \quad \text{اگر}\\ -1 & c_i<d_i \quad \text{اگر}\\ \varepsilon_{i-1} & c_i=d_i \quad \text{اگر}\end{cases}$$

اگر $\varepsilon_0=0$ داریم $\varepsilon_1=\left[\frac{c_1-d_1}{p}\right]$ وبنابر مفروضات c_1 و d_1 مانند حالت $i=0$ داریم

$$\varepsilon_1=\begin{cases}0 & c_1>d_1 \quad \text{اگر}\\ 0=\varepsilon_0 & c_1=d_1 \quad \text{اگر}\\ -1 & c_1<d_1 \quad \text{اگر}\end{cases}$$

حال اگر $\varepsilon_0=-1$ داریم

$$\varepsilon_1=\left[\frac{c_1-(d_1+1)}{p}\right]\quad[\text{بنابر ۴}]$$

اگر $c_1\geqslant d_1+1$ پس $0\leqslant c_1-(d_1+1)\leqslant p-1$ پس $\varepsilon_1=0$. اگر $\sim(c_1\geqslant d_1+1)$ پس $c_1<d_1+1$ وبالنتیجه $c_1\leqslant d_1$. اینك دوحالت درنظرمی گیریم. اگر $c_1<d_1$ داریم $-(p-1)\leqslant c_1-d_1<0$ پس

$$-p=-p+1+\varepsilon_0\leqslant c_1-d_1+\varepsilon_0<\varepsilon_0=-1$$

بنابراین

$$-1\leqslant\frac{c_1-d_1+\varepsilon_0}{p}<-\frac{1}{p}<0$$

و بالنتیجه $\varepsilon_1=-1$

اگر $c_1=d_1$ داریم $\varepsilon_1=\left[\frac{-1}{p}\right]=-1=\varepsilon_0$.

پس حکم به‌ازای $i=1$ برقرار است. حال تعمیم به استقرا است. روش اثبات به‌ازای $i+1$ ازروی i دقیقاً مانند ε_1 از روی ε_0 است. پس حکم کلی (۵) محقق است.

نتیجه. جهت یافتن $e_p\binom{n}{r}$ ابتدا n و r را درمبنای p می‌نویسیم. حال از سمت راست شروع می‌کنیم. فرض‌کنیم c_i اولین رقم درسمت‌راست n باشد که ازنظیر d_i نظیردر r کوچکتر است حال به‌ازای‌این i درحاصلجمع $-\sum_{i=0}^{k}\varepsilon_i$ یك جمله برابر با یك درنظرمی گیریم. سپس به‌مقایسهٔ c_{i+1} با d_{i+1} می‌پردازیم

اگر $c_{i+1}\leqslant d_{i+1}$ به‌ازای $i+1$ یك منظور می‌کنیم در غیر اینصورت صفر و این عمل را ادامه‌می‌دهیم. جهت روشن شدن موضوع مثال زیر را بررسی می‌کنیم.

مثال۱. مطلوبست بزرگترین قوهٔ اعداد اول ۱۱ و ۵ که عدد $\binom{۱۲۳}{۷}$ را عاد می‌کند.

ابتدا ۱۲۳ و ۷ را درمبنای ۱۱ می‌نویسیم

$۱۲۳=(۱۰۲)_{۱۱}$, $۷=(۷)_{۱۱}$

حال نمایشهای ۱۲۳ و ۷ درمبنای ۱۱ را زیرهم می‌نویسیم

۱۰۲
۰۰۷

$۰+۱+۱=۲$

پس $e_{۱۱}\binom{۱۲۳}{۷}=۲$

برای عدداول ۵ چنین داریم: $۱۲۳=(۴۴۳)_۵$, $۷=(۱۲)_۵$

۴۴۳
۰۱۲

$۰+۰+۰=۰$

یعنی $e_۵\binom{۱۲۳}{۷}=۰$. به عبارت دیگر $\binom{۱۲۳}{۷}$ ۵.

مثال۲. فرض‌کنیم $p=n$ عددی اول باشد و $0<r<n$.
نمایش r درمبنای p عدد r است (در واقع r درمبنای p خود یك عدد یك رقمی با رقم r است). نمایش n درمبنای p چنین است $p=(۱۰)_p$ پس

۱۰
۰r

$۰+۱=۱$

یعنی $e_p\binom{p}{r}=۱$. به‌عبارت دیگر به‌ازای‌هر r که $0<r<p$

اولاً $p\ \binom{p}{r}$. ثانیاً توان p در تجزیهٔ $\binom{p}{r}$ دقیقاً ۱ است.

اینك به بیان مسئله‌ای‌که کاربردی از قاعدهٔ فوق است می‌پردازیم

مسئله. مطلوب است تعیین بزرگترین مقسوم علیه مشترك اعداد $\binom{n}{1}$ ، $\binom{n}{2}$ ،...، $\binom{n}{n-1}$. دراینجا $n>1$. به [۳] رجوع کنید.

فرض‌کنیم $d=$ بمعم $\left(\binom{n}{1},\binom{n}{2},\dots,\binom{n}{n-1}\right)$

پس $d\ \binom{n}{1}$ یعنی $d|n$. فرض‌کنیم $n=p_1^{\alpha_1}\dots p_t^{\alpha_t}$ تجزیهٔ استاندهٔ n به عوامل اول باشد پس $d=p_1^{\beta_1}\dots p_t^{\beta_t}$ که $0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i$. حال فرض‌کنیم p_i عامل دلخواهی از n باشد. فرض‌کنیم $n=\overline{C_kC_{k-1}\dots C_0}_{(p_i)}$ نمایش عدد n درمبنای p_i باشد. $C_k\geqslant 1$. اگر r را مساوی $\overline{(C_k-1)C_{k-1}\dots C_0}(p_i)$ بگیریم، واضح است‌که بنابر قاعدهٔ فوق $e_{p_i}\binom{n}{r}=0$ و بالنتیجه $p_i\ \binom{n}{r}$ ولازم‌است $p_i\ d$ (زیرا $d\Big|\binom{d}{r}$) اما این مشروط است به‌اینکه $0<r<n$، بدیهی است که $0\leqslant r<n$ پس تنها وقتی $r=0$ که $C_0=C_1=\dots=C_{k-1}=0$ و $C_k=1$، دراین‌صورت $n=p_i^k$ پس اگر n به‌صورت قوه‌ای ازیك عدد اول نباشد واضح است که هیچ عامل n نمی‌تواند عامل مشترکی ازتمام $\binom{n}{r}$ها باشد و بالنتیجه در این حالت $d=1$. اما اگر $n=p^\alpha$. دراین صورت $n=1\underbrace{0\dots0}_{\alpha}{}_{(p)}$ و $r=\overline{d_k\dots d_0}_{(p)}$ که چون $0<r<n$ پس d_i ی مخالف صفر موجود است وضمناً $0\leqslant k<\alpha$.

پس $e_p\binom{n}{r}\geqslant 1$ پس p عامل مشترك ازکلیهٔ $\binom{n}{r}$ها است.

اما اگر $r=1\overbrace{0\dots0}^{\alpha}$ آنگاه $e_p\binom{n}{r}=1$ یعنی‌توان p در $\binom{p^\alpha}{p^{\alpha-1}}$ دقیقاً برابر۱ است پس توان p در d برابر ۱ است و بالنتیجه $d=p$.

پس

$$\text{بمعم}\left(\binom{n}{1},\binom{n}{2},\dots,\binom{n}{n-1}\right)=\begin{cases} p & \text{اگر } n=p^\alpha\\ 1 & \text{درغیراینصورت}\end{cases}$$

منابع

[۱] دکترغلامحسین مصاحب ـ تئوری مقدماتی‌اعداد ـ جلد دوم ـ صفحات ۳۹۸ ـ ۳۹۶ و ۴۰۹ ـ ۴۰۶

[۲] جوادلاآلی ـ بستائی یك عدداول در یك عدد طبیعی ـ رشد آموزش‌ریاضی ـ سال اول شمارهٔ۴ صفحات ۵۱ـ۴۸

[۳] William W.Adams & Larry Joel Gololstein; Introduction to Number Theory; Prentice-Itall, Inc. Englewood Clifq, New Jersey; Page 26 (صورت‌فارسی کتاب‌صفحهٔ ۳۲ ملاحظه‌شود.)

مسائلی در بخشپذیری

عطاپور بیداروطن - دکتر اسماعیل بابلیان

مقدمه

آنچه ذیلا از نظر خوانند گان محترم می گذرد قسمتی از تحقیقات آقای عطاپور بیداروطن درزمینهٔ نمایش و تصور اعداد طبیعی به صورت ماتریسی می باشد. که با همکاری دکتر بابلیان مدون گردیده است کاربرد مفهوم ارائه شده دراین‌مقاله، درجمع، تفریق و ضرب نیز نتایج جالبی دارد که در آینده نزدیک درمورد چاپ آنها، باهمکاری دانشگاه تربیت معلم، اقدام خواهد شد.

آنچه دراین مقاله عرضه می‌شود مطالبی است مفید درمورد بخشپذیری بر اعـــداد اول. البته مطالب این مقاله سالها قبل بــه دست آمده و درچند سمینار دردانشگاه تربیت معلم ارائـه شده است. ضمناً ملاحظه خواهید کرد که نتایج کاملاً بر آنچه در مقالهٔ فوق‌الذکر به‌دست آمده منطبق استاما اثبات قضایایی که به‌آن نتایج منجرمی‌شود بسیار آسان ومقدماتی است.

قراردادها

می‌دانیم که

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1} = 10 \times \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2} + a_1$$

یعنی‌هرعدد برابر است با یکان آن باضافهٔ ده برابر تعداد ده‌تایی‌هایش. مثلاً،

$$27 = 10 \times 2 + 7, \quad 348 = 10 \times 34 + 8,$$
$$2086 = 10 \times 208 + 6$$

لذا، هرعدد را می‌توان به‌صورت $10A + b$ نوشت که در آن b یکان عدد و A تعداد ده‌تایی عدد است.

(توجه کنید کـه A ممکن است چند رقمی باشد.) پس، به‌هرعدد مانند $\overline{Ab}$ برداری متناظرمی‌شود، چون $[A \quad b]$، که کاملا آن‌را مشخص می‌کند. این تناظررا چنین نمایش می‌دهیم

$$\overline{Ab} \rightarrow [A \quad b]$$

ازطرف دیگر، به‌منظور سهولت درعمل‌ضرب واجتناب‌ازانجام عمل انتقال درجمع وتفریق، می‌توان نوشت

$$27 = 10 \times 3 + (-3) \quad 348 = 10 \times 35 + (-2),$$
$$2086 = 10 \times 209 + (-3)$$

به‌این ترتیب می‌توان تناظرزیر را نیز داشت:

$$\overline{Ab} \rightarrow [A+1 \quad b-10].$$

با تلفیق دوتناظر فوق می‌توان متناظر با هر عدد مانند $\overline{Ab}$ یك ماتریس مشخص کرد

$$\overline{Ab} \rightarrow \begin{bmatrix} A+1 & b-10 \\ A & b \end{bmatrix}$$

در این ماتریس $A+1$ و $b-10$ را به‌ترتیب تالی A و شبه توان b می‌نامیم (علت انتخاب این اصطلاح استفاده عمده آن در جمع، تفریق وضرب می‌باشد.)

با این‌تعریف و با توجه به‌اینکه $\overline{Ab} = 10A + b$ قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱: دترمینال ماتریس متناظر با $\overline{Ab}$ برابراین عدد است:

$$\begin{vmatrix} A+1 & b-10 \\ A & b \end{vmatrix} = \overline{Ab}.$$

برهانـ با توجه به‌مقداردترمینان یك ماتریس ۲ × ۲ می‌توان نوشت:

$$\begin{vmatrix} A+۱ & b-۱۰ \\ A & b \end{vmatrix} =$$

$$= Ab + b - Ab + ۱۰A = ۱۰A + b = \overline{Ab}$$

(توجه کنید که منظور از Ab عدد A ضرب در عدد b است که با مفهوم $\overline{Ab}$ به عنوان عددی که یکان آن b و تعداد ده‌تایی‌هایش A می‌باشد، متفاوت است.)

ازقضیه ۱ و ملاحظات عددی ذیل به‌قضیه اصلی این مقاله دستیابی پیدا می‌کنیم.

می‌دانیم که ۹۱|۱۳ (۱۳ عدد ۹۱ را عاد می‌کند). اگر بردارهای نظیر این دوعدد را دریك ماتریس بنویسیم‌ودترمینان ماتریس حاصل را به‌دست آوریم داریم.

$$\begin{vmatrix} ۹ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۲۷ - ۱ = ۲۶ = ۲ \times ۱۳$$

همچنین داریم؛

$$۱۹ | ۱۱۴$$

و

$$\begin{vmatrix} ۱۱ & ۴ \\ ۱ & ۹ \end{vmatrix} = ۹۵ = ۵ \times ۱۹$$

و نیز

$$۱۱ | ۶۶$$

و

$$\begin{vmatrix} ۶ & ۶ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

ازاین مثالها چنین به‌ذهن القا می‌شودکه اگر بردارهای نظیر دوعددرا،که یکی ازآنها اول است، دریك ماتریس قراردهیم ودترمینان این ماتریس مضربی ازآن عدد اول باشد عدد دیگر برآن عدد اول بخشپذیر است.

قضیه ۲: اگر $\overline{Ab}$ و $\overline{Cd}$ دوعدد بزرگتر از ۹ باشند، $\overline{Ab}$ اول باشد و

$$\begin{vmatrix} C & d \\ A & b \end{vmatrix} = k\overline{Ab}$$

آنگاه $\overline{Ab} \,|\, \overline{Cd}$. ($k$ صحیح است)

برهانـ داریم:

$$\begin{vmatrix} C & d \\ A & b \end{vmatrix} = Cb - Ad = k\,\overline{Ab}$$

طرفین تساوی فوق را در ۱۰ ضرب می‌کنیم و به طرف چپ $bd - bd$ را نیز اضافه می‌کنیم:

$$۱۰Cb + bd - bd - ۱۰Ad = ۱۰k\,\overline{Ab}$$

با فاکتورگیریهای‌لازم نتیجه می‌شود:

$$b(\overline{Cd}) - d(\overline{Ab}) = ۱۰k\,\overline{Ab}$$

یعنی،

$$b(\overline{Cd}) = (۱۰k + d)\overline{Ab}.$$

از این تساوی معلوم می‌شودکه $\overline{Ab}$ حاصلضرب‌دو عدد b و $\overline{Cd}$راعاد می‌کند اما$\overline{Ab}$ و b نسبت بهم اولند(چرا؟) در نتیجه $\overline{Ab} \,|\, \overline{Cd}$.

تذکرـ اگرشرط اول بودن $\overline{Ab}$ را ازقضیه۲ حذف کنیم ممکن است حکم آن برقرار نباشد مثلاً،

$$\begin{vmatrix} ۶ & ۶ \\ ۴ & ۴ \end{vmatrix} = ۲۴ - ۲۴ = ۰ = ۰ \times ۴۴$$

ولی ۶۶ | ۴۴. اما،آنچه می‌توان نتیجه‌گرفت‌آنست‌که دوعدد ۶۶ و ۴۴ نسبت بهم اول نیستند. دراین مورد به‌مسائل‌انتهای این‌مقاله مراجعه کنید.

کاربرد قضیه ۲

برای اینکه معلوم‌کنیم عددی برعدد اول P قابل‌قسمت است دترمینان مذکور در قضیه ۲ را تشکیل می‌دهیم، اگر حاصل‌آن بر P قابل‌قسمت‌باشددر آن صورت بنا بهٔقضیه ۲ آن عددبر P بخشپذیر است والاعمل را درمورد حاصل دترمینان تکرار می‌کنیم تا به‌نتیجه برسیم.

مثال ۱

آیا عدد ۳۵۰۳ بر ۳۱ بخشپذیر است؟

حل:

$$\begin{vmatrix} ۳۵۰ & ۳ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix} = ۳۴۱ \Longrightarrow \begin{vmatrix} ۳۴ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix} = ۳۱$$

لذا، ۳۵۰۳ | ۳۱.

مثال ۲

آیا عدد ۱۶۹ بر ۱۳ بخشپذیر است؟

حل:

$$\begin{vmatrix} 16 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 48-9=39$$

با توجه به اینکه ۱۳ × ۳ = ۳۹ معلوم می‌شود که ۱۶۹ | ۱۳. البته می‌توانستیم عمل را ادامهٔ دهیم یعنی با محاسبهٔ دترمینان زیر به‌نتیجه برسیم

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

مثال ۳

آیا عدد ۲۷۲ بر ۱۷ بخشپذیر است؟

حل:

$$\begin{vmatrix} 27 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 189-2=187$$

$$\begin{vmatrix} 18 & 7 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 126-7=119$$

$$\begin{vmatrix} 11 & 9 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 77-9=68$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 42-8=34$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 21-4=17$$

مثال ۴

آیا ۱۷۱ بر ۱۹ بخشپذیر است؟

حل:

$$\begin{vmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 153-1=152$$

$$\begin{vmatrix} 15 & 2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 135-2=133$$

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 117-3=114$$

$$\begin{vmatrix} 11 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 99-4=95$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 81-5=76$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 63-6=57$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 45-7=38$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 27-8=19$$

مثالهای ۴-۲ نشان می‌دهند که اگر b (یکان عدد P) ۳، ۷ یا ۹ باشد عملیات **قضیه۲** زیاد خواهد بود، علت آنست که داریم

$$\begin{vmatrix} C & d \\ A & b \end{vmatrix} = Cb-Ad$$

که در آن اگر C بزرگ باشد، اولاً محاسبهٔ Cb ساده نیست ثانیاً مقدار دترمینان در هر مرحله به مقدار قابل توجه کوچک نخواهد شد.

این مشکل را می‌توان با ملاحظات زیر و یک قضیه کلی رفع کرد. می‌دانیم که

$$\overline{A9} \to [A+1 \quad -1]$$
$$3\overline{A7} \to [3A+2 \quad +1]$$
$$3\overline{A3} \to [3A+1 \quad -1]$$

لذا کافیست قضیه ۲ را برای حالتی که بردار نظیر $P=\overline{Ab}$ با $[3A+f \quad 3b-10f]$ جایگزین شده است ثابت کنیم (چرا؟) که در آن f مقادیر ۱ یا ۲ را انتخاب می‌کند و $3b-10f=\pm 1$.

قضیه ۳ اگر $\overline{Aa}$ عددی اول باشد، $3b-10f=\pm 1$ و

$$\begin{vmatrix} 3A+f & 3b-10f \\ C & d \end{vmatrix} = k\overline{Ab}$$

در این صورت $\overline{Ab} \mid \overline{Cd}$.

برهان- اگر مانند قضیه ۲ عمل کنیم به‌دست خواهیم آورد:

$$(۱۰k-۳d)\overline{Ab}=(۱۰f-۳b)\overline{Cd}$$

با توجه به‌این تساوی و اینکه $۱۰f-۳b=\pm ۱$ نتیجه می‌شود $\overline{Ab} \mid \overline{Cd}$.

مثال ۵

آیا عدد ۲۱۲۵ بر ۱۷ بخشپذیر است؟

حل- به‌جای عدد ۱۷ از $۵۱=۱۷\times ۳$ استفاده می‌کنیم

$$\begin{vmatrix} ۲۱۲ & ۵ \\ ۵ & ۱ \end{vmatrix}=۲۱۲-۲۵=۱۸۷$$

$$\begin{vmatrix} ۱۸ & ۷ \\ ۵ & ۱ \end{vmatrix}=۱۸-۳۵=-۱۷$$

مثال ۶

آیا عدد ۱۷۶۸ بر ۱۳ بخشپذیر است؟

حل- بـه جای ۱۳ از $۳۹=۱۳\times ۳$ استفاده می‌کنیم وبردار نظیر ۳۹ را [۱ - ۴] می‌گیریم

$$\begin{vmatrix} ۴ & -۱ \\ ۱۷۶ & ۸ \end{vmatrix}=۱۷۶+۳۲=۲۰۸$$

$$\begin{vmatrix} ۴ & -۱ \\ ۲۰ & ۸ \end{vmatrix}=۲۰+۳۲=۵۲$$

$$\begin{vmatrix} ۴ & -۱ \\ ۵ & ۲ \end{vmatrix}=۵+۸=۱۳$$

قواعد بخشپذیری

با استفاده از قضایای ۲ و ۳ می‌توان قاعدهٔ بخشپذیری $\overline{Cd}$ برهر عدد اول بزرگتر از ۱۰ مانند $\overline{Ab}$ رابه‌دست‌آورد. برای این منظور چهارحالت درنظرمی‌گیریم:

الف- فرض مـی‌کنیم یکان عدد اول P برابر یك باشد، یعنی، $P=\overline{A۱}$.

با توجه به‌قضیه ۲، $\begin{vmatrix} C & d \\ A & ۱ \end{vmatrix}=C-Ad$ عـدد $\overline{Cd}$ درصورتی بر P بخشپذیراست‌که $C-Ad$ بر P بخشپذیر باشد.

مثال- آیا عد ۱۱۳۷۵ بر ۹۱ بخشپذیر است؟

حل- مرتباً $C-Ad$ را تشکیل می‌دهیم تـا مضربی از ۹۱ حاصل شود.

$$۱۱۳۷-۹\times ۵=۱۱۳۷-۴۵=۱۰۹۲$$

$$۱۰۹-۹\times ۲=۱۰۹-۱۸=۹۱$$

ب- فرض می‌کنیم یکان عدد اول P برابر۳ باشد، یعنی، $P=\overline{A۳}$

در این حالت، بنا بر قضیه ۳، به‌طریق زیرعمل‌می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} ۳A+۱ & -۱ \\ C & d \end{vmatrix}=C+(۳A+۱)d$$

اگر $C+(۳A+۱)d$ بر P بخشپذیر باشد $\overline{Cd}$ نیز بر P بخشپذیر خواهد بود.

مثال- آیا عدد ۲۲۴۹ بر ۱۳ بخشپذیر است؟

حل- با توجه به‌اینکه $۳A+۱=۴$ داریم:

$$۲۲۴+۴\times ۹=۲۲۴+۳۶=۲۶۰$$

$$۲۶+۴\times ۰=۲۶$$

ج- فـرض می‌کنیم یکان عدد P برابر ۷ بـاشد، یعنی، $P=\overline{A۷}$ دراین‌حالت از $۳P$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} C & d \\ ۳A+۲ & ۱ \end{vmatrix}=C-(۳A+۲)d$$

لذا، اگر $C-(۳A+۲)d$ بر P بخشپذیر باشد $\overline{Cd}$ نیز هر P بخشپذیر است.

مثال- آیا عدد ۴۲۵۵ بر ۳۷ بخشپذیر است؟

حل- با توجه‌به‌اینکه $۳A+۲=۱۱$ داریم:

$$۴۲۵-۱۱\times ۵=۴۲۵-۵۵=۳۷۰$$

د- فرض‌کنید یکان عدد P برابر ۹ باشد، یعنی، $P=\overline{A۹}$ دراین‌حالت داریم:

$$\begin{vmatrix} A+۱ & -۱ \\ C & d \end{vmatrix}=C+(A+۱)d$$

یعنی، اگر $C+(A+۱)d$ بر P بخشپذیر بـاشد $\overline{Cd}$ نیز بر

P بخشپذیر است.

مثال- آیا عدد ۸۷۹۲۷ بر ۷۹ بخشپذیر است؟

حل- با توجه به‌اینکه $A+۱=۸$ داریم:

$$۸۷۹۲+۸\times۷=۸۷۹۲+۵۶=۸۸۴۸$$
$$۸۸۴+۸\times۸=۸۸۴+۶۴=۹۴۸$$
$$۹۴+۸\times۸=۹۴+۶۴=۱۵۸$$
$$۱۵+۸\times۸=۱۵+۶۴=۷۹$$

ملاحظه می‌شود که به‌دست‌آوردن قاعدهٔ بخشپذیری براعداداول به‌روش فوق ساده ولزومی به‌حفظ‌کردن فرمول ندارد،کافیست بـا توجه توضیحات داده شده با ملاحظهٔ یکان عدد اول مورد مطالعه قاعده را به‌دست آورده ازآن استفاده‌کرد.

مسائل

۱ـ اگر $A\neq۰$ و $\begin{vmatrix}A & b\\ C & d\end{vmatrix}=۰$ آنگاه $(\overline{Ab},\overline{Cd})\neq۱$، یعنی، $\overline{Ab}, \overline{Cd}$ نسبت بهم اول نیستند.

۲ـ اگر $(\overline{Ab},\overline{Cd})=e$ و $\begin{vmatrix}A & b\\ C & d\end{vmatrix}=k$ ثابت کنید $e \mid k$.

۳ـ اگر $\begin{vmatrix}A & b\\ C & d\end{vmatrix}=k\overline{Ab}$ و $۱۰\leqslant\overline{Ab}<\overline{Cd}$ آنگاه $(\overline{Ab},\overline{Cd})\neq۱$. (ارتباط این‌مسئله‌با مسئله۱ چیست؟)

۴ـ با توجه به‌اینکه $۲۱=۷\times۳$ قاعدهٔ بخشپذیری بر ۷ را به‌دست آورید.

۵ـ بـا استفاده از قواعد بخشپذیری ارائه شده در این مقاله تحقیق‌کنیدکه آیا عدد ۳۹۵۹ اول است یا نه.

برهان ۱

$$\begin{vmatrix}A & b\\ C & d\end{vmatrix}=۰\Longrightarrow Ad-bc=۰\Longrightarrow$$

$$d(\overline{Ab})=b(\overline{Cd})$$

اگر $(\overline{Ab},\overline{Cd})=۱$ باید $\overline{Ab}\mid b$ واین باتـوجه بـه $A\neq۰$ غیر ممکن است.

برهان ۲

$$\begin{vmatrix}A & b\\ C & d\end{vmatrix}=k\Longrightarrow d\,\overline{Ab}-b\overline{Cd}=۱۰k$$

بنابراین $e \mid ۱۰k$ اما اگـر در e عامل ۲ (یا ۵) باشد b و d نیز باید زوج (یا بر ۵ بخشپذیر) باشند. به‌عبارت دیگر $e \mid k$.

برهان ۳

$$\begin{vmatrix}A & b\\ C & d\end{vmatrix}=k\overline{Ab}\Longrightarrow(d-۱۰k)\overline{Ab}=b\overline{Cd}$$

بنابراین $\overline{Ab}, \overline{Cd}$ نمی‌توانند نسبت بهم اول باشند.

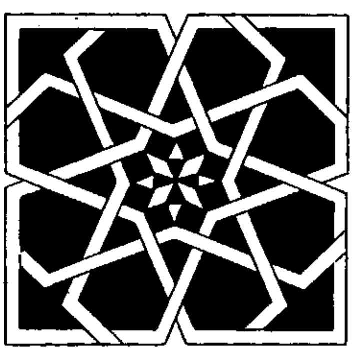
برهان ۴

$$\begin{vmatrix}C & d\\ ۲ & ۱\end{vmatrix}=C-۲d$$

عددی بر۷ بخشپذیر است‌که تعداد ده‌تایی‌های آن‌منهای دوبرابر یکانش برهفت بخشپذیر باشد.

برهان ۵

به‌سادگی معلوم می‌شودکه عدد ۳۵۳۷ بر ۲، ۳، ۵ و ۷ بخشپذیر نیست وتنها بر ۳۷ بخشپذیر است!



حد دنباله و حد تابع

دکتر منوچهر وصال

با اینکه حد با عباراتی روشن تعریف می‌شود، درك مفهوم آن برای دانش‌آموزان و دانشجویان آسان نیست. به‌نظرمی‌رسد اگر مقاله‌هایی در این زمینه منتشر شود برای رفع اشکال علاقه‌مندان مفید باشد. در شمارهٔ ۸ سال دوم مجلهٔ رشد مقالهٔ جالبی باعنوان «ε و δ» منتشر شده است. این‌مقاله با تاریخچهٔ مختصری که نظر خواننده را به‌موضوع حد جلب می‌کندشروع می‌شود و پس از بیان «نزدیك‌شدن به‌یك‌نقطه یا یك‌عدد» به‌کمك چندمثال به‌تعریف حد ومطالب مربوط به‌آن می‌پردازند. با خواندن این مقاله فکر کردم شاید مطالبی که در زیر می‌آید برای بعضی از خوانندگان جالب باشد.

دراین چندصفحه حد دنباله، مجموع سری، پارادوکس زنون‌را بدون ذکر مقدمه وسپس حدتابع‌را مطرح خواهیم‌کرد و درآخر توجه خواننده‌را به‌چند نکته معطوف می‌داریم. آنچه دراینجا می‌آید درکتابهای مقدماتی ریاضیات عمومی یاحساب دیفرانسیل وانتگرال وجود دارد وبرای تفصیل بیشتر می‌توانید به‌آن‌کتابها رجوع کنید. اما سعی شده است مطالب به‌صورتی بیان شوند که برای دانش‌آموزان در سال آخر دبیرستان قابل‌فهم باشند.

