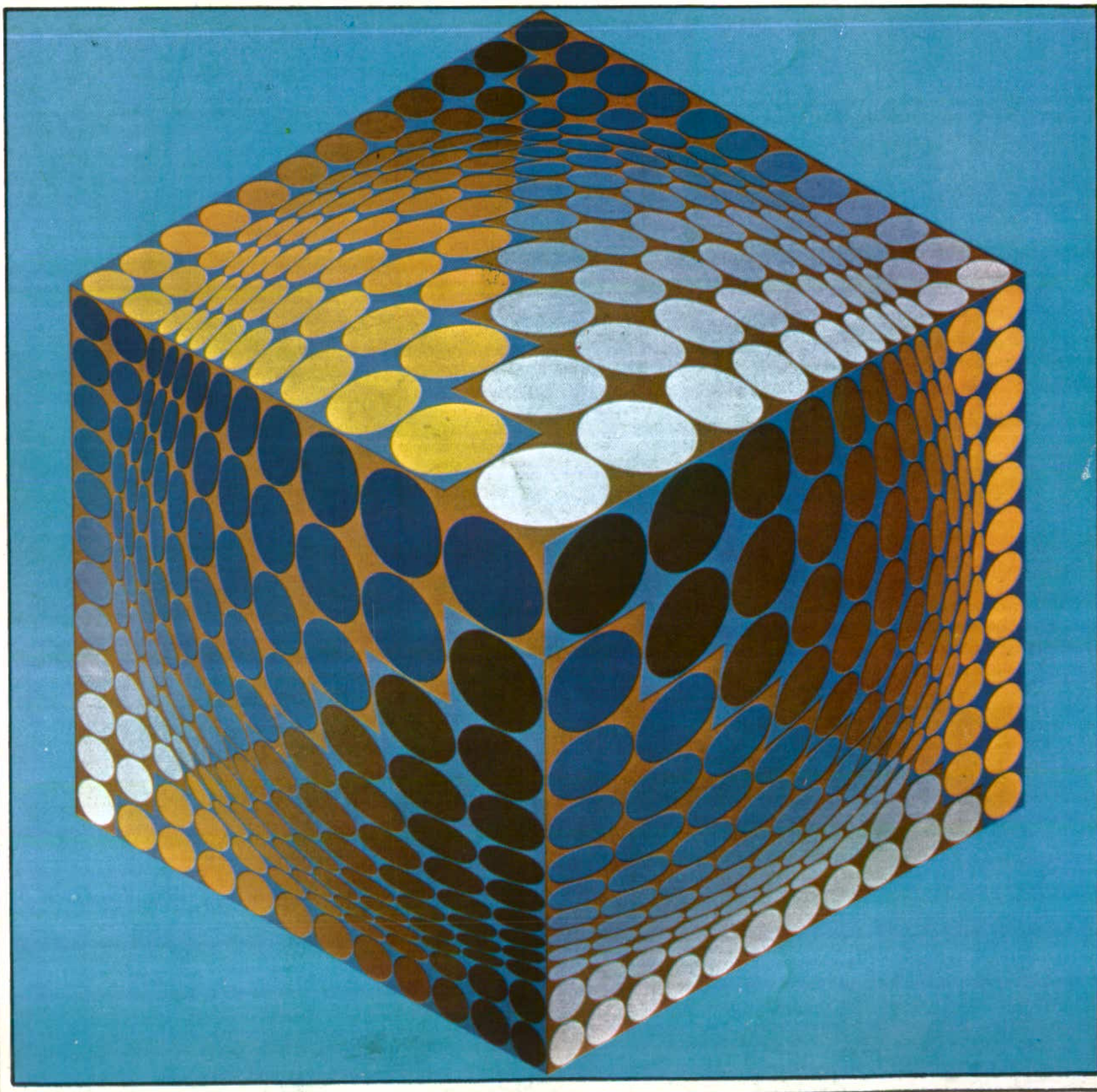
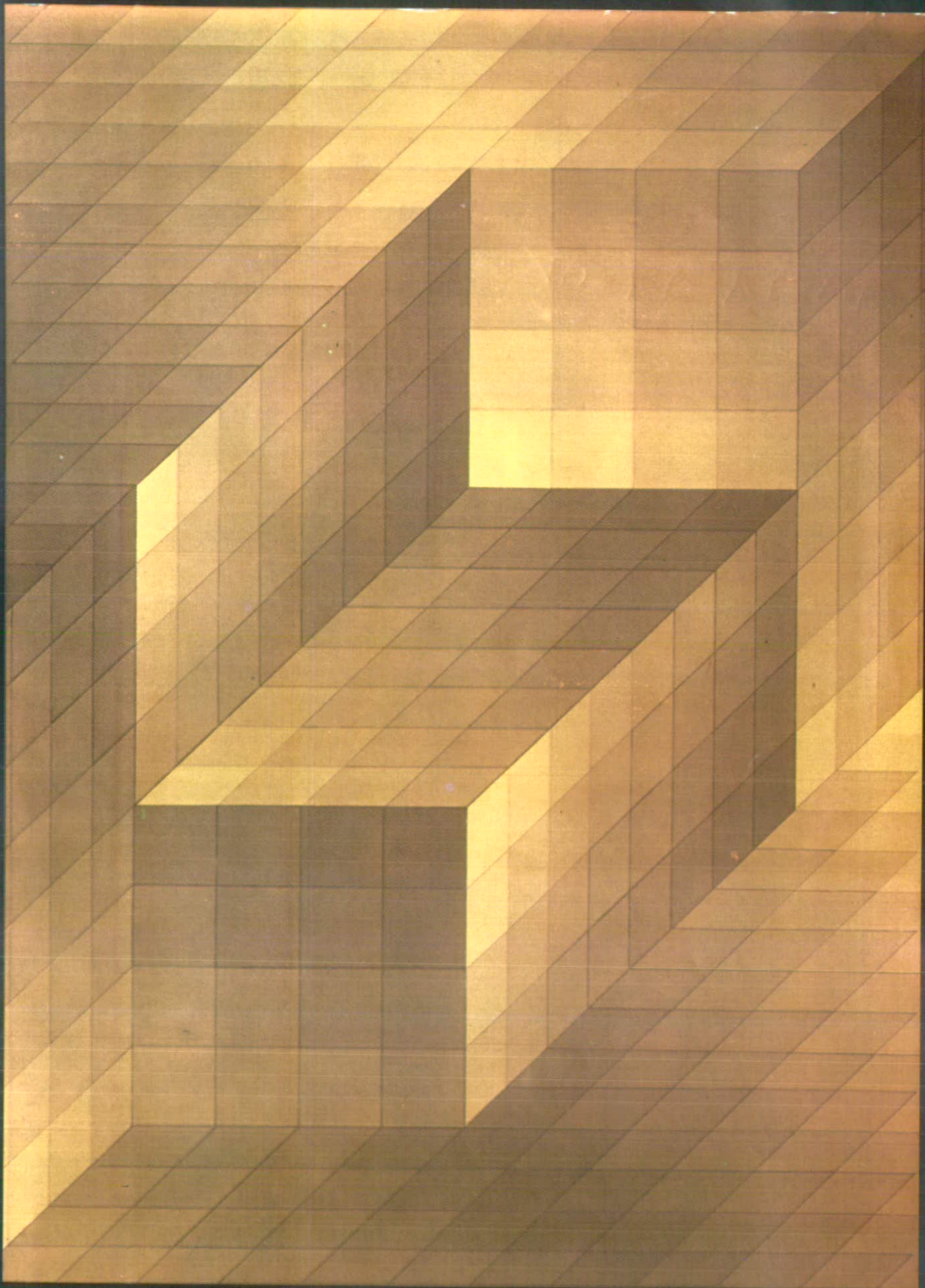
رشد آموزش ریاضی

سال سوم ـ شماره ۹ ـ بهار ۱۳۶۵ بها: ۱۰۰ ریال





رشد آموزش ریاضی
سال سوم ـ شمارهٔ ۹ ـ بهار ۱۳۶۵
نشریهٔ گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی ـ پژوهشی.
نشانی: خیابان ایرانشهر شمالی. ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش تلفن ۸۳۲۰۲۱
سردبیر: دکتر محمد قاسم وحیدی
تولید: واحد مجلات رشد تخصصی
صفحه‌آرا: علی نجمی ـ خالد قهرمانی دهبکری

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و آشنایی آنان با شیوه‌های صحیح تدریس ریاضی منتشر می‌شود.

فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

آغاز سومین دورهٔ مجله، تداوم انتشار آن، و نظم و نسق نسبی که در تولید و توزیع آن حاصل شده است، این امید را پدید آورده که، به فضل خداوندی، این مجله جای خالی مجلات ریاضی را در ایران حتی‌المقدور پر کند. در لزوم و محاسن مجلات علمی، که الفت‌بخش افکار علمی و منعکس‌کنندهٔ تازه‌ترین یافته‌ها و تجارب علمی و آموزشی هستند، جای هیچگونه تردیدی نیست. ظاهراً اولین مجلهٔ علمی در دنیا، که مقالات ریاضی هم در آن مندرج می‌شده، برای اولین بار در سال ۱۶۶۵ میلادی ـ حدود ۳۲۰ سال پیش ـ منتشر شده است. در قرن نوزدهم تعداد این مجلات به ۹۵۰ عنوان رسیده و اکنون تعداد چنین مجلاتی بسیار افزونتر از این رقم است. لزوم انتشار مجلات علمی از مدتها پیش در کشور ما حس شده و در حدود ۵۵ سال پیش اولین مجله ریاضی ـ با اهداف جامع ـ توسط مرحوم دکتر مصاحب تحت عنوان مجلهٔ ریاضیات عالی و مقدماتی در ایران منتشر شده که متأسفانه عمری کوتاه داشته است. از جملهٔ مجلات موفقی که عمدتاً در رابطه با دانش‌آموزان و دبیران منتشر می‌شد، مجلهٔ یکان بود که انتشار آنهم در چند سال گذشته متوقف شد. گذشته از بولتن انجمن ریاضی ایران، که مجله‌ای است صرفاً تحقیقی و تقریباً بی وقفه منتشر می‌شود، در چند سال اخیر و بعد از انقلاب اسلامی ایران و تا زمان انتشار مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، هیچ نشریه‌ای که هدف مشخص آن ایجاد ارتباط فکری بین دبیران ریاضی به طور اخص و کلیه دست اندرکاران ریاضیات به طور اعم و نیز ارتقاء سطح فرهنگ ریاضی باشد، منتشر نمی‌شد. اکنون، خوشبختانه، این کمبود تا حدی جبران شده است و امیدواریم که با گذشت زمان و یاوریهای فکری و قلمی خوانندگان، مجله بیشتر از این در جهت تثبیت و تحقیق اهداف خود گام بردارد. البته صحبت از این نیست که این مجله جوابگوی کلیهٔ نیازهای موجود و یا بر آورند؛

بقیه در صفحه ۵۷

مصاحبه با آقای احمد بیرشک

سؤال– حضرتعالی به عنوان یك «فرهنگی» به‌معنی اعم آن، که سالیان درازی ازطریق تدریس ریاضیات و تألیف و ترجمهٔ آثار ریاضی منشأ خدمات فرهنگی مهمی درجامعه بوده‌اید، از چهره‌های آشنای جامعهٔ فرهنگی هستید و مسلماً نیازی به معرفی ندارید. معهذا برای آشنایی بیشتر، لطفاً شرح مختصری ازمراحل عمدهٔ‌زندگی وبخصوص دوران تحصیل‌خود را برای خوانندگان ما بیان بفرمایید.

جواب– من بزرگترین فرزند خانواده بودم . برادری داشتم که چهارسال ازمن کوچکتر بود. آخرین سمت او ریاست شعبه دیوان عالی کشور بود. قاضی شریف وشجاعی بود که هفت سال پیش به‌رحمت ایزدی پیوست. خواهری دارم که دو سال از من کوچکتر است و آخرین شغل دولتی او ریاست دبیرستان بوده است. پدرم مردی، بخصوص ازجنبهٔ دانش و معلومات ، خود ساخته بود و مادرم بانوئی دلیر و بردبار که بی‌هیچ مبالغه‌ای، نظیرش را میان زنان بسیاری که دیده‌ام نیافته‌ام . خدایشان بیامرزد که فرزندانشان هرچه دارند ثمرهٔ تربیت و زحمت آنان است.

خودم در تهران، درروز جمعه چهارم بهمن ۱۲۸۵/ ۱۰ ذیحجهٔ ۱۳۲۴ چشم به‌جهان گشوده‌ام. خانوادهٔ کوچك پنج نفری ما چنان بود که ازصمیم قلب آرزو می کنم که خانواده‌ها چنان باشند تا فرزندانشان نیکفرجام شوند. زمانی که ضمن تحصیل و بعد از آن بااصول تعلیم و تربیت آشنا شدم دریافتم که این اصول در خانواده ما، به‌طور طبیعی و بی‌هیچ ساختگی وتظاهری، حکمفرما بوده‌اند و درنتیجه ما هرسه چنان‌بارآمدیم که در تمام عمر به‌تربیت درآغوش و دامن چنان پدر و مادری افتخار می کنیم.

زندگی خودم چیز شایان توجه و گفتنی ندارد مگر کوشایی و طبع اجتماعی که شاید اشاره‌ای به آنها برای فرزندان روحانی من خالی از فایده نباشد.