دنباله. بادنبالهٔ اعداد نامتناهی از زمانی‌که عددنویسی را یاد گرفته‌ایم آشنا شده‌ایم. می‌دانیم که اعداد طبیعی $1, 2, \ldots, n, \ldots$ پایان ندارند. اعداد $\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ را واعداد $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$ دو مثال دیگر از دنبالهٔ نامتناهی اعداد هستند[1]. ما دنبالهٔ نامتناهی را به‌طور خلاصه دنباله خواهیم گفت.

تعریف ۱. عدد a را حدنبالهٔ اعداد

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \qquad (1)$$

می‌گویند، اگر برای‌هرعدد‌مثبت‌مفروض ε، عددطبیعی N وجود داشته باشد به طوری‌که برای اعدادطبیعی $n \geqslant N$، $|a_n - a|$ از ε کوچکتر باشد. به‌عبارت دیگر، اگر از $n \geqslant N$ نامساوی $|a_n - a| < \varepsilon$ نتیجه شود.

نتیجهٔ ۱. اگر برای یکی از اعداد مثبت که آن‌را ε_0 می‌نامیم، N وجود نداشته‌باشد، a حدنبالهٔ (۱) نیست.

مثال ۱. صفرحددنبالهٔ

$$1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \qquad (2)$$

است. زیرا اگر ε عدد مثبت مفروض‌باشد، N را عددی‌طبیعی و بزرگتر از $\frac{1}{\varepsilon}$ می‌گیریم. از $n \geqslant N > \frac{1}{\varepsilon}$، نامساوی

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon$$

یا

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

نتیجه می‌شود. پس‌برای هرعدد مفروض $\varepsilon > 0$، عدد طبیعی N وجود دارد.

توجه کنید که جملهٔ «اگر از $n \geqslant N$ نامساوی $|a_n - a| < \varepsilon$ نتیجه شود.» معادل است با اینکه بگوییم «اگر $N-1$ جملهٔ اول(۱) راکنار بگذاریم، جمله‌های دیگر(۱) (که تعدادشان نامتناهی‌است) در $|a_n - a| < \varepsilon$ صدق‌می‌کنند.

مثال ۲. عدد ۱ حددنبالهٔ (۲) نیست. زیرابرای $\varepsilon = \frac{1}{2}$، N وجود ندارد. پس بنابرنتیجهٔ ۱، عدد ۱ حد دنبالهٔ (۲) نیست.

مثال۳. نشان‌دهید که ۲ حد دنبالهٔ زیر است

$$1,\ 2-\frac{1}{2},\ 2-\frac{1}{2^2},\dots,2-\frac{1}{2^{n-1}},\dots$$

حل. عبارت $|a_n-a|$ را که می‌خواهیم، وقتی $n\geqslant N$، از ε کوچکتر باشد، حساب می‌کنیم

$$|a_n-a|=\left|2-\frac{1}{2^{n-1}}-2\right|=\frac{1}{2^{n-1}}$$

اما $\frac{1}{2^{n-1}}\leqslant\frac{1}{n}$، زیرا با روش استقرای ریاضی دیده می‌شود که اگر n عددی طبیعی باشد، $n\leqslant 2^{n-1}$ (اگر n را ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ بگیرید متوجه می‌شوید که از $n=3$ به بعد 2^{n-1} خیلی سریعتر از n بزرگ می‌شود. اما برای اثبات دقیق $n\leqslant 2^{n-1}$ بایدروش استقرای ریاضی به‌کار برده شود.) اکنون برای $\varepsilon>0$ مفروض، N را از $\frac{1}{\varepsilon}$ بزرگتر می‌گیریم، به‌آسانی به‌دست می‌آید که از $n\geqslant N$ نامساوی

$$|a_n-a|=\frac{1}{2^{n-1}}\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon$$

نتیجه می‌شود. چون $\varepsilon>0$ اختیاری است، معلوم می‌شود که برای هر $\varepsilon>0$، N وجود دارد. پس ۲ حد دنبالهٔ (۳) است.

مجموع سری. به‌کمک حد دنباله می‌توان در شرایطی مجموع اعداد دنبالهٔ (۱) یعنی

$$a_1+a_2+\dots+a_n+\dots \qquad (4)$$

را تعریف کرد. دنبالهٔ

$$s_1=a_1,\ s_2=a_1+a_2,\ \dots,\qquad (5)$$
$$s_n=a_1+a_2+\dots+a_n,\ \dots$$

را در نظر می‌گیریم. اگر دنبالهٔ (۵) حد داشته باشد و s حد آن باشد، می‌گوییم (۴) مجموع دارد و مجموع آن s است. عبارت (۴) را سری و s را مجموع سری (۴) می‌نامند.

مثال۴. مجموع سری $1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}+\dots$ را حساب کنید.

حل. دنبالهٔ

$$s_1=1,\ s_2=1+\frac{1}{2},\ \dots$$

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}},\ \dots$$

را تشکیل می‌دهیم. می‌دانیم که

$$(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})(1-x)=1-x^n.$$

در این رابطه (که با استقرای ریاضی ثابت می‌شود) x را $\frac{1}{2}$ می‌گیریم، به‌سادگی رابطهٔ

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

که همان دنبالهٔ مثال ۳ است، به‌دست می‌آید. پس بنابرمثال ۳ عدد ۲ مجموع سری

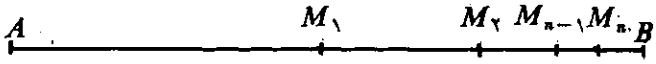
$$1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}+\dots \qquad (6)$$

است و می‌نویسیم

$$2=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}+\dots \qquad (7)$$

زنون در ۴۵۰ سال قبل از میلاد یعنی متجاوز از ۲۴۰۰ سال پیش مسئله‌ای را مطرح کرده است که نتیجهٔ منطقی آن این است که ممکن است مجموع تعدادی نامتناهی عدد، عددی مشخص باشد. اما به‌این مسئله، که به‌پارادوکس زنون معروف است، دوهزار سال بعد که مجموع سری تعریف‌شده، جواب داده‌شده است.

پارادوکس زنون[2]. اگر متحرک M برای رفتن از A به B نخست نصف AB یعنی AM_1 و سپس هر بار نصف مسافت باقیمانده را بپیماید هیچوقت به B نخواهد رسید. درشکل ۱، AM_1 نصف AB، M_1M_2 نصف M_1B و M_nB نصف $M_{n-1}B$ است.



شکل ۱

در پارادوکس مطرح نشده است که M در چه مدت مسافتها را می‌پیماید. فرض کنیم M مسافتهای AM_1، M_1M_2، ...، $M_{n-1}M_n$، ... را بترتیب در مدتهای T_1، T_2، ...، T_n، ... بپیماید. دراین‌صورت مدت‌زمان لازم برای رسیدن به B، مجموع این‌زمانها یعنی

$$T_1+T_2+\dots+T_n+\dots \qquad (8)$$

بایدباشد که درقدیم (۸) را همواره نامتناهی تصور می‌کردند. از این تصور غلط زنون نتیجه می‌گیرد که M هیچوقت به B نمی‌رسد.

اول فرض می‌کنیم سرعت M ثابت است و فاصلهٔ AM_1 را در یک‌ساعت می‌پیماید. در این‌صورت واضح است که AB

در مدت دوساعت پیموده می‌شود. پس طبیعی است که در این حالت مجموع(۸) را ۲ بگیریم. از مجموع سری زیر هم به‌همین نتیجه می‌رسیم. چون سرعت ثابت است، AM_1 در یك ساعت پیموده می‌شود و هرفاصلهٔ $M_{n-1}M_n$ نصف فاصلهٔ قبلی است،

$$T_1=1,\ T_2=\frac{1}{2},\ T_3=\frac{1}{2^2},\ \dots,T_n=\frac{1}{2^{n-1}},\dots$$

و در مثال ۴ دیدیم که مجموع اعداد این‌دنباله، یعنی مجموع سری(۶)، با ۲ برابر است.

حال فرض می‌کنیم که M هرفاصله را باسرعتی که‌نصف سرعت فاصلهٔ قبلی است می‌پیماید و فاصلهٔ اول در یك ساعت پیموده می‌شود. در این صورت M هریك از فاصله‌های AM_1، M_1M_2،... را در یك ساعت می‌پیماید. بنابراین پس از n ساعت به M_n می‌رسد. در اینجا با دنبالهٔ $a_1=1$، $a_2=1$، ...، $a_n=1$، ... و سری $1+1+\dots+1+\dots$ مواجه هستیم. مجموع n جملهٔ اول این‌سری برابر با n است. پس روشن است که این سری مجموع ندارد و M هیچ‌وقت به B نمی‌رسد.

حد را در دنباله‌ها که حالت خاصی از توابع هستند. تعریف کردیم، اکنون حد تابع را تعریف می‌کنیم و به‌نکاتی دربارهٔ آن اشاره کرده از پارادوکس زنون در نکته ۴ استفاده خواهیم کرد. در اینجا حد تابع در بینهایت را تعریف نخواهیم کرد. تعریف آن نظیر تعریفی است که برای حد دنباله بیان شد.

حد تابع. عدد b را حد تابع f در a می‌نامیم اگر برای هرعدد مثبت مفروض ε، عدد مثبت δ وجود داشته باشد به‌طوری که از $0<|x-a|<\delta$ نامساوی $|f(x)-b|<\varepsilon$ نتیجه شود.

نتیجهٔ ۲. اگر برای یك عدد مثبت که آن را ε_0 می‌نامیم، δ وجود نداشته باشد به طوری که از $0<|x-a|<\delta$، $|f(x)-b|<\varepsilon_0$ نتیجه شود، b حد f در a نیست.

مثال ۵. حدتابع $f(x)=\sin x$ در ۰ برابر با ۰ است.

برای اثبات باید نشان‌دهیم که برای هر $\varepsilon>0$ عدد $\delta>0$ وجود دارد به‌طوری که از $0<|x|<\delta$ نامساوی $|\sin x|<\varepsilon$ نتیجه شود. طبق معمول واحدزاویه رادیان است. در این صورت می‌دانیم که $|\sin x|\leqslant|x|$. پس از $|x|<\varepsilon$ نامساوی $|\sin x|<\varepsilon$ نتیجه می‌شود و می‌توانیم δ را خود ε بگیریم.

مثال ۶. تابع f در فاصلهٔ $[1, 4]$ به‌صورت زیر داده شده است

$$f(x)=\begin{cases}1 & 1\leqslant x<2\\ 2 & 2\leqslant x<3\\ 3 & 3\leqslant x<4\\ 4 & x=4\end{cases}$$

نشان دهید که (الف) ۲حد f در ۲/۵ است، (ب) f در ۲ حد ندارد.

حل. (الف) توجه کنید که فاصلهٔ $2<x<3$ را می‌توانیم بصورت $-0/5<x-2/5<0/5$ یا $|x-2/5|<0/5$ بنویسیم ودر این فاصله $f(x)=2$. پس از $|x-2/5|<0/5$ نتیجه می‌شود که $|2-f(x)|=0$ و بنابراین در این فاصله اگر ε هرعدد مثبتی باشد، $|2-f(x)|<\varepsilon$. پس $\varepsilon>0$ هرعددی باشد، δ را می‌توانیم ۰/۵ بگیریم، زیرا از $|x-2/5|<0/5$ نامساوی $|f(x)-2|<\varepsilon$ نتیجه می‌شود. پس ۲ حد f در ۲/۵ است.

(ب) نشان‌می‌دهیم که b هرعددی فرض شود، b حدتابع f در ۲ نیست. بنابرنتیجهٔ ۲، کافی است نشان‌دهیم که برای $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$، $\delta>0$ وجودندارد. اول نشان می‌دهیم که δی کوچکتر از ۱ وجود ندارد. (فرض $\delta<1$ برای این است که از $|x-2|<\delta$، $1<x<3$ نتیجه‌شود.) برهان خلف را به‌کار می‌بریم. یعنی فرض می‌کنیم $\delta<1$ وجوددارد. دوعدد x_1 و x_2 به‌طوری که $2-\delta<x_1<2$ و $2<x_2<2+\delta$، انتخاب می‌کنیم. x_1 و x_2 در $0<|x-2|<\delta$ صدق می‌کنند، پس نتیجه می‌شود که $|f(x_1)-b|<\frac{1}{2}$ و $|f(x_2)-b|<\frac{1}{2}$.

اما از این دونامساوی با توجه به $f(x_1)=1$ و $f(x_2)=2$ به‌دونامساوی $|1-b|<\frac{1}{2}$ و $|2-b|<\frac{1}{2}$ که هریك دیگری را نقض می‌کند می‌رسیم. زیرا از $|1-b|<\frac{1}{2}$، $b<\frac{3}{2}$، واز $|2-b|<\frac{1}{2}$، $b>\frac{3}{2}$ نتیجه می‌شوند. پس δی کوچکتر از ۱ وجود ندارد. حال می‌گوییم $\delta\geqslant1$ هم، وجود ندارد. زیرادر غیر این‌صورت، هرعدد مثبت کوچکتر از ۱ را می‌توانیم δی مطلوب بگیریم. توضیح آنکه اگر $\delta\geqslant1$ و $\delta_1<1$، از $0<|x-2|<\delta_1$ و $\delta_1<\delta$ نامساوی $0<|x-2|<\delta$

نتیجه می‌شود و از این نامساوی، $|f(x)-b|<\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید. پس نامساوی اخیر از $|x-2|<\delta_1$ نتیجه می‌شود و به‌تناقض می‌رسیم، چون $\delta_1<1$ ونشان‌دادیم که δی کوچکتر از ۱ وجود ندارد.

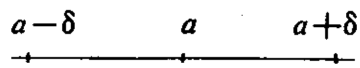
چندنکته

نکتهٔ ۱. $f(x)$ وقتی معنی دارد که x در حوزهٔ تعریف f باشد. مثلاً در $f(x)=\sqrt{x}$، $f(-1)$ معنی ندارد. پس در تعریف حد، عبارت $|f(x)-b|$ وقتی معنی دارد که x در حوزهٔ تعریف f باشد. بنابر این علاوه بر اینکه x در $0<|x-a|<\delta$ صدق می‌کند، x باید در حوزهٔ تعریف باشد. در تعریف بالا عمداً شرط اینکه x در حوزهٔ تعریف باشد، حذف‌شده است.

مثال ۷. نشان‌دهید که ۰ حد $\sqrt{x}$ در ۰ است.

حل. باید نشان‌دهیم که برای هر $\varepsilon>0$ مفروض، $\delta>0$ وجود دارد به‌طوری که اگر $0<|x|<\delta$ و x در حوزهٔ تعریف $\sqrt{x}$ باشد، آنگاه $|\sqrt{x}|<\varepsilon$. اما درحوزهٔ تعریف $\sqrt{x}$ مجموعهٔ اعداد $x\geqslant 0$ است. در این مجموعه $|x|=x$ و از طرف دیگر $\sqrt{x}$ جذر مثبت x است، پس وقتی x مثبت یاصفر است، $|\sqrt{x}|=\sqrt{x}$. بنابراین باید ثابت‌کنیم $\delta>0$ وجود دارد به‌طوری‌که از $0<x<\delta$، $\sqrt{x}\leqslant\varepsilon$ نتیجه شود. واضح است که $\delta=\varepsilon^2$ یك‌جواب مسئله است، زیرا از $0<x<\varepsilon^2$، $\sqrt{x}<\varepsilon$ نتیجه می‌شود.

نکتهٔ ۲. اعداد را روی محوری بانقاط نمایش می‌دهیم و به‌جای عدد a می‌گوییم نقطهٔ a. در این صورت $|x-a|$ فاصلهٔدو نقطهٔ a و xاست و $|x-a|<\delta$ با $a-\delta<x<a+\delta$ معادل است، یا معادل با این است که بگوییم x در فاصلهٔ باز ($a-\delta$ و $a+\delta$) واقع است (شکل ۲). از طرف دیگر چون قدر مطلق هرعدد یا مثبت است یا صفر، $0<|x-a|$ با $x\neq a$ معادل‌است. باتوجه به‌این نکات حد f در a باعبارات زیر تعریف می‌شود:



شکل ۲

b حدتابع f در نقطهٔ a است، اگر برای هر عدد $\varepsilon>0$ مفروض عدد $\delta>0$ وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که وقتی x در فاصلهٔ $(a-\delta, a+\delta)$ است و $x\neq a$، $f(x)$ در فاصلهٔ $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ باشد.

همسایگی a. هرفاصلهٔ (c, d) که a در وسط آن باشد، یك همسایگی a نامیده می‌شود. مثلاً $(a-\delta, a+\delta)$ یك همسایگی a و $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ یك‌همسایگی b است. به‌کمك این‌تعریف می‌توانیم بگوییم: b حد تابع f در a است، اگر برای هرهمسایگی b یك همسایگی a وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که وقتی x در این همسایگی است، f در همسایگی مفروض b باشد.

معنی‌جملهٔ «اگر x به a نزدیك‌باشد، $f(x)$ به b نزدیك است» برهمه‌کس‌کم و بیش روشن است. اما باکمی دقت این سئوال مطرح می‌شود که چه‌نقاطی را به a و چه‌نقاطی را به b نزدیك می‌گوییم. فرض‌کنید دوعددمثبت δ و ε در نظر گرفته‌ایم وقرار گذاشته‌ایم اگرفاصلهٔ x تا a از δ کمتر باشد بگوییم x به a نزدیك است و عددی‌را به b نزدیك بگوییم که فاصله‌اش تا b از ε کمتر باشد. در این صورت عبارت «اگر x به a نزدیك باشد، (آنگاه) $f(x)$ به b نزدیك است» به‌این معنی است که «اگر $|x-a|<\delta$، آنگاه $|f(x)-b|<\varepsilon$» یامعادل آن: «از $|x-a|<\delta$، $|f(x)-b|<\varepsilon$ نتیجه می‌شود» همچنین جملهٔ «اگر x به a نزدیك شود، $f(x)$ به b نزدیك می‌شود» به‌همین معنی است وبرای به‌خاطر آوردن معنی دقیق حد مفید است. به‌همین جهت اغلب به‌جای جملهٔ b حد $f(x)$ در a است» می‌گوییم «اگر x به a میل‌کند، $f(x)$ به b میل می‌کند» یا می‌گوییم وقتی x به a میل می‌کند، b حد $f(x)$ است. «میل می‌کند» را با نماد $\to$ نمایش می‌دهند و «b حد f در a است» را با یکی ازدو نماد زیر

$$\text{اگر } x\to a,\ f(x)\to b, \qquad \lim_{x\to a} f(x)=b$$

نمایش می‌دهند. جملهٔ اگر x به‌قدر کافی به a نزدیك باشد، $|f(x)-b|<\varepsilon$ برقرار است» یاجمله‌ای نظیر این‌جمله هم اغلب درکتابها دیده می‌شود. امااین‌جمله‌ها که در حقیقت برای به‌خاطرآوردن معنی حد مفید است نباید موجب‌شوندکه حد را به‌صورتهای دیگری که معمولا با معنی واقعی حد مغایر است، بیان‌کنیم، بلکه باید همواره به‌خاطر داشته‌باشیم که b حد f در a است به‌این معنی است که

برای هر عدد مفروض $\varepsilon>0$ یك عدد $\delta>0$ وجود دارد به‌طوری‌که اگر $0<|x-a|<\delta$ و x درحوزهٔ تعریف f باشد، آنگاه $|f(x)-b|<\varepsilon$.

نکتهٔ ۳. فرض $x\neq a$ در تعریف حد f در a، تنها به‌این منظور است که توابع بیشتری در a حد داشته باشند. اگر a در حوزهٔ تعریف f نباشد (یعنی f در a تعریف نشده‌باشد) واضح است که احتیاجی به فرض $x\neq a$ نیست، چون x را در حوزهٔ تعریف f می‌گیریم و دراین صورت x خود به‌خود مخالف a است. همچنین اگر a در حوزهٔ تعریف f باشد و $b=f(a)$ حد f در a باشد (یعنی f در a پیوسته باشد) فرض $x\neq a$ لزومی ندارد. زیرا $|f(x)-f(a)|$ برای $x=a$ برابر با صفر است و بنابراین از ε کوچکتر است.

فرض کنیم a در حوزهٔ تعریف f است و $f(a)$ حد f در a نیست، دراین‌صورت اگر $x\neq a$ فرض شود، امکان‌دارد $b\neq f(a)$ حد f در a باشد. اما اگر فرض $x\neq a$ را حذف کنیم امکان ندارد $b\neq f(a)$ حد f در a باشد، زیرا $\delta>0$ هر چه باشد، $x=a$ در $|x-a|<\delta$ صدق می‌کند، پس از $x=a$ نامساوی $|f(a)-b|<\varepsilon$ نتیجه می‌شود و چون برای هر $\varepsilon>0$ یك $\delta>0$ وجود دارد، نامساوی $|f(a)-b|<\varepsilon$ برای تمام اعداد مثبت ε برقرار است. پس $f(a)\neq b$ نیست، زیرا در این صورت برای $\varepsilon=\frac{1}{2}|f(a)-b|$، $|f(a)-b|$ از ε بزرگتر است. بنابراین $b=f(a)$.

نکتهٔ ۴. گاهی برای تعریف حد به‌عنوان مقدمه می‌گویند (x به a میل می‌کند، یعنی x هر قدر بخواهیم به a نزدیك می‌شود ولی به a نمی‌رسد.) در پارادوکس زنون دیدیم که ممکن است x ازهر عددی به a نزدیکتر شود و به a نرسد. اما این مستلزم آن است که تا زمان وجود دارد x درحرکت باشد و به a نزدیك شود. پس درمدتی متناهی امکان ندارد x از هر عددی به a نزدیکتر شود.

در حقیقت احتیاجی به تعریف «x به a میل می‌کند» نیست. زیرا دربالا اشاره کردیم که جملهٔ «اگر x به a میل کند، $f(x)$ به b میل می‌کند» به‌این معنی است که b حد f در a است و معنی دیگری ندارد. پس این جمله‌را نمی‌توان (ونباید) به دو جملهٔ «x به a میل می‌کند» و «$f(x)$ به b میل می‌کند» تجزیه‌کرد. درواقع برای تعریف حد f در a احتیاجی به‌معنی دقیق «x به a میل می‌کند» نداریم.

نکتهٔ ۵. در بعضی از کتابها در تعریف حد جملهٔ «ε هر اندازه‌کوچك باشد» را ذکر می‌کنند. ما عمداً این جمله را حذف کرده‌ایم، زیرا در تعریف‌حد، ε عددی‌است مثبت، بزرگ یا کوچك. اما ذکر این جمله ازاین نظر مفید است که ما را به مقادیر کوچك ε متوجه می‌کند. اگر δ برای یك عدد مثبت ε_0 وجود داشته باشد؛ یعنی اگر از $0<|x-a|<\delta$ نامساوی $|f(x)-b|<\varepsilon_0$ نتیجه شود، واضح است که اگر $\varepsilon>\varepsilon_0$، نامساوی $|f(x)-b|<\varepsilon$ هم‌از $|x-a|<\delta$ نتیجه‌می‌شود. بنابراین‌درحل مسائل همیشه‌می‌توانیم ε را ازعدد ثابت ومثبتی کوچکتر بگیریم.

همچنین δ را می‌توانیم ازعدد ثابت ومثبتی مانند M کوچکتر فرض‌کنیم. زیرا اگر از $|x-a|<\delta$ نامساوی $|f(x)-b|<\varepsilon$ نتیجه شود و δ از M بزرگتر باشد، از هر عددکوچکتر از M مانند δ_1 هم نامساوی مطلوب نتیجه‌می‌شود، چرا که وقتی δ_1 از δ کوچکتر است، از $0<|x-a|<\delta_1$، نامساوی $0<|x-a|<\delta$ ودر نتیجه نامساوی

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

حاصل می‌شود.

با اینکه در تعریف حد ε کوچك فرض نمی‌شود، اغلب در محاوره ε را عددی بسیارکوچك در نظر می‌گیریم و وقتی می‌گوییم «به اندازهٔ یك ε» منظورمان مقداری بسیارکوچك است. اگر به تعریف حد خوب دقت‌کرده باشیم، تصور اینکه x به a میل‌می‌کند به‌این‌معنی که x به a نزدیك می‌شود یاتصور اینکه ε عددی مثبت وبسیارکوچك است نه‌تنها ضرری ندارند بلکه اغلب مفید هستند، به‌شرط آنکه مثلاً نگوییم ε از هرعدد مثبتی کوچکتراست چون می‌دانیم که‌عدد مثبتی که ازتمام اعداد مثبت دیگر کوچکتر باشد وجود ندارد.

---

۱. با اینکه در اینجا چندان نیازی به‌تعریف دنباله نداریم، متذکر می‌شویم که دنباله نامتناهی به‌کمك مفهوم تابع تعریف می‌شود، دنباله نامتناهی... $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ در حقیقت تابعی است مانند f که حوزهٔ تعریفش مجموعه اعداد طبیعی است و مقادیر آن برابرند با $f(n)=a_n$، $n=1,2,3,\ldots$. مثلا دنباله... ، $\frac{1}{n}$ ، ... ، $\frac{1}{2}$ ، 1 تابع f است که فقط به‌ازای $n=1,2,3,\ldots$، $f(n)=\frac{1}{n}$ تعریف شده است. دنباله متناهی تابعی است که حوزهٔ تعریفش مجموعه $\{1,2,\ldots,n\}$ و n عددی طبیعی است.

۲. برای توضیح بیشتر می‌توانید به‌جلد اول کتاب حساب دیفرانسیل وانتگرال تألیف اپوستل ترجمه ع. ذکائی، م. رضائی دلفی، ع. عالم‌زاده و ف. فیروزان صفحه‌های ۴۶۵ تا ۴۶۹ رجوع کنید. در زبان فارسی زنو (Zeno) را زنون می‌گویند.

نامعادلات

رضا شهریاری اردبیلی

۱ـ نامعادلات توابع و هم‌ارزی آن

فرض کنیم دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ برمجموعهٔ X تعریف شده باشند می‌خواهیم بدانیم به‌ازای چه‌مقادیری از x، مقدار تابع f، از مقدار تابع g کوچکتر است. بعبارت دیگر می‌خواهیم همهٔ مقادیری از متغیر x را تعیین کنیم بطوری که $f(x)<g(x)$. مسائلی از این نوع به نامعادلات توابع معروفند. بنابراین منظور از حل $f(x)<g(x)$ پیدا کردن همهٔ مقادیری از x است، بطوری‌که وقتی جانشین x درنامعادله کنیم حاصل یك نامساوی صحیح عددی باشد. مقادیر x را جوابهای نامعادله گویند. مجموعهٔ جوابها را مجموعهٔ جواب نامعادله می‌نامند. منظور از حل نامعادله، تعیین مجموعهٔ جواب است.

در حل نامعادلات علاوه برحل لازم است از مفهوم اساسی هم‌ارزی بین نامعادلات استفاده کرد. لذا اشاره‌ای به‌مفهوم هم‌ارزی و احکام آن می‌کنیم. دونامساوی

$$f_1(x)<g_1(x) \quad \text{و} \quad f_2(x)<g_2(x)$$

را برمجموعهٔ M، هم‌ارز گوئیم درصورتی که هرجواب از نامعادلهٔ اول که متعلق به M نیز باشد، یك جواب نامعادله دوم باشد و بالعکس هرجواب از نامعادله دوم که متعلق به M نیز هست یك‌جواب نامعادلهٔ اول باشد. هم‌چنین اگر درنامعادله درمجموعهٔ M جوابی نداشته‌باشند آنهارا نیز هم‌ارز به‌حساب می‌آوریم.

درحل نامعادلات می‌توان با تغییرات متوالی، نامعادله را به نامعادلهٔ هم‌ارز و ساده تبدیل کرد از قضایای زیر غالباً برای تعیین نامعادلهٔ ساده و هم‌ارز استفاده می‌شود.

۱. نامعادلات

$$f(x)<g(x) \quad ، \quad -f(x)>-g(x)$$

روی هر مجموعهٔ دلخواه معادلند.

۲. اگر $g(x)$ و $f(x)$ برمجموعهٔ M فقط مقادیر مثبت اختیار کنند آنگاه نامعادلات زیر برمجموعهٔ مذکور هم‌ارزند.

$$f(x)<g(x), \quad \frac{1}{f(x)}>\frac{1}{g(x)}$$

۳ـ اگر توابع $f(x)$، $g(x)$، و $\varphi(x)$ برمجموعهٔ M تعریف‌شده‌باشند آنگاه نامعادلات زیر براین مجموعه‌هم‌ارزند.

$$f(x)<g(x) \quad \text{و} \quad f(x)+\varphi(x)<g(x)+\varphi(x)$$

و ازاین، هم‌ارزی نامعادلات زیر نتیجه می‌شود.

$$f(x)<g(x)+\varphi(x) \quad \text{و} \quad f(x)-\varphi(x)<g(x).$$

۴ـ اگرتوابع $f(x)$، $g(x)$، و $\varphi(x)$ بر M تعریف شده باشند و به‌ازای هر $x\in M$ $\varphi(x)>0$ آنگاه نامعادلات

$$f(x)<g(x) \quad \text{و} \quad f(x)\cdot\varphi(x)<g(x)\cdot\varphi(x)$$

برمجموعهٔ M هم‌ارز هستند.

۵ـ اگرتوابع $f(x)$ و $g(x)$ روی‌مجموعهٔ M تعریف شده باشند و فقط مقادیر مثبت را اختیارکنند آنگاه نامعادلات

$$f(x)<g(x) \quad ، \quad f^2(x)<g^2(x)$$

برمجموعهٔ M، هم‌ارز هستند.

صحت این احکام همگی ازخواص نامساوی‌اعداد نتیجه می‌شود و این احکام برای نامعادلات $\leqslant$ نیز همواره برقرار است. برای اثبات هم‌ارز نبودن دونامعادله روی مجموعهٔ معین کافی است xی ازآن مجموعه مشخص کنیم بطوری‌که جواب یکی از نامعادلات باشد ولی در دیگری صدق نکند.

مثال ۱. آیا نامساویهای زیر درمجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت هم‌ارز هستند.

(آ) $1\leqslant x$ و $x^2\leqslant x^3$

(ب) $x^3<x^2$ ، $x^3+\sqrt{x}<x^2+\sqrt{x}$

(پ) $\sqrt{x}\leqslant x+1$ ، $x<(x+1)^2$

حل‌ـ نامعادلات (آ) هم‌ارزند زیرا با فرض

$$f(x)=x^2 \ ، \ g(x)=x^3 \ ، \ \varphi(x)=\frac{1}{x^2}$$

و استفاده از رابطهٔ (۴) (با نامساوی اکید) نتیجه می‌شود که

این دونامعادله هم‌ارزند. درحالت (ب) با فرض

$f(x)=x^3$ و $g(x)=x^2$ $\quad \varphi(x)=\sqrt{x}$

هم‌ارزی نامعادلات از رابطهٔ (۳) نتیجه می‌شود.
درحالت (پ) با فرض

$f(x)=\sqrt{x}$ ، $g(x)=x+1$

هم‌ارزی نامعادلات از رابطهٔ (۵) حاصل می‌شود. بنابراین درهریك از حالات دونامعادله داده شده هم‌ارز هستند.

مثال ۲. درهریك از حالتهای مثال ۱، هم‌ارز بودن دونامعادله داده شده را درمجموعهٔ اعداد حقیقی بررسی کنید.

حل ـ بدیهی است که درحالت (آ) دونامعادله هم‌ارز نمی‌باشند زیرا که $x=0$ در یکی‌از نامعادله صدق میکند ولی در دیگری صدق نمیکند.

درحالت (ب) نیز این دونامعادله هم‌ارز نیستند زیرا که $x=-1$ فقط دریکی‌ازاین‌دو نامعادله صدق‌می‌کند. وبالاخره درحالت (پ) نیز دونامعادله داده شده هم‌ارز نیستند زیرا که $x=-1$ دریکی‌ازنامعادلات صدق‌می‌کند ولی دردیگری صدق نمی‌کند.

مثال ۳. هم‌ارزی دونامعادله

$\sqrt{x^2+x-2}>x$ ، $x^2+x-2>x^2$

را روی مجموعهٔ اعداد حقیقی تحقیق کنید.

حل ـ اگر $x^2+x-2\leqslant 0$ آنگاه هیچیك از این دونامعادله دارای جواب نمی‌باشند و اگر $x^2+x-2>0$ آنگاه x باید مثبت باشد و در نتیجه بنابر (۵) دونامعادله هم‌ارزند. بنابراین‌دونامعادله داده‌شده برمجموعهٔ اعداد حقیقی هم‌ارزند.

نامعادلات گویا.

کثیرالجمله‌ها را بصورت زیر درنظر می‌گیریم

$y=P_n(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$

که ساده‌ترین تابعهای عددی هستند. این توابع را می‌توان به‌صورت نسبت دو کثیرالجمله

$$y=R(x)=\frac{P_n(x)}{q_m(x)}$$

که تابعهای گویا هستند نمایش داد.

عدد a را صفر تابع $y=P_n(x)$ یا ریشهٔ کثیرالجمله $P_n(x)$ گوئیم اگر

$P_n(x)=0$

برای‌مثال کثیرالجملهٔ $P_2(x)=6-5x+x^2$ دو ریشه دارد، $x=2$ و $x=3$. لذا، $P_2(2)=0$ و $P_2(3)=0$. یك کثیرالجمله ممکن است (در R) صفر نداشته باشد مثلاً، $P_0(x)=1$ یا $P_2(x)=1+x^2$. باید توجه داشت که تعداد ریشه‌های یك کثیرالجمله از درجهٔ آن تجاوز نمی‌کند.

صفرهای کثیرالجمله‌های $P_n(x)$ و $q_m(x)$ را مقادیر بحرانی متغیر یانقاط بحرانی تابع گویا $y=\frac{P_n(x)}{q_m(x)}$ می‌نامند.

برای مثال برای تابع

$$y=\frac{P_3(x)}{q_2(x)}=\frac{x^3-6x^2-x+6}{x^2+3x+2}=\frac{(x^2-1)(x-6)}{(x+1)(x+2)}$$

مقادیر بحرانی متغیر عبارتنداز،

$x=-2$ ، $x=-1$ ، $x=1$ ، $x=6$

یك نامعادله گویا را می‌توان بعضی اوقات به‌روشی که روش بازه‌ها می‌نامیم حل کرد. این‌روش متکی است به‌خاصیت مهم توابع گویا که بدون اثبات می‌پذیریم. و آن‌عبارتست‌از:

هرتابع گویا، دریك بازهٔ باز که نقاط ابتدا و انتهای آن دو نقطهٔ بحرانی (متوالی) است دارای علامت ثابت است.

روش بازه‌ها.

هرنامعادله گویا پس‌از ساده شدن به‌یکی از صورتهای زیر بدست می‌آید.

$\frac{P_n(x)}{q_m(x)}>0$ ، $\frac{P_n(x)}{q_m(x)}<0$

$\frac{P_n(x)}{q_m(x)}\geqslant 0$ ، $\frac{P_n(x)}{q_m(x)}\leqslant 0$

سپس همهٔ نقاط بحرانی تابع گویا را پیدا می‌کنیم و روی محور اعداد مشخص می‌کنیم. بدین‌ترتیب محور اعداد بوسیلهٔ نقاط بحرانی به‌تعداد متناهی از بازه‌ها تقسیم می‌شود. بطوری که بر هریك از بازه‌ها طرف چپ نامعادله علامت ثابتی دارد. برای تعیین علامت طرف چپ یك نامعادله بر بازه‌ای کافی است علامت $\frac{P_n(x)}{q_m(x)}$ را درنقطه‌ای از آن بازه مشخص کنیم. و این با جایگزین کردن آن عدد در $\frac{P_n(x)}{q_m(x)}$ و محاسبهٔ مقدار آن مشخص می‌شود. سپس مجموعهٔ جواب را برای نامعادله داده‌شده پیدا می‌کنیم. درحالتی که نامساوی اکید است بدیهی است که نقطه‌های بحرانی جز مجموعهٔ جواب نخواهند بود.

$\frac{P_n(x)}{q_m(x)}>0$

همچنین درحالتی که نامساوی نااکید است یعنی $\frac{P_n(x)}{q_m(x)}\geqslant 0$

دراین‌صورت صفرهای کثیرالجمله جواب مسئله است اگر

صفرهـای کثیرالجملهٔ $q_m(x)$ نباشد. روش بـازه‌ها درحـل مسائل نامعادلات گویا زیاد کاربرد ندارد. تنها وقتی می‌تـوان بکار برد که صفرهـای کثیرالجملهٔ $P_n(x)$ و $q_m(x)$ در دست باشد یامقادیربحرانی متغیر برای توابع گویا $\frac{P_n(x)}{q_m(x)}$ شناخته شده باشد (یا بتوانیم بدست آوریم) لازم به‌توضیح است که صفرهای یک کثیرالجمله را نمی‌توانیم همیشه به‌سادگی تعیین کنیم.

مثال ۱. نامعادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+3x+2}>0.$$

حل- صفرهای کثیرالجملهٔ مخرج عبارتست‌از $x=-1$ و $x=-2$. صفرهـای کثیرالجملـهٔ صورت را مـی‌توانیم به‌سادگی پیداکنیم. درحقیقت،

$$x^3-3x^2-x+3=x^2(x-3)-(x-3)$$
$$=(x-3)(x-1)(x+1)$$

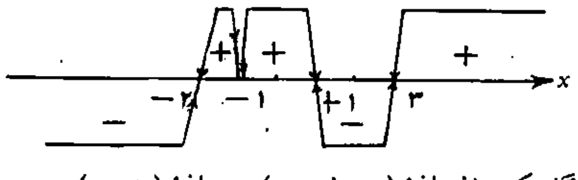
نامعادله را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم،

$$\frac{(x-3)(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)}>0. \quad (1)$$

نقاط بحرانی تابع گویا عبارتنداز

$x=-1,\ x=-2,\ x=1,\ x=3$

این نقاط بحرانی محور اعداد را به پنج بازه تقسیم مـی‌کند. این نقاط را روی محور اعداد مشخص می‌کنیم بـرای تعیین علامت تابع روی هریک از بازه‌ها به‌طریق زیرعمل می‌کنیم. توجه دارید که برای $x>3$ همهٔ عـوامل خطی درصورت و مخرج تابع گویا مثبت هستند و درنتیجه در بازهٔ $(3,+\infty)$ تابع فقط مقادیـر مثبت مـی‌گیرد کـه درشکل زیـر دربازهٔ $(3,+\infty)$ با علامت $+$، نشان داده شده است.



هنگامیکـه از بازهٔ $(3,+\infty)$ بـه‌بازهٔ $(1,3)$ مـی‌رسیم درنقطهٔ $x=3$ فقط یکی از عامل‌های خطی یعنی $x-3$ تغییر علامت می‌دهد. درنتیجه تابع درفاصلهٔ $(1,3)$ مقادیـر منفی می‌گیرد. با حرکت کردن به‌سمت چپ به‌بازهٔ $(-1,+1)$ می‌رسیم، تنها عامل $x-1$ است که تغییر علامت می‌دهد. این بدان‌معنی است که درگذر ازنقطهٔ $x=1$ طرف چپ نامساوی تغییر علامت می‌دهد. همچنین اگر از نقطهٔ $x=-1$ بگذریم بدیهی است علامت تابع ثابت می‌ماند زیرا عامل $x+1$ هم درصورت وهم درمخرج تابع گـویا وجـود دارد. بالاخـره درآخرین بازهٔ $(-\infty,-2)$ نیز تابع یـک تغییر علامت می‌دهد. ما درشکل تغییر این علامات را نشان داده‌ایـم. چون نامساوی اکید است بنابرایـن نقاط بحـرانی جـواب مسئله نمی‌باشند. بنابراین‌جواب نامعادله عبارتنداز

$(-2,-1)\cup(-1,+1)\cup(3,+\infty)$.

درحل این نامعادله ممکن‌است‌اینطور بنظربرسد که بهتر است از نامعادلهٔ ساده شدهٔ زیر استفاده‌کنیم

$$\frac{(x-1)(x-3)}{x+2}>0. \quad (2)$$

دراینصورت مجموعهٔ جواب عبارتست‌از،

$(-2,1)\cup(3,+\infty)$.

می‌بینیم مجموعهٔ جواب تغییر کرده است. پس مـرتکب خطا شده‌ایم. زیرا نامعادلـهٔ نتیجه شدهٔ (۲) هـم‌ارز نامعادلهٔ (۱) نمی‌بـاشد زیـرا نامعادلهٔ (۲) بـازاء $x=-1$ مقدار دارد درصورتی $x=-1$ درنامعادلهٔ (۱) صدق نمی‌کند (یا تابع گویا در $x=-1$ تعریف *نشده* است).

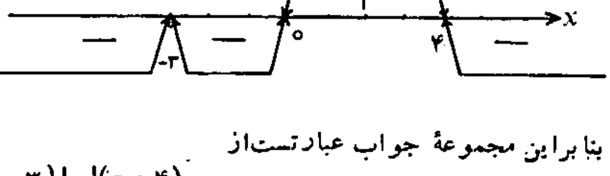
مثال ۲. نامعادلهٔ زیر را حل‌کنید

$$\frac{(x+3)^2(x^2+x+1)}{(4-x)x}\geqslant 0.$$

حل- نقاط بحرانی تابع گویا عبارتنداز،

$x=-3,\ x=0,\ x=4$

لذا محور اعداد را به‌چهار بازه تقسیم می‌کنیم و روی هریک از بازه‌ها علامت تابع را تعیین می‌کنیم. درتعیین علامت‌لازم است‌بدانیم که‌علامت $(x+3)^2$ و x^2+x+1 همواره مثبت است. لذا درتعیین‌علامت به دو نقطهٔ‌بحرانی $x=0$ و $x=4$ توجه می‌کنیم که درشکل زیر نشان داده شده است. $x=-3$ تنها نقطهٔ بحرانی است که درجواب به‌حساب می‌آید



بنابراین مجموعهٔ جواب عبارتست‌از

$\{-3\}\cup(0,4)$

مثال ۳. قلمرو تابع زیر را تعیین‌کنید

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2x-1}{x^2+1}}$$

حل ـ برای تعیین قلمرو تابع باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم.

$$\frac{2}{x^4-x+1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2x-1}{x^2+1}\geqslant 0$$

$$\frac{2(x+1)-x^2+x-1-2x+1}{x^3+1}\geqslant 0$$

$$\frac{-x^2+x+2}{x^3+1}\geqslant 0$$

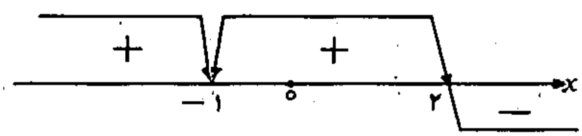
نقاط بحرانی عبارتنداز $x=-1$ و $x=2$. نامعادله را بصورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{-(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}\geqslant 0\,.$$

ازطرفی بـه‌ازای همهٔ متغیر x ، $x^2-x+1>0$. لـذا از نامعادله هم‌ارز آن استفاده می‌کنیم، داریم

$$-\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}\geqslant 0$$

نقاط بحرانی محور اعداد را به سه بازه تقسیم می‌کند



ما علامت طرف چپ نامعادله را درهریك از این بازه‌ها تعیین می‌کنیم و نقاط بحرانی را بررسی می‌کنیم نقطهٔ $x=2$ یـك صفر صـورت کسر است و چـون نامساوی نااکید است پس درمجموعهٔ جواب می‌باشد. نقطهٔ $x=-1$ یك صفر صورت کسراست وچون صفر مخرج نیزهست پس‌جز جواب‌نمی‌باشد بنابراین مجموعهٔ جواب عبارتنداز

$$(-\infty,-1)\cup(-1,+2)$$

نامعادلات اصم.

دراین قسمت نامعادلات یك متغیر راکـه شامل رادیکال نیز می‌باشد مورد بحث قرار می‌دهیم. عموماً این‌نوع معادلات با تبدیل‌کردن آنها به نامعادلات گـویا قابل حل است. بعضی اوقات ممکن است با تـوان رسـاندن دو طـرف نامعادلـه ، نامعادله‌ای حاصل شود کـه با نامعادلهٔ اصلی هـم‌ارز نباشد . بنابراین درحل نامعادلات اصم باید خیلی احتیاط کرد. ابتدا باید به‌حدود x توجه‌کنیم، یعنی حدود متغیر x را بایدطوری اختیارکردکه هردوطرف‌نامعادله معنی داشته‌باشند. برای‌نمونه مثال زیر را درنظر می گیریم.

مثال. نامعادله زیر راحل کنید.

$$\sqrt{x^2-4x+3}\geqslant 2-x$$

حل ـ اغلب دانش‌آموزان چنین حـل مـی‌کنند هر دو طرف نامعادله را به‌توان ۲ می‌رسانند تا نامعادله‌شامل رادیکال نباشد. بنابراین،

$$x^2-4x+3\geqslant 4+x^2-4x$$

$$3\geqslant 4$$

که غیرممکن است، بنابراین نامعادله جواب ندارد؟

آیا نتیجه بدست آمده درست است؟ بدیهی است کـه این‌نتیجه‌گیری صحیح نیست زیراکه بازای $x=5$ طرف‌چپ نامعادله مثبت و طـرف راست نامعادلـه منفی است و درنتیجه جواب مسئله است . پس این نامعادله دارای جـواب است . راه‌حل صحیح بصورت زیـر است. مقادیـری از x را تعیین مـی‌کنیم کـه $x^2-4x+3\geqslant 0$ ، صفرهـای کثیرالجملـه x^2-4x+3 عبارتنداز $x=1$ و $x=3$ در نتیجه مجموعهٔ جواب نامعادله $x^2-4x+3\geqslant 0$ عبارتست‌از

$$(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$$

بنابراین دربازهٔ $(1,3)$ جوابی برای نامعادله وجود ندارد و بعلاوه برای $x\geqslant 3$ ، داریم $\sqrt{x^2-4x+3}\geqslant 0$ وطرف راست نامعادله منفی خواهد بود بنابراین $x\geqslant 3$ جواب مسئله است. اگر $x\leqslant 1$ آنگاه $2-x>0$ لذا دراین‌حالت‌می‌توان هردو طرف نامساوی را مربـع کرد. نامعادلـه هم‌ارز با آن عبارتست‌از ،

$$x^2-4x+3\geqslant 4-4x+x^2$$

$$3\geqslant 4$$

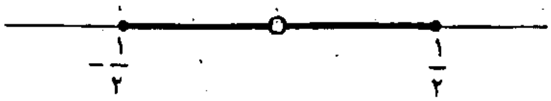
یعنی دربازهٔ $(-\infty,1)$ نامعادله جواب‌ندارد. پس مجموعهٔ جواب عبارتست‌از $[3,+\infty)$.

مثال ۲. نامعادله زیر را حل‌کنید

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}>\frac{3}{2}$$

حل ـ طرف چپ نامعادله بامعنی است اگر وفقط اگر

$$x\neq 0\ ,\ |x|\leqslant\frac{1}{2}$$



بدیهی است که اگر $-\frac{1}{2}\leqslant x<0$ آنگاه طرف‌چپ‌نامعادله منفی است درنتیجه، نامعادلـه جـواب نـدارد. فـرض کنیم

$0<x<\frac{1}{2}$ نامعادله را به‌صورت زیر می‌توان نوشت

$$\sqrt{1-4x^2}<1-\frac{3}{2}x$$

که هر دوطرف نامعادله درفاصلهٔ مذکور مثبت است. بنابراین هر دوطرف را مربع می‌کنیم و نامعادلهٔ هم‌ارز زیر بدست می‌آید.

$$1-4x^2<1+\frac{9}{4}x^2-3x$$

$$\frac{25}{4}x^2-3x>0 \Leftrightarrow \frac{25}{4}x-3>0 \Leftrightarrow x>\frac{12}{25}$$

درنتیجه جواب مشترك عبارتست‌از $\frac{12}{25}<x\leqslant\frac{1}{2}$ ، یعنی $(\frac{12}{25},\frac{1}{2}]$.

مثال ۳. نامعادله زیر را حل کنید

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-5}\geqslant\sqrt{5-2x}$$

حل ـ هر دوطرف نامعادله وقتی با معنی است که،

$$\begin{cases}2x-5\geqslant 0\\ 5-2x\geqslant 0\\ 2x+2\geqslant 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{5}{2}\\ \\ 2x+1\geqslant 0\end{cases} \Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

یعنی دوطرف نامعادله فقط در $x=\frac{5}{2}$ تعریف شده است وبه آسانی می‌توان نشان داد که $x=\frac{5}{2}$ در نامعادله صدق می‌کند پس $x=\frac{5}{2}$ جواب مسئله است.

نامعادلات با قدرمطلق.

در ریاضیات مقدماتی، اغلب به نامعادلاتی یك متغیر برمی‌خوریم که شامل قدرمطلق است‌برای این نوع نامعادلات بهتر است محور اعداد را به بازه‌هائی تقسیم کنیم بطوری که درهریك از این بازه‌ها نامعادله را بتوان بدون استفاده ازقدر مطلق بیان کرد.

مثال ۱. نامعادله زیر را حل کنید

$$x^2-|5x+6|>0 .$$

حل ـ ابتدامحوراعدادرا به‌بازه‌های $(-\infty,-\frac{6}{5})$ و $[-\frac{6}{5},+\infty)$ تقسیم می‌کنیم بطوری که نامعادلـه را بتوان روی هریك از فاصله‌ها بدون قدرمطلق بیان کرد.

دربازهٔ $(-\infty,-\frac{6}{5})$ داریم

$$|5x+6|=-5x-6$$
$$x^2+5x+6>0$$
$$(x+3)(x+2)>0$$

از حل این نامعادله خواهیم داشت،

$$x\in(-\infty,-3)\cup(-2,+\infty)$$

که اگربا بازهٔ $(-\infty,-\frac{6}{5})$ اشتراك بگیریم جـواب نامعادله دراین بازه عبارتست‌از

$$(-\infty,-3)\cup(-2,-\frac{6}{5})$$

دربازهٔ $(-\frac{6}{5},+\infty)$ داریـم $|5x+6|=5x-6$

بنابراین،

$$x^2-50-6>0$$
$$(x+1)(x-6)>0$$

جواب عبارتست‌از $x\in-\infty,-1)\cup(6,+\infty)$. اگر با بازهٔ $[-\frac{6}{5},+\infty)$ اشتـراك بگیریـم جـواب مسئلـه عبارتست‌از :

$$[-\frac{6}{5},-1)\cup(6,+\infty) .$$

بنابراین جواب نامعادله بصورت زیر است.

$$(-\infty,-3)\cup(-2,-\frac{6}{5})\cup[-\frac{6}{5},-1]\cup(6,+\infty)$$

یا،

$$(-\infty,-3)\cup(-2,-1]\cup(6,+\infty).$$

مثال ۲. نامعادله زیر راحل کنید.

$$\frac{|2x-1|}{x^2-x-2}>\frac{1}{2}$$

حل ـ محور اعداد را به دوبازهٔ $(-\infty,\frac{1}{2})$ و $[\frac{1}{2},+\infty)$ تقسیم می‌کنیم. اگر $x\in[\frac{1}{2},+\infty)$ داریم $x\geqslant\frac{1}{2}$. بنابراین نامعادله را می‌توان بصورت زیر بدون قدر مطلق نوشت

$$\frac{2x-1}{x^2-x-2}>\frac{1}{2}$$

که یک نامعادله گویا است و بصورت زیر خلاصه می‌کنیم

$$\frac{2x-1}{x^2-x-2}-\frac{1}{2}>0$$

$$\frac{x(5-x)}{(x+1)(x-2)}>0$$

با استفاده از روش بازه‌ها جواب این نامعادله عبارتست‌از،

$x\in(-1,0)\cup(2,5)$

اگر اشتراک این مجموعه را با $x\geqslant\frac{1}{2}$ بگیریم،مجموعهٔ جواب عبارتست‌از $(2,5)$.

اگر $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ نامعادله بصورت زیر بدست می‌آید

$$\frac{-(2x-1)}{x^2-x-2}>\frac{1}{2}$$

$$\frac{(1-x)(x+4)}{(x+1)(x-2)}>0.$$

با استفاده از روش بازه‌ها مجموعه جواب عبارتست‌از،

$x\in(-4,-1)\cup(1,2)$

که با توجه به $x<\frac{1}{2}$ جواب $(-4,-1)$ بدست می‌آید،

درنتیجه مجموعهٔ جواب نامعادله عبارتست‌از اجتماع دوجواب یعنی، $(2,5)\cup(-4,-1)$.

مثال ۳. نامعادله زیر را حل کنید

$|x-1|+|x+1|<4$

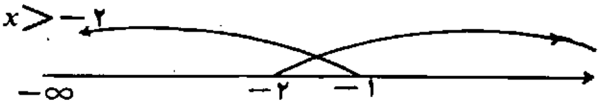
حل- با توجه به ریشه‌های معادله $x+1=0$ و $x-1=0$ که عبارتست از ۱- و ۱ بنابراین محور اعداد را به سه بازه به‌صورت $(-\infty,-1)$، $(-1,1)$، و $(1,+\infty)$ تقسیم می‌کنیم در بازه $(-\infty,-1)$،

$x-1<0,\ x+1<0$

$-x+1-x-1<4$

$-2x<4$

$x>-2$



دراین حالت جواب عبارتست‌از $(-2,-1)$.

دربازهٔ $x\in(-1,1)$، $x-1<0,\ x+1>0$

$x-1-x-1<4$

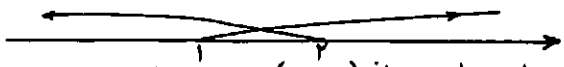
$-2<4$

یعنی دراین بازه نامعادله همواره برقرار است.

دربازهٔ $(1,+\infty)$، $x-1>0,\ x+1>0$

$x-1+x+1<4$

$x<2$

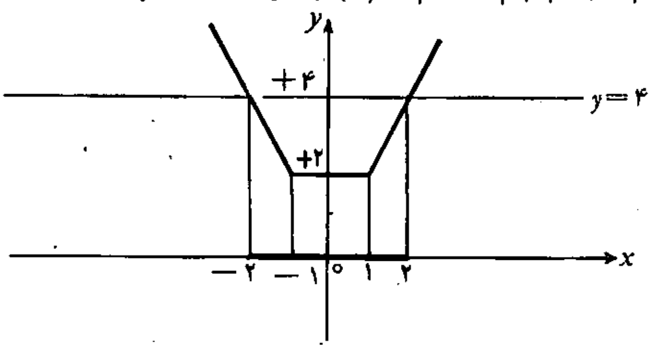


پس جواب عبارتست‌از $(1,2)$.

بنابراین مجموعهٔ جواب بصورت زیر است

$(-2,-1)\cup(-1,+1)\cup(1,2)=(-2,+2)$

این نتیجه، از لحاظ هندسی‌نیز روشن است درشکل زیرنمودار تابع نشان می‌دهد در حالتی که $x\in(-2,2)$ نمودار $f(x)=|x-1|+|x+1|$ زیر خط $y=4$ است.



نامعادلات با پارامتر

حل نامعادلات یك متغیر با یك یا چند پارامتر بدیهی است که به‌مراتب مشکل‌تر از حل نامعادله بدون پارامتر است و این امر طبیعی است. برای مثال نامعادلهٔ

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a \qquad (1)$$

که شامل پارامتر a است درنظر می‌گیریم، کاملاً روشن است که حل نامعادله (۱) درمقایسه با حل نامعادله

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}>1 \qquad (2)$$

به‌کوشش زیادی‌نیاز دارد. وقتی یك نامعادله پارامتری راحل می‌کنیم نه‌تنها یك نامعادله بلکه خانواده‌ای از نامعادلات را حل می‌کنیم و به‌ازای تغییرات پارامترجواب نامعادله رامشخص می‌کنیم. بدیهی‌است که نامعادلهٔ (۲)، حالت‌خاصی ازنامعادلهٔ (۱)، به‌ازای $a=1$ است. پس حل یك نامعادلهٔ شامل‌پارامتر بدین‌معنی است‌که تعیین می‌کنیم به‌ازای چه‌مقادیری از پارامتر نامعادله دارای جواب است و سپس به‌ازای همهٔ مقادیر ممکنهٔ پارامتر جوابهای معادله را بدست می‌آوریم . لازم به توضیح است که نامعادلهٔ پارامتری را باید به ازای همهٔ مقادیر ممکنهٔ پارامتر حل وبحث‌کرد. لذا اگر به‌ازای یك مقدار از پارامتر در بحث غفلت شود درآن صورت جواب بدست آمده کامل نخواهد بود.

مثال ۱. نامعادله زیر را حل کنید.

$$x-2\frac{a-1}{a}\leqslant\frac{2}{3a}(x+1).$$

حل ـ بدیهی است که به ازای $a=0$ هر دو طرف نامعادله بی‌معنی است. فرض کنیم $a\neq 0$ نامعادله را بصورت زیر می‌نویسیم.

$$\left(1-\frac{2}{3a}\right)x\leqslant 2\left(1-\frac{2}{3a}\right)$$

اگر $1-\frac{2}{3a}>0$ آنگاه $x\leqslant 2$. از حل $1-\frac{2}{3a}>0$ نتیجه می‌گیریم $a<0$ یا $a>\frac{2}{3}$.

بنابراین اگر $a<0$ یا $a>\frac{2}{3}$ آنگاه $x\leqslant 2$ و اگر $1-\frac{2}{3a}<0$ یا بعبارت معادل $0<a<\frac{2}{3}$ آنگاه $x\geqslant 2$ و

بالاخره اگر $a=\frac{2}{3}$ آنگاه x هر عدد حقیقی می‌تواند باشد.