چون پدرم کارمند دولت بود، و به حکم وظیفه در نقاط دور دست میهنمان در شمال و جنوب و شرق و غرب خدمت می‌کرد، ما فرزندان خانواده وضع تحصیلی منظمی شبیه‌به‌آنچه متداول است نداشتیم. من آموختن زبان مادری و زبانهای فرانسوی و روسی را درخردسالی نزد پدر آغازکردم. یکچند در باجگیران در یك مدرسهٔ تك معلمی، که شیخ علی‌اکبر نامی مدیر و معلم و خدمتگزار وخلاصه همه‌کارهٔ آن بود رفتم. تعداد شاگردان مدرسه به‌پانزده نمی‌رسید وهمه ازفرزندان کارمندان دولت و یکی دو بازرگان محلی بودند. در ۱۲۹۶ چند ماهی به‌دبستان احمدیهٔ مشهد رفتم و سه ماه درکلاس چهارم و چهار ماه درکلاس پنجم بودم و باز رشتهٔ تحصیل مدرسه‌ای من قطع شد. از مهر ۱۳۰۰ تا اردیبهشت ۱۳۰۲ درتهران در مدرسهٔ آلیانس فرانسوی تحصیل کردم. مدرسه ده‌کلاس داشت که از دهم شروع و به‌اول‌ختم می‌شد. من چون با زبان فرانسه‌آشنایی داشتم درکلاس هفتم پذیرفته شدم وهردو سه‌ماه یك‌بار کلاس را عوض‌کردم به طوری که در اردیبهشت ۱۳۰۲ کلاس سوم را امتحان داده و برای کلاس سوم پذیرفته شده بودم. باز در درخدمت پدر به‌جنوب رفتیم. از آن پس من معلم خودم، و تا حدی معلم برادر و خواهرم بودم. درآن سفرکتابهایی که‌داشتم منحصربود به‌یك لاروس‌کوچك، یك‌کتاب دستور زبان فرانسه باکتاب معلم آن ، یك‌کتاب حساب بازرگانی، دو جلد داستان فرانسوی و یك جلدکتاب مقدماتی انگلیسی – چون درتهران

چند ماه با جوانی به نام سید جعفر پیرسیدی مقدمات انگلیسی را تحصیل کرده بودم. از ۱۳۰۲ تا اردیبهشت ۱۳۰۶ که به تهران باز گشتیم با کتابهائی که نام بردم «کشتی گرفتم». چون کتاب لغت فرانسه به‌فارسی نداشتم برای پی بردن به‌معنی لغتی درلاروس گاهی مجبور به‌مراجعه به هفت هشت لغت می‌شدم، و پیوسته ازاین صفحه به‌آن‌صفحه می‌رفتم. دستور زبان را بارها خواندم و تمرینهای آن را، که زیاد بود، عمل کردم و با کتاب معلم مقابله نمودم. مسائل حساب را با روش استدلال حل کردم و دو جلد داستان فرانسوی را به فارسی ترجمه‌کردم و با خط نسبتاً خوش نوشتم و مصور ساختم. درضمن برای انگلیسی هم کارکردم وچند ماهی ازمصاحبت یك هندی کارمند شرکت نفت انگلیس وایران بهره گرفتم. خلاصهٔ کلام «جان کندم». نتیجه آن که وقتی در ۲۶ اردیبهشت ۱۳۰۶ درتهران به همان مدرسهٔ آلیانس مراجعه‌کردم و در راهرو با سیلوستر نامی که رئیس مدرسه‌بود مصاحبه‌کردم مرا درکلاس اول پذیرفت ولی تأکید کردکه چون چند روز بیشتر به‌آخرسال نمانده است بایدسال بعد هم در همان کلاس تحصیل کنم. این وضع بالاتر از انتظار من بود زیراکه قانع بودم که درکلاس دوم پذیرفته شوم. تعلیم دروس کلاس اول همه برعهدهٔ خود سیلوستر بود جز حساب که جوانی، که‌بعدها در ریاضیات تحصیل کرد وحالا استادبازنشستهٔ برجستهٔ دانشگاه است، به‌تعلیم آن مشغول بود. بعد از یك هفته که درکلاس شرکت‌کردم شارل سیلوستر درحضور همه به من تبریك گفت که در زبان فرانسه خیلی قوی هستم و در دستور-زبان هیچ اشتباهی نمی‌کنم. معلم حساب هم مراکناری کشید و قرار گذاشت که صبحها زودتر به مدرسه بیایم و مسائل حساب را درخدمتشان مورد بحث قرار دهیم و بعد به‌کلاس برویم.

لازم به‌گفتن نیست‌که این اقدام درنتیجهٔ آن بود‌که معلم عزیز درسرکلاس دچار اشکال می‌شد. بعدازپانزده روزشرکت درکلاس، آقای مدیراعلام کردکه مرا برای امتحان‌معرفی کرده است. بانگرانی‌کامل رفتم‌که‌آمادگی ندارم و جززبان وحساب درسایرمطالب‌چیزی‌نمی‌دانم. امتحان‌همهٔ‌مواد (تاریخ، جغرافیا، علوم،حساب) به‌زبان فرانسه به‌عمل‌می‌آمد وسه‌مدرسهٔ‌فرانسوی زبان آن زمان در آن شرکت می‌کردند. مرحوم سیلوستر گفت: «کار ازکارگذشته است من شما را معرفی‌کرده‌ام و باید امتحان بدهید؛ استعداد دارید، بروید کارکنید، من کاملاً امیدوارم». من‌هم بیست‌روزتمام‌واقعاًکار کردم: شبانه‌روزی ۱۸ ساعت‌درس خواندم وبامشکلات متعدد دست وپنجه نرم کردم وبی آنکه‌امید توفیق‌داشته‌باشم درامتحان‌شرکت کردم. وقتی که نتیجهٔ‌امتحانات اعلام شد بکلی گیج شدم: بین ۵۷ داوطلب مقام اول را احراز کرده بودم! ایـن توفیق سخت برمن مؤثر افتاد و مرا به‌آینده امیدوار کـرد. درتابستان ۱۳۰۶ دروس کلاسهـای اول و دوم دبیرستان را قسمتی باکمك مـرد بزرگـواری به نام آل‌احمد آموختم و درمهرماه به‌کلاس سوم رفتم. کلاس سوم را درهمان مدرسهٔ آلیانس تحصیل کردم. مدرسهٔ صبحها کلاسهای فرانسه و بعد ازظهرها دوساعت‌کلاس فارسی برای اجرای برنامهٔرسمی کشور داشت. من بـرای آنکه در زبان فرانسه قویترشوم قصد داشتم صبحها درکلاس اول فـرانسه شرکت‌کنم ولی، تصادفاً، وضع بهتری پیش‌آمد و آن اینکه سیلوستر، رئیس مدرسه، از من بیگاری می‌کشید و هرکلاسی کـه معلم نداشت مـرا برای جانشینی او می‌فرستاد؛ و این‌کار تقریباً همه روزه برقرار بود. درنتیجه هم به‌زبان مسلط می‌شدم و هم ذوق معلمی درمن‌بیدار می‌شد. آخـر سال امتحان سوم دبیرستان را دادم و با مرحوم بـرادرم بـرای استفاده ازتعطیل تابستان و دیدن سایـر افراد خانواده‌کـه درمرز شمال شرقی‌کشوردمـان بودند، به‌مسافرت رفتیم. من‌کتـابهای‌کلاس چهـارم را همراه بردم‌کـه تابستان بخوانم. در مهرماه‌کـه به‌تهران باز گشتیم من خـواستار دادن امتحان‌کلاس چهارم و رفتن به‌کلاس پنجم بودم. اما چون دیر به‌تهران رسیده بودیم امتحانات شهریور ماه تمام شده بود و به هرمدرسه‌ای که‌مراجعه‌کردم‌باجواب«متأسفیم، اماموقع‌امتحانات گذشته است» روبرو شدم، تصور ناراحتی مـن از این ناکامی دشوار است. اتفاقاً شنیدم‌که درخیابان مهدیه، منشعب‌ازخیابان امیریه، مدرسه‌ای‌است به‌نام شرف‌مظفری. مصمم‌شدم‌که‌آخرین تیر ترکش را رهاکنم و به مدرسهٔ شرف مراجعه نمایم. پرسان، پرسان به مدرسه رفتم در اطاق دفتر مرد باصلابتی ایستاده بود، او مدیـر دبیرستان بود. پس از عرض ادب خواهش خود را گفتم. اندکی باخشونت‌گفت: «پسر، امتحانات تمام شده وهیچ کار نمی‌توانم‌کرد، برو. اصرارکـردم. پرسید اسمت چیست؟ ــ احمد بیرشك. ــ احمد بیرشك تویی؟ ــ بلـه ، آقای مدیر، ــ خوب، این شد یك چیزی، برو به‌آقای ناظم‌کـه آنجاکنار حوض قدم می‌زند بگو برایت کاری انجام دهند». رفتم خدمت آقـای ناظم ــ میرزا محمود خـان صادقی آن زمان و دکتر محمود مهران وزیر فرهنگ دهۀ ۱۳۳۰ ــ و با جرأت بیشتری مطلب‌خود راگفتم. گفت «خیلی معذرت‌می‌خواهم، آقاامتحانات گذشته است وکاری نمی‌توان‌کرد ــ آقای مدیرفرمودند خدمت شما برسم تاکاری برایم انجام دهید. آقای ناظم فرمودند: اسم شما چیست؟ ــ احمد بیرشك ــ احمد خان بیرشك جناب‌عالی

هستید؟ ــ بله، آقای ناظم ــ «بسیار خوب، فردا تشریف بیاورید تا ترتیب امتحان را بدهم.» در بازگشت در آسمان سیر می‌کردم ومخصوصاً برایم جای تعجب بود که این اسم حقیر، این دو کلمه احمد بیرشك چطور مشکل گشا بود. روز بعد ترتیب امتحان داده شد و در عرض سه چهار روز همهٔ مواد کلاس چهارم را امتحان دادم و به کلاس پنجم رفتم. بعدها معلوم شد که مدارس تهران به شاگرد اول «دادن» خیلی اهمیت می‌دهند، و مرحومان ذوقی (مدیر) وصادقی = مهران (ناظم) دنبال آن بوده‌اند که شاگرد برجستهٔ کلاس سومشان عبدالرسول دبیر در تهران مقام اول را احراز کند. وقتی که نتیجهٔ امتحانات معلوم می‌شود با کمی تعجب می‌بینند که دو نفر بامعدل ۱۶/۵۷ نفر اول شده‌اند. عبدالرسول دبیر شاگرد مدرسهٔ شرف و احمد بیرشك شاگرد مدرسهٔ آلیانس. از آنجا اسم من یادشان بود و با کمال لطف حاجت مرا برآوردند. درخردادماه سال بعد، ضمن دادن امتحانات سال پنجم به فکر افتادم که سال ششم را در تابستان بخوانم و در شهریور امتحان بدهم. همشاگردی بسیار با استعدادم در کلاس پنجم، اصغر خمسوی زنجانی ــ بعدها دکتر خمسوی استاد دانشگاه تهران و چندی هم رئیس دانشگاه مشهد ــ وقتی که از قصدم آگاه شد گفت که او هم به این کار تمایل دارد. قرار شد باهم کار کنیم. صحبت از پیدا کردن معلم شد. گفتم کدام معلم دلسوزتر از خودمان. معلم لازم نداریم. در تابستان با او کار کردیم و درس خواندیم. او توفیق نیافت که در امتحانات شرکت کند اما من شرکت کردم و در مهرماه در دارالمعلمین عالی، رشتهٔ ریاضی، برای معلمی ثبت نام کردم و از آن پس تحصیلاتم مرتب شد. کوشش و اعتماد به نفس وجرأت موجب شد که شش سال دبیرستان را دو سال و سه ماه طی کنم و قسمتی از عمر تلف شده را جبران نمایم. در ۱۳۲۹ــ۱۳۳۰ یك دورهٔ هشت ماهه در انگلستان و در ۱۳۳۹ــ۱۳۴۰ یك دورهٔ پنج ماهه در امریکا به مطالعهٔ مدرسه‌داری پرداختم.

در آغاز سخن گفتم که وقوف بر طبع اجتماعی من شاید بتواند برای برخی از جوانان سودمند باشد. من همیشه کار جمعی را بر کار فردی ترجیح می‌داده‌ام و از کار کردن با دیگران لذت می‌بردم و البته استفاده هم می‌کردم. گفتنی بسیار است و دریغ است که صفحات مجله گرفته‌بود. به سه نمونه اکتفا می‌کنم: گروه فرهنگی هدف، شرکت تنام و انجمن ملی مدارس هماهنگ. اولی خیلی شناخته است زیرا که ۲۸ سال با کمال جدیت کار کرد و سیزده مدرسه با بیش از ۱۳۰۰۰ شاگرد روزانه داشت و در تمام مدت کلاسهای شبانه‌اش پر و در نهایت فعالیت بود. دهها تن در تأسیس و گرداندن گروه فرهنگی هدف شرکت کردند وصدها تن در مدارس هدف تدریس نمودند و تعداد زیادی کارکنان فنی در آزمایشگاهها و کارگاهها فعالیت نمودند. این همه افراد توانستند در اجتماعی کار کنند که در آن گفته می‌شد «دو نفر نمی‌توانند باهم کار کنند». و این تشویق شد برای کار جمعی، و تعداد زیادی گروههای فرهنگی وغیرفرهنگی دیگر بوجود آمدند و تعدادی از آنها کاملاً موفق بودند. دومی، یعنی شرکت تنام درعرض مدتی کمتر از سه ماه به وجود آمد و کلاسهای فنی و کار دستی برای دانش آموزان تشکیل داد. بیشتر از ۹۵۰۰ نوجوان در کلاسهای آن حرفه و فن می‌آموختند؛ بسیار موفق بود و پیشگام طرح «کاد» امروزی وزارت آموزش و پرورش شمرده می‌شود، اما به نحوی اصولی‌تر و حساب شده‌تر. سومی تشکیل می‌شد از تعدادی گروههای فرهنگی و دبیرستانهای غیر دولتی منفرد که باز هم در راه پیشبرد و پیشرفت آموزش و پرورش همکاری می‌کردند. آن هم باز در اجتماعی که دو مؤسسهٔ رقیب برای هم کارشکنی می‌کنند. در این گونه کارها فکر وطرح از یك نفر بود اما کار ازجمع. و اگر جمع نبود کار نمی‌شد. بگذریم.

سؤالــ جنابعالی در یکی از اولین مؤسساتی که به سبك جدید در ایران و برای آموزش ریاضیات نوین تأسیس شده بود، تحصیل کرده‌اید. لطفاً درمورد رئوس کلی برنامه‌های این مؤسسه و سایر مؤسسات آموزشی در زمان تحصیل خود توضیحاتی بفرمایید و نیز ازاستادان برجسته‌ای که در آن سالها به تدریس ریاضیات اشتغال داشته‌اند، نام ببرید.

جوابــ منظور شما دارالمعلمین عالی است که برای تربیت معلم برای دبیرستانها تأسیس شده بود. بعد نامش به دانشسرای عالی تغییر کرد. عاقبت رشد کرد و به دانشگاه تربیت معلم تبدیل شد. این مؤسسه مادر روحانی یا به اصطلاح لاتینی Alma mater کسانی است که در آن کسب فیض کرده‌اند. همیشه در دل شاگردان حق‌شناس جایی بلند دارد، هرچند همیشه مایهٔ سرافرازی آن بوده‌اند. در آغاز تأسیس کسانی که برای تحصیل به آن رو می‌آوردند خواستار استفاضه به منظور افاضهٔ بعدی به‌عنوان معلم بودند. دارالمعلمین را برای تحصیل در رشتهٔ معلمی، و معلمی را برای تعلیم وتربیت سودمندی که ضامن فرجام نیك اجتماع باشد، برگزیده بودند. استفاده از کمك هزینهٔ تحصیلی در کار نبود که افراد بی‌هدف را هم با

هدف استفادهٔ مادی به دانشسرای عالی بکشاند. همه عشق بود و علاقه. درنتیجه از دانشسرای عالی فقط از رشتهٔ ریاضی نام می‌برم ــ کسانی مانند دکتر غلامحسین مصاحب و دکتر محسن هشترودی بیرون می‌آیند که هم سرمایهٔ علمی اجتماع بودند و هم مایهٔ بلندآوازگی مادر روحانی خود.

استادان ایرانی من، که دریغاکــه همه در خاك خفته‌اند، یکی غلامحسین رهنما بودکه‌در وصفش‌کافی است بگوییم که‌مغز را با دل و دانش را بااخلاق توأم ساخته بود. دیگری بدیع‌الزمان فروزانفر بودکه در دورهٔ سه ساله دارالمعلمین عالی به ما فارسی می‌آموخت. سومی دکتر صادق رضازادهٔ شفق استاد روانشناسی و اصول معلمی بود. هرسه شناخته شده‌تر ازآنندکه نیاز به‌معرفی من داشته باشند. استاد فرانسوی من درهرسه سال لوئی لونگ بود.

در اواخر سال سوم گابریل باریه برای تدریس مکانیك استدلالی آمد. هردومعلمانی‌معمولی بودندودومی‌حتی‌درکارخود بصیرت نداشت. بعداً معلمان فرانسوی ریاضی برجسته‌تری در آن مؤسسه تدریس کردند.

سؤالـ زمانی، معلمی ازمشاغل پرجاذبه بوده است. در حال‌حاضر این شغل‌جاذبهٔ گذشته را ندارد ومسلماً چنین وضعی تأثیر منفی در امر آموزش دارد. به‌نظر شما چگــونه می‌توان علاقه به‌این شغل را بیشترکــرد و به‌تبع آن سطح آموزش را درکشور ارتقا داد؟

جوابـ به عقیدهٔ من معلمی همیشه جاذبهٔ خاصی دارد به‌شرط آنکه شاغل آن برای معلمی آماده باشد. شاگرد خواه ناخــواه از معلم تقلید می‌کند، پس معلم می‌تواند در تــربیت جوانان تأثیر بسیار داشته باشد. اما برای این‌کار نه‌تظاهرلازم است و نه‌شعار. پند و اندرز هم زیاد، بلکه هیچ، اثر ندارد. رفتار معلم باید طوری باشدکه وقتی‌کــه شاگــرد از او تقلید می‌کند مایهٔ‌سرشکستگی او نشود. معلم‌نباید درانتظارقدرشناسی خوب‌ونمونه‌باشد، اصلاً انتظار نداشتن خودش یکی‌ازشرایط خوب بودن و نمونه بودن است. چه‌کسی گفته است: هرکه به من یك حــرف آموخت مرا بنده خود ساخت؟ چه‌کسانی از معلم قدردانی می‌کنند؟ مگر جــز افراد فرهیخته وفرزانه‌کسی چنین می‌کند؟ پس تا وقتی‌که اکثریت افراد اجتماع به‌حــدود فرهیختگی و فــرزانگی راه نیافته‌اند انتظار قدرشناسی چندان بجا نیست. امــا سبب اینکه به‌نظرمی‌رسد معلمی اندکی، یــا خیلی، جاذبه خود را از دست داده باشد یکی این است‌که، به قول مرحوم دکتراسدالله بیژن استاد دانشسرای عالی، درجامعهٔ کنونی «همه تاجر شده‌ایم» یعنی کاز را با پول تسعیر می‌کنیم به‌گفتهٔ مولانای رومی «آب درکشتی بــلای‌کشتی است، آب اندر زیرکشتی پشتی است» و درکشتی معلمی آب رخنه‌کرده است. بدیهی است‌که هیچ‌کس منکر سختی معاش و ضرورت تأمین آن نیست؛ «گرفتاران پابیند عیال» باید آسودگی خیال را ذر خواب ببینند. رفع این مضیقه‌ها لازم بلکه واجب است اما آنچه من می‌گــویم این است‌که معلم نه صاحب فروشگاه سرگذراست‌که‌هرچه‌دلش‌می‌خواهدپول دربیاورد ونه‌متأسفانه، کارگرفلان‌مؤسسهٔ‌فنی که‌کارناکرده‌اجرتa را na بگیردکه در آنnنامحدوداست. خوشبختانه جامعه، نه‌ازمعلم خوب چنان‌که می‌پنداریم‌بی‌نصیب‌است ونه‌به‌معلم خوب، چنان که‌می‌انگاریم، بی‌مهر.

سؤالـ آیا به‌نظر شما معلمین ریاضی آن آموزشی را که لازمهٔ تدریس درست ریاضیات است، فرا می‌گیرند؟ اگر نقایصی وجود دارد، از چه نوع است و چگونه می‌توان آنها را برطرف‌کرد؟

جوابـ پاسخ‌به‌این سؤال، مانند شعرسعدی، سهل‌است وممتنع. سهل ازآن روی‌که «آفتاب آمد دلیل آفتاب»، ممتنع زیراکه‌محیط برای رفع‌نقصها مساعد نیست واین «نامساعدی» شاید هم روزافزون است.

اما نکتهٔ اساسی این استکــه در مساعدترین محیط هم آنچه برای تعلیم ریاضیات، و هــرمادهٔ دیگر، لازم است؛ در زمان تحصیل فــرا گرفته نمی‌شود ونمی‌تواند بشود. بخصوص امروز علم با سرعت عجیبی به‌پیش می‌تازد ومعلم باید بکوشد تا شاگردان‌خود را باآن همعنان سازد. مثالی می‌آورم وتوجه توانگران نیکوکارجامعه خودمان، نه‌آنان راکه به‌حکم‌دادگاه مدرسه را تخلیه می‌کننــد نیز، به‌آن جلب می‌کنم‌ــ درخبرهای فرهنگی خواندم‌که مخترع عالیقدرنیکوکاری،که دانش را در دانشگاه‌ایلی‌نوی آموخته‌بوده، چهل‌میلیون‌دلار به‌مادرروحانی خود اهداکرده‌است تا صرف پیشرفت‌آن شود (چهارسال‌پیش پنج میلیون دلار به همان مؤسسهٔ مادر علمی تقدیم داشته بود). این مرد دو عقیده ابراز کرده است‌که برای جواب سؤال شما مفیداست ۱) عیب دانشگاهها(ی‌امریکا) این‌است‌که سندعلمی می‌دهند. ازاین‌روی افرادبرای‌گرفتن‌سند به‌آنهاروی‌می‌آورند

نه‌برای آموختن دانش ۲) آموختن از روزی شروع می‌شود که دانشگاه به‌پایان می‌رسد، وکاری است برای سراسر عمر. هیچ یك از این‌دو فکر تازگی ندارد اما مطلب چنان مهم است که «ازهر زبان که می‌شنوی نامکرر است»، بخصوص وقتی که اززبان روستازاده‌ای بیرون می‌آید که پدرش آهنگر دهی بوده است که جمعیت آن به ۵۰۰ نفر نمی‌رسیده است و یکی از اختراعات این مرد در پژوهشی که برای نمونه‌برداری ازخاك سیاره ناهید (زهره) شده به‌کار رفته است.

سؤال— برای تدریس صحیح ریاضیات وتوفیق در آن چه عواملی را مؤثر می‌دانید. به‌طور کلی عمدهٔ عوامل موفقیت یك دبیرریاضی را در امر تدریس چه می‌دانید؟

جواب— عشق وعلاقه معلم را ومهر او به‌شاگردانش‌را. چه دراین حال همهٔ وسایلی راکه برای پیشرفت کار خودش و استفادهٔ شاگردانش لازم بداند فراهم می‌آورد. پیوسته بازمان جلو می‌رودومخصوصاً به‌این نکته توجه می‌کندکه «دانش‌آموز ظرفی نیست که باید‌آن را ازمعلومات انباشت، بلکه عنصری است که باید آن‌را برای‌کسب معلومات به فعالیت واداشت، موجودی نیست که ما از راه عطوفت وبذل عنایت اورا ازورطهٔ جهل برهانیم، انسانی است صاحب فکر وآمادهٔ درك، حاضر برای فهمیدن‌وکشف‌کردن که حتی‌می‌تواند مارا درایفای‌وظیفهٔ مهمی‌که برعهده داریم‌یاری دهد؛فردی است ازآنان که‌خدای تعالی اورا لایق‌آن شناخته که خلیفهٔ خود در زمین قرار دهد. پس باید ازهمهٔ مواهب‌آزادی وآزادگی و رادی و سربلندی برخوردار باشد، معلم ریاضی هم می‌تواند به‌شکوفا شدن این‌گونه احساسات کمك‌کند و شاگردانش را پیش ببرد وخودش هم با آنان پیش برود.

سؤال— جنابعالی مداوماً درجریان تغییرات برنامه‌های درسی ریاضیات بوده‌اید و دراین زمینه صاحبنظر هستید. لطفاً در بارهٔ تحولات برنامه‌های درسی ودلایل آنها دریکی دو دههٔ گذشته توضیحاتی بفرمایید. به نظر شما آیا برنامه‌های درسی به صورت مطلوب خود نزدیکتر می‌شوند ویا هنوز با هدف و مقصود فاصلهٔ زیادی داریم؟

جواب— نخست نکته‌ای را که دو قرن پیش در رسالهٔ بیست ودوم اخوان‌الصفا در بارهٔ گفت وگوی طوطی وانسان آمده ونشانه‌ای از روشن‌نگری ودلیری در بیان واقعیت است عرض می‌کنم:

طوطی— ما حیوانات به‌آنچه خدا داده است راضی و نسبت به‌احکام او خاضعیم. درما«برای چه» و«چطور» و«چرا» درکارهای اودیده نمی‌شود.

انسان— برای همین است که حیوان مانده‌اید.

حالا باید دیدکه‌هدف ازتعلیم وتربیت‌چیست تا دربارهٔ برنامهٔ آن فکرکرد. آدمك‌کوکی بارآوردن و افرادی «چشم بر حکم وگوش برفرمان» پروردن و طوطی تربیت‌کردن است یاکسانی را ساختن‌با اعتماد به‌نفس وواقف به‌حقوقی‌که‌خدای تعالی برای خلیفهٔ خود درزمین شناخته ومقررداشته است. اگر مطلوب اولی است چه بهتر از آن‌که برنامه‌های آزموده شده دهه‌های‌اخیر، که‌ما را بسرعت به‌سوی دروازه‌های تمدن‌بزرگ می‌برد، نگاه داشتن و برطبق آنها عمل‌کردن، اما، چنان‌که از یك انقلاب اصیل انتظار می‌رود، غرض آدم ساختن و افرادی فهمیده واندیشمند وآزاده وآزاد و معتمد بـه نفس وواقف به کرامت‌انسانی بارآوردن‌باشد، مسلماً راه جزآن است که‌پیش پای ما گذاشته شده بود ودریغ، بلکه گناه است حتی یك قدم درآن طریق پیمودن. من این مطلب را حالا نمی‌گویم بلکه‌در بحبوحهٔ‌کوس‌لمن‌الملکی‌کوبیدن دستگاه بودکه باسمت معاون وزارت آموزش وپرورش درگزارشی که دربارهٔ نقص‌کارمان به‌وزیردادم (۷ یا ۸ فروردین ۱۳۴۲) خیلی صریح نوشتم‌که نقص‌کار دستگاه تعلیم و تربیت این است‌کـه به‌جای پروردن افرادی متکی به‌خود و معتمد به‌نفس افرادی متکی به‌فرد بـار می‌آوریم. این‌گزارش لابد در قسمت محرمانه دفتر وزیر باقی مانده باشد، حالا هم می‌گویم اگـربرنامه قرار است با چنان کیفیتی تهیه‌شودودریغ ازخونهای‌پاکی که‌برای درهم‌نوردیدن آن دستگاه‌درخاك ریخته شد. کمی‌کمتر فیزیك‌خواندن یاکمی بیشتر شیمی خواندن‌اما انسان‌آزادهٔ لایق خلقت خدایی‌پروردن مطلوبتر است تـا همهٔ معلومات جهان را بـه خورد رایانه، یا کامپیوتر، دادن‌که با همهٔ هنرمندی آلت‌دست برنامه‌ریز است. چشم دل بایدگشودکه جان، وآنچه نادیدنی است‌آن، دیدوالا دراین راه نه‌تنها به‌کعبه نمی‌رسیم‌کـه سر از ترکستان هم در نمی‌آوریم. صم بکم و هم‌لایعقلون. برنامه‌ریزی باید باهدف آدمسازی باشد وبحث مفصل ووقت وسیع می‌خواهد.

سؤال— به‌طورکلی‌خصوصیات یك‌برنامهٔ مطلوب‌ریاضی چیست؟ و به‌نظرشما اصولاً برنامه‌ریزی مرکزی مؤثرتر است

یا ایجاد برنامه‌هایی موازی که تا حدی هم سلیقهٔ دانش‌آموز و دبیر در آن درنظر گرفته شده باشد؟

جواب– برنامهٔ مطلوب ریاضی آن است که: ۱) تاریخ تطور علم، خاصه ریاضیات را در دسترس جوانان بگذارد و کسانی را که در این راه کوشیده ورنج کشیده‌اند به آنان بشناساند، بخصوص جوانان را با نحوهٔ رهیابی پیشروان و موجدان شاخه‌های مختلف علوم به مقصد و مقصود آشنا سازد، که سرمشقی است بسیار ارزنده برای سالکان راه علم. ۲) نیروی اندیشیدن و کار تازه کردن، یعنی ابتکار را در جوانان بیدار کند و بپرورد. هیچ کس از راه انباشتن مطالب در مغز به جائی نرسیده است مگر گرفتن ورقه‌ای به‌نام گواهی نامهٔ تحصیلات... آنان که راه به‌جائی برده‌اند با کمك و راهنمایی نیروی فکر بوده است نه حافظه. ۳) جوانان را به جستجو وا دارد روش باصطلاح «گوارشی» یعنی غذای جویده بلکه هضم شده را به‌جوان دادن – نتیجه‌اش همین است که امروز درجامعهٔ خودمان می بینیم. به قول پاسکال، جوان باید زحمت بکشد و پوست بسیار سخت این‌میوه را بشکند وجدا کند تا به‌مغز خوشمزه ومطلوب آن دست یابد.