بنابراین بطور خلاصه می‌توان نوشت

آ) اگر $a<0$ آنگاه $x\in(-\infty , 2]$

ب) اگر $a=0$ نامعادله جواب ندارد

پ) اگر $0<a<\frac{2}{3}$ آنگاه $x\in[2 , +\infty)$

ج) اگر $a=\frac{2}{3}$ آنگاه $x\in(-\infty , +\infty)$

د) اگر $a>\frac{2}{3}$ آنگاه $x\in(-\infty , 2]$

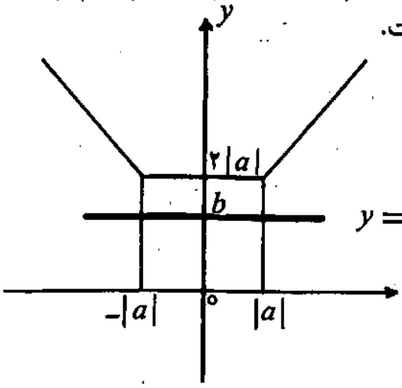
مثال ۲. نامعادله زیر را حل کنید

$$|x-a|+|x+a|<b \qquad (a\neq 0)$$

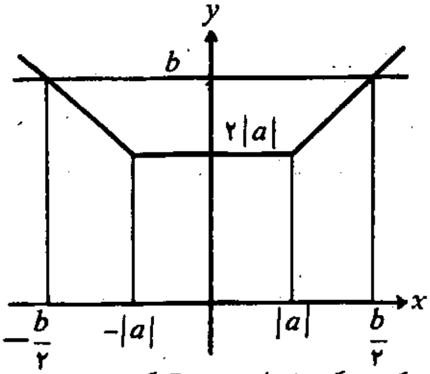
حل ـ حالت خاصی از این نامعادله درحالتی که $a=1$ و $b=4$ در مثال ۳ حل شد و از لحاظ هندسی نمودار آن بررسی شد. این نامعادله با دو پارامتر داده شده است برای حل آن از نمودار هندسی استفاده می‌کنیم. درشکل زیر نمودار توابع،

$$y=f(x)=|x-a|+|x+a| \quad , \quad y=b$$

رسم شده است.



(شکل ۱)



(شکل ۲)

بدیهی است که اگر $b\leqslant 2|a|$ آنگاه خط $y=b$ نمی‌تواند بالاتر از قسمت افقی نمودار $y=|x-a|+|x+a|$ باشد و در نتیجه، دراین حالت نامعادله جوابی ندارد. (شکل۱) اگر $b>2|a|$ آنگاه همواره خط افقی $y=b$ نمودار تابع $y=f(x)$ را در دو نقطه $\left(-\frac{b}{2} , b\right)$ و $\left(\frac{b}{2} , b\right)$ قطع می‌کند. (شکل ۲). و دراین حالت جواب نامعادله عبارتست از $-\frac{b}{2}<x<\frac{b}{2}$ که دراین فاصله نمودار تابع زیرخط $y=b$ واقع است. بنابراین اگر $b<2|a|$ نامعادله جواب ندارد. و درحالتی که $b>2|a|$ جواب نامعادله عبارتست از

$$x\in\left(-\frac{b}{2} , \frac{b}{2}\right)$$

مثال ۳. نامعادله زیر را حل کنید

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a.$$

حل ـ طرف چپ این نامعادله وقتی با معنی است که x ، a در دستگاه نامعادلات زیر صدق کند

$$\begin{cases} a+x\geqslant 0 \\ a-x\geqslant 0 \end{cases}$$

اگر $a<0$ بدیهی است که نامعادله جواب ندارد (زیرا از جمع دو نامعادله دستگاه داریم $2a\geqslant 0$) اگر $a=0$ از دستگاه نتیجه می‌شود $x=0$ ولی $a=0$ و $x=0$ در نامعادله صدق نمی‌کند و بالاخره اگر $a>0$ آنگاه جواب دستگاه عبارتست از $x\in[-a , a]$ حال با استفاده از این دو شرط $a>0$ و $|x|<a$ ، می‌توانیم دو طرف نامعادله را مجذور کنیم داریم

$$2a+2\sqrt{a^2-x^2}>a^2$$

$$2\sqrt{a^2-x^2}>a^2-2a$$

سه حالت در نظر می‌گیریم

۱ـ $a^2-2a<0$ به عبارت معادل $0<a<2$. لذا اگر $0<a<2$ چون طرف چپ نامعادله همواره نامنفی و طرف راست منفی است پس به ازای جمیع $-a\leqslant x\leqslant a$

نامعادله برقرار است.

۲ـ اگر $a^2-2a=0$ داریم $a=0$ یا $a=2$ درنتیجه $a=2$ ، خواهیم داشت

$$2\sqrt{4-x^2}>0$$

واین نامعادله وقتی برقرار است که $-2<x<2$.

۳ـ اگر $a^2-2a>0$ یا به عبارت معادل $a>2$. در این صورت هردو طرف نا معادله را مجذور می‌کنیم

$$4(a^2-x^2)>a^4-4a^3+4a^2$$

که می‌توان به‌صورت زیر ساده کرد

$$-4x^2>a^3(a-4) \iff x^2<\frac{a^3(4-a)}{4} \qquad (1)$$

بدیهی است که برای $a\geqslant 4$ ، این نامعادله جواب ندارد و در حالتی که $2<a<4$ جواب نامعادله (۱) همهٔ مقادیری از x است که،

$$|x|<\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}$$

$$-\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}<x<\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}$$

آیااین‌مقادیربه دست آمده جوابهای نامعادلهٔ اصلی هستند. این بستگی دارد به‌اینکه مقادیر بیان شدهٔ $\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}$ به‌ازای $a\in(2,4)$ از a بزرگترنباشد. زیرا مقادیرمتغیر x را درفاصلهٔ $-a<x<a$ درنظر گرفته‌ایم. اکنون ثابت می‌کنیم که از a نمی‌تواند بیشتر باشد یعنی،

$$\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}\leqslant a \iff \frac{\sqrt{a(4-a)}}{2}\leqslant 1$$

یا به‌عبارت معادل

$$a^2-4a+4\geqslant 0.$$

یعنی $(a-2)^2\geqslant 0$ و این همواره برقرار است پس حکم ثابت است بنابراین بطور خلاصه می‌توان گفت

آ) اگر $a\leqslant 0$ نامعادله جواب ندارد

ب) اگر $0<a<2$ آنگاه $x\in[-a,a]$

پ) اگر $a=2$ آنگاه $x\in(-2,2)$

ت) اگر $2<a<4$ ،

$$x\in\left(-\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2},\ \frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}\right)$$

د) اگر $a\geqslant 4$ ، نامعادله جواب ندارد.

تمرین.

۱ـ نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{(2-x^2)(x-3)^3}{(x+1)(x^2-3x-4)}\geqslant 0$$

$$\sqrt{x^2-40x+39}\leqslant x-1$$

$$\left|x-\frac{4}{x}-2\right|\geqslant 1$$

$$\frac{2a+1}{ax-3x-2a+6}\geqslant\frac{x}{x-2}$$

۲ـ قلمرو تابع زیر را تعیین کنید

$$f(x)=\sqrt{\frac{2x+1}{x-2}-\frac{x+4}{2x+5}}$$

۳ـ به‌ازای چه‌مقادیری از a ریشه‌های (صفرهای) تابع

$$f(x)=(a-2)x^2+2ax+a+3$$

دربازهٔ $(-2,1)$ قرار دارد.

۴ـ نامعادلات زیر را حل کنید

$$\frac{8+4x}{4x+x^2}<\frac{2}{x}+\frac{3}{4+x}$$

$$\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{(x+2)^2}\geqslant\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x}$$

۵ـ قلمرو تابع زیر را تعیین کنید

$$f(x)=\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-\frac{x^2+2x-2}{3+2x-x^2}}}$$

۶ـ نامعادلات زیر را حل کنید

$$\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}\geqslant x-2 \qquad \sqrt{\left(\frac{x+1}{3+2x}\right)^2}>1$$

$$\big||x|-1\big|\geqslant\sqrt{x^2-1}$$

$$\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2-3|x-3|}{x^2-5x+6}\geqslant 1$$

$$x+\sqrt{a-x}>0 \qquad (a\geqslant 0)$$

$$|x-a|+|x|+|x+a|\leqslant b$$

۷ـ به ازای چه مقادیری از a یکی از ریشه‌ها بزرگتر از ۱ و دیگری کوچکتر از ۱ است

$$(2a+1)x^2-ax+a-2=0$$

منبع:

High - School Mathematics
Under the editorship of Professor G. N. YAKOVLEV, D. Sc. Part 1.
MIR. PUBLISHERS. MOSCOW.

قرینه‌سازی جبری به عنوان مسألهٔ جهانی

دکتر ارسلان شادمان

۱. مقدمه

هنگام ساختن دستگاههای ریاضی از روی دستگاهی مفروض، ما به‌مسائلی برخورد می‌کنیم که برخی از آنها مسائل جهانی‌اند. دراین مقاله به‌یکی از آنها می‌پردازیم که موضوع آن قرینه‌سازی است.

به عنوان مثال اگر یك عدد ثابت a و مجموعهٔ اعداد طبیعی n راکه $n \geqslant a$ درنظر بگیریم و X بنامیم. بدیهی است که X برای‌جمع $(+)$ پایدار است. پس $(X ، +)$ یك‌دستگاه جبری‌است. هم‌چنین X برای ضرب $(.)$ پایدار است. به‌علاوه $(X،+)$ از قاعدهٔ حذف پیروی می کند. هم‌چنین اگر $a \geqslant 1$، $(X،.)$ نیز از قاعدهٔ حذف پیروی می کند. دراین دو مثال می‌خواهیم به‌بهترین شکل معقول ازدستگاه مفروض یك گروه بسازیم. منظور از «بهترین شکل معقول» را ذیلاً روشن‌می کنیم:

به طور کلی، با در دست داشتن یك دستگاه $(X ، T)$ متشکل ازیك مجموعهٔ ناتهی X ویك عمل دوتایی T روی X، درجستجوی زوج مرتب (A,φ) هستیم که A یك گروه آبلی و $\varphi : X \to A$ یك نشاندن (X,T) در A باشد به قسمی که برای هرزوج مرتب (B,ψ) متشکل ازیك گروه آبلی B ویك نشاندن $\psi : X \to B$، یك وتنها یك هومومورفیسم گروه $f : A \to B$ موجودباشد به‌قسمی‌که $f \circ \varphi = \psi$. معمولاً این برابری‌را باقید (ن ج) یا (DC) یا (CD) درکنارنمودارهای زیر مجسم و ملموس می‌سازند:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

(ن ج ۱)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\varphi"'] & X \arrow[d, "\psi"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

(ن ج ۲)

منظور ما از مسألهٔ جزئی مورد بحث همین است.

خواهیم دید که‌شرط لازم وکافی برای وجود جواب آن است که عمل T شرکت‌پذیر، جابجائی وپیرو قاعدهٔ حذف‌باشد. به‌علاوه گروه A با تقریب ایزومورفیسم یکتا است. ساختن‌یك نمونهٔ A از روی «تناسب» وابسته به عمل T کاری است ساده شبیه ساختن Z بر مبنای تناسب حسابی یا ساختن $(Q^{+},\cdot)$ از روی‌تناسب هندسی. اصولاً شیوهٔ‌طرح وحل مسأله نشان‌می‌دهد که به‌چه علت «تناسب وابسته به‌عمل T» دخالت می کند.

ازنظر منابع، قسمت اساسی‌کار یعنی ساختن گروه آبلی A ونگاشت φ درمنابع‌خارجی‌وفارسی ازقبیل‌کتاب ریاضیات عمومی پیزووزامانسکی به زبان فرانسه (۱۹۵۹) صفحات ۳۱ و ۳۲ وکتاب معروف مقدمه بر آنالیز نوین‌آوانیسیان (۱۳۴۵) صفحات ۶۱ تا ۶۶ مشروح‌افتاده‌است. ازآنجاکه منبع‌اخیر نخستین منبع‌فارسی است که به‌درج‌مطلب‌پرداخته‌است،صورت‌قضیه‌را ازآن نقل‌می کنیم: «قضیه‌مقارنت ... فرض می کنیم مجموعهٔ E دارای یك عمل ترکیب داخلی انجمنی و جابجائی T بوده و هرنقطهٔ E برای این قانون عادی باشد، دراین صورت مجموعه‌ای مانند E موجود است که دارای خواص زیر می‌باشد:

۱ـ E یك گروه جابجائی است؛

۲ـ مجموعهٔ E با بخشی‌ازمجموعهٔ $\overline{E}$ ایزومورف‌است.»

اما جهانی بودن مسأله درمنابع نسبتاً جدید ازقبیل کتاب جبرکهن به‌زبان انگلیسی (۱۹۷۴) صفحهٔ ۱۲۱ وکتاب‌راهنمای

معلم ریاضیات راهنمایی سال اول تالیف آذری، باهمت، ثقفی، شادمان وفرهودی مقدم (۱۳۶۴) صفحات ۱۱۹ تا ۱۵۹ آمده است. درکتاب نظریهٔ گروهها بـه‌زبان فرانسه تالیف دوبری (۱۹۷۲) صفحات ۸۳ تـا ۸۵ انشای مشروحی باهمین عنوان وجود دارد.

از نظر انگیزهٔ ارجاع مقاله، به این مجله و خوانندگان احتمالی مقاله استقبالی که مدرسین برجستهٔ وزارت آمـوزش و پرورش دردورهٔ کارآموزی ریاضی تابستان ۱۳۶۴ ودر طول سال تحصیلی ۶۵–۱۳۶۴ ازاین مسألهٔ جهانی نمودند، نویسنده برآن شد که موضوع را برای طیف وسیعتری از خوانندگان تقدیم نماید تامحدود به دبیران ریاضی راهنمائی ومدرسین آنان نشود. ازنظر نویسنده، خوانندهٔ مقاله ممکن است دبیران ریاضی دبیرستان وراهنمایی، دانشجویان ریاضی (محضی–کاربردی – دبیری)، دانشجویان ریاضی دانشسراهای تربیت معلم، دانشجویان رشته‌های فیزیک، مهندسی، آمار وحتی دانش‌آموزان برجستهٔ سوم وچهارم ریاضی فیزیک دبیرستانها (با برنامهٔ فعلی) باشند. از این‌رو مقاله خودکفا نوشته شده است جزمطالب ریاضیات جدید اول ودوم دبیرستان که دانسته فرض شده‌اند، مراجعه به سایر منابع فقط برای ازدیاد معلومات مفید است وگـر نه از نظر درک مقالـه اجتناب‌پذیر است. البته مقدار پختگی یاشور و علاقهٔ خوانندهٔ برداشت اورا متفاوت باخوانندهٔ دیگرمی‌کند. گستردگی طیف خوانندگان به‌همین معنا است.

خودکفائی واختلاف سلیقه‌هائی که در کتب مختلف هنوز به‌چشم می‌خورد، نویسنده را واداشت تا تعاریف ویادآوریهائی را پس‌از مقدمه بیاورد. خوانندگان پیشرفته‌تر می‌توانند از بند ۲ نخوانده بگذرند و به بند ۳ بپردازند. مفاهیم مطرح شده در بند ۲ عبارتند از: زوج مـرتب، حاصلضرب دکارتی، رابطه‌از A به B، عکس‌رابطه، سایه‌مستقیم ومعکوس بخشهادرروابط، دامنه وبرد رابطه، رابطه پوشا، رابطهٔ یکبیک، تابع، نگاشت نگاشت، دوسوئی، نگاشت‌همانی، ترکیب‌دورابطه، عمل‌روی‌یک‌مجموعه، رابطهٔ دوتایی دریک‌مجموعه، خاصیتهای شرکتپذیری، جابجائی و حذف دراعمال. خاصیتهای انعکاسی، تعـدی، تقارن، پادتقارن درروابط دوتایی. رابطهٔ هم‌ارزی، رده‌های هم‌ارزی، بخشبندی (= افراز) ومجموعهٔ خارج قسمت.

دربند ۳، مفهوم دستگاه، دستگاه جبری ساده، گروه آبلی، هومومورفیسم، ایـزومورفیسم، بخش پایـدار تعریف می‌شود. فهرست کوتاهی ازمطالب ساده (قضیه یـا تمرین درسطح دوم دبیرستان) می‌آیـد. نشاندن و شـرط لازم آن تعریف واثبات می‌شود. دربنـد ۴، گـروه ونشاندن دستگاه درگـروه تعریف می‌شود وثابت می‌شود که یک دستگاه متناهی هنگامی قابل نشاندن دریک گروه است کـه خودش گروه باشد. دربند ۵، مجدداً به حالت آبلی باز می‌گردیم و زیرگروه پدید آمده را تعریف و کاربردش را درنشاندن بررسی می‌کنیم. کلید حل مسألهٔ جهانی مورد بحث ودلیل دخالت تناسب درهمین جـا است. دربند ۶ مسألهٔ جهانی مورد بحث به طور مشروط حل می‌شود: مشروط برآنکه یک نشاندن خصوصی دردست باشد. دربند ۷ به‌اتکای تناسب ومطابق‌روش معمول، یک نشاندن متعارف ساخته‌می‌شود. حل مسأله نیزخاتمه می‌پذیرد. واژه‌هائی با معادلهایشان وتعداد کمی مرجع پایان بخش مقاله‌اند[1].

۲. تعاریف و یادآوری

زوج‌مرتب (a,b) یعنی $\{\{a\},\{a,b\}\}$. حاصلضرب دکارتی $A\times B$ یعنی مجموعهٔ زوجهای مرتب (a,b) که $a\in A$ و $b\in B$. یک‌رابطه‌از A به B یعنی زیرمجموعه‌ای (= بخشی) از $A\times B$. اگر $f\subset A\times B$ رابطه‌ای از A به B باشد، afb یعنی $(a,b)\in f$. عکس رابطهٔ $f\subset A\times B$ رابطهٔ f' از B به A است که‌چنین تعریف می‌شـود: $f'=\{(b,a)|afb\}$. پس $bf'a$ اگر و تنها اگر afb. فرض‌کنیم $f\subset A\times B$، $X\subset A$ و $Y\subset B$؛ دراین‌صورت، سایه مستقیم X تحت f که بانماد $f(X)$ نمایش می‌دهند، یعنی

$$f(X)=\{y\in B|\exists x(x\in X\wedge xfy)\}$$

سایه معکوس y تحت f یعنی سایـه مستقیم y تحت f'، و یا $f'(y)$. پس:

$$f'(y)=\{x\in A|\exists y(y\in Y\wedge xfy)\}.$$

دامنهٔ f یعنی $f'(B)$ که بانماد D_f نیز نمایش می‌دهند. برد f

۱ـ لازم می‌داند علاوه برهمکاران تألیف‌کتاب ریاضیات اول و دوم راهنمایی، از مـدرسین شرکت‌کننده در دورهٔ تابستان ۱۳۶۴ تشکر نمأید. همانطورکه ملاحظه می‌کنید چـهرهٔ مقاله با محتوای‌کتاب راهنمای اول متفاوت است. خصوصاً بندهای ۴ و ۵ و ۶ نسبت به‌کتاب نامبرده تازگی دارد.

یعنی $f(A)$ که بانماد R_f نیز نمایش می‌دهند.

رابطهٔ $f\subset A\times B$ را یکبیك گویند هرگاه برای هر $y\in B$، $f'(\{y\})$ یا تهی باشد یا فقط یك عضو داشته باشد. به‌عبارت دیگر f رابطه‌ای یکبیك است یعنی

$$(\forall y\forall x_1\forall x_2(x_1fy\wedge x_2fy\Longrightarrow x_1=x_2).$$

رابطه $f\subset A\times B$ را تابع گویند هرگاه رابطه وعکس آن یکبیك باشد ویا:

$$\forall x\forall y_1\forall y_2(xfy_1\wedge xfy_2\Longrightarrow y_1=y_2).$$

رابطهٔ fرا پوشا گویندهرگاه $B=f(A)$. رابطهٔ f رانگاشت گویند هرگاه اولاً تابع باشد، ثانیاً دامنهٔ آن همهٔ A باشد. به عبارت دیگر، نگاشت یعنی تابع همه‌جا معین. نگاشت همانی مجموعهٔ A یعنی رابطهٔ قطری یا برابری $\{(x,x)|x\in A\}$. چنانچه f تابع باشد، $y=f(x)$ یعنی xfy. پس نگاشت همانی id_A با دستور $id_A(x)=x$ مشخص می‌شود چنانچه f نگاشت از A به B باشد، ازنماد

$$f: A\to B$$

استفاده می‌شود، گاهی نیز نماد $A\xrightarrow{f}B$ یا $A\underset{f}{\to}B$ به همین منظور بکار می‌رود.

ترکیب روابط: اگر $f\subset A\times B$ و $g\subset B\times C$، می‌گوئیم g قابل ترکیب با f است وحاصل‌ترکیب را بانماد $g\circ f$ نمایش می‌دهیم که رابطه‌ای از A به C است وبا دستور زیر تعریف می‌شود.

یك y هست که $y\in Y, xfy, ygz$، اگر و تنها اگر، $x(g\circ f)z$.

به‌سادگی دیده می‌شود که حاصل ترکیب دوتابع (قابل ترکیب) یك تابع است، حاصل ترکیب دو نگاشت (قابل ترکیب) یك نگاشت است. ترکیب بانگاشت همانی، روابط را تغییرنمی‌دهد: از $f\subset A\times B$ نتیجه می‌شود $f\circ id_A=f$، $id_B\circ f=f$. خصوصاً اگر $f: A\to B$ نگاشت باشد، این مطلب را با (ن ج) بیان می‌کنیم:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "id"] \\ & B \end{tikzcd}$$

(ن ج)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "di"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

(ن ج)

نمودار جابجائی در نگاشتها به این معنی است که با ترکیبهای مختلف ممکن، نگاشتهای مرکب فقط بستگی به ابتدا وانتها دارند نه‌انتخاب «مسیرها». مثلاً قید (ن ج)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

(ن ج)

درکنار نمودار فوق می‌گویند $h=g\circ f$. یك نگاشت $f: A\to B$ را دوسوئی گویند هرگاه پوشا ویکبیك باشد. برای آنکه رابطهٔ $f\subset A\times B$ یك نگاشت دو سوئی باشد، لازم وکافی است که $f'\circ f=id_A$ و $f\circ f'=id_B$. در این صورت، f' را با f^{-1} نیز نمایش می‌دهند و نگاشت عکس‌یا نگاشت معکوس یا نگاشت وارون f گویند

اعمال: یك‌عمل روی‌مجموعهٔ A نگاشتی‌است از $A\times A$ به A. چنانچه T یك عمل روی A باشد، به جای $T((x,y))$ متداول است ازنماد xTy استفاده‌کنند، گاهی نیزنماد دیگری را انتخاب‌کرده وبین x و y قرار می‌دهند مانند $x.y$، $x+y$، $x\times y$، $y*y$، $x\circ y$ . . . —. درمتن به‌قدرکافی احتیاط شده تا $x\top y$ به‌عنوان عضوی از A، حاصل ترکیب x با y تحت عمل T، با xfy به‌معنی $(x,y)\in f$ اشتباه نشود. لفظ قانون ترکیب داخلی نیز به‌جای عمل بکار رفته است. خاصیتهای شرکتپذیری، جابجائی، پیروی از قاعدهٔ حذف به‌مفهوم زیراند (همواره به‌معنی منطقی درعالم سخن A است):

شرکتپذیری: همواره $(aTb)Tc=aT(bTc)$

جابجایی: همواره $aTb=bTa$

حذف از راست: همواره $xTa=yTa\Rightarrow x=y$

حذف از چپ: همواره $aTx=aTy\Rightarrow x=y$

حذف: حذف از راست و از چپ.

علاوه برنگاشتها و اعمال، روابط مهم دیگری نیز درمقدمات ریاضی مطرح‌اند خصوصاً روابط دوتایی در یك مجموعه. **یك رابطهٔ دوتایی G_2 در مجموعهٔ A** یعنی رابطه‌ای از A به A، به عبارت‌دیگربخشی‌از $A\times A$ را رابطهٔ‌دوتایی‌در A گوییم.

فرض‌کنیم $f\subset A\times A$ یك رابطهٔ دوتایی در A باشد. خاصیتهای انعکاس (بازتابی)، تعدی، تقارن و پادتقارن، با نمادهای فوق ساده‌تر بیان می‌شوند:

انعکاس f یعنی $id_A\subset f$؛ تعدی f یعنی $f\circ f\subset f$؛ تقارن f یعنی $f'\subset f$ (و در نتیجه $f'=f$). پادتقارن f یعنی $f\cap f'\subset id_A$.

رابطهٔ هم‌ارزی در A رابطه‌ای است دوتایی در A که

خاصیتهای انعکاس) (= بازتابی)، تعدی و تقارن را داشته باشد. رابطهٔ ترتیب (جزئی وسیع) در A رابطه‌ای است دوتایی که خاصیتهای انعکاس، تعدی و پادتقارن را داشته باشد. در این مقاله از ترتیب استفاده نخواهیم کرد ولی هم‌ارزی اهمیت اساسی دارد.

فرض کنیم R یك رابطهٔ هم‌ارزی در A باشد. ردهٔ هم‌ارزی هرعضو $x\in A$ یعنی $R(\{x\})$:

$$R(\{x\})=\{y\in A|xRy\}.$$

مجموعه‌های $R(\{x\})$ برای xهای دلخواه عضو A، تشکیل یك بخشبندی (= افراز) A را می‌دهند:

هیچیك از آنها تهی نیست، اجتماعشان برابر A است، دو به دو یا منطبق یا جدا ازهم‌اند.

مجموعهٔ خارج‌قسمت $\frac{A}{R}$ یعنی مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی.

پس

$$\frac{A}{R}=\{R(\{x\})|x\in A\}.$$

گاهی برای سهولت به‌جای $R(\{x\})$ از نماد $R(x)$ استفاده می‌شود، گاهی نیز نماد $[x]$ یا $\tilde{x}$ بکار می‌رود.

۳. نشاندن دستگاه در گروه آبلی، شرایط لازم.

یك دستگاه ریاضی معمولاً[2] [مصاحب ۱۳۴۸، ص۶۶۸] مجموعه‌ای است ناتهی با اعمالی در آن و اعضای خاصی از آن و روابطی (= نسبتهائی) در آن مانند

$$(A;O_1,\dots,O_n;\alpha_1\dots,\alpha_m;R_1,\dots,R_s)$$

که A مجموعهٔ زیربنا، S_o اعمال، α ها اعضای خاص، Rها روابط موردنظرند. اندکی کلیتر و درعین حال ساده‌تر، چهارگانه‌ای مانند $(A;\mathcal{O};\mathcal{E};\mathcal{R})$ که A مجموعه‌ای از مجموعه‌ها، $\mathcal{O}$ مجموعه‌ای از اعمال عام، $\mathcal{E}$ مجموعه‌ای از اعضای خاص و $\mathcal{R}$ مجموعه‌ای از روابط باشد، یك دستگاه ریاضی است که منظور از عمل عام نگاشتی از یك حاصلضرب مجموعه‌ها به مجموعه است. بدین شکل فضاهای برداری و جبرهای حقیقی وغیره نیز منظورمی‌شود. اما هدف ما آن نیست که در دستگاه‌های ریاضی خیلی کلی صحبت کنیم، بلکه برعکس ساده‌ترین حالات مورد توجه ما است. ساده‌ترین دستگاه یك مجموعهٔ ناتهی (A) است. ازاین‌که بگذریم، دستگاهی با تنها یك عمل $(A,\circ)$، دستگاهی با تنها یك عضو $(A;\alpha)$، دستگاهی با تنها یك رابطه $(A;R)$ از ساده‌ترین دستگاهها محسوب می‌شوند. آنچه بیشتر مورد توجه ما است دودستگاه زیر است که رسماً تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱. منظور ازیك «دستگاه جبری ساده» دوگانه‌ای است مانند $(X;\top)$ که X مجموعه‌ای ناتهی و $\top$ یك عمل روی X است.

تعریف ۲. منظور از یك «گروه آبلی» سه‌گانه‌ای است مانند $(A;+;\alpha)$ که A مجموعه‌ای است ناتهی و $+$ یك عمل روی A و α عضوی از A است به‌قسمی که عمل $+$ شرکتپذیر وجابجائی باشد و به‌علاوه:

اولاً- برای هر $x\in A$، $x+\alpha=x$؛

ثانیاً- برای هر $x\in A$ یك $y\in A$ موجود باشد به‌قسمی که $x+y=\alpha$. تفاوت اندکی بین تعریف۲ وتعریف گروه آبلی درکتاب دبیرستانی به چشم می‌خورد بدین‌شکل که ما «عضو بی‌اثر» α راجزء داده‌های گروه آورده‌ایم. بدین ترتیب، تعریف منطقی گروه اندکی ساده‌تر می‌شود. یکتائی عضو بی‌اثر را می‌توان چنین بیان نمود: اگر $(A;+;\alpha)$ و $(A;+;\beta)$ گروه آبلی باشند (مجموعهٔ زیربنا وعمل در هردو یکی است)، آنگاه $\alpha=\beta$. هم‌چنین برای هر x تنها یك y هست که $x+y=\alpha$. این یگانه y وابسته به x را «قرینهٔ x» می‌نامند وغالباً با نماد $-x$ یا x^{-1} یا نمادی شبیه آن نمایش می‌دهند، آشکارا قرینهٔ α خود α است.

تعریف ۳. منظور ازیك هومورفیسم دستگاه جبری سادهٔ $(X,\top)$ در دستگاه جبری سادهٔ $(Y;S)$ نگاشتی است مانند $f:X\to Y$ به قسمی که برای هر $a\in X$ و هر $b\in X$،

$$f(a\top b)=f(a)Sf(b)$$

اگر f به‌علاوه دوسوئی باشد، f را یك ایزومورفیسم گویند.

تعریف ۴. منظور ازیك هومومورفیسم گروه آبلی $(A;+;\alpha)$ درگروه آبلی $(B;\oplus;\beta)$ نگاشتی مانند $f:A\to B$ است که هومومورفیسم $(A;+)$ در $(B;\oplus)$ باشد.