برمی گردم به‌مطلبی که جلوتر به‌آن اشاره کرده‌ام. عیب بزرگ دانشسرای عالی، درسالهایی که من در آن تدریس می کردم – و نیز عیب بزرگ سایر دانشکده‌های ما – این بود که دانشجو عادت کرده بود ومی‌خواست که مطالب را شسته و رفته‌وپخته وآماده تحویل بگیرد. حتماً اگر یادداشت برمی‌داشت منتظر بود که استادآن را املاءکند دبیرستانهای ما هم، به‌طور کلی همین بود و اگر مواردی استثنایی پیدا می‌شد چندان مطلوب دستگاه نبود، من دانشکده‌ها را دبیرستانهای عالی می‌نامیدم.

سؤال– اجازه بدهید که به‌جنبهٔ دیگر کار شما برویم و ازشما راجع به‌تألیفها وترجمه‌هایتان سؤال کنیم. لطفاً ازاولین کتابی که تألیف یا ترجمه کرده‌اید، نام ببرید وبفرمایید که چگونه و چرا به‌فکر تألیف و ترجمه افتادید؟

جواب– از اینکه باجواب این سؤال قسمتی از فضای مجله و بخشی از وقت خوانندگان را می گیرم پوزش می‌طلبم. ولی از راه لطف سؤالی کرده‌اید وادب اقتضا می کند که جواب عرض کنم. علاقهٔ من به ترجمه کمی، یا خیلی بیشتر از کمی، مضحك است. قبلاً گفته‌ام که آموختن زبان فرانسه‌را پیش‌پدرم شروع کردم (که او هم پیش خودش یاد گرفته بود). درطاقچه اطاقمان کتابی به‌زبان فرانسه بود، شاید مجله‌ای، یا داستانی، درهرصورت صفحهٔ اول آن تصویری زیبا داشت. پس از آن که چند لغت فرانسه یادگرفتم و توانستم روان بخوانم تصمیم گرفتم آن کتاب را ترجمه کنم. بعد از چند سطرکوشش بیجا و بی‌نتیجه پس انداختم. پنج شش سال بعد، بین سالهای ۱۳۰۲ و ۱۳۰۶، دو داستان راکه در اختیار داشتم ترجمه کردم که بعداً یکی باعنوان مردی که طلا می‌سازد چاپ شد و دومی در پاورقی روزنامهٔ زندگی منتشر گردید و باتعطیل روزنامه‌متوقف شد. بعداً چند داستان دیگر از فرانسه و انگلیسی ترجمه کردم که بعضی ازآنها به‌صورت کتاب ویادرمجلات منتشر گردیدند. در۱۳۱۲ به‌پیشنهاد مرحوم محمدرمضانی صاحب کلالهٔ خاور، که از پیشکسوتان کار چاپ و نشر بودکتاب سلطنت قباد و ظهورمزدك را، که چند صفحهٔ اولش را مرحوم نصرالله فلسفی ترجمه کرده بود ترجمه کردم – این کتاب از آرتور کریستنسن خاورشناس نامی بود. بعداً ترجمه‌هایم بیشتر مربوط به‌علوم بود. اولین کتابی که، به پیشنهاد مؤسسهٔ فرانکلین از نویسندهٔ مشهورتاریخ علوم ژرژ سارتن بلژیکی تابعیت امریکا پذیرفته، ترجمه کردم سرگذشت علم بودکه برندهٔ جایزهٔ بهترین ترجمهٔ سال شد.

اما تألیف، زمانی که در دبیرستان درس می‌خواندم کتابهای هندسهٔ متداول از رضا نجمی مهندس‌الملك و از غلامحسین‌رهنما بود. کتابهای مهندس ترجمهٔ تمام عیار وخوب بود اما کار را بردانش آموز بسیار آسان می کرد، یعنی مجال فکر به‌اونمی‌داد. کتاب رهنما که فقط یك جلد وبرای سال‌سوم دبیرستان بود ازآن گونه بودکه باید پوست سخت را شکست و میوهٔ خوشمزه را بیرون آورد و به نظر من قدری بیشتر از استعداد شاگردکلاس سوم از او می‌طلبید. در ۱۳۱۴ یا ۱۳۱۵ من مصمم شدم که هندسه‌ای بنویسم که نه به اندازه کتابهای مهندس‌الملك نیروی تفکر را عاصی کند و نه به اندازهٔ هندسهٔ رهنما زاید برحد پرتوقع باشد. ازکتابهای دورهٔ اول متوسطه که دریك‌سال منتشرشد، چنان استقبالی به‌عمل آمد که درحقیقت دوکتاب یاد شده را ازمیدان خارج کرد. این توفیق‌شوق‌انگیز مرا به‌ادامهٔ تألیف واداشت. چندی بعد، به‌حکم همان طبع طالب‌کار جمعی، تعدادی ازهمکاران ریاضی را درنوشتن کتاب به‌یاری طلبیدم و بعد هم با دستهٔ دیگری از مؤلفان ریاضی «ائتلاف کردیم». شمارهٔ کتابهای‌تألیف وترجمه درحدود یکصد

جلد است که ذکر نامشان موجب اتلاف وقت خواهد شد. فقط از بعضی از ترجمه‌ها نام می‌برم: ریاضیات نوین که بسیار مفید واقع شد وحتی جوانان ایرانی که برای تحصیل به‌خارج رفته و باریاضیات نوین سروکار پیداکرده بودند از آن کتاب کمك می‌گرفتند، فلسفهٔ ریاضی که به‌گفتهٔ یکسی از استادان دانشگاه تربیت معلم بـرای دانشجویان رشته ریاضی مفید بوده است، علم و زندگی که با همکاری آقایان دکتر بهزاد و رضا قلی‌زاده و دوست فقیدم مقدم رهنما ترجمه شد و چند بار به‌چاپ‌رسید، یك، دو، سه‌بی‌نهایت که رکورد تعدادچاپ را درمیان کتابهای علمی همه فهم شکسته است، رهبر علم که جلد اول آن دو سالی است منتشر شده و جلد دوم بزودی از چاپ خارج خواهد شد، اینشتاین، جهان و اینشتاین، علم قدیم وتمدن جدید.... برای دانشگاه دو کتاب نوشته‌ام که دومی زیر چاپ است. آنچه امید دارم خدمتی به‌تاریخ‌نویسان و معلمان تاریخ و علوم اجتماعی باشد، گاهنامهٔ دوهزار ساله است که‌زیرچاپ است و تاریخهای خورشیدی (ایرانی) و قمری و میلادی را ازسال ۱ تا ۲۰۰۰ ایرانی (۱ تا ۲۰۶۲ قمری)، وتاریخهای ایرانی و میلادی از از هـزار سال قبل از هجـرت تا هجرت (جمعاً ۳۰۰۰ سال) تطبیق می‌کند. امید می‌رودکـه تا خرداد ماه آینده ایـن کتاب منتشر شود. درحال حاضرپنج کتاب زیرچاپ وشش کتاب آمادهٔ چاپ‌دارم. بااستفاده از آنچه به‌نظرم ترجمه خوب قرآن‌رسیده است قرآنی باچهار زبان فارسی، عربی، فرانسه وانگلیسی گرد آورده‌ام که چون هزینه زیاد داردکسی بـرای چاپ آن حاضر نشده است؛ بااین همه ازصمیم قلب اعتراف می کنم که خدمتی که در خور هموطنان عزیزم باشد از دستم برنیامده است. ران ملخی نزد سلیمان است و پذیرفته شدن مرحمت سلیمانی است نه‌ارزش ران ملخ.

سؤالــ لطفاً درموردکار فعلی خودکه سرپرستی ترجمهٔ فرهنگ زندگینامهٔ علمی دانشمندان است، توضیحاتی بفرمائید.

جوابــ درمورد کار فعلی هنر ازنویسندگان عالیقدری است که زندگینامهٔ توأم باشرح‌کار چند هزار دانشمند علوم را بادقتی که باید دید و خواند تا بتوان دربار‌ه‌اش داوری کـرد، تهیه کرده‌اند این اثرکه نام اصلی آن

Dictionary of Scientific Biography

است و بـرای عنوان فـارسی آن زندگینامهٔ علمی دانشوران انتخاب شده است، با همت مرکـز انتشارات علمی و فرهنگی وابسته به وزارت فـرهنگ و آمـوزش عالی تـرجمه و تهیه می‌شود. نظم کارهای آن درحال حاضر برعهدهٔ بنده است، اما کار مفصلتر از آن است کـه من انتظار به پایان بـردن آن را داشته باشم وامیدوارم دنبال آن راکسانی که شایستگی بیشتری از مـن داشته باشند بگیرند و روزی هـدیهٔ قابلی تقدیم جامعهٔ ایرانی وجوامع فارسی زبان‌کنند. این اثر از هردانشمندی که یادمی‌کند خواننده را قدم به‌قدم باکار او به‌جلو می‌برد. ازاین روی نمونهٔ خوبی است برای آشنا شدن خوانندگان به روش کار دانشمندان تا به یاری خدا و با همت خود «ره‌چنان روند که رهروان رفته‌اند».

سؤالــ لطفاً در صورت امکان از اولین مجلاتی که در زمینهٔ ریاضیات به‌فارسی منتشر می‌شده‌اند اطلاعاتی در اختیار خوانندگان ما قرار دهید. به‌نظرشما یك مجلهٔ ریاضی چه‌نقشی درجامعه به‌عهده دارد؟

جوابــ اطلاع دقیقی ندارم. شاید اولین مجلهٔ ریاضی آن باشدکه غلامحسین مصاحب بعد از اتمام دورهٔ دارالمعامین و شاید هم مقارن با زمان تحصیل در آن، تهیه‌کرد ولی عمری درازنداشت. باشگاه مهرگان‌هم درصدد برآمد اما توفیق‌نیافت. همت آقای عبدالحسین مصحفی موجب انتشار مرتب و دراز ـ مدت یکان بودکـه متأسفانه جایش نزد علاقمندان به این‌گونه کارها خالی شد. آشتی باریاضیات وحالا آشنایی باریاضیات آقای پرویز شهریاری و همکارانش نیز تلاشی است کـه باید امیدوار بودکـه پایا باشد و فرجام نیك داشته باشد. اما مجلهٔ خوب ریاضی باید در عین حال که با زمان پیش می‌رود گذشتهٔ را از نظـر دور نـدارد و کارهـای پیشینیان را نشان دهـد، مخصوصاً اگر کارهایی نادیده مانده‌باشد. یك مجلهٔ‌خوب‌ریاضی نمی‌تواند خواهش کسانی را که در سطوح مختلف ریاضی کار می‌کنند بـرآورده سازد ؛ هـرسطح مجله‌ای مناسبت با خود می‌خواهد.

ــ از اینکـه وقت خـود را در اختیار مجله‌گـذاشتید‌ه خوق‌العاده متشکریم.

ریاضیات چیست (۳)

دکتر علیرضا مدقالچی

در این مقاله به ارائهٔ نظریات مختلفی که در توصیف دانش ریاضی و ریاضیات بیان شده است می‌پردازیم. در این زمینه نظریات گوناگونی توسط ریاضیدانان، فلاسفه، و نویسندگان ارائه گردیده‌است که هریك ازدیدگاه خاصی به بیان دانش ریاضی وقلمرو آن، می‌پردازند. این‌تعاریف، فی‌الواقع، نوعی تبیین‌دانش ریاضی را به‌دست می‌دهد، ضمن تشریح و بیان هر یك ازاین تعاریف ویژگیهای هر یك را بیان می‌کنیم شاید از این رهگذر بتوان یك سیمای کلی ازدانش ریاضی وارزشهای آن را مشخص کرد. البته بجرأت می‌توان گفت که رسیدن به تعریف جامع و مانع امکان ناپذیراست، زیرا می‌دانیم صاحبان مکاتب سه‌گانه[۳] هر یك از زاویهٔ خاصی به ریاضیات می‌نگرند، مشروح نظریات بنیانگزاران این سه مکتب را در مقالهٔ قبلی مطالعه کرده‌اید.

فیلیسین‌شاله‌در کتاب شناخت‌روش علمی [۲] می‌گوید ریاضیات عبارت است از علم کمیتها، و به عبارت دیگر علم اندازه‌گیری غیرمستقیم مقادیر. روش ریاضیات عبارت است از استنتاج یك سلسله از قضایا به‌کمك اصولی که در آغاز هرقسمت آن وضع شده است. با این تعریف او دانش ریاضی را شامل حساب، جبروهندسه می‌داند ومتناسب با دید فلسفی خویش برای هریك ازاینها تعریفی ارائه می‌دهد. این باور سبب تقویت روح منطق گرایی گردیده وباعث می‌شود که قدرت استنتاج منطقی را در بخش‌های مختلف ریاضیات ملاحظه کنیم.

قبل از بیان سایر نظریات، امیدواریم که این سری مقالات نه تنها موضوعی تفننی برای دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان باشد، بلکه مشوق و الهام دهنده نیز باشد تا بادرك تعاریف مختلف از ریاضیات وریاضیدان در ادامه این راه تشویق گردند وبدون شك حداقل یکی ازفواید این‌کار گسترش و توسعهٔ بینش منطقی خواهد بود.

نویسنده کتاب دربارهٔ ریاضیات بیش ازهزار عبارت ازفلاسفه، مورخین، دانشمندان،شعرا وبالاخره ازریاضیدانان را جمع‌آوری کرده است در این مقاله بعضی‌ازاین عبارات بیان می‌شوند.

به‌طور کلی می‌توان اذعان کرد که مفیدترین، پرثمرترین علوم، ملکهٔ دانشها و به‌قول جامعه‌شناسان، مادر علوم، علوم ریاضی است.

دکارت[۱] می‌گوید تمام دانشهائی که دربررسی نهایی نیاز به‌ترتیب و اندازه دارند، به‌نحوی با دانش ریاضی در ارتباط هستند. چندان مهم نیست که این اندازه‌گیری به‌شکل ابتدایی یا پیشرفته باشد؛ به هر حال یك قاعده کلی طلب‌می‌کند که آن‌را‌ریاضی می‌نامند[۱].