---

۲. خوانندهٔ علاقه‌مند در زمینهٔ این مقدمات می‌تواند به مرجع [مصاحب ۱۳۴۸] و یا به‌کتاب درآمدی برمنطق و نظریهٔ مجموعه‌ها [للهی ۱۳۵۴]، نظریهٔ مجموعه‌ها [۱۹۶۴ ـ لیپ چوتز، ترجمهٔ مهدی زاده ۱۳۶۲]، نظریه طبیعی مجموعه‌ها [هالموس ۱۹۶۰، ترجمه دادالله ۱۳۶۲] مراجعه کند.

اگر f چنین باشد، آنگاه به‌سادگی دیده می‌شود که $f(\alpha)=\beta$.
اگر f هومومورفیسم، باشد و به‌علاوه دوسوئی باشد، دراین صورت نگاشت وارون آن $f':B\to A$ نیز هومو مورفیسم گروه است. چنین f را یك ایزومورفیسم گروه آبلی گویند.

تعریف ۵. منظور از یك نشاندن دستگاه جبری سادهٔ $(X;\top)$ در گروه آبلی $(A;+;\alpha)$ یك نگاشت یکبیك $f:X\to A$ است که به‌علاوه یك هومومورفیسم دستگاه $(X;\top)$ دردستگاه $(A;+)$ باشد.

تعریف ۶. فرض‌کنیم $X_1\subset X$ و $(X;\top)$ یك دستگاه جبری ساده باشد. می‌گوئیم X_1 یك بخش پایدار است هرگاه برای‌هر x_1وهر y_1، اگر $x_1\in X_1$ و $y_1\in X_1$، آنگاه $x_1\top y_1\in X_1$.

قضایای زیر ساده‌اند. برخی از آنها عیناً درکتب دبیرستانی (خصوصاً ریاضیات جدید دوم) به‌اثبات رسیده‌اند. برخی‌دیگر، تمرینهای مناسبی برای دانش‌آموزان‌اند (دراین تمرینها $(A;+;\alpha)$ یك گروه آبلی است):

۱ـ برای هر $a\in A$ یك و تنها یك b هست که $b\in A$ و $a+b=\alpha$. به عبارت دیگر، یك نگاشت s (بنام نگاشت قرینه) از A به A هست که برای هر $a\in A$،

$$a+s(a)=\alpha$$

متداول است که به‌جای $s(a)$ ازنماد $(-a)$ یا (a^{-1}) استفاده شود.

۲ـ برای هر a وهر b، معادلهٔ $x+a=b$ دارای جواب یکتای

$$x=b+s(a)$$

است.

۳ـ عمل گروه پیرو قاعدهٔ حذف است.

۴ـ نگاشت قرینه $s:A\to A$ یك هومومورفیسم گروه است.

۵ـ قرینهٔ قرینهٔ هرعضو خودآن‌عضو است. به‌عبارت‌دیگر،

$$s\circ s=id_A$$

۶ـ اگر $f:X\to A$ یك نشاندن دستگاه $(X;\top)$ در گروه $(A;+;\alpha)$ باشد، آنگاه $(X;\top)$ بادستگاه $(f(X);+)$ ایزومورف است.

قضیهٔ زیر شرط لازم نشاندن را بیان می‌کند، که درواقع قضیه‌ای است بسیار ساده درسطح مطالب دبیرستانی.

قضیه ۱. برای آنکه یك نشاندن دستگاه $(X;T)$ در یك گروه آبلی $(A;+;\alpha)$ موجود باشد، لازم است که عمل $\top$ شرکت‌پذیر، جابجائی وپیرو قاعدهٔ حذف باشد.

برهان. فرض‌کنیم $f:X\to A$ یك نشاندن باشد. برای x، y، z اعضای دلخواه X، داریم

$$f((x\top y)\top z)=f(z\top y)+f(z)=$$
$$=[f(x)+f(y)]+f(z)=$$
$$=f(x)+f(y\top z)=f(x\top(y\top z)).$$

اما f یك به‌یك، لذا $(xTy)Tz=xT(yTz)$. خاصیت جابجائی T نیز به‌همین شیوه ثابت می‌شود:

$$f(x\top y)=f(x)+f(y)=$$
$$=f(y)+f(x)=f(y\top x)$$

و چون f یك به‌یك است، $x\top y=y\top x$.

پیروی $\top$ از قاعدهٔ حذف را ثابت‌کنیم: فرض‌کنیم $x\top a=y\top a$. پس:

$$f(x)+f(a)=f(x\top a)=f(y\top a)=$$
$$=f(y)+f(a)$$

و اما در گروه $(A;+;a)$ قاعدهٔ حذف برقرار است، پس

$$f(x)+f(a)=f(y)+f(a)\Rightarrow f(x)=f(y)$$

و چون f یك به‌یك است، $x=y$. پایان برهان.■

خواهیم دیدکه شرایط سه‌گانهٔ قضیهٔ پیش برای نشاندن $(\top\ ;\ X)$ در یك گروه‌آبلی مناسب‌کافی است. از آنجاکه مبتدیان علاقه دارند حالت متناهی بیشتر شکافته شود و به‌علاوه گروههای متناهی نیز اهمیت فراوان دارند، نخست این‌حالت را بررسی می‌کنیم، سپس به‌حالت‌کلی بازمی‌گردیم.

۴. نشاندن دستگاه متناهی درگروه

تعاریف ظاهراً متفاوتی برای مجموعهٔ متناهی درکتابها به چشم می‌خورد. یکی آن است که می‌گوید X متناهی است اگر تهی باشد یا با قطعه‌ای از اعداد طبیعی مانند $\{1,2,\dots,n\}$ همعدد باشد. دیگری این است که می‌گوید X متناهی است اگر هرنگاشت یك‌به‌یك $f: X\to X$ پوشا نیز باشد. ما از این تعریف دوم استفادهٔ می‌کنیم. قضیه‌ای که می‌آوریم‌منحصربه گروههای‌آبلی نیست، بلکه راجع به‌گروهها است. یادآوری‌کنیم یك گروه سه‌گانه‌ای است مانند $(G;*;e)$ که G مجموعه‌ای ناتهی، $*$ عملی روی G و e عضوی از G است به‌قسمی‌که:

(i) برای هر x و هر y و هر z، $(x*y)*z=x*(y*z)$:

(ii) برای هر x، $x*e=x$ و $e*x=e$؛

(iii) برای هر x، یک x' هست که $x'*x=e$ و $x*x'=e$.
e عضوی بی‌اثر نامیده می‌شود و یکتایی آن هم چنین یکتایی «وارون» هر x در دبیرستان دیده شده است.

فرض کنیم $(X\,;\,\circ)$ دستگاه جبری ساده‌ای باشد. منظور از نشاندن این دستگاه در گروه $(G\,;\,*\,;\,e)$ هرمومورفیسمی یک به یک از $(X\,;\,\circ)$ به $(G\,;\,*)$ است. واضح است که عمل گروه پیرو قاعدهٔ حذف است، لذا اگر یک نشاندن $(X\,;\,\circ)$ در یک گروه موجود باشد، اجباراً عمل دستگاه $(X;\circ)$ شرکت‌پذیر و پیرو قاعدهٔ حذف خواهد بود. مطلب جالب راجع به دستگاههای متناهی این است:

قضیه ۲. اگر $(X\,;\,\circ)$ دستگاهی متشکل از یک مجموعهٔ ناتهی و متناهی X و عمل شرکت‌پذیر و پیرو قاعدهٔ حذف باشد، دراین صورت یک عضو $\alpha\in X$ هست به‌قسمی که $(X\,;\,\circ\,;\,\alpha)$ یک گروه می‌باشد.

برهان. یک عضو $a\in X$ را در نظر بگیریم. دو نگاشت انتقال چپ a و راست a را در نظر بگیریم و f , g بنامیم (ضمناً برای سهولت نماد xy را به‌جای $x.y$ بکار گیریم):

$$f:X\to X,\ \ f(x)=ax$$
$$g:X\to X,\ \ h(x)=xa$$

بنابر قاعدهٔ حذف، f,g نگاشتهای یک‌به‌یک‌اند. لذا، چون X متناهی فرض شده است، f,g دوسوئی‌اند. پس اعضای یکتای α_a,β_a هست که $a\alpha_a=a,\ \beta_a a=a$. به‌همین شکل برای هر عضو X مانند x، $\alpha_x,\ \beta_x$ را منظور داریم. از طرفی، اگر b عضو دلخواهی از X باشد،

$$(b\beta_a)a=b(\beta_a a)=ba$$

لذا، بنابر حذف، $b\beta_a=b$

بنابر تعریف α_b $\quad b\beta_a=b\alpha_b$

بنابر حذف $\quad \beta_a=\alpha_b$

پس معلوم می‌شود که $\alpha_x,\ \beta_x$ مستقل از x می‌باشند و خود نیز برابرند. این عضو را α بنامیم. در واقع برای هر x، $x\alpha=x$ و $\alpha x=x$. یعنی α عضو بی‌اثر $(X\,;\,\circ)$ است. پس ازآنکه وجود عضو بی‌اثر α ثابت شد، پوشا بودن f,g را از نو بکار می‌گیرم تاوجود قرینهٔ هرعضو ثابت شود. a'ای هست که $f(a')=\alpha$ یعنی $aa'=\alpha$ و a''ای هست که $g(a'')=\alpha$ یعنی $a''a=\alpha$. بااستدلال مقدماتی معمول، دراین صورت $a''=a'$ می‌بینم

$$a''=a''\alpha=a''(aa')=(a''a)a'=\alpha a'=a',$$

و برهان تمام است.■

کاربرد در جدول اعمال. همانطور که می‌دانیم، در مورد مجموعهٔ متناهی $X=\{x_1,\dots,x_n\}$، روشی برای نشان دادن عمل استفاده از جدول است. اگر شرکت‌پذیری عمل برما معلوم باشد، با نگاه به جدول می‌توان فوراً دریافت که دستگاه مورد نظر گروه است یا خیر؛ برای آنکه دستگاه گروه باشد، لازم و کافی است که درهر سطر وهر ستون جمله‌ای تکراری نداشته باشیم.

●	x_1	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n
x_1	x_1x_1		x_1x_j		x_1x_n
$\vdots$					
x_i	x_ix_1		x_ix_j		x_ix_n
$\vdots$					
x_n	x_nx_1		x_nx_j		x_nx_n

زیرا این مطلب دقیقاً بیان قاعدهٔ حذف است.

هم‌چنین می‌توان به‌سطرها و ستونها نگاه کرد اگر همهٔ جمله‌ها در هر سطر و در هر ستون باشند، دستگاه گروه است و برعکس. زیرا این مطلب دقیقاً پوشا بودن انتقالها را نشان می‌دهد و مجموعه متناهی است. این شیوه، خصوصاً درجمع و ضرب همنهشتیها (چهارم ریاضی فیزیک) ارزش آموزشی دارد. می‌توان، با نگاه به یک سطر تنها، محل ستون عضو بی‌اثر را حدس زد. سپس بی‌اثر بودن این عضو را کنترل کرد و وجود قرینهٔ هر عضو و حتی محاسبهٔ آنرا نیز از روی سطر و ستون عضو بی‌اثر فهمید.

یادداشت. درکتاب راهنمای معلم ریاضیات، مطلب قضیهٔ ۲ درحالت آبلی به‌عنوان تمرین آمده بود.

بقیه درشمارهٔ آینده

بقیه مقالهٔ درسهایی از هندسه (۳)

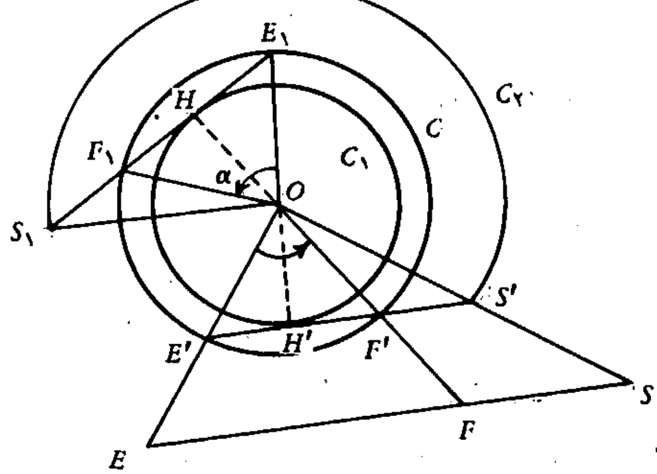
رشد آموزش ریاضی شماره ۱۰

حسین غیور

۳- قضیه اصلی ـ از ترکیب همسانی و دوران با مرکزهای متمایز دوهمانندی با مرکزهای مختلف حاصل می‌شود.

برهان $H_{S,K}$ همسانی $R_{O,\alpha}$ دوران مفروض است. برای اثبات قضیه ابتدا نقطه‌های پای (نقطه‌هایی که بعد از انجام دو تبدیل تغییر نکنند) دو تبدیل را با معلوم بودن نسبت k و اندازهٔ اصلی α و موضع دو نقطهٔ S, O تعیین می‌کنیم. اگر F, E این دو نقطه فرض شوند باید در دو شرط ذیل صدق کنند

$$RH(F)=(F) \qquad HR(E)=(E)$$



برای تعیین F, E به‌مرکز O دایرهٔ C را با شعاع دلخواه رسم می‌کنیم و در این دایره دو شعاع OE_1 و OF_1 را طوری رسم می‌کنیم که $\alpha=\sphericalangle(OE_1, OF_1)$، و نقطه S_1 را روی خط E_1F_1 طوری اختیار می‌کنیم که $K=\frac{\overline{S_1E_1}}{\overline{S_1F_1}}$ در این شکل به آسانی می‌توان دریافت که

$$HR(E_1)=E_1 \text{ و } RH(F_1)=(F_1)$$

یعنی F_1, E_1 به ترتیب نقطه‌های پایای HR, RH می‌باشند. بعد به‌طوری که در شکل ملاحظه می‌شود، دایرهٔ C_1 را به‌مرکز O و مماس بر وتر E_1F_1 رسم می‌کنیم و به‌مرکز O و شعاع OS_1 دایرهٔ C_2 را رسم می‌کنیم تا OS را در S' قطع کند. از S' مماسی بر دایرهٔ C_1 رسم می‌کنیم تا مطابق شکل در دایره C وتر $E'F'$ را پدید آورد. و از S خطی موازی $E'F'$ رسم می‌کنیم تا OE', OF' را به ترتیب در E و F قطع کند. از ملاحظه شکل به‌سادگی معلوم می‌شود F, E نقطه‌های پایای دو تبدیل (HR) و (RH) می‌باشد. یعنی:

$$HR(E)=(E) \text{ و } RH(F)=(F)$$

حال اگر M نقطهٔ دلخواهی از صفحه و M', M'' مبدل آن نقطه در دو تبدیل HR, RH فرض شود، عطف به خواص دوران و همسانی

$$HR(\overrightarrow{EM})=\overrightarrow{EM'} \Longrightarrow S_{E,K,\alpha}\quad (M)=(M')$$

و به همین ترتیب ثابت می‌شود $S_{F,K,\alpha}(M)=(M'')$

۴) مسئله اصلی. دو زوج نقطه‌های متناظر (A,B) و (A',B') از دو شکل همانند معلوم است مشخصات همانندی و بویژه مرکز آن را بدست آورید ـ این مسئله عیناً در شماره ۵-۶ سال دوم رشد آموزش ریاضی در صفحه ۴۰ مطرح شده است، برای حل مسئله به این شماره مراجعه کنید. ثابت کنید α زاویه همانندی برابر زاویه‌ایست که $\overrightarrow{AB}$ با $\overrightarrow{A'B'}$ می‌سازد $\alpha=\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$

۵) دایرهٔ همانندی. برای تعریف دایرهٔ همانندی مسئله زیر را مطرح می‌کنیم:

۵)ـ مسئله. دو دایرهٔ $C(C,R)$ (یعنی دایره C به‌مرکز C و شعاع R) و $C'(C',R')$ مفروضند مطلوب است تعیین همانندی با زاویهٔ α که دایرهٔ C را به دایرهٔ C' تبدیل کند (α اندازهٔ اصلی زاویهٔ همانندی است که می‌تواند مثبت یا منفی باشد) حال اگر فرض کنیم $S_{I,K,\alpha}$ همانندی مطلوب باشد چون دایرهٔ C را در حول آن به اندازهٔ α دوران دهیم و به وضع $C_1(C_1,R)$ درآید همسان دایرهٔ C_1 در همسانی $H_{I,K}$ باید دایرهٔ C' باشد، بنابرخواص همسانی دو دایره دو تساوی I, II حاصل می‌شود

$$I \qquad |K|R=R' \Longrightarrow K=\pm\frac{R'}{R}$$

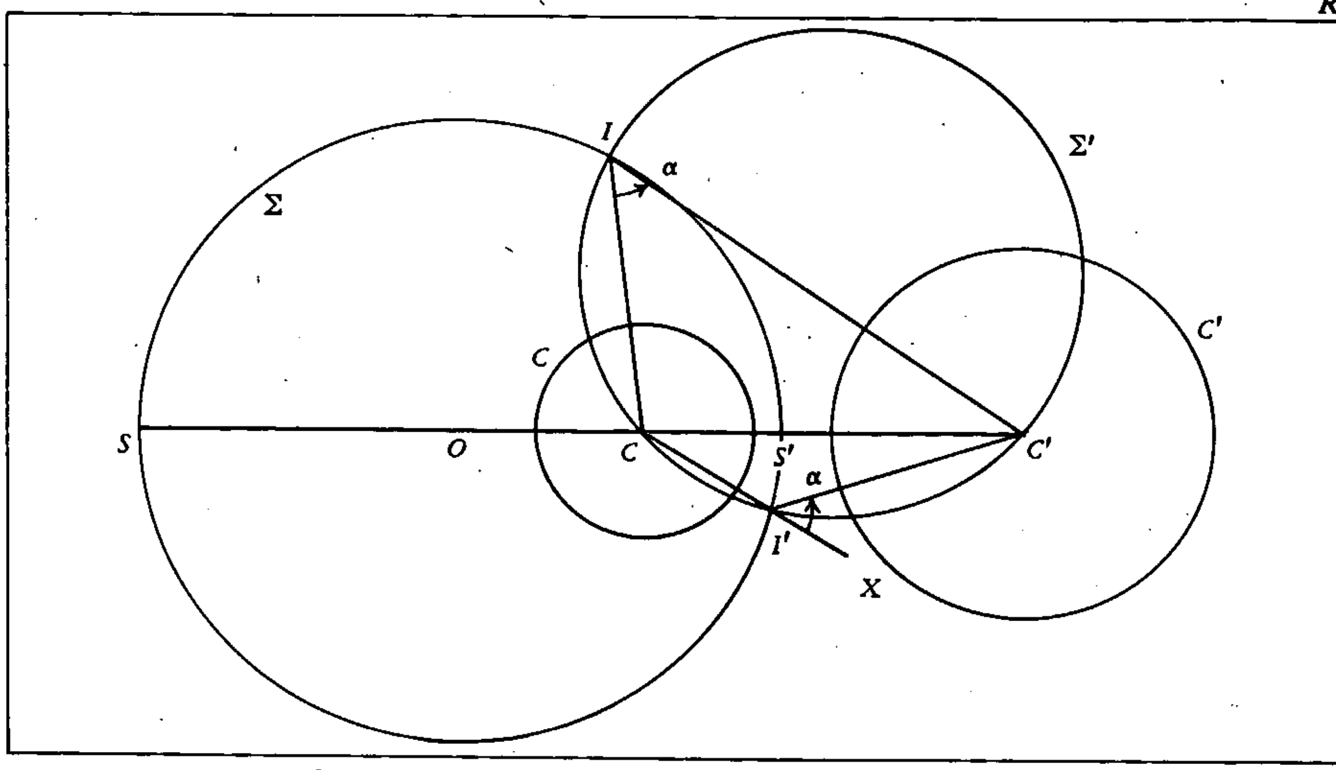
$$I I \frac{\overline{IC'}}{\overline{IC_1}} = K \Rightarrow \frac{IC'}{IC} = |K| = \frac{R'}{R}$$

از تساوی $\frac{IC'}{IC}=\frac{R'}{R}$ که I متعلق به‌دایرهٔ Σ است کـه به‌قطر SS' رسم می‌شود. S, S' مرکزهای همسانی دو دایـرهٔ C, C' فـرض شده‌اند و چون SوS' خط مرکزی CC_1 را به نسبتهای $\pm\frac{R'}{R}$ تقسیم می‌کند دایرهٔ Σ مکان‌هندسی I می‌شود که در تساوی

یعنی دوهمانندی بـازاویهٔ معین α دایره C را بـه C' تبدیـل می‌کند. توضیح آنکه چون S, S' خط مـرکزی CC' را بـه نسبت توافقی تقسیم کرده و دایرهٔ Σ' که از C , C' می‌گذرد دایرهٔ Σ را که بـه قطر SS' رسم شده است در دونقطهٔ متمایز قطع می‌کند، نمادهای دوهمانندی مطلوب چنین است.

$S_{I,\alpha,\frac{R'}{R}}$ و $S_{I',\alpha,-\frac{R'}{R}}$ یا $S_{I',\alpha\pm\pi,\frac{R'}{R}}$

برای درک دقیق مسئله به شکل زیرتوجه کنید.



فوق صدق کند (دایرهٔ آپولونیوس). از طرف دیگرچون IC بعداز دوران به‌اندازهٔ α برراستای IC' واقـع می‌شود داریم $\measuredangle CIC'=\alpha$ و I متعلق به دایره Σ' است

$$\Sigma'\{X : \measuredangle CXC'=\alpha\}$$

(دایرهٔ Σ' دایرهٔ حاوی زاویهٔ جهت‌دار α نامیده می‌شود که از دونقطهٔ CوC' می‌گذرد. به مقدمهٔ حل‌کامل مسئله مورلی در رشد شمارهٔ ۲ مراجعه کنید)

برای رسم دایرهٔ Σ' نیم خط IX را طوری رسم کنید که $\angle XCC'=\alpha$ و از C عمودی بر CX اخراج کنید تا عمـود منصف CC' را درمرکز این دایره قطع کند. بنابـر آنچه گفته شد مرکزهمانندی ازتقاطع دودایرهٔ ΣوΣ' معین می‌شود. اگر مرکزهای دو دایره یکی نباشند مسئله همواره دوجـواب دارد

ازحل‌این مسئله نتیجه می‌گیریم که همانندیهای بیشماری وجود دارد که دو دایره بـامرکزهای متمایـز وشعاعهای غیر مساوی را بهم تبدیل می‌کند که Σ یعنی دایره به قطر SS' مکان هندسی مـرکزهای آنهاست ایـن دایره به‌ایـن مناسبت دایرهٔ همانندی دو دایره نامیده شده است.

یادآوری. طرح و حل وبحث ایـن مسئله ونـامگذاری دایره همانندی از خود اینجانب است و ازجایی اقتباس نشده است.

تمرین. ثابت کنید نقطه‌هایی که‌از آنهادودایره زاویه‌های متساوی دیده می‌شوند متعلق به دایره همانندی دو دایره است. (زاویه رویت دایره زاویه مماسهایی است که ازنقطهٔ دید بردو دایره رسم می‌شود.)

π اصم است.

میرهاشم حسینی: دبیر دبیرستانهای میانه

۱ـ مقدمه

یکی از مشهورترین اعداد ریاضی نسبت محیط دایره به قطر آن است، که از ایام بسیار قدیم مورد توجه ریاضیدانان مختلف بوده است. این عدد را که از زمان اویلر[۱] (۱۷۸۳–۱۷۰۷) به بعد π خوانده می‌شود، می‌توان مساحت دایره واحد در نظر گرفت.

ارشمیدس[۲] (حدود ۲۸۷–۲۱۲ ق.م.) ریاضیدان برجستهٔ یونان باستان، با استفاده از چندضلعیهای محاطی نشان داد که π بین $\frac{223}{71}$ و $\frac{22}{7}$ قرار دارد. دراینجا بی‌مناسبت نیست یادی از غیاث‌الدین جمشید کاشانی ریاضیدان ایرانی بکنیم که با محاسبهٔ محیط 3×2^{28} ضلعی محیطی و محاطی، مقدار π را تا هفده رقم اعشار به‌دست آورده است.

لامبرت[۳] (۱۷۷۷–۱۷۲۸) ریاضیدان، فیزیکدان و منجم آلمانی اصم بودن π را در سال ۱۷۶۷ ثابت کرد و در سال ۱۸۸۲ توسط لیندمان[۴] (۱۹۳۹–۱۸۵۲) آلمانی غیر جبری بودن این عدد به اثبات رسید (عددی را که ریشه معادله جبری با ضرایب صحیح نباشد، غیرجبری گویند.)

۲ـ معرفی یك تابع

قبل از اثبات اصم بودن π، نخست تابع

$$f_n(x)=\frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

را معرفی کرده و ویژگیهایش را بررسی می‌کنیم:

۲ـ۱ـ به ازای $0<x<1$، $f_n(x)$ بین 0 و $\frac{1}{n!}$ قرار دارد.

زیرا:

$$0<x<1 \Rightarrow 0<x^n<1^n \Rightarrow 0<x^n<1 \qquad (1)$$

$$0<x<1 \Rightarrow -1<-x<0 \Rightarrow \qquad (2)$$

$$\Rightarrow 0<1-x<1 \Rightarrow 0<(1-x)^n<1$$

$$(1)\text{ و }(2) \Rightarrow 0<x^n(1-x)^n<1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0<\frac{x^n(1-x)^n}{n!}<\frac{1}{n!}$$

پس:

$$0<x<1 \Rightarrow 0<f_n(x)<\frac{1}{n!} \qquad (2-1)$$

۲ـ۲ـ به ازای هرعدد طبیعی k، $f_n^{(k)}(0)$ عددی است صحیح ($f_n^{(k)}(x)$ مشتق kام تابع $f_n(x)$ است).

چون کوچکترین و بزرگترین توان x در عبارت $x^n(1-x)^n$ بترتیب n و $2n$ است ازاینرو معادلهٔ تابع f_n را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$f_n(x)=\frac{1}{n!}\sum_{m=n}^{2n}c_m x^m$$

که‌درآن c_m (برای‌هرعدد طبیعی $m=n,n+1,\dots,2n$) عددی صحیح است. چون $f_n(x)$ فاقد جملاتی از x با توانهای کوچکتر از n و بزرگتر از $2n$ می‌باشد، پس برای $k<n$ یا $k>2n$ داریم:

$$f_n^{(k)}(0)=0$$

بعلاوه

$$f_n^{(n)}(x)=\frac{1}{n!}[n!c_n+x\text{ جملاتی شامل }]$$

$$f_n^{(n+1)}(x)=\frac{1}{n!}[(n+1)!c_{n+1}+x\text{ جملاتی شامل }]$$

$$\vdots$$

$$f_n^{(2n)}(x)=\frac{1}{n!}[(2n)!c_{2n}].$$

از اینرو

$$f_n^{(n)}(0)=c_n$$
$$f_n^{(n+1)}(0)=(n+1)c_{n+1}$$
$$\vdots$$
$$f_n^{(2n)}(0)=2n(2n-1)\cdots(n+1)c_{2n}$$

که اعداد سمت راست تساویهای فوق همگی صحیح هستند.

پس:

$$\forall k\in\mathbf{N};\qquad f_n^{(k)}(0)\in\mathbf{Z} \qquad (۲-۲)$$

۲-۳- به‌ازای هرعددطبیعی k، $f_n^{(k)}(1)$ نیزعددصحیح است. زیرا:

$$f_n(1-x)=\frac{(1-x)^n[1-(1-x)]^n}{n!}=\frac{(1-x)^n x^n}{n!}=f_n(x)$$

بنابراین

$$f_n^{(k)}(x)=(-1)^k f_n^{(k)}(1-x)$$

و از آنجا

$$f_n^{(k)}(1)=(-1)^k f_n^{(k)}(0)$$

چون بنابر(۲-۲)، $f_n^{(k)}(0)$ برای هرعدد طبیعی k، عددصحیح است، پس:

$$\forall k\in\mathbf{N};\qquad f_n^{(k)}(1)\in\mathbf{Z} \qquad (۳-۲)$$

۲-۴- وبالاخره $f_n(0)$ و $f_n(1)$ نیزاعدادی‌صحیح‌اند. زیرا:

$$f_n(0)=f_n(1)=0\in Z \qquad (۴-۲)$$

پس از معرفی وبررسی ویژگیهای تابع f_n اکنون لم زیر را ثابت می‌کنیم تا خود را برای اثبات اصم بودن π آماده کنیم.

۳- لم

به ازای هرعدد a و $\varepsilon>0$ و n به‌اندازهٔ کافی بزرگ داریم:

$$\frac{a^n}{n!}<\varepsilon$$

نامساوی فوق به‌این‌معنی‌است که وقتی $n\to\infty$، $\frac{a^n}{n!}\to 0$.