فرانسیس بیکن[۲] می‌گوید دانش ریاضی یا به‌صورت محض ویا به‌صورت مرکب است. ریاضی محض عبارت از دانشی است که‌کمیاتی راکه‌از اصول فلسفهٔ‌طبیعی نشأت می‌گیرد مورد بررسی قرار می‌دهد وعبارت است از حساب و هندسه که‌کمیات منفصل و متصل را مورد بحث قرار می‌دهد. ریاضیات مرکب دارای اصول و قسمتی از فلسفهٔ طبیعی است [۲]. در این مورد دوباره دکارت علم را به مکتسباتی اطلاق می‌کند که کاملاً متیقن باشد و جای شك نسبت به آنها در ذهن حادث نشود. لهذا، او ریاضیات را تنها دانش‌کامل می‌داند و معتقد است که‌برای کشف مجهولات باید به‌همان راهی پیش رفت که ریاضیدانان پیش می‌روند یعنی‌بایستی همهٔ علوم را بااصول ریاضی‌دنبال‌کرد به‌عبارت‌دیگر بایدبتوان سایر علوم را به‌اصول‌ریاضی درآورد. ذکر یك نکته دیگر نیز شاید خالی از لطف نباشد وآن اینکه روش دکارت در اثبات شیوهٔ تحلیل است یعنی باید قضایای مشکل را به‌قضایای سهل تبدیل‌کرد وسپس این قضایا را به‌اصول برگرداند. اودر ادامه روش علمی خود موفق شدکه‌پلی بین‌روش هندسی‌متقدمین و روش جبری متأخرین ایجادکند و این پل در واقع ابداع هندسهٔ تحلیلی بود. کسانی‌که با الفبای ریاضی‌آشنا هستند می‌دانندکه منظورازهندسهٔ تحلیلی‌تحویل مسائل هندسی به روش‌های جبری است یعنی‌به‌جای اشکال‌هندسی‌معادلات‌مربوط به‌آنها در نظر گرفته می‌شوند. درواقع کوشش دکارت این بوده‌که مقولات کیفی یعنی اشکال هندسی را به مقولات کمی یعنی مقادیر عددی تبدیل کند [۱].

این بود مختصری از نظریات دکارت فیلسوف و ریاضیدان فرانسوی در قرن شانزدهم میلادی.

هر مفهومی‌که به‌طور مشخص و

کامل به‌کمک تعداد متناهی از اجزاء معین شود، مفهوم ریاضی است [۵]. ریاضیات عبارت است از مجموعه‌ای از مفاهیم ریاضی؛ درواقع یک دستگاه ریاضی عبارت است از یک دسته از مفاهیم ریاضی. سازگاری منطقی بین اجزاء یک دستگاه از اصول اولیهٔ آن است درغیر این‌صورت دستگاههای متفاوتی پیش می‌آید. مثلاً می‌دانیم دستگاه اعداد حقیقی دارای ترتیب است که دارای سه‌خاصیت انعکاسی $(a\leqslant a)$ ، تقارن $(a\leqslant b \& b\leqslant a\Rightarrow a=b)$ و تعدی $(a\leqslant b \& b\leqslant c\Rightarrow a\leqslant c)$ است درصورتی که در دستگاه اعداد مختلط ترتیب‌فوق بی‌معنی است (زیرا می‌دانیم هر عدد مختلط به‌صورت $a+bi$ است که $i^2=-1$. حال اگر $i>0$ آنگاه $i.i=-1>0$ و آن یک تناقض است و اگر $i<0$ آنگاه $(-i)(-i)=-1>0$ و باز یک تناقض است)

عبارت فوق‌الذکر جملهٔ هرمان[۳] (۱۸۶۷) را به ذهن می‌آورد که علوم صوری‌محض، منطق و ریاضیات، روابطی را مورد بحث قرار می‌دهند که مستقل از اشیاء خاص‌اند.

وایتهد[۴] (۱۸۹۸) دراین رابطه می‌گوید: ریاضیات، به‌معنی عامش، ابداع انواع استدلالهای صوری واستنتاجی است، وفی‌الواقع عبارت است از یک سری از روشها برای درک مراحل استدلال.

درواقع، از نظر وایتهد ریاضیات بخشی از منطق است و استدلالهای ریاضی بخشی از استنتاج منطقی است در این رابطه برتراند راسل[۵] می‌گوید ریاضیات محض به‌طور کامل مرکب است از: اگر گزاره‌های کذا و کذا از یک شئی درست باشند، آنگاه گزاره‌های کذا و کذا نیز از آن شئی درست است. ولی درمورد صحت و یا سقم گزاره‌های اولیه بحث نمی‌شود، به‌عبارت دیگر یک قضیهٔ ریاضی عبارت است از یک گزارهٔ راستگو $(p\vee q,\ p\Rightarrow q,\ p\&q)$ لهذا، مثلاً وقتی می‌گوئیم $p\Rightarrow q$ یک قضیه است معنی‌اش این است که این گزاره ارزش راست دارد. لهذا، ریاضیات را می‌توان چنین تعریف کرد که موضوعی است که ما هرگز نمی‌دانیم درمورد چه موضوعی صحبت می‌کنیم و نمی‌گوییم که چیزی که ما می‌گوئیم درست است (برتراند راسل ۱۹۰۱). توجه شود که به‌نظر او یک سیستم ریاضی عبارت است از مجموعه‌ای از اصول اولیه و گزاره‌های اولیه و قضایایی که به وسیلهٔ این اصول به دست می‌آید. مثلاً، یکی از دستگاههای مهم ریاضی مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت است، می‌دانیم که به روشهای مختلف مثلاً پئانو[۶] [۳] می‌توان اعداد طبیعی را ساخت. دراین دستگاه $1+1=2$ ، $2+1=3$ ، ... می‌دانیم که به‌کمک این عمل و عمل ضرب نظریهٔ اعداد را می‌توان روی اعداد صحیح مثبت ساخت و نیز به‌کمک تعاریف دیگر مثل عادکردن و قابلیت تقسیم و تعریف اعداد اول می‌توان نظریهٔ جبری اعداد را ساخت که غنی‌ترین مباحث ریاضی از نظر قضایا و مسائل است. به‌همین ترتیب سایر مباحث ریاضی ازقبیل جبر و آنالیز و هندسه نیز به‌کمک یک سری اصول و قضایای اولیه ساخته می‌شوند و هر سیستمی درداخل سازگار است یعنی مثلاً در آنالیز ریاضی نمی‌توان گزاره‌های p و $\neg p$ را اثبات کرد. حال اگر درمجموعهٔ اعداد طبیعی جمع را به صورت $1+1=1$ ، $1+0=1$ ، $0+1=1$ ، $0+0=0$ تعریف کنیم آنگاه یک دستگاه دیگری حاصل می‌شود و با تعریف ضرب به‌صورت

$0\times 1=1\times 0=0$ ، $0\times 0=0$ ، $1\times 1=1$

دو عمل جمع و ضرب روی مجموعهٔ {۱ ، ۰} تعریف می‌شود و یک سیستم سازگاری به‌دست می‌آید که فی‌الواقع همان جبر بول است، که موارد استعمال زیادی هم از لحاظ نظری و هم از لحاظ عملی به‌ویژه در مسائل فیزیکی دارد. حال توجه می‌کنیم که جمع جبر بولی با جمع معمولی کاملاً متفاوت است.

لهذا، ریاضیات محض دستهٔ همهٔ گزاره‌هایی به شکل $p\rightarrow q$ است که p و q شامل یک یا چند متغیر است

سیلوستر[۷] می‌گوید هدف فیزیک محض کشف قوانین دنیای مشهودات است، آرمان ریاضی محض کشف قوانین مربوط به آگاهی‌های بشری است.

بالنتیجه، مطالعهٔ ساختمانهای ایده‌آل و کشف روابطی بین اجزاء این ساختمانها حتی قبل از شناخت آنها، بخش اعظمی از دانش ریاضی را تشکیل می‌دهد [۵]. مثلاً می‌دانیم مجموعه G با یک عمل و با خواص مشخص تشکیل یک گروه می‌دهد. اگر G_1 و G_2 دو گروه باشند مطالعه در روابط بین این دو گروه؛ مثلاً اینکه تحت چه شرایطی G_1 و G_2 همریخت (ایزومورف) هستند. باید یادآوری شود که این ساختمانهای ایده‌آل عموماً در مسائل حقیقی موارد استعمال دارند. به‌عبارت دیگر، کشف قوانین جدید فیزیکی، ریاضیات جدیدی را طلب می‌کند و این به‌اصطلاح ریاضیات جدید همان ساختمانهای ایده‌آل هستند که بدون توجه به‌موارد استعمال آنها ساخته شده‌اند.

ریاضی، دانش ایده‌آل، عبارت است از وسیلهٔ بررسی، درک و شناخت جهان واقعیتها، لهذا، پیچیدگیها به‌وسیلهٔ

ریاضی آسانتر می گردند. از یک نقطه نظر ریاضی را می توان دانش جایگزینیهای متوالی مفاهیم ساده به‌جای مفاهیم پیچیده دانست (ویلیام وایت[۸] ۱۹۰۸) [۵]

می توان گفت که ریاضیات دیسیپلینی است که در آن پدیده‌های طبیعی جهان را می‌توان تحت کنترل مفهوم کمیت درآورد.

ریاضی دانشی است از قوانین عملگرها و تبدیلات که به‌کمک آنها قادر به‌تبدیل اشکال و حرکات آنها به‌اعداد هستیم (هابسون[۹]) [۵]

یعنی، فی‌الواقع، تبدیل اشکال هندسی و پدیده‌های فیزیکی به روابط و معادلات جبری. همهٔ ما واقفیم که این تعریف هم مثل سایر تعاریف فقط، بخشی از دانش ریاضی را مد نظر قرار می‌دهد.

کانتور[۱۰] ریاضیدان معروف آلمانی، از دیدگاه دیگری به دانش ریاضی می‌نگرد. او می‌گوید جوهر ریاضی در آزادی آن نهفته است. ریاضی درمسیر گسترش خود کاملاً آزاد است و در مسیر این گسترش سیستم باید از نظر داخلی خالی از تناقض باشد (جورج کانتور ۱۸۸۲) [۵] یعنی دانش ریاضی برای رسیدن به‌نتایج حق انتخاب را در محدوده‌ای عاری از تناقض منطقی برای خود حفظ می‌کند. ولهذا، ریاضی دانشی است که علی‌الدوام توسعه می‌یابد و رشد آن برخلاف سایر وقایع جهانی با تصویب جهانی مواجه می‌شود. این توسعه مبتنی است بر وضع چند اصل و اثبات قضایا به‌کمک استنتاج، می‌دانیم دراجرای این مراحل، استدلال ریاضیدانان براصول مشخصی پایه‌گذاری شده است. این مراحل که توسط یک ریاضیدان انجام می‌شود، پیام‌دهندهٔ ایدهٔ جدیدی است که این ایده‌ها می‌توانند به‌عنوان اصولی در نظر گرفته شوند و به‌کمک آنها می‌توان دستگاهی جدید ساخت و این روش را به طور مستمر ادامه داد و به قول کانتور جوهر ریاضی در آزادی آن نهفته است. به‌طوری که اشاره شد توسعهٔ ریاضی برهمین منوال بوده و به همین روش هم ادامه خواهد یافت. یعنی بجرأت می‌توان گفت که در ریاضیات این واقعیت نهفته است که محتوی کامل آن به‌وسیلهٔ تعداد اندکی از اصول به‌روشهای استنتاج منطقی ساخته شده است. اما افسوس که هنوز جوهر این دانش حتی برای بسیاری از تحصیل کرده‌ها به‌عنوان یک دانش غیرقابل درک باقی می‌ماند. بالنتیجه، می‌توان گفت آن بخشی از ریاضیات را که تعمیم پذیر نیست نمی‌توان به‌عنوان قسمتی از دانش ریاضی به‌حساب آورد مگر آنکه خود نظریه‌ای با کیفیت ممتاز باشد. ناگفته نماند که تعمیم ریاضی بسیار متفاوت از تعمیم فیزیکی است. البته باید توجه داشت که تصور فیزیکی قدرت محرک عمده‌ای برای اختراع ساختمانهای جدید ریاضی است. این تصور زاییدهٔ کوشش وتقلای بی‌پایانی است. شکسپیر در این مورد می گوید بعضی‌ها تصور می کنند که ریاضیات را می توان به وسیلهٔ تشریح و توضیح وملموس کردن مفاهیم آموخت[۵] این تصور درست نیست بلکه باید مردم را برای تفکر آماده کنیم نه برای احساس.

توجه شود که کلمات فوق سخنی است از یک شاعر درمورد ریاضیات[۵]

این گفتارها مختصری بود از نظریات مختلف درمورد ریاضیات. نظریات مختلف و گاه متناقض اما با نقاط مشترک مشخص، یعنی استواری هردستگاه ریاضی به‌اصول موضوعهٔ مشخص و تعمیم آن به‌کمک قوانین استنتاج [۴]

بالاخره، ایدهٔ اساسی ریاضی، تشویق برای درک مفاهیم به‌جای محاسبات کورکورانه است. ریاضیدانان واقعی رمالان مفاهیم‌اند نه رمالان اعداد [۶] ریاضی دانش ساده‌ای نیست هیچ دانش باارزشی ساده‌نیست. اما به‌هرحال بخشی از فرهنگ بشری است که نیاز به‌آن، هم به‌عنوان ایجاد تقویت بینش و تفکر منطقی و هم به‌عنوان حربه‌ای قوی برای تسلط به‌پدیده‌های فیزیکی ضروری است.

---

1. Descart
2. Bacon. F.
3. Hermann' W.
4. Whitehead. A.N.
5. Rurssell. Bertrand
6. Peano. G.
7. Sylvester. J.I.
8. William F. White
9. Hobson E. W.
10. Cantoo. J.

منابع

۱ــ محمدعلی، فروغی، سیرحکمت دراروپا، کتابفروشی زوار تهران شاه‌آباد، ۱۳۱۷.

۲ــ فلیسین، شالــه، شناخت روش علوم یا فلسفهٔ علمی، ترجمهٔ یحیی‌مهدوی، انتشارات دانشگاه تهران ۱۳۵۵

۳ــ ریاضیات چیست ۲، مدقالچی، علیرضا، رشد آموزش ریاضی شمارهٔ ۸، انتشارات دفتر تحقیقات وزارت آموزش و پرورش، تهران ۱۳۶۴

۴ــ مصاحب، غلامحسین، دائرة المعارف فارسی، انتشارات فرانکین، تهران، ۱۳۴۵

5- Moitz. R.E, On mathematics, New, York. 1942.