برهان. به‌ازای $n\geqslant 2a$ داریم:

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{a}{n+1}\cdot\frac{a^n}{n!}<\frac{1}{2}\cdot\frac{a^n}{n!} \qquad (۱-۳)$$

اکنون عدد طبیعی n_0 را چنان در نظر می‌گیریم‌که $n_0\geqslant 2a$ برقرار باشد. دراین‌صورت با توجه به (۳-۱) خواهیم داشت:

$$\frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!}<\frac{1}{2}\cdot\frac{a^{n_0}}{(n_0)!}$$
$$\frac{a^{n_0+2}}{(n_0+2)!}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a^{n_0}}{(n_0)!}$$
$$\vdots$$
$$\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!}<\frac{1}{2^k}\cdot\frac{a^{n_0}}{(n_0)!}$$

اکنون k را آنچنان بزرگ می‌گیریم که $2^k>\frac{a^{n_0}}{(n_0)!\varepsilon}$ آنگاه $\frac{a^{n_0}}{(n_0)!}<2^k\varepsilon$. پس:

$$\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!}<\frac{1}{2^k}\cdot\frac{a^{n_0}}{(n_0)!}<\frac{1}{2^k}\cdot 2^k\cdot\varepsilon=\varepsilon$$

یعنی برای $n=n_0+k$ به‌اندازهٔ کافی بزرگ داریم

$$\frac{a^n}{n!}<\varepsilon$$

□

۴- قضیه

π اصم است.

برهان. چون اصم بودن π^2 دلالت بر اصم بودن π دارد (زیرا اگر π گویا باشد مطمئناً π^2 گویا خواهد شد.)، بنابراین اصم بودن π^2 را ثابت می‌کنیم.

فرض می‌کنیم π^2 گویا باشد، در این صورت $\pi^2=\frac{a}{b}$ خواهدبود که a و b اعداد طبیعی هستند. تابع G را به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم:

$$G(x)=b[\pi^{2n}f_n(x)-\pi^{2n-2}f_n''(x)+\pi^{2n-4}f_n^{(4)}(x)-\cdots+(-1)^n f_n^{(2n)}(x)] \qquad (۱-۴)$$

با توجه به:

$$b^n\pi^{2n-2k}=b^n(\pi^2)^{n-k}=b^n\left(\frac{a}{b}\right)^{n-k}=a^{n-k}\cdot b^k$$

ملاحظه می‌کنیم که ضرایب $b^n\pi^{2n-2k}$ اعداد صحیح هستند. همچنین باتوجه به (۲−۲)، (۲−۳) و (۲−۴) اعداد $f_n^{(k)}(0)$، $f_n^{(k)}(1)$، $f_n(0)$ و $f_n(1)$ نیز صحیح‌اند، پس:

$$G(0), G(1)\in Z \qquad (۲-۴)$$

با دوبار مشتق‌گیری از G خواهیم داشت:

$$G''(x)=b^n[\pi^{2n}f_n''(x)-\pi^{2n-2}f_n^{(4)}(x)+\cdots+(-1)^n f_n^{(2n+2)}(x)] \qquad (۳-۴)$$

که در آن جمله $(-1)^n f_n^{(2n+2)}(x)$ برابر صفر است (زیرا f^n تابعی درجه $2n$ از x است).

از (۴−۱) و (۴−۳) می‌توان نتیجه گرفت:

$$G''(x)+\pi^2G(x)=b^n\pi^{2n+2}f_n(x)=\pi^2a^nf_n(x) \qquad (۴-۴)$$

اکنون تابع H را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H(x)=G'(x)\sin\pi x-\pi G(x)\cos\pi x$$

پس:

$$H'(x)=\pi G'(x)\cos\pi x+G''(x)\sin\pi x-\pi G'(x)\cos\pi x+\pi^2G(x)\sin\pi x$$

$$=[G''(x)+\pi^2G(x)]\sin\pi x$$ باتوجه به (۴−۴)

$$=\pi^2a^nf_n(x)\sin\pi x$$

پس:

$$H'(x)=\pi^2a^nf_n(x)\sin\pi x \qquad (۵-۴)$$

بنابراین:

$$\pi^2\int_0^1 a^nf_n(x)\sin\pi x\,dx=\Big[H(x)\Big]_0^1=H(1)-H(0)=\pi(G(1)-G(0))$$

وازآنجا

$$\pi\int_0^1 a^nf_n(x)\sin\pi x\,dx=G(1)-G(0)$$

چون بنابر (۴−۲) اعداد $G(0)$ و $G(1)$ صحیح هستند، پس:

$$\pi\int_0^1 a^nf_n(x)\sin\pi x\,dx\in\mathbb{Z} \qquad (۶-۴)$$

ازطرف دیگر با توجه به (۲−۱) برای $0<x<1$ داریم: $0<f_n(x)<\frac{1}{n!}$ پس برای $0<x<1$ خواهیم داشت:

$$0<\pi a^nf_n(x)\sin\pi x<\frac{\pi a^n}{n!}$$

درنتیجه:

$$0<\pi\int_0^1 a^nf_n(x)\sin\pi x\,dx<\frac{\pi a^n}{n!}$$

باتوجه به لم فوق‌الذکر می‌توان n را به‌اندازه کافی بزرگ گرفت که:

$$0<\pi\int_0^1 a^nf_n(x)\sin\pi x\,dx<\frac{\pi a^n}{n!}<1$$

واین بی‌معنی است، زیرا $\pi\int_0^1 a^nf_n(x)\sin\pi x\,dx$ بنابه (۴−۶) عدد صحیح است و بین ۰ و ۱ هیچ عدد صحیحی وجود ندارد.

پس فرض اولیه ما، یعنی «گویا بودن π^2» نادرست است. بنابراین π^2 و درنتیجه π اصم است. ■

مسایل زیر دستورهایی برای محاسبهٔ π ارائه می‌دهند.

مسایل:

۱ــ الف ــ با استفاده از سری گریگوری[5] (زیر) دستوری برای محاسبه $\frac{\pi}{4}$ بیابید

$$Arctg\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

ب ــ با استفاده از $\frac{\pi}{4}=Arctg\frac{1}{2}+Arctg\frac{1}{3}$ و سری گریگوری ثابت کنید که:

$$\pi=\frac{10}{3}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{4^n}+\frac{2}{3\cdot 9^n}\right)$$

وازآنجا π را تا چهاررقم اعشار به‌دست آورید.

منابع

1. Calculus by Michael Spivak (منبع اصلی)
2. Calculus And Analytic Geometry, by Philip Gillett
3. Modern Calculus and Analytic Geometry, by Richard A. Silverman

۴ ــ آنالیز ریاضی ـ دکتر غلامحسین مصاحب

۵ ــ آشتی با ریاضیات شماره‌های ۶ و ۱۶

پانوشتها:

1- Euler
2. Archimedes
3- Lambert
4- Lindemann
5- Gregory
6- Francois Viete
7- Wallis

حل مسائل آنالیز (هفدهمین کنفرانس مسابقه دانشجویان ریاضی دانشگاه سیستان و بلوچستان) فروردین ماه ۶۵

دکتر کریم صدیقی

۱ـ از ب) نتیجه می‌شود که برای $1 \leqslant x$، $f'(x) > 0$ ولذا تابع f اکیداً صعودی است درنتیجه

$$f(t) > f(1) = 1,\quad t > 1$$

و ازآنجا

$$f'(t) = \frac{1}{t^2 + [f(t)]^2} < \frac{1}{t^2+1},\quad t > 1$$

لذا می‌توان نوشت

$$f(x) = 1 + \int_1^x f'(t)\,dt < 1 + \int_1^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$< 1 + \int_1^\infty \frac{1}{t^2+1}\,dt = 1 + \frac{\pi}{4}$$

درنتیجه f ازسمت بالاکراندار است. چون f صعودی است نتیجه‌می‌گیریم که $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ موجود است. علاوه برآن‌داریم

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_1^\infty f'(t)\,dt + 1 < 1 + \int_1^\infty \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= 1 + \frac{\pi}{4}$$

۲ـ تابع g را بربازه $[a, b]$ چنین تعریف می‌کنیم. که $a < x < b$ و $t \in [a, b]$ دراینصورت

$$g(t) = (t-a)(t-b)f(x) - (x-a)(x-b)f(t).$$

چون $g(a) = g(x) = g(b) = 0$ می‌توانیم‌دوبارقضیه رول را بکار ببریم. بنابراین نقطه‌ای چون c در بازه (a, b) موجود است به‌قسمی‌که

$$g''(c) = 2f(x) - (x-a)(x-b)f''(c) = 0.$$

درنتیجه

$$|f(x)| \leqslant \frac{M(x-a)(b-x)}{2}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$\int_a^b |f(x)|dx \leqslant \frac{M}{2}\int_a^b [x^2-(a+b)x+ab]dx$$
$$=\frac{M}{12}(b-a)^3.$$

۳ـ روش اول:

$$\left|\int_0^3 \frac{x^2(1-x)x^n}{1+x^{2n}}dx\right| \leqslant \int_0^3 \frac{x^2|1-x|x^n}{1+x^{2n}}dx=$$
$$=\int_0^1+\int_1^3 \leqslant \int_0^1 x^n dx + 18\int_1^3 \frac{x^n}{x^{2n}}dx$$
$$=\frac{1}{n+1}+18\left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\Big|_1^3\right]$$
$$=\frac{18}{n-1}-\frac{1}{(n-1)3^{n-1}}.$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^3 \frac{x^2(1-x)x^n}{1+x^{2n}}dx=0$$

روش دوم:

ثابت می‌کنیم که دنبالهٔ توابع $\left\{\frac{x^2(1-x)x^n}{1+x^{2n}}\right\}$ بر [۰, ۳] به‌سمت تابع صفر به‌طور یکنواخت همگراست، برای این منظور عدد مثبت ε را درنظر می‌گیریم (درمحاسبات زیر ε را ثابت نگه می‌داریم).

بر فاصلهٔ [۰, ۳] داریم $\left|\frac{x^2(1-x)x^n}{1+x^n}\right| \leqslant |1-x|$

(زیرا $x^{n+2}\leqslant x^{2n}$ اگر $x>1$ و $n\geqslant 2$ و $x^{n+2}\leqslant 1$ اگر $x\leqslant 1$ و بنابراین همواره $x^{n+2}\leqslant 1+x^{2n}$ اگر $n>1$).

پس بر فاصله (۱+ε, ۱−ε) داریم $\frac{x^2|1-x|x^n}{1+x^{2n}}<\varepsilon$

بازاء هرعدد طبیعی n.

بر فاصله [۰, ۱−ε] خواهیم داشت:

$$\frac{x^2|1-x|x^n}{1+x^{2n}}\leqslant\frac{x^{n+2}}{1+x^{2n}}\leqslant x^{n+2}\leqslant(1-\varepsilon)^{n+2},$$

عدد طبیعی n_0 موجود است بطوریکه

$$n>n_0\Rightarrow(1-\varepsilon)^{n+2}<\varepsilon.$$

برفاصله [۱+ε, ۳] نیزخواهیم‌داشت (درصورتیکه $n>1$):

$$\frac{x^2|1-x|x^n}{1+x^{2n}}\leqslant\frac{2x^{n+2}}{1+x^{2n}}=\frac{2x^2}{x^{-n}+x^n}<\frac{2x^2}{x^n}$$
$$=\frac{2}{x^{n-2}}\leqslant\frac{2}{(1+\varepsilon)^{n-2}},$$

عدد طبیعی n_1 نیز موجود است بطوریکه:

$$n>n_1\Rightarrow\frac{2}{(1+\varepsilon)^{n-2}}<\varepsilon$$

بنابراین $\left|\frac{x^2(1-x)x^n}{1+x^{2n}}\right|<\varepsilon$ به‌ازاء هر $x\in[0,3]$ و هر $n>\max(n_0,n_1)$.

پس: $\lim_{n\to\infty}\int_0^3\frac{x^2(1-x)x^n}{1+x^{2n}}=0$

حل سؤالات معلومات عمومی

۱ـ $P(X=0)=P(FS)+P(SSFS)+$
$P(FFFS)+P(SSSSFS)+P(SSFFFS)+$
$+P(FFSSFS)+P(FFFFFS)+\cdots$
$=qp+p^2qp+q^2qp+p^4qp+p^2q^2qp+p^2p^2qp$
$+q^4qp+\cdots=qp(1+p^2+(p^2+q^2)^2+\cdots)=$
$=\frac{qp}{1-p^2-q^2}=\frac{1}{2}$

همچنین $P(X=1)=\frac{1}{2}$.

۲ـ $\bar{A}=\partial A\cup A^\circ \Rightarrow A=\bar{A}=\partial A\cup\varnothing=\partial A=\partial A^c$

۳ـ فرض کنید $\varphi(t)$ جواب (*) باشد آنوقت

$$\varphi''(t)=f(t,\varphi(t)),\ \varphi(0)=x_0,\ \varphi'(0)=y_0$$
$$\Rightarrow \varphi'(t)=c_1+\int_0^t f(s,\varphi(s))ds$$
$$\varphi'(0)=y_0\Rightarrow c_1=y_0$$
$$\varphi(t)=c_2+c_1t+\int_0^t\left\{\int_0^\tau f(s,\varphi(s))ds\right\}d\tau$$
$$\varphi(0)=x_0\Rightarrow c_2=x_0$$
$$\varphi(t)=x_0+g_0t+\int_0^t\left\{\int_s^t d\tau\right\}f(s,\varphi(s))ds$$
$$=x_0+g_0t+\int_0^t(t-s)f(s,\varphi(s))ds$$

بالعکس اگر $\varphi(t)$ جواب (**) باشد آنوقت:

$$\varphi(t)=x_0+y_0t+\int_0^t(t-s)f(s,\varphi(s))ds \Rightarrow$$

$$\varphi'(t)=y_0+\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}(t-s)f(s,\varphi(s))ds$$

$$=y_0+\int_0^t f(s,\varphi(s))ds \Rightarrow$$

$$\varphi''(t)=f(t,\varphi(t)).$$

۴- حاصلضرب k عددصحیح متوالی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$A_{n,k}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1).$$

میخواهیم ثابت کنیم که: $k!\,|A_{n,k}$. با روش استقراء ثابت می‌کنیم که حکم بازاء هرعدد طبیعی n و هرعددطبیعی $k\leqslant n$ برقرار است.

بازاء $n=1$ حکم برقرار است.

فرض کنید که بازاء $n=n_0$ حکم برقرار، ثابت می‌کنیم که بازاء $n=n_0+1$ نیز حکم برقرار است، یعنی میخواهیم ثابت کنیم که بازاء هر عدد طبیعی $k\leqslant n_0+1$ داریم $k!\,|A_{n_0+1,k}$.

اگر $k=n_0+1$ که حکم واضح است. پس فرض کنیم که $k\leqslant n_0$.

$$A_{n_0+1,k}=(n_0+1)(n_0)(n_0-1)\cdots(n_0-k+2)$$
$$=(n_0-k+1+k)(n_0)(n_0-1)\cdots(n_0-k+2)$$
$$=kn_0(n_0-1)\cdots(n_0-k+2)+n_0(n_0-1)\cdots$$
$$(n_0-k+2)(n_0-k+1)=kA_{n_0,k-1}+A_{n_0,k}$$

اما $A_{n_0,k-1}$ طبق فرض استقراء بر $(k-1)!$ و نیز $A_{n_0,k}$ بر $k!$ بخش‌پذیر است پس $A_{n_0+1,k}$ بر $k!$ بخش‌پذیر است. حکم بعدی مساله بسادگی قسمت اول نتیجه می‌شود.

حل سؤالات جبر

۱- فرض کنید $M\neq R$ زیر گروه ماکسیمالی از R است. چون R آبلی است پس $M\triangle R$ و R/M[1] گروهی آبلی و ساده باید باشد. اما هر گروه متناهی آبلی و ساده ایزومرف با Z_p، p اول، می‌باشد. $R/M\cong Z_p$.

حال ثابت می‌کنیم R دارای زیر گروه سره با اندیس متناهی نمی‌باشد. فرض کنید $H<R$ و $[R:H]=n$. در نتیجه به‌ازای هر $x\in R$ داریم $nx\in H$. اما از طرفی می‌توان نوشت $x=n(x/n)$ که چون $\frac{x}{n}\in R$ پس $x\in H$ یعنی $R\subset H$ که از آن نتیجه می‌شود $R=H$، یك تناقض.

۲- می‌توان نوشت

$$1=a+b \ ,\ a\in A \ ,\ b\in B$$
$$1=a'+c \ ,\ a'\in A \ ,\ c\in C$$
$$1=a''+d \ ,\ a''\in A \ ,\ d\in D$$

از ضرب روابط بالا داریم

$$1=(a+b)(a'+c)(a''+d)$$
$$=u+bcd \text{ و } u\in A \text{ و } bcd\in M.$$

پس ایده‌آل $A+M$ دارای عضویکه ۱ می‌باشد. در نتیجه $A+M=R$.

مثال- قرار می‌دهیم $R=Z$، $A=2Z$، $B=3Z$، $C=5Z$، $D=7Z$؛ در این‌صورت $M=105Z$. با استفاده از رابطه $1=2(53)-105$ داریم $1\in A+M$ پس $A+M=R$.

۳- می‌دانیم $F\subset F(\alpha^m)\subset F(\alpha)$. پس می‌توان نوشت

$$[F(\alpha):F]=[F(\alpha):F(\alpha^m)][F(\alpha^m):F]$$

اما $[F(\alpha):F]=n$ و $[F(\alpha):F(\alpha^m)]$ یکی از اعداد ۱، ۲، ...، m می‌تواند باشد. چون $(n,m!)=1$ فرض شده است پس $[F(\alpha):F(\alpha^m)]=1$ ودرنتیجه $F(\alpha)=F(\alpha^m)$.

۴- فرض کنید A یك ماتریس پوچ‌توان در $M_n(F)$ باشد. لذا $A^m=0$، که در آن m یك عدد صحیح و مثبت است. بنابراین چندجمله‌ای می‌نیمال A بفرم x^k $(1\leqslant k\leqslant m)$ می‌باشد و در نتیجه تنها مقدار ویژه A برابر صفر می‌باشد. همچنین چندجمله‌ای مشخصه A برابر است با $f(x)=x^n$. ازطرف دیگر

$$f(x)=x^n-(trA)x^{n-1}+\dots+\det A=x^n,$$

بنابراین $trA=0$.

حال فرض کنید A_1، ...، A_r مجموعه‌ای از ماتریسهای پوچ‌توان مولد در $M_n(F)$ باشد آنگاه اسکالرهای b_1، ...، b_r وجود دارند بقسمی که

$$E_{11}=b_1A_1+\dots+b_rA_r$$

لذا

$$trE_{11}=b_1trA_1+\dots+b_rtrA_r$$
$$1=0$$

که این یك تناقض است.

۱- لازم است که توجه شود R/M یك گروه متناهی است (سردبیر)

حل مسائل سومین مسابقه دانش‌آموزان ممتاز رشته ریاضی (هفدهمین کنفرانس ریاضی کشور)

برهانهای درستی به‌وسیلهٔ بعضی از خوانندگان و همکاران به‌دست ما رسیده که اکثر آنها مشابه راه‌حل طراح است، بعضی از راه‌حلها متفاوت از راه‌حل طراح است اما متأسفانه به‌علت محدودیت صفحات مجله از درج همه آن راه‌حلها معذوریم، و تنها به درج حل بعضی از آنها که کوتاهتر است اکتفا می‌کنیم. در اینجا به‌ذکر نام آن افرادی که راه‌حل ارسالی آنها درست بوده می‌پردازیم و از همه آنها به‌خاطر همکاری با مجله، تشکر می‌کنیم.

آقای بابك فهیمی ، از سئوالهای جلسه صبح، مسائل ۲، ۳، ۵ وازجلسه بعد از ظهر مسائل ۱، ۲، ۴، ۶ و ۷ را درست حل نموده‌اند. در ضمن برای مسائل منتخب استانها براهینی را ارسال داشته‌اندکه از محبت ایشان به‌مجله تشکر می‌کنیم.

آقای غیور، برای مسائل هندسه راه حلهای جالب، و متفاوتی از راه‌حل طراح، به‌ما داده‌اند که تنها حل‌مسئله ۳ از جلسه بعد از ظهر را درج می‌نمائیم. ایشان متذکر شده‌اند که در مسئله اول‌هندسه، زوایای مثلث باید حاده باشد و در غیر این‌صورت مسئله در ارائه برهان مشکلاتی ایجاد می‌کند

آقای دکتر ذاکری برای مسئله ۴ و ۶ راه‌حل کوتاهی ارائه داده‌اندکه‌آنهارا درج می‌نامیم.

اولین راه‌حلها از **آقای دکتر میگرویچ تومانیان**،طراح و دبیر انجمن ریاضی ایران و مسئول مسابقات است. جادارد که از ایشان تشکر نمائیم

سردبیر

الف: جلسه صبح

۱ ـ اگر $\cos\alpha = \frac{p}{q}$ (p و q اعداد صحیح‌اند)، ثابت کنید که مقدار $q^n \cos n\alpha$ عددی صحیح است.

(۴ امتیاز)

حل :

استقراء روی n داریم

حکم برقرار است $n=1 \Rightarrow q\cos\alpha = q\dfrac{p}{q} = p$

حکم را برای اعداد کمتر یا مساوی n می‌پذیریم و در مورد $n+1$ ثابت می‌کنیم داریم:

$$\cos(n+1)\alpha = \cos n\alpha\cos\alpha - \sin n\alpha\sin\alpha$$
$$= \cos n\alpha\cos\alpha + \frac{1}{2}[\cos(n+1)\alpha - \cos(n-1)\alpha]$$

از آنجا

$$\cos(n+1)\alpha = 2\cos n\alpha\cos\alpha - \cos(n-1)\alpha$$

در نتیجه

$$q^{n+1}\cos(n+1)\alpha = 2(q^n\cos n\alpha)(q\cos\alpha) - q^2(q^{n-1}\cos(n-1)\alpha)$$

بنا بر فرض $q^n\cos n\alpha$ ، $q\cos\alpha$ و $q^{n-1}\cos(n-1)\alpha$ اعداد صحیح‌اند، در نتیجه $q^{n+1}\cos(n+1)\alpha$ عددی صحیح و لذا، به‌استقراء حکم برقرار است.

۲ـ به‌فرض آنکه سه‌عدد حقیقی و مثبت x و y و z در رابطه

$$x^2+y^2+z^2 = xy+yz+zx$$

صدق کنند مقدار عبارت زیر را حساب کنید

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}=$$

(۴ امتیاز)

حل:

$$x^2+y^2+z^2 = xy+yz+zx \Rightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2+(z-x)^2 = 0$$

نتیجه اینکه

$$x=y=z$$

از آنجا

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} = \frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{x}} = \frac{1}{3}$$

۳ـ توابع $f:R\to R$ ، $g:R\to R$ و $\varphi:R\to R$ هرسه صعودی بوده و به‌ازای هر عدد حقیقی x داریم

$$f(x)\leqslant g(x)\leqslant \varphi(x)$$

ثابت کنید به‌ازای هرعدد حقیقی x رابطه زیر است

$$f(f(x))\leqslant g(g(x))\leqslant \varphi(\varphi(x))$$

(۴ امتیاز)

حل:

$$\forall x\in R \Rightarrow f(x)\leqslant g(x)$$

(۱) چون f صعودی است

$$\Rightarrow f(f(x)\leqslant f(g(x))$$

همچنین از $f(x)\leqslant g(x)$ و با توجه به‌فرض داریم

$$f(g(x))\leqslant g(g(x) \qquad (2)$$

از مقایسه روابط (۱) و (۲) داریم

$$f(f(x))\leqslant g(g(x))$$

و به‌همین‌ترتیب قسمت دوم‌نامساوی نیز حاصل می‌شود.

پس

$$f(f(x))\leqslant g(g(x))\leqslant \varphi(\varphi(x)).$$

۴ـ ثابت کنید شرط لازم وکافی برای آنکه:

$[x]+[y]=[x+y]$ و $[-x]+[-y]=[-x-y]$؛ آن است که حداقل یکی از دو مقدار x یا y صحیح باشند.

(۴ امتیاز)

حل:

اگر x صحیح باشد، داریم

$$[x+y]=x+[y] \text{ و } [x]=x$$
$$[-x-y]=-x+[-y] \text{ و } [-x]=-x$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$[x]+[y]=x+[y]=[x+y]$$

همچنین است اگر y یا x و y هردوصحیح باشند.

$$[-x]+[-y]=-x+[-y]=[-x-y]$$

حال اگر تساویهای فوق هردو برقرار باشند باید لااقل x یا y صحیح باشند؛ زیرا اگر x و y هیچکدام صحیح نباشند خواهیم داشت

$$[x]+[-x]=-1 \text{ و } [y]+[-y]=-1$$
$$[x+y]+[-x-y]=(0 \text{ یا } -1)$$

و درنتیجه با جمع دوتساوی $[x]+[y]=[x+y]$ و $[-x]+[-y]=[-x-y]$ خواهیم داشت

$$-2=(0 \text{ یا } -1)$$

که امکان‌پذیر نیست. از این تناقض حکم برقرار است.

۵ـ توابع $f:R\to R$ و $g:R\to R$ مفروضند به‌طوری‌که

$$\forall x,\ \forall y \in R \quad f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$
$$\forall x \in R \qquad f(x)=1+xg(x)$$
$$\lim_{x\to 0} g(x)=1$$

مطلوب است تعیین مشتق f در نقطه دلخواه x.

(۴ امتیاز)

حل:

طبق تعریف مشتق f در نقطه $x \in R$؛

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)[f(h)-1]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)[1+h\,g(h)-1]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h\,f(x)\,g(h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} f(x)g(h) \\ &= f(x)\lim_{h\to 0} g(h) \\ &= f(x)\cdot 1 = f(x) \end{aligned}$$

ب: جلسه بعدازظهر

۱ــ مثلث ABC مفروض است، مثلثی در آن محاط کنید که محیطش می‌نیمم باشد.

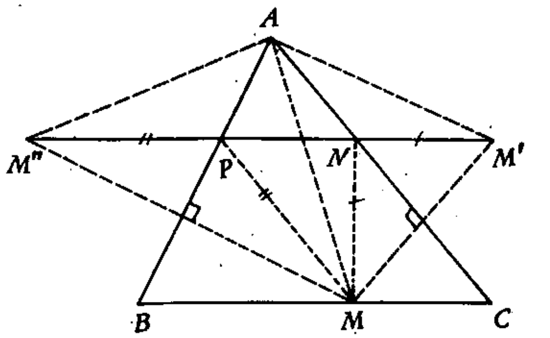
(۵ امتیاز)

حل:

اگر نقطه دلخواه M را روی BC انتخاب کنیم، ازین مثلثهائی به‌رأس M که دو رأس دیگر آن روی دوضلع دیگر مثلث باشند، محیط مثلثی می‌نیمم است که بشرح زیر حاصل شود.

قرینه‌های نقطه M را نسبت به‌اضلاع AB و AC به‌ترتیب M' و M'' می‌نامیم خط $M'M''$ دوضلع AC و AB را به‌ترتیب در نقاط N و P قطع می‌کند. مثلث MNP، با محیط $M'M''$، جواب این قسمت از مسأله است.

امــا مثلث $AM'M''$ متســاوی‌الساقین به‌زاویه رأس $M'\hat{A}M''=2\hat{A}$ است.



حال‌مسأله به‌تعیین نقطه M بطوری‌که‌قاعده مثلث‌حاصل ($M'M''$) می‌نیمم شود؛ تبدیل می‌شود.

چون مثلثهای حــاصل ($AM'M''$) متساوی‌الساقین بــا زاویه رأس $2\hat{A}$ می‌بــاشند، پس قــاعده $M'M''$ در مثلثی می‌نیمم است که ساق‌آن می‌نیمم بــاشد چرا؟ و این در حالتی است که $AM=AM'=AM''$ می‌نیمم باشد، یعنی M پای ارتفاع از رأس A باشد. با تعویض M با نقاطی روی اضلاع AC و AB، مثلث موردنظر مثلث ارتفــاعیه محاط در مثلث ABC خواهد بود.

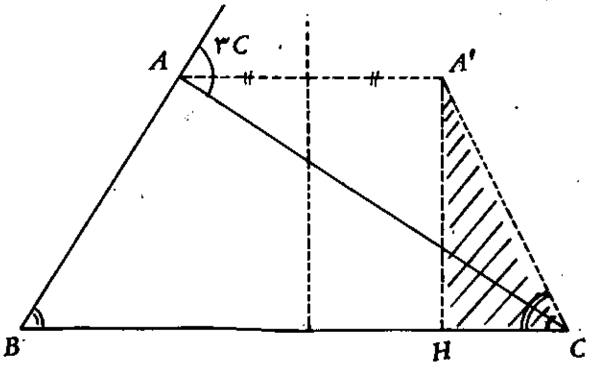
۲ــ از مثلث ABC اندازه ضلع BC و اندازه ارتفاع AH معلوم است و می‌دانیم اندازه زاویه B دو برابر اندازه زاویه C است، مثلث را رسم کنید،

(۵ امتیاز)

حل:

فرض‌کنیم مسأله حل شده ومثلث ABC جواب مطلوب باشد.

اگر قرینه A را نسبت بــه عمودمنصف BC، A' بنامیم مثلث $AA'C$ متساوی‌الساقین است. زیرا، $AA'CB$ ذوزنقه متساوی‌الساقین است، از آنجا $AB=AA'=A'C$.



حال اگر از نقطه A' عمود $A'H$ را بر BC رسم‌کنیم

مثلث قائم‌الزاویه $A'HC$ قابل رسم است زیرا اگر $AC'=x$ فرض شود، داریم $A'H=h$ و $BC=a$ (a و h معلوم‌اند) پس

$$HC=\frac{a-x}{۲}$$

و در مثلث قائم‌الزاویه $A'HC$ می‌توان نوشت

$$x^{۲}=h^{۲}+\frac{(a-x)^{۲}}{۴}$$

یا

$$۳x^{۲}+۲ax-۴h^{۲}-a^{۲}=۰$$

چون طولهای a و h معلوم‌اند؛ $a^{۲}$ و $h^{۲}$ قابل رسم‌اند، از آنجا ریشه‌های معادله درجه دوم قابل ترسیم‌اند (مجموع و حاصلضرب آنها معلوم‌اند)؛

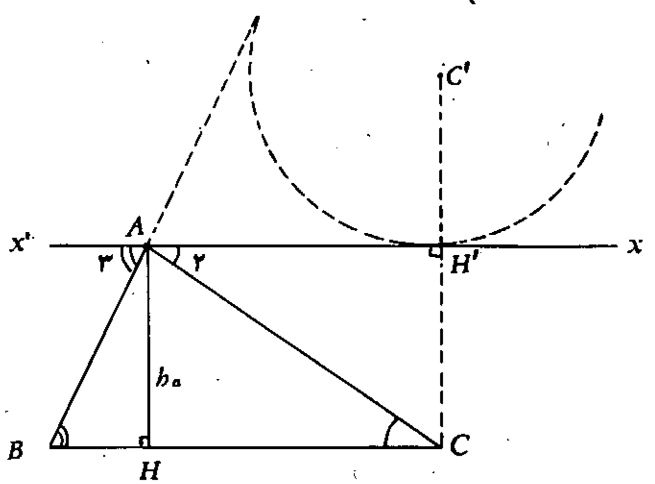
با تعیین x و رسم مثلث $A'HC$ ؛ CH را به‌اندازه a امتداد می‌دهیم، بمرکز B و شعاع $A'C$ دایره‌ای رسم‌می‌کنیم، محل‌تلاقی‌خط‌موازی از A' با CB نقطه A را بدست می‌دهد. (برای تعداد جوابهامی‌توان بحث کرد)

روش دوم

اگر از نقطه A خط $x'x$ را بموازات BC رسم‌کنیم بنا برخاصیت توازی زاویه $x'\hat{A}B$ دو برابر زاویه $x\hat{A}C$ است (زیرا؛ $\hat{B}=۲\hat{C}$).

چون ارتفاع AH معلوم است، پس خط $x'x$ معلوم است. مسأله به‌مسأله زیر تبدیل می‌شود.

دونقطه C و B و خط $x'x$ مفروض است. نقطه A را برخط $x'x$ چنان بیابید بطوری که $\hat{A}_{۳}=۲\hat{A}_{۲}$. (یا $x'\hat{A}B=۲x\hat{A}c$).



برای حل مسأله اخیر، قرینه نقطه C نسبت به‌خط $x'x$ را C' می‌نامیم.

بمرکز C' و شعاع CH' دایره‌ای رسم می‌کنیم، سپس از نقطه B مماسی براین دایره رسم می‌کنیم. محل تلاقی خط مماس با خط $x'x$ نقطه A است.

نکته: روش دوم ارجحیت دارد. هرچندکه هردو روش درست‌اند.

۳- زاویه بین دوفصل مشترك صفحه $۲x+y-z=۰$ و مخروط $۴x^{۲}-y^{۲}+۳z^{۲}=۰$ را بیابید.

(۷ امتیاز)

حل:

اگر پارامترهای هادی فصل مشترك‌را (l, m, n) بنامیم باید داشته‌باشیم

$$\begin{cases} ۲l+m-n=۰ \\ ۴l^{۲}-m^{۲}+۳n^{۲}=۰ \end{cases}$$

زیرا ، فصل‌مشترك از مبداء مختصات می‌گذرد، پس‌اگر (l,m,n) نقطه دلخواهی ازفصل مشترك‌باشد، اولا (l, m, n) خود پارامترهای هادی هستند ، ثانیاً این نقطه برفصل مشترك واقع است پس (l, m, n) در هردومعادله خط و مخروط صدق می‌کند.

(بجای (l, m, n) می‌توان همان $(x\ y, z)$ راگرفت).

با توجه به‌معادلات فوق داریم

$$n=m+۲l$$

از آنجا

$$۴l^{۲}+۳(m+۲l)^{۲}-m^{۲}=۰$$
$$۱۶l^{۲}+۲m^{۲}+۱۲lm=۰$$

l و m هردو صفر نیستند زیرا در اینصورت n هم صفر خواهد بودکه موردنظر نیست. فرض‌کنیم $m\neq۰$. از آنجا

$$۸\left(\frac{l}{m}\right)^{۲}+۶\left(\frac{l}{m}\right)+۱=۰$$

$$\frac{l}{m}=\frac{-۳\pm\sqrt{۱}}{۸}=\begin{cases}-\frac{۱}{۲}\\ -\frac{۱}{۴}\end{cases}$$

با فرض $\frac{l}{m}=-\frac{۱}{۲}$ داریم $\frac{n}{m}=۱+\frac{۲l}{m}=۰$

پس

$$\frac{l}{-۱}=\frac{m}{۲}=\frac{n}{۰}$$

و با فرض $\frac{l}{m}=\frac{-1}{4}$ داریم $\frac{n}{m}=1+\frac{2l}{m}=\frac{1}{2}$ واز آنجا

$$\frac{l}{-1}=\frac{m}{4}=\frac{n}{1}$$

ودرنتیجه پارامترهای هادی‌فصل‌مشترکها $(-1,2,0)$ و $(-1,2,1)$ ، و یا متناسب با آنها هستند. وزاویه بین دوفصل مشترك، یعنی α ، چنین است

$$\cos\alpha=\frac{1+8}{\sqrt{1+4}\sqrt{1+16+4}}=\frac{3\sqrt{105}}{35}$$

برهان دوم: (این برهان ازآقای غیور است)

ابتدا تقاطع صفحه وسطح مخروطی‌را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}4x^2-y^2+3z^2=0\\ 2x+y-z=0\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}4x-y^2+3(2x+y)^2=0\\ 2x+y-z=0\end{cases}$$

از طرفی،

$$4x^2-y^2+3(2x+y)^2=2(2x+y)(4x+y)=0$$

بنابراین، از این رابطه و دستگاه فوق نتیجه می‌شود که صفحه $2x+y-z=0$ سطح مخروطی را در دو صفحه $2x+y=0$ ، $4x+y=0$ قطع می‌کند. بنابراین فصل مشترك صفحه با سطح مخروطی دوخط d ، d' ، به معادلات ذیل است؛

$$d\left|\begin{array}{l}2x+y=0\\ 2x+y-z=0\end{array}\right. \qquad d'\left|\begin{array}{l}4x+y=0\\ 2x+y-z=0\end{array}\right.$$

اینك پارامترهای‌هادی دوخط d , d' را تعیین می‌کنیم. پارامتر هادی خط d ، $(-1,2,0)$ ؛ و پارامتر هادی خط d' ، $(-1,4,2)$ است. زاویه بین‌این‌دوخط را α می‌نامیم و چنین محاسبه می‌شود

$$\cos\alpha=\frac{1+8}{\sqrt{5}\sqrt{21}}=\frac{3\sqrt{105}}{35}$$

۴− $(G,\circ)$ یك گروه و a عضو ثابتی از آن است. نشان‌دهید که

$$G_a=\{x \mid \exists n\in z : x=a^n\}$$

یك زیرگروه G است.

(۴ امتیاز)

حل:

فرض‌کنیم‌که x , y دوعضو G_a باشند. بنابراین، n,m ی در z موجود است که

$$x=a^n \ , \ y=a^m$$

پس،

$$xy=a^n a^m=a^{n+m}$$

چون $n+m$ عضو Z است، پس $xy\in G_a$ ، ازآنجا G_a نسبت به‌عمل ضرب (عمل گروه) بسته است. از طرف دیگر $e=a^0$ عضوهمانی G_a است زیرا، به‌ازای هر $x\in G_a$ داریم

$$xe=a^n a^0=a^{n+0}=a^n=x$$
$$ex=a^0 a^n=a^{0+n}=a^n=x$$

همچنین وارون هرعضو $x=a^n$ در G_a عبارت است از $y=a^{-n}$ که متعلق به G_a است زیرا $-n\in z$ و

$$xy=a^n a^{-n}=a^0=e$$
$$xy=a^{-n}a^n=a^0=e$$

بالاخره‌اگر $x=a^n$ ، $y=a^m$ و $z=a^t$ اعضائی‌در G_a باشند آنگاه

$$x(yz)=a^n(a^m a^t)=a^n a^{m+t}=a^{n+m+t}$$
$$(xy)z=(a^n a^m)a^t=a^{n+m}a^t=a^{n+m+t}$$

وعمل ضرب در G_a شرکتپذیر ودرنتیجه G_a زیرگروه (G_a) است.

برهان دوم: (این برهان از آقای دکتر ذاکری است)

برای اثبات زیر گروه‌بودن G_a از قضیه ذیل استفاده می‌کنیم.

شرط لازم‌کافی برای اینکه G_a یك‌زیر گروه G باشد آنست که به‌ازای هر x , y از G_a ،

$$xy^{-1}\in G_a$$

بدیهی است که $G_a\neq\varnothing$. زیرا، $e\in G_a$.

فرض‌کنیم x , y عضوهایی از G_a باشد. بنابراین، n , m ی از z موجود است‌که

$$y=a^m \ . \ x=a^n$$

اینك ،

$$xy^{-1}=a^n(a^m)^{-1}=a^n a^{-m}=a^{n-m}$$

لهذا ، $xy^{-1}\in G_a$. بالنتیجه، G_a زیر گروه G است.

۵ـ درتیراندازی بایك تفنگ خـاص، احتمال اصابت گلوله به‌هدف ۹۰درصد است اگر هنگام استفاده ازاین‌تفنگ تیراندازی راآنقدر ادامه دهیم تاگلوله به‌هدف اصابت‌نماید مطلوب است محاسبه

الف ـ احتمال آنکه دقیقاً سه‌گلوله مصرف‌شود.

ب ـ احتمال آنکه‌حداقل‌سه گلوله مصرف شود(۴امتیاز)

حل: درحالت‌کلی رویدادهای زیررا تعریف و احتمال هریك را می‌نویسیم

رویداد A: گلوله به‌هدف بخورد $\quad P(A)=P$

رویداد B: گلوله به هدف نخورد $\quad P(B)=q$

پیشامدهای فرعی عبارتند از

احتمال p پرتاب اول به‌هدف بخورد A

» pp پرتاب دوم به‌هدف بخورد BA

: : : :

» $q^{n-1}p$ » nام » $\underbrace{BB=B}_{n-1}A$

نتیجه،

p(در پرتاب nام به‌هدف بزنیم) $=q^{n-1}p$

الف : احتمـال اینکه دقیقـاً سه‌گلوله مصرف شود؛

p(در پرتاب سوم به‌هدف بزنیم) $=q^2p$

$$=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{90}{100}=\frac{9}{1000}=0.009$$

ب: احتمال اینکه حداقل سه‌گلوله مصرف شود.

حـالت کلی: این پیشامد اتحـاد پیشامدهای متمایز، سه‌گلوله مصرف شود؛ چهارگلوله مصرف شود،... و بـا نماد فوق

$$(BBA)\cup(BBBA)\cup\dots(BB\dots BA)\cup\dots$$

پس احتمال این پیشامد برابر جمع احتمـالهای متمایز فوق است.

P(بیش از سه‌گلوله مصرف شود) $=$

$$=P(BBA)+P(BBBA)+\dots$$

$$=P(B)P(B)P(A)+P(B)P(B)P(B)P(A)+\dots$$

$$=q^2p(1+q+q^2+\dots)$$

$$=q^2p\frac{1}{1-q}=q^2$$

و با جایگذاری مقدار عددی

P(بیش از سه‌گلوله مصرف شود) $=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{100}$

نکته: در قسمت (ب) پیشـامد موردنظـر را می‌توان برحسب مکمل پیشامد تعریف‌کرد.

p(سه‌گلوله‌مصرف‌شود) $=1-p$(یك‌یادو گلوله مصرف‌شود)

چون پیشامدها متمایزاند؛

p(یك‌یادو گلوله مصرف‌شود) $=p$(یك گلوله مصرف‌شود) $+$ p(دو گلوله مصرف‌شود)

با جایگذاری مقادیر عددی

p(مصرف بیش ازسه‌گلوله) $=1-(p+qp)=$

$$=1-p(1+q)$$

$$=1-\frac{90}{100}\left(1+\frac{1}{10}\right)$$

$$=1-\frac{99}{100}=\frac{1}{100}$$

۶ـ در حلقه R، رابطه زیر برقرار است

$$\forall x\in R,\ x^2=x$$

ثابت‌کنید اولا هرعضو R با قرینه‌اش برابر است، ثانیاً ثابت‌کنید حلقه جابجائی است

(۴ امتیاز)

حل:

فرض‌کنیم $x\in R$ ؛ داریم

$$(x+x)^2=x+x$$
$$(x+x)(x+x)=x+x$$
$$x^2+x^2+x^2+x^2=x+x$$
$$x+x+x+x=x+x$$
$$x+x=0\Rightarrow x=-x$$

بنابراین قرینه و عضو با خودش برابر است.

حال فرض‌کنیم $x, y\in R$ ؛ چون $x+y\in R$ داریم

$$(x+y)^2=x+y$$
$$(x+y)(x+y)=x+y$$
$$x^2+xy+yx+y^2=x+y$$
$$x+xy+yx+y=x+y$$
$$xy+yx=0$$

چون $-y=y$ پس $xy-yx=0$ از آنجا $xy=yx$ وحلقه جابجائی است.

برهان دوم: (برهان ذیل از آقای دکتر ذاکری است.)

از قضیه $a(-b)=(-a)b=-ab$ استفاده می‌شود. داریم $-x=(-x)^{2}=(-x)(-x)=x^{2}=x$، پس هرعضو با قرینه‌اش برابر است. بنابراین،

$$(x+y)(x-y)=(x-y)^{2}=x-y،$$

$$x^{2}+x(-y)+yx+y(-y)=x-y,$$

$$x-xy+yx-y=x-y,$$

$$xy=yx.$$

۶ـ اگر a، b و c اعداد حقیقی و c و b مثبت باشند. نشان‌دهید که اگر $a<b$ $(a>b)$ آنگاه

$$\frac{a+c}{b+c}>\frac{a}{b}\quad\left(\frac{a+c}{b+c}<\frac{a}{b}\right)$$

و نتیجه بگیرید که $\frac{a+c}{b+c}$ بین ۱ و $\frac{a}{b}$ است.

اگر $a<b$ و هردو گویا باشند با استفاده از نتایج فوق ثابت کنید عدداصمی مانند x وجوددارد بطوری که $a<x<b$. (۳ امتیاز)

حل:

فرض کنیم $a<b$، چون $c>0$ پس

$$ac<bc$$

به‌طرفین نامساوی مقادیر مساوی ab را می‌افزائیم

$$ab+ac<ab+bc$$

$$a(b+c)<b(a+c)$$

چون $b+c>0$ پس

$$a<\frac{b(a+c)}{b+c}.$$

و چون $b>0$

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}\qquad(۱)$$

حالت $a>b$ نیز بهمین ترتیب ثابت می‌شود.

حال داریم $a<b\Rightarrow a+c<b+c\Rightarrow\frac{a+c}{b+c}<۱$

و با توجه به‌نامساوی (۱) داریم

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}<۱$$

برای‌قسمت‌آخرمسأله، بافرض $a<b$ داریم

$۱>\frac{a+c}{b+c}>\frac{a}{b}$، باانتخاب c بعنوان عددی اصم ثابت‌می‌کنیم

$x=\left(\frac{a+c}{b+c}\right)b$ عددی اصم خواهد بود

از آنجا $a<x<b$ جواب مطلوب خواهد بود.

حال فرض کنیم c عددی اصم ولی $\left(\frac{a+c}{b+c}\right)b$ اصم نباشد پس

$$\left(\frac{a+c}{b+c}\right)b=\frac{p}{q}\qquad(p \text{ و } q \text{ اعداد صحیح‌اند})$$

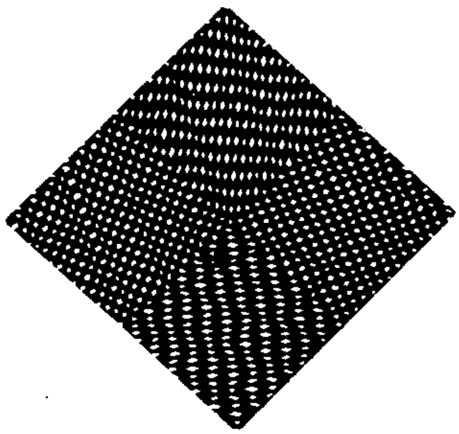
$$(a+c)\,bq=p(b+c)$$

$$abq+cbq=bp+pc\Rightarrow c=\frac{b(aq-p)}{p-bq}$$

چون

$$a<b\Rightarrow\frac{a+c}{b+c}\neq۱\Rightarrow p\neq bq$$

و a، b، p، q اعداد صحیح‌اند در نتیجه c عددی گویا است که متناقض فرض اصم‌بودن آن است. ازاین‌تناقض نتیجه می‌شود که اگر c اصم باشد، $\frac{a+c}{b+c}$ نیز اصم و حکم خواسته شده برقرار است.



مسائل

تهیه و تنظیم: جواد لالی

مسئله مسابقه

فرض کنید که به‌ازای هر عدد حقیقی نامنفی α،

$$f(x)=\int_{x}^{\frac{1}{x}}\frac{2}{(1+t^{\alpha})(1+t^{2})}dt.$$

دراین صورت، $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ (درصورت وجود) را به دست آورید.

☆☆☆

۱ـ درمجموعهٔ اعداد طبیعی N رابطه (یانسبت) f و g را چنین تعریف می‌کنیم:

xfy؛ یعنی،

x فرد و y زوج است، یا x و y فردند و $x<y$، یا x و y زوجند و $x<y$.

xgy؛ یعنی،

x فرد و y زوج است، یا x و y فردند و $x<y$، یا x و y زوجند و $y<x$.

قرار می‌گذاریم که هرگاه xfy (xgy) آنگاه x را پیش‌از y بنویسیم.

اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰ را یك بار برحسب f و یك بار برحسب g برطبق قرار فوق بنویسد. سپس، ثابت کنید که f و g مجموعه N را مرتب می‌کنید.

۲ـ فرض کنیم که f یك رابطه ترتیبی در A باشد. اگر A عضوی مانند a داشته باشد که هیچ عضو A رابطه f به‌آن نداشته‌باشد، a را ابتدای A برحسب f می‌نامیم. اگر A عضوی مانند b داشته باشد که به‌هیچ عضو A رابطه f نداشته باشد، b را انتهای A برحسب f خوانیم. اگر xfy و yfz آنگاه گوئیم y، برحسب f، بین x و z است.

حال اگر f و g همان رابطه‌هائی باشند که درمسئله ۱ تعریف شده‌اند، ثابت کنید:

(الف) مجموعهٔ اعدادطبیعی برحسب f ابتدا دارد،ولی انتها ندارد، اما برحسب g هم ابتدا دارد وهم انتها دارد؛

(ب) برحسب هریك از دو رابطه f و g اعداد طبیعی بین ۱ و ۲ وجود دارد، مجموعه همه این اعداد را معین کنید.

۳ـ فرض کنید که f تابع حقیقی باشد و به ازای مقادیر مثبت x،

$$\frac{2x-1}{3x}<f(x)<\frac{4x^{2}+5}{6x^{2}}.$$

دراین‌صورت، $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ را (درصورت وجود) تعیین کنید.

۴ـ فرض کنیم به‌ازای هر x ($x\neq 2$)،

$$f(x)=\frac{[x]^{2}-4}{x^{2}-4}$$

آیا می‌توان مقدار تابع را درنقطه ۲ بگونه‌ای تعریف کرد که تابع f پیوسته شود؟ چرا؟

۵ـ ثابت کنید: اگر $0<x<\frac{\pi}{2}$ آنگاه

$$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x,\quad \cos x>1-\frac{x^{2}}{2}.$$

آیا نامساویهای فوق برای $x=0$ یا $x=\frac{\pi}{2}$ برقرار است؟ برای $-\frac{\pi}{2}<x<0$ چطور؟

۶ــ ثابت‌کنید شرط‌لازم وکافی برای آنکه به‌ازای هر سه عدد مثبت a ، b ، c مقدار $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+b}{C}\right)^n$ موجود و متناهی باشد آنست که $c\geqslant b+1$. سپس، به‌ازای $x>0$ مقدار $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{x}+1}{2}\right)^n$ رابیابید.

۷ــ ثابت کنید اگر $2a^2<5b$ آنگاه معادله
$$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$
نمی‌تواند پنج ریشه حقیقی داشته باشد.

۸ــ فرض‌کنید a و b دوعدد طبیعی باشند. ثابت‌کنید اگر $\frac{1}{2}(a^3+b^3)$ عدد اول باشد آنگاه $3a^2-6a+4$ و $3b^2-6b+4$ نیز چنین‌اند.

۹ــ فرض‌کنیم p یك عدد اول و M مجموعه اعداد صحیح متوالی بعداز p باشد. آیا ممکن‌است M را به دو مجموعه M_1 و M_2 طوری‌افرازکنیم (یعنی، $M_1\bigcap M_2=\Phi$، $M_1\bigcup M_2=M$) که حاصلضرب همه اعضای M_1 مساوی حاصلضرب همه اعضای M_2 باشد.

۱۰ــ مثلث متساوی الساقین رسم کرده‌ایم‌که رأسش منطبق برمبدأمختصات است وقاعده‌اش‌موازی محور x ها و در بالای‌آن چنان واقع شده‌است‌که دورأس آن برمنحنی نمایش $12y=36-x^2$ واقع است. مساحت بزرگترین‌مثلث موجود ازاین نوع را تعیین کنید.

۱۱ــ حد ذیل را محاسبه کنید.
$$\lim_{n\to\infty} n\int_{2}^{2+\frac{1}{n}}\frac{dx}{x^2+\sqrt{x^2+5}}.$$

۱۲ــ فرض کنیدکه Q^+ مجموعهٔ اعداد گویای مثبت باشد. عمل $*$ درQ^+ با ضابطه
$$a*b=\frac{ab}{2}\ (a\,,\,b\in Q^+)$$
تعریف می‌کنیم. ثابت‌کنیدکه Q^+ با عمل $*$ یك گروه آبلی است. گروه آبلی باعضوخنثی «عدد طبیعی مفروض» تعریف کنید.

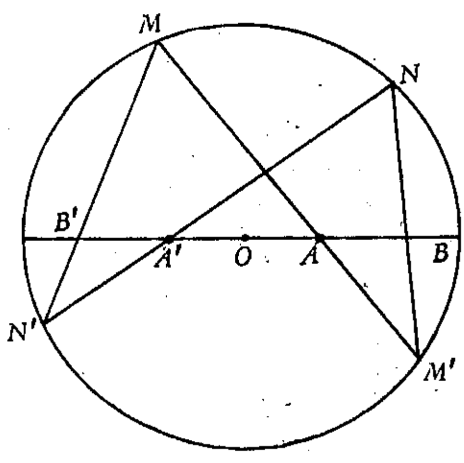
۱۳ــ به‌ازای مجموعه دلخواهی مانند S، فرض‌کنیم‌که $P(S)$ مجموعه همه زیر مجموعه‌های S باشد. عمل $+$ و $\circ$ را در $P(S)$ چنین تعریف می‌کنیم:
$$A+B=A\bigcup B-A\bigcap B$$
$$A\circ B=A\bigcap B$$
(الف) ثابت‌کنیدکه بااعمال‌فوق $P(S)$ یك‌حلقه است، درصورتی‌که S متناهی باشد،ایدآلهای آن را تعین‌کنید.
(ب) تعریف: حلقه R را یك حلقه پولی خوانیم در صورتی‌که‌به ازای هر a از R، $a^2=b$. ثابت‌کنید: هرحلقه بولی حلقه‌ای تعویضپذیراست و $P(S)$ یك حلقه پولی است.

۱۴ــ ثابت‌کنیدکه درهرمثلث بازاویه A, B, C،
$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}<\frac{1}{4}$$

۱۵ــ فرض‌کنیدکه $p_i(x_i, y_i, z_i)$ $(1\leqslant i\leqslant 3)$ سه نقطه درفضای باشند. مکان هندسی نقاطی‌که به‌وسیله معادله ذیل مشخص می‌شود چیست؟
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\end{vmatrix}=0$$

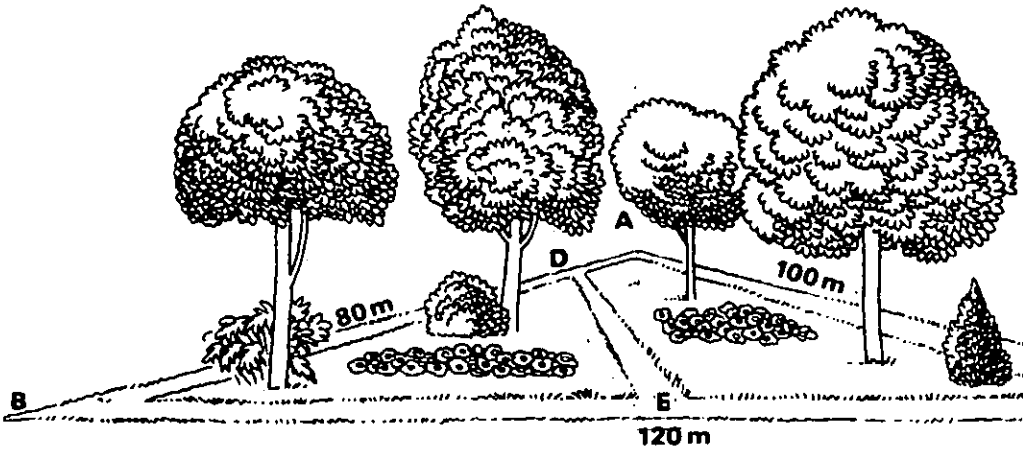
۱۶ــ در دایره‌ای به مرکز O قطرآن را رسم می‌کنیم. دونقطه A , A' را در دوطرف O طوری اختیارمی‌کنیم که $OA=OA'$ ازدونقطه A , A' دو وتر $M'AM$ و $N'A'N$ را رسم نموده، وMN' و $M'N$ را وصل می‌کنیم محل برخورد این دو را باقطرB وB' می‌نامیم. ثابت کنیدکه $A'B'=AB$

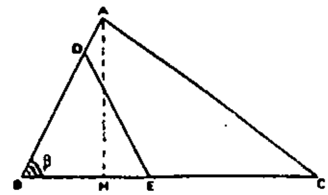
صورت دیگری از مسئله معروف پروانه (فرستنده: محمد داوری اردکانی، دبیر دبیرستانهای یزد)



سه‌مسأله هندسه ازکاظم فائقی
(مدرس مراکز تربیت معلم تبریز)

۱۷ــ باغی است به‌شکل مثل ABC که اضلاع آن ۸۰،





۱۰۰، ۱۲۰ متراست. ایـن‌باغ به وسیله یك خیابان باریك و کوچك DE که، مطابق شکل دوضلع AB وBC آن را به هم مربوط می‌کند، بـه دوبخش می‌شود. جالب اینکه مساحت این دوبخش برابریکدیگراست ومحیط آنها نیز مساویست. مطلوبست؛ اولاً، فاصله رأس B از دونقطه D وE. ثانیاً، طـول خیابان DE.