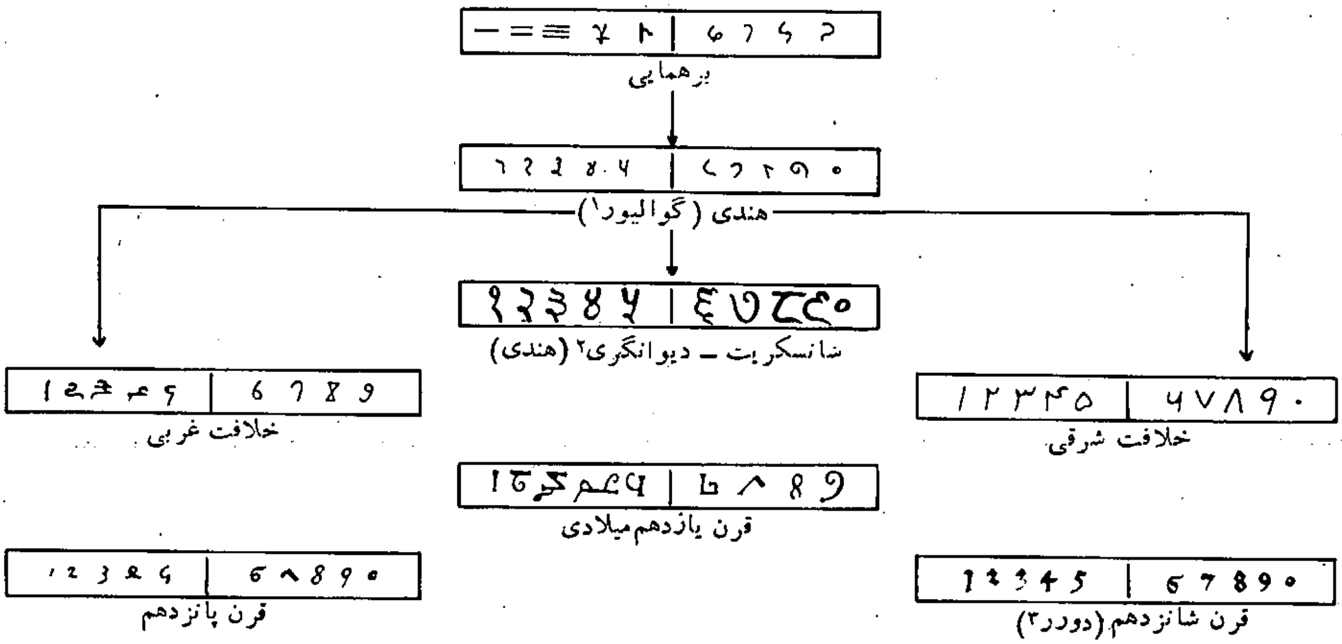
6- Stewart, Ian, Concepts of modern mathematics, Penguin books, 1981

ریاضیات دورهٔ اسلامی (۳)

دکتر محمد قاسم وحیدی‌اصل

تنوع منابعی که در آغاز نهضت ترجمه وتألیف دراختیار دانشمندان دورهٔ اسلامی قرارداشت، سبب ایجاد گـرایشهای متفاوتی درآثارریاضی گردید. این منابع ـ وعمدتاً آثار ریاضی یونانی وهندی ـ ازلحاظ نوع وکیفیت ریاضیاتی که مطرح می کردند، با هم اختلاف داشتند واین اختلافات طبعاً درتألیفات انجام شده به‌دست دانشمندان‌مسلمان منعکس می‌شد. وجوداین تنوع به‌آثارریاضی این دانشمندان‌غنای بیشتری بخشیده‌است؛ چه‌طرح ومقایسهٔ ایده‌ها وافکار ریاضـی مختلف، درمـواردی باعث تلفیق آنها و پدیدآمدن نوع بهتری ریاضیات گردیده و در مواقع دیگر یکی از دو سبك بر دیگری تفوق یافته و جنبهٔ جهانی یافته است. دستگاه‌شمار امروزی ازجملهٔ مواردی است که درآثاراین دانشمندان مورد بحث قـرارگرفته وبـا مقایسهٔ دستگاههای شمارهندی ویـونانـی (واحیاناً دستگاههای شمار محلی دیگر)، دستگاه شمار وارقامی کـه امروزه هندی‌ـ عربی نامیده می‌شود و در واقـع اصل و منشأ هندی دارد، بردستگاه شماریونانی که مبتنی برنوعی حساب ابجد بود ـ برتری یافت وابوالوفای‌بوزجانی‌وکرجی (یاکرخی)،ازدانشمندان‌سده‌های چهارم وپنجم دربرخی‌آثارخود از ارقام هندی ـ کـه ازطریق سندهند پیشگفته به‌عالم اسلام راه یافته بود ـ استفاده کرده‌اند و درمواردی‌هم به‌دستگاه‌شمار یونانی الفبایی توسل جسته‌اند. ولی در آثار دانشمندان بعدی، دستگاه شمار هندی‌جنبهٔ غالب یافته است وگرچه‌بعدها این‌ارقام‌کنارگذاشته شده‌اند، امااین تحول درزمانی صورت‌گرفته است‌که توجه به‌تألیف وترجمهٔ آثار ریاضی‌هم‌کمترشده وتألیفات چندانی بااستفاده ازحساب جمل (کـه جـانشین دستگاه شمار هندی شده بـود) صورت نگرفته است.

منشأ ارقامی‌کـه از طریق هند به‌عالم اسلام راه یافت و نویسندگان دورهٔ اسلامی آن را هندی نـامیدند، هنوز به طور قطع معلوم نشده و نظریات گـوناگون و ضد و نقیضی دربارهٔ آن ابراز می‌شود. قدر مسلم آن است‌که این ارقام، خواه در هند پدید آمده باشند و خواه درابتدا از جای دیگری به‌آنجا راه یافته باشند، درعصر ورودشان به‌بغداد از طریق‌کتاب سند‌ـ هند، استقرار قطعی درسرزمین هند یافته بودند. بعدهاکـه این ارقام در اثر ترجمهٔ‌کتاب دربارهٔ فن حساب هندی خوارزمی به‌اروپا راه یافتند، نام ارقام عربی به‌آنهـا داده شد و امروزه این ارقام و دستگاه‌شمار منتسب به‌آن (درغرب) هندی‌ـعربی نامیده می‌شود. این ارقام درخود هند صورتهای مختلف‌داشتند ولی اختلاف صورتهای مختلف این‌ارقام درعالم اسلام به‌قدری زیاد بودکه فرضیه‌هایی مبنی بروجود منشأهای مختلف درمورد ارقام رایج درخلافت‌شرقی (به‌مرکزیت بغداد) وخلافت‌غربی (شامل اندلس و شمال افریقا) ارائه شده است. مطابـق این فرضیه‌ها،ارقام موجود درشرق خلافت اسلامی مستقیماً از هند وارد شده‌اند؛ درحالی‌که ارقام مسلمانان اندلس در غرب، از اشکال‌یونانی یا رومی‌گرفته شده‌اند. به‌احتمال قوی صورتهای مختلف این ارقام تحت تأثیر گذشت زمان و نیزتابع موقعیتهای مکانی بوده است. باهمهٔ این‌احوال باید درنظرداشت‌که‌اهمیت وشهرت این دستگاه، ناشی ازوجود صفر و ارزش مکانی است و نه صورت خاصی‌کـه ارقام به‌خود پذیرفته‌اند. جالب آنکه ارقـام 1234567890 که در کشورهـای غربی مورد استفاده است، عربی نامیده می‌شوند، درحالی‌که درکشورهای عربی (ونیز درایران) از ارقام ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۰ استفاده می‌شود. درنمودار زیر مقایسه‌ای از اشکال این ارقام درمناطق وفرهنگها و اعصار مختلف به‌عمل آمده است.

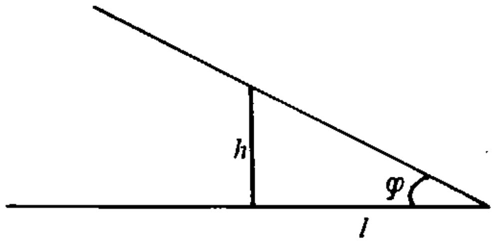


درعالم ریاضیات دورهٔ اسلامی، عــلاوه برشمارش، بین مثلثات هندی ومثلثات یونانی‌هم رقابتی در جریان بود. مثلثات یونانی ـ چنانکه‌درشماره‌های‌قبل‌دیدیم‌ـ مبتنی‌برطول‌وترکمانها برحسب اجزاء قطر در دایره‌ای بودکه قطرآن به ۱۲۰ قسمت تقسیم شده‌بود وجدولی ازطول وترهای مختلف برای کمانهای از $\frac{1}{2}^\circ$ تا ۱۸۰ به فـواصل ′۳۰ درکتاب المجسطی بطلیموس گـردآوری شده است. هندیان در محـاسبات نجـومی خود، مفهومی راکه امروزه سینوس می‌نامیم، واردکرده بودند. علت این تسمیه آن است که آریبهط (قرن ششم میلادی) ، دانشمند هندی، نصف‌طول وترمقابل به‌کمانهای مفروض را مورداستفاده قرار داده آن را اردها ـ جیا۴ (نصف وتر) نامید و سپس آن را به‌صورت جیا مختصرکرد. در موقـع ترجمهٔ آثار ریاضی هندی به‌عربی، این‌کلمه دچار تحریفایی شد و به‌صورت جیب ضبط‌گردید. بعدها، در قرن دوازدهم، گراردوی‌کرمونایی در موقع ترجمهٔ آثار عربی، به‌جای جیب (به معنی گریبان، خلیج کوچك،...) معادل لاتینی آن یعنی سینوس را قرار داد.

بتانی (ابوعبداله‌محمدبن جابربن سنان‌الحرانی‌الصابی) نخستین‌کسی است‌که جیب (سینوس) را جانشین وترکرد. او که از بزرگترین منجمین مسلمان است ، بیش از ۲۴۴ هجری قمری در حران (یا نزدیك آنجا) متولد شد. خاندانش اصلاً صابئی بودند، ولی خودش مسلمان بود. بیشتر عمر خود را در رقه (برساحل چپ فرات) گذرانید و از ۲۶۴ ه.ق. به‌بعد تمام وقت‌خودرا صرف ارصادنجومی‌کرد، وسرانجام درقصرالجص نزدیك سامرا (۳۱۷ ه. ق.) درگذشت. بزرگترین اثری‌که از وی‌به‌جامانده‌است، زیج اوست‌که به زیج صابی معروف‌است. این اثر بتانی‌که در قرن ۱۲ میلادی دوبار به‌لاتین ترجمه‌شد، مشتمل برنتایج رصدهای اوست ونه‌فقط دربسط نجوم در دورهٔ اسلامی مؤثربوده، بلکه درقرون وسطی و اوایل دورهٔ رنسانس در تکامـل علم نجوم و مثلثات کروی در اروپـا تأثیری عظیم داشته است.

فرمول ظل تمام (کتانژانت)که ازطریق جیب و جیب تمام (کسینوس) بیان شده باشد، نخستین بـار در زیج بتانـی آمده است‌که در فصل سوم آن؛ آغاز پیدایش یك علم مثلثات مستقل مشاهده می‌شود. وی شاخصی قائم و سایه (ظل) آن را برسطح‌افقی موردمطالعه قرار داده است. اگر h ارتفاع‌شاخص و l طول سایهٔ‌آن و φ ارتفاع زاویه‌ای خورشیدباشد، به‌نوشتهٔ این منجم مسلمان خواهیم داشت:

$$l = h\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$



شکل ۱

ازطرف دیگر، اگر رابطهٔ $\cos\varphi/\sin\varphi$ یعنی تانژانت φ را بـا d نمایش دهیم، چنین خواهیم داشت:

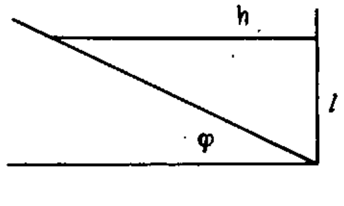
$$\sin\varphi = \frac{d}{\sqrt{1+d^2}},$$

و بنابراین بتانی، با دانستن d ، اندازهٔ φ را از جـدول جیبها به‌دست آورده بوده است.

بتانـی رصدهای فراوان و بسیاردقیق کـرده است ، و بسیاری از مقادیر نجومی را ــ از قبیل تقدیم اعتدالین و میل کلی باکمـال دقت تعیین نمود و بعضی از اشتباهات بطلمیوس را اصلاح‌کرد.

درنزد ابوالوفای بوزجانی، به‌کاربردن تانژانت‌صورت صریحتری پیداکرده است. وی شاخص را به‌صورت افقی‌نصب شدهٔ عمود بردیواری قائم درنظر گرفته و به اندازه‌گیری سایهٔ آن پرداخته و به‌رابطهٔ زیر رسیده است:

$$l = h\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$



شکل ۲

بوزجانی (ابوالوفا محمدبن محمدبن‌یحیی بن‌اسماعیل) که یکی از بزرگترین ریاضیدانان دورهٔ اسلامی است، درسال ۳۲۸ هجری قمری درشهر بوزجان (تربت‌جام‌کنونی دراستان خراسان) به‌دنیا آمد و درسال ۳۸۷ (یابه‌قولی ۳۸۸) دربغداد درگذشت. اهمیت آثار بوزجانی بیشتر به‌واسطهٔ سهم بسزایی است‌که وی درپیشرفت علم مثلثات دارد. کتاب «اعمال‌هندسی» (= کتاب فیمایحتاج الیه‌الصانع مـن اعمال الهندسه) وی نیز بدیعترین و جـالبترین اثری است‌که در دورهٔ اسلامی دربارهٔ هندسهٔ علمی پدید آمده است [۱]

اثر دیگری از بوزجانی، به نـام مجسطی، را می‌توان کتاب جامعی در علم مثلثات دانست‌که در آن دستورهای مهم مثلثات مسطحه وکـروی ثابت شده و در مسایل متعدد و متنوع مورد استعمال قرارگرفته است.

اصطلاح قطر ظل (= سکانت) نخستین بـار در همین کتاب مجسطی بوزجانی تعریف شده و رابطهٔ زیر (با علامت امروزی) درآن به‌کار رفته است:

$$\frac{\tan\alpha}{\sec\alpha} = \sin\alpha.$$

بوزجـانی بـرای تهیهٔ جـداول جیب (سینوس) و ظل (تانژانت)، شعاع دایره را واحد اختیارکرده وگرچه این فکر بدیع در بعضی از آثار بیرونی نیز دیده می‌شود ولـی ظاهراً بوزجانی اولین‌کسی است‌که آن را عملی‌کـرده است. این ، نشانه‌ای دیگر از ورود به مثلثات جدید است، زیراکه هندیان تابع سینوس را بردایره‌ای به شعاع ۳۴۳۸ محاسبه می‌کردند.