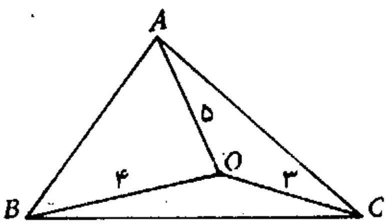
۱۸ــ نیمکتها به فاصله‌های مساوی

یـك گردشتگاه عمومی بـه شکل مثلث ABC ـ و بـه زاویه‌های حاده ـ است. به‌طوری‌که درشکل می‌بینید درهرکدام از گوشه‌های B وC یك نیمکت قرار داده شده است، تا گردش کنندگـان درموارد خستگی ازآنها استفاده کنند. قـراراست دونیمکت دیگرنیز در دونقطه M وN روی اضلاع AB وAC نصب شوند به طوری‌که چهارنیمکت به فاصله‌های مساوی از یکدیگرقرارگیرند. یعنی، داشته باشیم

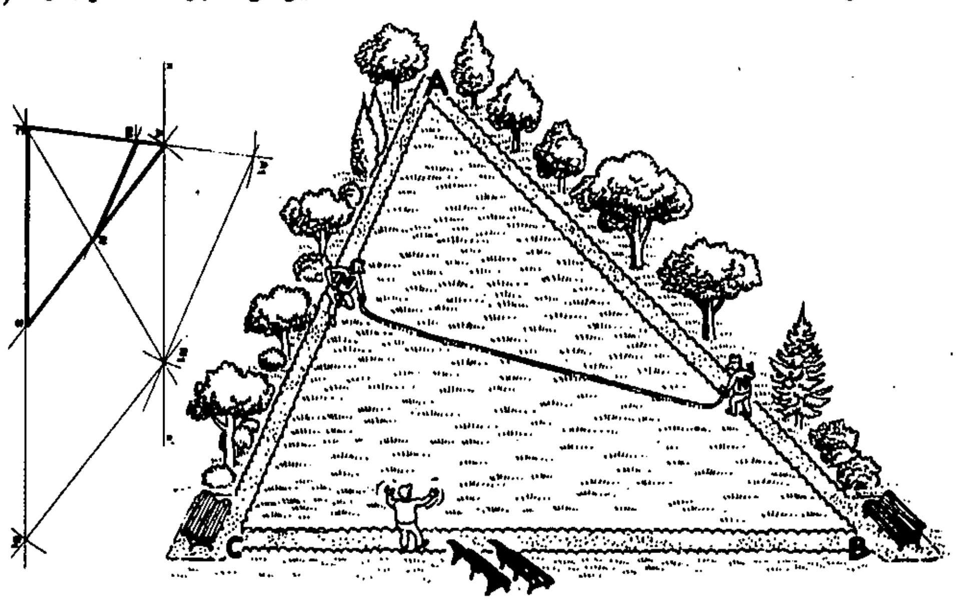
$$CM = MN = NB.$$

محل نقاط N, M را مشخص‌کنید.

۱۹ــ در گوشه‌ای از یك‌گردشگاه عمومی محوطه‌ای به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع چمنکاری شده است. درداخل‌چمن نیزفقط یك درخت سروبه‌چشم می‌خورد. فاصله این درخت از رأسهای مثلث به‌ترتیب ۳، ۴، ۵متراست. طول‌اضلاع مثلث را بیابید.



۲۰ــ درظرفی N مهره قـرار داردکـه در روی آنها اعداداز۱ تا N نوشته‌شده‌اند. n مهره (که $n \leqslant N$) به‌تصادف از این ظرف خارج می‌کنیم. مطلوبست احتمال اینکه بزگترین عدد موجود بین‌این n مهره عدد مفروض k $(n \leqslant k \leqslant N)$ باشد.



معرفی وبررسی اجمالی کتاب

سید محمد حسن حسینی
مدرس ریاضی مرکز تربیت معلم تبریز

کتاب مفتاح المعاملات، نوشتهٔ محمد بن ایواب طبری، متنی ریاضی از قرن پنجم هجری است که به‌کوشش آقای دکتر محمد امین ریاحی که نسخهٔ منحصر به فردی از آن را در کتابخانهٔ موزهٔ ایاصوفیهٔ ترکیه یافتند، توسط انتشارات بنیاد فرهنگ ایران درسال ۱۳۴۹ منتشرشده است. لازم به ذکراست مبنای معرفی و بررسی کتاب که توسط آقای سید محمدحسن حسینی، مدیرس محترم مرکز تربیت معلم تبریز انجام شده، همین کتاب اخیر است. امیدواریم نوشتهٔ مختصر ایشان گامی برای آشنایی خوانندگان با مطالب ریاضی و سبک نگارش متون ریاضی آن دوران، باشد.

رشد آموزش ریاضی

به‌طوری‌که معلوم است درجنبش بزرگ فکری وفرهنگی قرون چهارم وپنجم هجری درایران وبیشتردول اسلامی، اکثر کتابهای معمول بویژه آثار علمی به زبان عربی نوشته می‌شد ودرآن میان تعدادانگشت شماری که به‌الفاظ فارسی به‌قلم در آمده‌اند، برای ما ارزش خاصی دارند. شمار گرطبرستان، محمدبن ایوب طبری مؤلف کتاب مفتاح المعاملات، یکی‌از ریاضیدانان واخترشناسان معدودی است که بانوشتن آثاری به‌زبان‌فارسی راه‌آفرینش‌علمی‌را دراین زبان هموارساخته‌ودر بیان پاره‌ای از الفاظش، فروغ دانش‌پیش‌ازاسلام می‌درخشد. مفتاح المعاملات یکی‌ازنه کتاب ورسالهٔ نویسنده است‌که در علوم ریاضی تألیف گردیده وبا وجود آن همه‌اصالت وقدمت در زبان فارسی، مملو ازلغات عربی است. اسلوب الفاظ این کتاب ازچنان فنی آمیخته است‌که جلوهٔ خاصی برآن بخشیده ودرنوع خود بی‌نظیرش ساخته است. نوشتهٔ حاضرمعرفی و بررسی کوتاهی است ازکتاب مذکور.

نام وکنیت نویسنده‌أبوجعفرمحمدبن ایوب الحاسب طبری و دربعضی کتب محمدبن ایوب الطبری آمده است. اشاراتی هست‌کنه این دانشمند معاصرالب ارسلان وملکشاه سلجوقی بوده ولااقل درربع قرن‌از۴۶۵ تابعداز ۴۸۵ ه. ق فعالیت علمی داشته است. ازدیگرآثاراوست:

۱ــ العمل والالقاب درمعرفت علم اسطرلاب، ۲ــ شمارنامه درعلم حساب، ۳ــ زیج مفرد وچندکتاب دیگرکه مجموعاً به نه مجلد می‌رسد. تحریرکتاب حاضربه تاریخ ۶۳۲ ه. ق به‌توسط فضل‌الله‌بن‌ابراهیم بن محمود الخلاطی بوده وتنها نسخهٔ منحصربه فردی است‌که هم اکنون درکتابخانهٔ موزهٔ ایاصوفیهٔ استانبول موجود است. مفتاح المعاملات، همچنانکه ازنامش پیداست به‌کلید علم حساب موسوم است، وبرای برخورداری عامهٔ مردم‌نگارش یافته‌است. دراین‌کتاب‌ازآنچه درکارهای دینی ودنیوی مردم آن روزگار مورد نیاز بوده واز محاسبات هندسی وانواع شمارهای طول ومساحت و وزن و حجم وتقسیم ارث‌که همانا حساب فرائض نامیده می‌شد سخن رفته است.

درنخستین‌بررسی‌کتاب دونکته به‌چشم می‌خورد. نخست اینکه درهمه‌جای‌کتاب به‌جای اعداد (به‌صورت‌ارقام) بدون استثناء ازحروف استفاده شده‌است. دوم‌اینکه‌مؤلف‌درمحاسبات کسرها طبق معمول آن روزگار، دستگاه ستینی (شصتگانی) رابه‌کار برده است و اول‌کسی‌که کسرهای دهگانی رابه‌کار برده است ریاضیدان بزرگ ایرانی، غیاث‌الدین جمشید

کاشانی بوده است که سه قرن ونیم بعداز محمدبن ایوب طبری می‌زیسته‌است. مفتاح المعاملات درشش فصل ودویست ویازده در (باب) تألیف گردیده ویادگار دورانی‌است که درآن زمان هنوز اروپا درشب تاریك جهل مطلق فرورفته بود. وازایـن لحاظ به صراحت می‌توان گفت کـه مفتاح‌المعاملات درآثـار فارسی پیش‌ازمغول بی‌نظیراست. درایـن‌کتاب‌کلیهٔ نیازهای محاسباتی روزانهٔ مردم بـه وجه عملی، جمع گردیـده است. «... از گـرفتن و دادن وخریدن وفروختن وبخشیدن خـاصه مرمواریث را (یعنی تقسیم مـال بر وراث) وشمار فرائض و زکوة واستخراج مسائل در وصایا و اوقات نماز و روزه وخج وآنچه بود ازکارهای دینی ودنیوی...».

اصطلاحات‌این‌کتاب‌رامی‌توان‌به‌سه دسته‌تقسیم کرد:یك دسته اصطلاحاتی‌است‌که‌امروزه نیزدرکتابها متداول ومرسوم است مثل واژه‌های عدد، خط، نقطه، دایره، شکل و نظایرآن. دسته دوم آنهائی کـه برتری چندانی بـراصطلاحات متداول ندارند ولی آشنائی باآنها سبب فهم متون کهن می‌گردد؛ مثل مربع‌معین (لوزی)، مربع شبه‌المعین (ذوذنقه)، تکسیر(محاسبهٔ مساحت) وغیره. گروه سوم یك‌سری اصطلاحات خاصی‌است که سازگاری زیادی بازبان فارسی دارند مثل‌پاره (قطاع دایره)، ازسرتابن‌یگانه (ازبالاتاپائین‌مساوی)، بخشیدن(تقسیم‌کردن)، بـالائی (فوقانی)، بسیط (سطح)، سختن (وزن‌کـردن)، زدن (ضرب‌کردن) وغیره.

فصل نخستین که شامل ۱۶ باب است.

درابتدای این فصل مصنف، شمار را به‌کار داشتن عـدد معنی‌کـرده وآن را عبارت از ۴ عمل می‌داند. اول آنچه به شمارش‌درآید مثل حیوان، درخت، روز، ماه، سال وغیره. دوم آنچه بپیمایند، مثل‌چاه، زمین، جامه و راه وغیره. سوم‌آنچه به کیل درآید، چون غله وشراب. چهارم‌آنچه‌که او را بسنجند، چون زر ونقره ومس وآهن.

در پانزده باب دیگرنویسنده ازدانستن اعداد و جمع و تفریق،تضعیف،تنصیف،ضرب، تقسیم، جذر،عددصحاح‌وکسور، نسبت، زوج وفرد، دوعدد متباین‌ومشترك،موزونات وغیره سخن گفته شده است. مصنف درایـن فصل بعضی از انحای نگارش ونمایش‌نسبتها را به‌علت ثقل فهم‌آنهانپسندیده فلذا به‌طورمثال جدولی به‌صورت شکل‌زیـر وبه‌شرح زیر ارائه می‌دهد. مثلاً کسر $\frac{۴۷}{۶۰}$ را به‌صورت «ثلث ومربع وخمس» یعنی تـرکیبی از کسرها ویـاکسر $\frac{۴۸}{۶۰}$ را بـه‌صـورت «نـصف وخمس وعشر»

ازیکی	ازدو	ازسه	ازچهار	ازپنج	ازشش	ازهفت	ازهشت	ازنه	ازده	
واحد	نصف	ثلث	ربع	خمس	سدس	سبع	ثمن	تسع	عشر	یکی
	واحد	دوثلث	نصف	دوخمس	ثلث	دوسبع	ربع	دوتسع	خمس	دو
		واحد	نصف وربع	نه‌خمس	نصف	سه‌سبع	ربع‌و ثمن	ثلث	خمس وعشر	سه
			واحد	چهار خمس	دوثلث	چهار سبع	نصف	ثلث و تسع	دوخمس	چهار
				واحد	نصف وثلث	پنج‌سبع	نصف وثمن	پنج‌تسع	نصف	پنج
					واحد	شش‌سبع	نصف و ربع	دوثلث	نصف وعشر	شش
						واحد	نصف وربع وثمن	دوثلث وتسع	نصف و خمس	هفت
							واحد	هشت تسع	نصف و خمس و غشر	هشت
								واحد	نصف و خمسین	نه
									واحد	ده

ساده‌تر، وقابل فهم‌تر می‌داند. دلیل بیان کسر به‌صورت اخیر مثلاً در $\frac{۷}{۸}$ چنین است:

$$\frac{۷}{۸}=\frac{۴+۲+۱}{۸}=\frac{۴}{۸}+\frac{۲}{۸}+\frac{۱}{۸}$$

$$=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}$$

= (نصف وربع وثمن)

فصل دوم کتاب به ضرب وقسمت وجذروکسورات اختصاص یافته که در ۴۵ باب خلاصه شده است. در بخشی از این فصل، ضرب به‌صورت (زاید) و به صورت (ناقص) تقسیم می‌گردد. مثلاً ضرب $۶ = ۳ \times ۲$ چون حاصلی بیشتر از عدد اولیه یعنی ۲ دارد، ضرب زاید وضرب $۴ = \frac{۱}{۲} \times ۸$ که حاصلی کمتر ازعدد اولیه یعنی ۸ دارد ضرب ناقص نامیده می‌شود. از دیگر اقسام ضرب دراین کتاب ضرب عقد درعقد (ضرب اعداد یك رقمی) وحداکثر تا ۹×۹ می‌باشد. دیگر قسم ضرب، ضرب مراتب درمراتب است که دراین نوع ضرب نام مرتبهٔ رقمها از ۶ به ۹ واز ۹ به‌بالا تکراری ازمراتب قبلی است واسم خاصی ندارد. شکل زیر

آحاد	عشرات	ما بین	الوف	....	مابین الوف الوف
عشرات	مابین				
مابین	الوف				
الوف	عشرات الوف	مثال:			
عشرات الوف	مابین الوف	صدمیلیون‌ها × ده‌ها =			
مابین الوف	الوف الوف	هزارهزارهزارها			
الوف الوف	عشرات الوف الوف				
مابین الوف الوف	الوف الوف الوف				

مصنف دراین فصل روشی را برای جذرگیری ارائه می‌دهد که عبارت است از:

مثلاً $\sqrt{۲۴۰۲۵}=؟$

$۲۴۰۰۰ \Longrightarrow \leqslant {}^{۲}$ (بیشترین عدد ممکن)

$۱۰۰ \times ۱۰۰ = ۱۰۰۰۰ < ۲۴۰۰۰$

$۲۴۰۲۵ - ۱۰۰۰۰ = ۱۴۰۲۵ \Longrightarrow$

$۵۰ \times ۱۰۰ = ۵۰۰۰,\ ۵۰۰۰ \times ۲ = ۱۰۰۰۰$

$۱۴۰۲۵ - ۱۰۰۰۰ = ۴۰۲۵ \Longrightarrow ۵۰ \times ۵۰ = ۲۵۰۰$

$۴۰۲۵ - ۲۵۰۰ = ۱۵۲۵ \Longrightarrow$

$۵ \times ۱۰۰ = ۵۰۰,\ ۵۰۰ \times ۲ = ۱۰۰۰$

$۱۵۲۵ - ۱۰۰۰ = ۵۲۵ \Longrightarrow$

$۵ \times ۵۰ == ۲۵۰\ ,\ ۲۵۰ \times ۲ = ۵۰۰$

$۵۲۵ - ۵۰۰ = ۲۵ \Longrightarrow ۵ \times ۵ = ۲۵$

$۲۵ - ۲۵ = ۰ \Longrightarrow \sqrt{۲۴۰۲۵} = ۱۰۰ + ۵۰ + ۵ = ۱۵۵$

فصل سوم کتاب شامل ۱۸ باب است که در فرائض ومعاملات بحث می‌کند. مصنف اصل شمارمعاملات را برعدد متناسبات (تناسب) مبتنی می‌داند که همهٔ شمار معاملتها از آن بیرون آید. دراکثر بابهای این‌فصل به‌شمار موزونات ومکیلات ومثاقیل[۱] ومنوات[۲] وغیره پرداخته شده است، که همگی بدون استثناء ازتناسبهای ساده خارج نیستند. فلذا توضیح بیشتری بر معرفی این فصل ضروری به نظر نمی‌رسد.

فصل چهارم کتاب به‌شمارنوادرومضمرات[۳] اختصاص یافته که دارای ۵۴ باب است. مثلاً شمار آب حوضی که درچند روز پرشود؟ ویا شمار بریدی[۴] کندرو مرتیزرو را، ویا شمار سود وزیان مردان بازرگان وخیلی ازشمارهای دیگر. دراین فصل آنچه جالب توجه است نقل‌مسائل ریاضی درقالب معمااست. برای توضیح مطلب مثالهای زیر را می‌آوریم:

اگرپرسند مارا که مردی مردی را گفت که نام توچیست؟ جواب گفت: «نام من خمس ونصف دوماندهٔ دیگر»، چه باشد این نام؟ (صفحهٔ ۱۳۱ کتاب)

شمارش: ضرب کنیم دو در دوازبهر دوماننده، برآید چهار، پس درپنج ضرب کنیم ازبهرخمس را حاصل آید بیستی، پس در دوضرب کنیم ازبهرنصف خمس را حاصل آید چهل، وعلامتش به حساب حمل میم است ـ. نگاه داریم، دوماننده است یعنی دومیم. پس خمس چهل بگرفتیم هشت بود علامتش می بود، ونیمهٔ هشت که‌خمس‌است‌چهار بود وعلامتش‌دال‌است، پس گردآوردیم، میم ومی ومیم [و] دال، بدانستیم که این نام محمد است. واین‌کفایت است اندرین معنی.

مثال‌دیگر: اگرپرسندمارا که‌عددی بدست‌راست‌گرفته‌ایم وعددی بدست چپ که جمله ۱۳ است، بازگوی که آن دست راست چنداست وآن دست چپ چند؟

شمارش: جمله عددهاش رابه‌دولاکنیم یعنی سیزده را، بیست وشش‌بوذ نگاه داریم. پس گوییم آن دست راست سه‌بار برهم گیروآن دست چپ رادوبار، چون برگیرد بپرسیم تا چند است؟گوید که سی‌ویك‌است. پس بیست وشش‌را ازاوبکاهیم، بماند پنج. این عدد دست چپ باشد.

۱) مثقال‌ها ۲) جمع من

۳) مسائل پوشیده ۴) نامه‌بر

وباقی تمامیش را تاسیزده یعنی آن دست راست.
واین کفایت است.

عنوان **فصل پنجم** کتاب دانستن خطاها ومشکلات است واین فصل به ۱۴ باب تقسیم شده است. دراین فصل خطایین (دوخطا) شرح داده می‌شود و روش حل مسائل با استفاده از خطایین توضیح داده می‌شود ودر آخراین فصل پاسخی رابرای یك مثال ارائه داده که جالب وقابل بررسی است:

اگر پرسند ماراکه کدام است آنعددکه چون یازده براو بیفزائیم جذرش باز آید وچون صداز او بکاهیم جذرش باز آید.

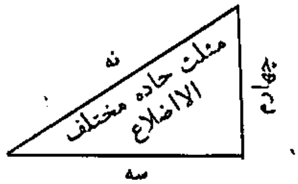
$$\left(\frac{۱۱+۱۰۰-۱}{۲}\right)^{۲}+۱۰۰=\left(\frac{۱۱۰}{۲}\right)^{۲}+۱۰۰$$

$$=۵۵^{۲}+۱۰۰=۳۱۲۵ \text{ عدد مطلوب}$$

$$۳۱۲۵+۱۱=۵۶^{۲},\quad ۳۱۲۵-۱۰۰=۵۵^{۲}$$

وبالاخره **فصل ششم** وآخرین فصل از این کتاب در دانستن مقادیرومساحات و به‌طور کلی علم هندسه است که از ۶۴ باب تشکیل یافته‌است، وعمده‌ترین فصل ازنظرحجم محسوب می‌گردد.

دراین‌فصل بدون توجه به تعاریف دقیق خطوط واشکال واجسام به‌بیان هریك پرداخته است. مثلاً کره راچنین تعریف کرده: «کره جسمی است کروی که طول وعرض وعمق‌اش بیك‌اندازه باشد»، وازمیان اشکال آنچه راکه ما رویه می‌نامیم بسیط، وآنچه راکه فضا را اشغال می‌کند مجسم می‌نامد. در تعریف مثلث حادهٔ مختلف الاضلاع می‌گوید: مثلثی است بازوایای حاده وبا پهلوهای مختلف (که تعریف درستی هست) ولی مثالی را ارائه می‌دهدکه در آن، اضلاع مثلث ۳ ، ۴ و ۹ می‌باشد. درحالی‌که همچون مثلثی منفرجه درمی‌آید! (صفحهٔ ۱۷۳). بهرحال شاید مؤلف به خواص مثلثات توجه ونظری نداشته ویا برای مثال‌آوردن چنین اعداد مختلفی را جهت تفهیم مختلف الاضلاع بدون توجه به زوایا وامکان وجود آن کافی دانسته است. البته اشتباه کاتب نیزدراینجابعید به نظرمی‌رسد چون شکل ترسیمی چنین است:



درقسمتی ازفصل ۶ برای تعیین مساحت اشکال مختلف ابتدا مقدمه‌ای به مثابه نشاندن وگنجاندن مربعات واحد برای تفهیم سطح و مساحت به‌کار برده و با شمارش مربعات واحده مساحت معینی رابه‌دست می‌آورد.

جالب اینجاست‌که درتعیین مساحت دایره، مصنف ابتدا عدد π را مطرح نکرده ومحیط دایره رابه‌مثابه اندازه‌گیری طول خط راست محاسبه می‌کند. فرضاً دایره‌ای به قطر ۷ را مثال‌می‌زندکه پیرامون آنرا قبلاً اندازه‌گرفته وباعدد ۲۲ نشان می‌دهد وبرای تعیین مساحت نصف هردو را درهم ضرب می‌کند. باتوجه به مثالهای بعدی معلوم می‌شود مصنف به‌جای عدد π ازکسر $\frac{۲۲}{۷}$ استفاده کرده وحتی دراشاره به‌مسئله‌ای عدد $\left(\text{سه وسبع } =۳\frac{۱}{۷}=\frac{۲۲}{۷}\right)$ را به‌عنوان یك مقدارثابت که تقریباً برابرعدد π می‌باشد به‌کار برده است. طریقهٔ دیگری را برای یافتن محیط دایره ارائه می‌نمایدکه نشان می‌دهد این بارهم عدد π را برابر $\sqrt{۱۰}$ درنظر گرفته است. پس ملاحظه می‌کنیم‌که:

$$\underbrace{\sqrt{۱۰(۲R)^{۲}}}_{\text{(محاسبهٔ مصنف)}}=\underbrace{۲\pi R}_{\text{محیط واقعی}}\Rightarrow \pi=\sqrt{۱۰}$$

دربررسی اکثرمطالب مربوط به اعشار ومشاهدهٔ اینکه محاسبات چقدربا تقریب‌کمتری انجام‌گرفته است درمی‌یابیم که شاید مصنف تصمیمی بریافتن اعدادی چندان دقیق نداشته ویاشاید مقدار $\frac{۲۲}{۷}$، عدد دقیق وتقریب خوبی برای عدد π در زمان ایشان بوده است.

$$\pi\approx\frac{۲۲}{۷}\approx ۳/۱۴۲۸\,۵۷۱...$$

$$\pi\approx\sqrt{۱۰}\approx ۳/۱۶۲{,}۲۷۷{,}...$$

$$\pi\approx ۳/۱۴۱{,}۵۹۲{,}۶۵۳{,}۵...{,}.$$

درصفحهٔ ۲۲۴ کتاب احتمالاً مصنف دچاراشتباه وخطا گردیده که حجم کره را «نصف محیط × نصف قطر × عمق (قطر)» بیان کرده‌است. حتی همین اشتباه را درمورد مثال مربوطه‌نیزاعمال نموده‌که تقریباً حجم کره را بامقدار $۲\pi R^{۳}$ معادل دانسته است، درحالی‌که مقدار واقعی حجم‌کره برابر $\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$ می‌باشد. آقای‌دکتر ریاحی مصحح محترم‌کتاب مولف نیز به این نکته اشاره‌ای ننموده است. مصنف درمثال مربوط حجم‌کره‌ای به‌شعاع ۳/۵ راکه اصولاً باید برابرمقدارتقریبی ۱۷۹/۵۰۳ باشد مقدار ۲۶۹/۵ بیان‌نموده‌که‌اختلاف زیادی بین این دوعدد ملاحظه می‌گردد.

اطلاعیه

دربارهٔ نشریات رشد آموزش تخصصی

مجلات رشد آموزش مواد درسی مدارس کشور نشریاتی است که از سوی گروههای درسی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش با همکاری دفتر امور کمک آموزشی هر سه ماه یکبار ــ چهار شماره در سال ــ منتشر می‌شود.

این نشریات در حال حاضر عبارتند از:

۱ ــ رشد آموزش ریاضی
۲ ــ رشد آموزش زبان
۳ ــ رشد آموزش شیمی
۴ ــ رشد آموزش فیزیک
۵ ــ رشد آموزش زمین‌شناسی
۶ ــ رشد آموزش ادب فارسی
۷ ــ رشد آموزش جغرافیا
۸ ــ رشد آموزش زیست‌شناسی

هدف از انتشار این نشریات در وهلهٔ اول ارتقاء سطح معلومات معلمان و در مرحلهٔ بعد ایجاد ارتباط متقابل میان معلمان هر رشته و دفتر تحقیقات به منظور تبادل تجارب و مطالب جنبی و مفید درسی است.

دبیران، دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر علاقه‌مندان به اشتراک این مجلات می‌توانند جهت اشتراک هر چهار شماره از یک مجله در سال مبلغ ۴۰۰ ریال به حساب ۹۲۹ خزانهٔ بانک مرکزی ــ قابل پرداخت در کلیهٔ شعب بانک ملی ــ واریز و فیش آن را همراه با فرم تکمیل شدهٔ زیر به نشانی تهران، صندوق پستی شماره ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱ دفتر امور کمک آموزشی ــ مرکز توزیع ارسال دارند. شماره تلفن مرکز توزیع: ۸۳۱۴۸۱

محل فروش آزاد

الف ــ تهران:

۱ ــ کتابفروشی شهید سیدکاظم موسوی ــ اول خیابان ایرانشهر شمالی
۲ ــ فروشگاه انتشارات رشد ــ خیابان انقلاب بین ولی‌عصر و کالج.
۳ ــ مرکز نشر دانشگاهی ــ نمایشگاه دائمی کتاب.
۴ ــ نمایشگاه دائمی کتاب کودک ــ روبروی دانشگاه تهران.
۵ ــ کتابفروشی صفا ــ روبروی دانشگاه تهران.
۶ ــ کیوسکهای معتبر مطبوعات
۷ ــ شرکت کتاب طب و فن روبروی دانشگاه
۸ ــ کتابفروشی انجمن اسلامی دانشگاه تربیت معلم

ب ــ شهرستانها:

۱ ــ باختران ــ کتابفروشی دانشمند ــ خیابان مدرس پاساژ ارم.
۲ ــ آذربایجان شرقی (تبریز) ــ مطبوعاتی ملازاده.
۳ ــ آذربایجان غربی (ارومیه) ــ مطبوعاتی زینال‌پور.
۴ ــ اصفهان ــ کتابفروشی مهرگان و کتابفروشی جنگل.
۵ ــ مازندران (ساری) هماهنگی گروههای آموزشی استان
۶ ــ کرمان ــ پارک مطهری ــ فرهنگسرای زمین.
۷ ــ خرم‌آباد ــ خیابان شهدای شرقی، کتابفروشی آسیا
۸ ــ مشهد ــ فروشگاه شماره یک انتشارات آستان قدس
۹ ــ تبریز ــ کتابفروشی علامه دهخدا
۱۰ ــ اصفهان ــ کتابفروشی رودکی
۱۱ ــ رشت ــ کتابفروشی فرهنگستان
۱۲ ــ گرگان ــ کتابفروشی جنگل
۱۳ ــ قم ــ کتابفروشی طوس
۱۴ ــ آستارا ــ کتابفروشی نیما
۱۵ ــ سقز ــ نمایندگی روزنامه کیهان

توجه، دانشجویان مراکز تربیت معلم می‌توانند با ارسال فتوکپی کارت تحصیلی از ۵۰٪ تخفیف برخوردار شوند.

فرم اشتراک مجلات رشد تخصصی

اینجانب   با ارسال فیش واریز مبلغ ۴۰۰ ریال، متقاضی اشتراک یکسالهٔ مجلهٔ رشد آموزش   هستم.

نشانی دقیق متقاضی: استان   شهرستان   خیابان

کوچهٔ   پلاک   تلفن

Contents

Roshd, Magazine of Mathematical Education, Vol III No. 11,. Autumn 1986 Mathematics Section, 274 BLDG-No. 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave., Tehran - Iran.

A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.

ابو عبدالله محمدبن موسی خوارزمی

در حدود سالهای (۱۲۹ تا ۱۵۹ شمسی) متولد شد و در حدود سال ۲۲۹ ش درگذشت. یکی از بزرگترین دانشمندان ریاضی جهان و اهل خوارزم بود که در دربار مأمون میزیست. اولین کسی است که علم جبر را کشف کرد، و کتاب الجبر و المقابله را نوشت اروپائیان روش او را مورد استفاده قرار دادند و چون کتابش را اولین بار بزبان لاتینی بنام (الخوریسم) یا (**ALGORISM**) چاپ کردند نام (الگوریسم) و لگاریتم) را از نام او بر رشته‌ای از علم حساب که خود کاشف آن بوده گذاشتند. نامش در تمام فرهنگنامه‌های جهان و در دانش ریاضی ثبت شده است و سیستم محاسبه ارقام ریاضی اروپائیان از خوارزمی گرفته شده و مدت ۴۰۰ سال کتاب درس ریاضی دانشگاههای اروپا بود. به افتخار این مرد دانشمند ایرانی، نیمه اول قرن نهم میلادی را (عصر خوارزمی) نامیدند. کتاب (جبر و مقابله) و (الجمع و التفریق) و (زیج خوارمی) از کتابهای معروف او است و (کتاب الرخامه) درباره محاسبات ظل (سایه) آفتاب و تعیین اوقات است که پایه اساس محاسبات مثلثات کروی گردید.