در مثلث مسطحه ، بوزجانی صحت روابط زیر را ثابت کرده و آنها را به‌کار برده است:

$$\frac{2R - \text{وتر}\,(180^\circ - \alpha)}{\text{وتر}\ \alpha/2} = \frac{\text{وتر}\ \alpha/2}{R}$$

(معادل با دستورکنونی $2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$)

$$\frac{\text{وتر}\ \alpha}{\text{وتر}\ \alpha/2} = \frac{\text{وتر}\left(180^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{R}$$

(معادل با دستورکنونی $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$)

و

$$\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b$$

بوزجانی معادلهای فرمولهای زیر برای مثلثهای کـروی قائم‌الـزاویه را هم پیداکـرده است (زاویهٔ B قائمه فـرض می‌شود) :

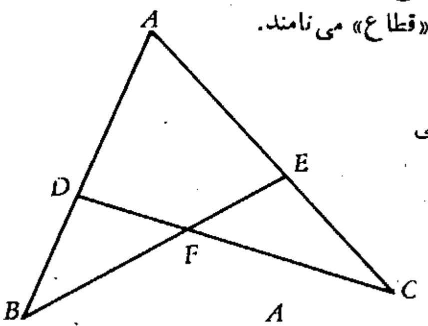
$$\sin a = \sin b\sin A$$
$$\sin c = \tan a\cot A$$
$$\cos b = \cos a\cos C$$

بوزجانی همچنین رابطهٔ

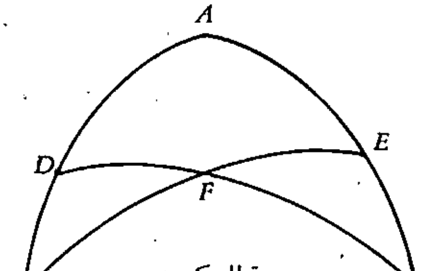
$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

راکه امروزه به«قضیهٔ سینوسها» موسوم است و به‌صورتی دیگر بر بطلمیوس و برهمگوپت هندی معلـوم بوده است.[۳] ، پیدا کـرد. این رابطه دراصطلاح قدما شکل مغنی یا قانون الهیئه نامیده می‌شد و وجه تسمیهٔ آن به‌شکل مغنی آن است کـه این رابطه منجمین را از شکل قطاع که به کاربستنش مشکل است، بی‌نیاز می‌ساخت. امـا مقصود از «شکل قطاع» در ریاضیات دورهٔ اسلامی دو چیز است:

اولاً شکل قطاع ، شکلی است هندسی که یا از تقاطع چهـار خط راست کـه دو به دو یکدیگـر را قطع کنند، پدید می‌آید و آن را «شکل قطاع سطحی» می‌نامند؛ و یا از تقاطع دایره‌های عظیمه برسطح کره پدیدمی‌آید و آن را «قطاع کروی» و یا به‌طور خلاصه «قطاع» می‌نامند.



قطاع سطحی



قطاع کروی

ثانیاً «شکل قطاع» قضیه‌ای است (در اینجـا «شکل» به معنی قضیه به‌کار رفته است)که درمورد شکلهای فوق‌به‌صورت زیر بیان می‌شود:-

$$\frac{CE}{AE}=\frac{CF}{DF}\times\frac{DB}{AB}$$ (شکل قطاع سطحی)

$$\frac{\sin CE}{\sin AE}=\frac{\sin CF}{\sin DF}\times\frac{\sin DB}{\sin AB}$$ (شکل قطاع کروی)

«شکل قطاع» یکی از قضایای اساسی در علم مثلثات و نجـوم دورهٔ اسلامی بوده و ریاضیدانان این دوره دربارهٔ آن کتابها و رساله‌های متعددی نوشته‌اند.

علاوه براینها ، بوزجانی روشی نیز برای محاسبهٔ جیب نیم‌درجه ابداع کرده و درمجسطی خود جیب وسهم (فاصلهٔ بین وسط قوس‌ووسط‌وتر)وظل‌مستوی(طول l درشکل ۱)وظل‌معکوس زوایـای ۰ تا ۹۰ درجه را ۱۵ دقیقه به ۱۵ دقیقه تا رابعه و خامسه (در دستگاه‌شصتگانی) حساب کرده وآنهارا درجداولی ثبت نموده است که این نتایج تا هشت رقم اعشاری در دستگاه دهدهی، با مقادیر واقعی منطبق است.

ترسیمات هندسی‌به‌وسیلهٔ خط کش و پـرگار و فقط یك گشادگی دهـانه پرگار (کـه از ابتدا تا انتهای ترسیم ثابت نگهداشته‌می‌شود)، ساختن چندوجهیهای منتظم (وچند وجهیهای نیمه منتظم) به روش متفـاوت با روشهای اقلیدس و پاپوس را می‌توان از ابتکارات بوزجانی دانست.

بوزجانی‌علاوه برآنکه عالم برجسته‌ای درمثلثات‌ونجوم بود، درجبر هم توانایی فوق‌العاده‌ای داشته است. وی تقریظی برکتاب جبر خوارزمی نوشته وکتاب علم حساب دیوفانتوس را ازیونانی‌به‌عربی‌ترجمه کرده است.ظاهراً کرجی(یاکرخی)، که دربارهٔ او بعداً بتفصیل سخن خواهیم گفت، از طریق همین تـرجمه باکارهای دیـوفانت آشنا شده و ادامه دهندهٔ راه وی گردیده است.

بوزجانی را، غیر ازکتب «اعمال هندسی» و «مجسطی» آثار و تألیفات دیگری هم بوده است‌که فقط پنج‌تا ازآنها از گزند روزگار در امان مانده‌اند.

منابع

[۱] قربانی، ابوالقاسم،ریاضیدانان ایرانی ، نشریه شمارهٔ ۱۴ ، مدرسه عالی دختران، تهران، ۱۳۵۰

[۲] - - ،نسوی نامه، انتشارات‌بنیادفرهنگ‌ایران، تهران، ۱۳۵۱

[۳] ایوز، هاورد و، آشنایی با تاریخ ریاضیات، ترجمه‌محمدقاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۳

[۴] دایرة‌المعارف فارسی، به‌سرپرستی غلامحسین مصاحب

[5] Boyer, Carl B. *A History of Mathematics* (New York, John Wiley & Sons, 1968).

پانوشتها

1) Gwalior [شهری درهند]
2) Devanagari
3) Durer
4) ardhā — jyā

نکته‌ای دربارهٔ تاریخ عدد π و ریاضیات دورهٔ اسلامی

نوشتهٔ : ابوالقاسم قربانی

درضمن زندگینامهٔ ملامحمدباقر یزدی[1] ریاضیدان ایرانی وصاحب کتاب «عیون الحساب» نوشتم که نوهٔ او نیز مانند خودش محمدباقر نام داشته و ریاضیدان بوده و درنیمهٔ دوم سدهٔ یازدهم، واوایل سدهٔ دوازدهم هجری می‌زیسته است.

این محمدباقر دوم درسال ۱۱۰۶ هجری مطابق با ۱۶۹۴ میلادی شرحی بر کتاب «عیون الحساب» جدش به زبان عربی نوشته وآن را «کفایة اللباب فی شرح مشکلات عیون الحساب» نامیده است.

درضمن مطلب اول ازباب چهارم این شرح، که مربوط به مساحت سطوح مستوی است، مؤلف به محاسبهٔ عدد π دراروپا اشاره کرده است. این مطلب فقط در شرح «عیون الحساب» آمده و نه درمتن خود آن کتاب وظاهراً جدمؤلف یعنی نویسندهٔ متن «عیون الحساب» ازآن آگاهی نداشته است.

تاآنجاکه نویسنده اطلاع دارد، این نخستین بار است که دریک کتاب ریاضی ازدورهٔ اسلامی ذکری ازکارهای ریاضیدانان اروپائی به‌میان می‌آید. این مطلب می‌رساند که در اواخر سدهٔ یازدهم هجری ریاضیدانان ایرانی کم وبیش ازآثار ریاضیدانان اورپایی اطلاع پیدا کرده بوده‌اند واین امراز جهت تعیین حدود دوره‌ای از تاریخ ریاضیات که «دورهٔ اسلامی» نامیده می‌شود مهم است. دراینجا ابتدا عین عباراتی ازکتاب «کفایة اللباب فی شرح مشکلات الحساب» را نقل وسپس مطالب آن را با اصطلاحات ریاضی کنونی بیان می‌کنم و آنگاه به ذکر نتیجهٔ حاصل ازاین مقدمات می‌پردازم.

الف ـ نقل عباراتی ازمطلب اول از باب چهارم کتاب «کفایة اللباب فی شرح مشکلات عیون الحساب»

«وقداستخرج بعض المحاسبین من الافرنج ان القطر اذاکان مائة الف ثلاث مرات وهواحدعشر صفراً علی یمین الرقم الواحد[2] یکون المحیط ثلاثمائة واربعة عشر الف الف الف ومائة وتسعه و خمسین الف الف ومأتین وخمسة وستین الفا واربعمائة واحد و ثمانین[3] ویکتب بالارقام هکذا

۳۱۴، ۱۵۹، ۲۶۵، ۴۸۱

ثم استخرج آخر بحساب ادق فخرج المحیط باجزاء یکون القطر بهامائة الف ست مرات وهوعشرون صفراً علی یمین الرقم الواحد[4] مابین ثلاثمائة واربعة عشر الف الف الف الف الف[5] ومائة وتسعة وخمسین الف الف الف الف[6] ومأتین وخمسة وستین الف الف الف الف[7] و ثلاثمائه و ثمانیه و خمسین الف الف الف[8] و تسعمائة وتسعة و سبعین الف الف[9] وثلاثمائة وثلاثة وعشرین الفا[10] وثمانمائة وسبعة واربعین ومانقص عنه بواحد ویکتب بالارقام هکذا:

۳۱۴، ۱۵۹، ۲۶۵، ۳۵۸، ۹۷۹، ۳۲۳، ۸۴۷

ب ـ بیان عبارات فوق به‌فارسی وبا اصطلاحات کنونی

یکی ازمحاسبان فرنگی به فرض آنکه قطر دایره مساوی با

$$100'000'000'000 = 10^{11}$$

یعنی صدمیلیون (= صدمیلیارد) باشد محیط دایره رامساوی با

۳۱۴'۱۵۹'۲۶۵'۴۸۱

واحد به‌دست آورده است[11].

سپس شخص دیگری از مردم فرنگ محیط دایره را با دقت بیشتری حساب کرده و نشان داده است که اگر قطر دایره

$$۱۰^{۲۰} = ۱۰۰‘۰۰۰‘۰۰۰‘۰۰۰‘۰۰۰‘۰۰۰‘۰۰۰$$

واحد فرض شود محیط آن ما بین عدد

$$۳۱۴‘۱۵۹‘۲۶۵‘۳۵۸‘۹۷۹‘۳۲۳‘۸۴۷$$

و عددی که یك واحد از این عدد کمتر باشد واقع است[۱۲]

ج- بررسی مطالب فوق

اطلاعاتی که نوهٔ ملامحمدباقر یزدی در سال ۱۱۰۶ هجری مطابق با ۱۶۹۴ میلادی در بارهٔ عدد π داده دقیق است و پیداست که او این اطلاعات را از کتاب یا نشریه‌ای که در آن روزگار به یکی از زبانهای اروپایی منتشر شده بوده کسب کرده است.

امروزه می‌دانیم که ریاضیدان فرانسوی «فرانسوا ویت» (*F.Viete*) که از سال ۱۵۴۰ تا ۱۶۰۳ میلادی می‌زیست در سال ۱۵۷۹ م مقدار تقریبی π را با یازده رقم اعشاری حساب کرد[۱۳] (که ۹ رقم اعشاری آن با مقدار واقعی π موافق بود) و این همان چیزی است که مؤلف کتاب «کفایة اللباب» در قسمت اول مطلب خود نوشته است.

از طرف دیگر می‌دانیم که لودلف وان سویلن (*Ludolph van Ceulen*) که از ۱۵۴۰ تا ۱۶۱۰ میلادی می‌زیست ابتدا مقدار π را با بیست رقم اعشاری و سپس با ۳۵ رقم اعشاری به دست آورد.[۱۴] مقدار بیست رقمی اعشاری π در نخستین چاپ کتاب او موسوم به *Van den Circkel* که در سال ۱۵۹۶ م چاپ شده بود ثبت شده است و این نیز همان چیزی است که مؤلف «کفایة اللباب» در قسمت دوم مطلب خود نوشته است.

د- نتیجه حدود «دورهٔ اسلامی» در تاریخ ریاضیات

دوره‌ای از تاریخ ریاضیات که «دورهٔ اسلامی» نامیده می‌شود از زمان خوارزمی (ابوعبدالله محمدبن موسی) یعنی از اواخر سدهٔ دوم هجری شروع می‌شود. زیرا نخستین کتاب ریاضی که از این دوره به دست ما رسیده است کتاب «مختصر من حساب الجبر والمقابله» تألیف خوارزمی است. از آن تاریخ به بعد در طی قرنهای متوالی و در کشورهای مختلف اسلامی ریاضیدانانی ظهور کرده آثار ریاضی جالب توجهی به زبانهای عربی و فارسی پدید آورده‌اند. آخرین کتاب ارزنده‌ای که از این دوره باقی مانده همان کتاب «عیون الحساب» ملامحمدباقر یزدی است. و چون از آن به بعد چنانکه دیدیم ریاضیدانان ایرانی از کارهای ریاضی اروپاییان آگاهی پیدا کرده بوده بودند طبعاً دیگر نمی‌توان آثار آنان را از تأثیر کارهای اروپاییان در رشتهٔ ریاضی مبرا و مستقل دانست و نوشته‌های آنان را متعلق به دورهٔ اسلامی به حساب آورد، بنابراین آغاز دورهٔ تاریخ ریاضی در کشورهای اسلامی اوایل سدهٔ سوم و پایان آن اواخر سدهٔ یازدهم هجری است.

۱ــ رجوع کنید به شمارهٔ ۱۳۷ کتاب «زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی» (زیرچاپ)

۲ــ یعنی اگر قطر دایره مساوی با $۱۰^{۱۱}$ باشد

۳ــ یعنی اگر قطر دایره $۱۰^{۱۱}$ واحد باشد محیط آن ۳۱۴‘۱۵۹‘۲۶۵‘۴۸۱ خواهد بود (بنابراین اگر شعاع دایره یك واحد باشد از رابطهٔ $\pi = \frac{\text{محیط}}{\text{قطر}}$ معلوم می‌شود که

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۴۸۱$$

باید دانست که فقط هشت رقم اعشاری این عدد با مقدار واقعی π موافق است).

۴ــ یعنی اگر قطر دایره مساوی با $۱۰^{۲۰}$ باشد

۵ــ یعنی ۳۱۴×۱۰^{۶}

۶ــ یعنی ۱۵۹×۱۰^{۵}

۷ــ یعنی ۲۶۵×۱۰^{۴}

۸ــ یعنی ۳۵۸×۱۰^{۳}

۹ــ یعنی ۹۷۹×۱۰^{۲}

۱۰ــ یعنی ۳۲۳×۱۰

۱۱ــ بنابراین مقدار تقریبی عدد π عبارت است از

$$\pi = ۳/۱۴\ ۱۵۹\ ۲۶۵\ ۴۸۱$$

۱۲ــ به‌عبارت دیگر اگر عدد بیست و یك رقمی فوق را a بنامیم مقدار تقریبی عدد π بین دو عدد زیر محصور است

$$\frac{a}{۱۰^{۲۰}} > \pi > \frac{a-۱}{۱۰^{۲۰}}$$

به این ترتیب مقدار تقریبی نقصانی π عبارت است از

$$\pi = ۳/۱۴‘۲۶۹‘۲۶۵‘۳۵۸‘۹۷۹‘۳۲۳‘۸۴۶$$

و هر بیست رقم اعشاری این عدد با مقدار واقعی π موافق است.

۱۳ــ ایوز H، ص ۹۸ ــ منتوکلا H، ج ۱ ص ۵۷۸

۱۴ــ کانتور G، ج ۲ ص ۵۹۹ــ ایوز H، ص ۹۸ــ آشنایی با تاریخ ریاضیات، ج ۱ ص ۱۱۴، ترجمهٔ فارسی بویر H، ص ۳۵۲

مروری کوتاه بر تاریخ هندسه و خطوط موازی

این مقاله متن سخنرانی آقای دکتر پوررضا است که در شانزدهمین کنفرانس ریاضی کشور ایراد شده است.

واژهٔ ژئومتری ازدوواژهٔ «ژئو» به‌معنی زمین و«متراین» به‌معنی اندازه‌گیری آمده‌است. هندسه دراصل، علم اندازه‌گیری زمین بوده است. هرودوت، مورخ یونانی، پیدایش هندسه را به‌مساحان مصری نسبت می‌دهد. ولی‌تمدنهای کهن دیگر (بابلی، چینی، وهندی) هم‌اطلاعات هندسی داشته‌اند. هندسهٔ پیشینیان، یک‌موضوع تجربی بود وجوابهای تقریبی‌آن معمولاً برای مسائل عملی کافی بودند. مثلاً بابلیهای ۲۰۰۰ سال پیش‌از میلاد، محیط دایره را سه برابرقطرش می‌گرفتند؛ یعنی π را برابر۳ اختیارمی‌کردند. حدسهای مصریان دربرخی ازموارد درست وبرخی موارد نادرست بودند. یکی‌ازکارهای برجستهٔ آنها پیدا کردن دستورصریح برای حجم هرم مربع‌القاعده‌است و می‌پنداشتند دستوری که برای مساحت مستطیل صحیح است برای هرچهارضلعی نامشخص نیزمی‌توانند صحیح باشد. چنین به‌نظرمی‌رسد که هندسهٔ مصریها یک علم نبود وبلکه‌صرفاً انبانی بود پرازقواعد محاسبه، بی‌هیچ دلیلی یا توجیهی.

اما بابلیان درحساب وجبر خیلی پیشرفته‌تر از مصریان بودند، حتی قضیهٔ مشهور فیثاغورث را خیلی پیش‌از آنکه فیثاغورث به‌دنیا بیاید،می‌دانستند. تحقیقات‌اخیرا‌تونویگه‌باویر تأثیرجبر بابلیان برریاضیات یونانیان را، که قبلاً نادانسته‌بود، مکشوف ساخته است.

یونانیان‌وقبل‌ازهمه‌طالس‌ملطی‌اصرارمی‌ورزیدند که‌احکام هندسی بایدازراه استدلال‌قیاسی ثابت‌شوند نه‌از راه‌آزمایش. وی ضمن‌کوشش برای‌متمایزساختن نتایج درست ازنادرست، نخستین هندسهٔ منطقی را بنیاد نهاد واستخراج منظم قضایا از راه اثبات، ازمشخصات ریاضیات یونانی و کاملاً تازه بوده است. این‌روش‌طالس‌مدت دوسده‌توسط فیثاغورث‌وشاگردانش ادامه یافت. پی‌ریزی منظم هندسهٔ مسطحه توسط مکتب فیثاغورث را بقراط درحدود ۴۰۰ سال پیش‌ازمیلاد درکتاب اصول سروسامان‌داد. بااینکه این‌کتاب گم شده است، می‌توان بااطمینان خاطر گفت که‌قسمت‌اعظم کتابهای اول‌تاچهارم اصول اقلیدس را که یک سده بعد منتشر شده است، دربرداشته است. اولین‌کسی که نظریهٔ تناسبها را برروی طولهای گنگ بسط‌داد، ائودوکسوس بود واین قضایا درکتاب پنجم اقلیدس گنجانیده شده است.

سدهٔ چهارم پیش‌ازمیلاد ناظرشکوفائی آکادمی علوم و فلسفهٔ افلاطون بود (حدود۳۸۷سال پیش‌ازمیلاد). افلاطون‌در کتاب جمهوری می‌نویسد: «مطالعهٔ ریاضیات دستگاه ذهنی را چنان توسعه می‌دهد و به‌کارمی‌اندازدکه ارزش‌آن ازهزارچشم بیشتراست، زیرا درک حقیقت فقط ازراه ریاضیات میسراست». افلاطون می‌آموخت که جهان اندیشه مهمتر از جهان مادی حواس است. زیرا این جهان سایهٔ جهان اولی است، جهان مادی غاری‌است تاروشن‌که برروی دیوارهای‌آن تنهاسایه‌های جهان واقعی خارج را که به نور خورشید روشن شده است، می‌بینیم. خطاهای حواس باید ازراه تمرکزفکراصلاح شوند، که خود این تمرکز ازراه مطالعهٔ ریاضیات بهترمیسرمی‌شود.

اقلیدس شاگردمکتب افلاطون بود و درحدود۳۰۰سال پیش‌ازمیلادروش‌قاطع هندسهٔ یونانی ونظریهٔ اعدادرادرکتاب اصول ۱۳ مقاله‌ای‌اش منتشر کرد. باتنظیم این شاهکار،اقلیدس تجربه وکارهای مهم پیشینیان خودرا گردهم‌آورد. باید گفت متجاوز ازدوهزارسال روش اودرهندسه برتعلیم این ماده مسلط بود. بعلاوه روش بنداشتی که اقلیدس به‌کاربرد، الگوئی است برای آنچه که ما امروز ریاضیات محض می‌نامیم. اصول اقلیدس از این نظرهم محض است که متضمن هیچ کاربرد عملی نیست، البته هندسهٔ اقلیدسی موارد استعمال زیادی درمسائل

مهندسی دارد، ولی دراصول به‌آنهااشاره نشده است وامروزه نیزاغلب ریاضیدانان محض، ریاضیات‌را صرفاً برای‌خودش، برای زیبایی وظرافت ذاتی‌اش فرامی‌گیرند.

وقتی‌که اقلیدس‌اصول‌رامی‌نوشت، خودش نسبت‌به‌اصل پنجم با شك وتردید نگاه می‌کرد و تا آنجاکه توانسته است، مطالعهٔ دانش موازیها را به تأخیر انداخته است. یادآوری می‌کنیم‌که پنج اصل موضوع اقلیدس به‌این شرح هستند:

۱ــ ازدونقطهٔ متمایزفقط یك خط می‌گذرد،

۲ــ به‌ازای هرپاره خط AB و هرپاره خط CD نقطهٔ منحصربه‌فردی چون E وجوددارد به قسمی‌که B میان A و E بوده و $CD \cong BE$،

۳ــ به‌ازای‌هرنقطهٔ O وهرنقطهٔ A که متمایزازOباشد، دایره‌ای بمرکز O وبه‌شعاع OA وجوددارد،

۴ــ تمام زوایای قائمه باهم برابرند،

۵ــ اگــر دوخط به وسیلهٔ موربی چنان قطع شوند که مجموع اندازهٔ دوزاویهٔ درونی واقع دریك طرف‌مورب‌کمتر از $180°$ باشد، آنگاه این دوخط یکدیگــر را درهمان طرف مورب تلاقی می‌کنند.

امروزه به‌جای این اصل، هم‌ارز آن‌راکه‌به‌پلی‌فیرنسبت داده می‌شود درکتابهای درسی می‌نویسند:

اصل‌پلی‌فیرــ ازهرنقطه واقع درخارج یك خط، فقط و فقط یك خط به‌موازات آن می‌توان رسم کرد.

پس‌از تدوین‌کتاب اصول، یعنی ازآن‌زمان که هنــدسه به صورت یك علم درآمده دانشمنــدان علاوه‌بر توسعهٔ عـادی همواره دردومورد بیشتربه‌تفحص پرداختند.

یك‌عده دنبال مسائل ترسیمی رفتنــد ومسائلی را دراین مورد طرح ویکدیگررا به‌مبارزهٔ علمی دعوت نمودند.مهمترین این مسائل عبارت‌انداز تثلیث زاویـه، تربیع دایره و تضعیف مکعب.

منظورازتثلیث زاویه، تقسیم زاویه بــه‌سه‌قسمت متساوی است وسایل مجاز برای‌آن خط‌کش نامدرج و پرگار است.

تربیع دایره عبارت استازترسیم یك مربع‌که مساحت آن برابر مساحت یك‌دایرهٔ مفروض باشد.

تضعیف مکعب عبارت استازرسم مکعبی کــه حجم‌آن دوبرابر حجم مکعب مفروضی باشد.

حل سه مسئلهٔ فوق‌سالها فکردانشمندان را به‌خودمشغول نموده‌اند ودرقرن بیست ثابت شده است که حل این سه مسئله تنها باپرگاروخط‌کش نامدرج ممکن نیست.

عدهٔ دیگربرای اثبات اصل پنجم به کمك اصول دیگــر همت‌گماردند و از آن جمله پروکلوس، خواجه نصیرالدین طوسی، لژاندر، ساکری، لامبرت ووالیس را می‌توان‌نام‌برد. همهٔ نامبردگان بالاتفاق در استدلالهای خود ناخودآگاه از قضیه‌ای استفاده کرده‌اندکه خودهم‌ارزاصل‌پنجم‌است. بدنیست دراینجا صورت بعضی‌ازاین قضیه‌ها را بیاوریم.

اصل پنجم اقلیدس $\Longleftrightarrow$ اصل پلی‌فر $\Longleftrightarrow$ هــرگاه خطی یکی‌ازدوخط موازی را ببرددیگری را نیزمی‌برد$\Longleftrightarrow$ هرگاه خطی دوخط موازی‌را ببرد دوزاویهٔ متبادل داخلی باهم برابرند $\Longleftrightarrow$ هرگاه خطی بریکی‌ازدوخط موازی عمودباشد بردیگری‌هم‌عمود است $\Longleftrightarrow$ مجموع زاویای داخلی‌هرمثلث ۱۸۰ درجه است و...

گرچه‌تلاش دانشمندان‌دراثبات‌اصل‌پنجم به‌جایی‌نرسید، ولی کارهای لــژاندروساکــری و لامبرت در هندسهٔ ختنی و هذلولوی مورد استفاده قرارگرفت. ساکــری و لامبرت برای اثباب اصل پنجم ازچهارضلعیهایی استفاده می‌کردندکه‌امروزه به نام خود آنهاست وسعی مــی‌کنیم تعریف آنها را دراینجا بیاوریم:

هرگاه‌دریك‌چهارضلعی$\square ABCD$، $\angle A = \angle B = 90°$، $AD \cong BC$، آنگاه چهارضلعی را چهار ضلعی ساکری مــی‌نامند. دراین‌چهارضلعی زوایای $\angle D, \angle C$ باهم برابرندواقطار $BD \cong AC$. چهارضلعی لامبرت یــك چهارضلعی است که سه زاویهٔ‌آن قائمه است، بدیهی است که اگر یك چهارضلعی هم ساکری وهم لامبرت باشد، مستطیل است.

یادآوری می‌کنیم‌که ساکری پس‌از تعریف چهارضلعی خود سعی می‌کرد ثابت‌کند کــه $\angle D, \angle C$ هم قائمه هستند و برای آن از برهان خلف استفاده می‌کرد وسعی مــی‌کرد که حالتهای حاده ومنفرجه را به‌تناقض بکشد. البته درموردمنفرجه موفق شد ولی درفرض زاویهٔ حاده هرگزموفق نشد.

نظیرکارساکری را لامبرت درمورد زاویهٔ چهارم چهار ضلعی‌خود به‌کاربرد واونیزمنفرجه بودن‌آن رابه تناقض‌کشاند. ولی درمورد حاده نه‌تنها به تناقض نرسید بلکه اظهار کردکه گویا نمی‌توان آن را به تناقض‌کشاند.

پس ازاین دوره دانشمندان کم‌کم به فکراثبات‌استقلال این اصل از اصول‌دیگر پرداختندو دراین‌مورد یانوش‌بویوئی اهل مجارستان اولین‌کسی است که تحقیقات خود را به رشتهٔ

تحریر درآورد وجهت بررسی آنها را توسط پدرش به گاوس، ریاضیدان بزرگ فرستاد. گاوس ازدوستان نزدیك پدربویوئی بود و درپاسخ نوشت که تمام کارهای بسویوئی را خسود نیز انجام داده و وصیت کرده است که پس ازمرگ آنها را منتشر نمایند ولی دیگر نیازی به این کار نیست. پس از دریافت این این جواب، یسانوش بویوئی جسوان به خیال اینکه پسدرش تحقیقات او را قبلاً درخفا به گاوس فسرستاده است، خشمگین شده وتمام یادداشتهایش را می‌سوزاند.

پس‌ازبویوئی: نیکلای‌ایوانویچ لوباچفسکی، ریاضیدان نامی روس، در ۱۸۲۹، مقاله‌ای در این زمینه به زبان روسی منتشر کرده و در آن استقلال اصل پنجم را ثابت‌نمود و به‌جای اصل پنجم، اصل توازی هذلولوی را جایگزین و هندسهٔ هذلولوئی را وضع کرد. لسوباچفسکی (توازی هذلولوئی) به شرح زیر است:

ازهرنقطهٔ واقع‌درخارج یك‌خط می‌توان حداقل دوخط به موازات آن رسم کرد.

. سازگاری هندسهٔ هذلولوئی را بعدها کلاین ثابت نمود. این هندسهٔ نوبعدها توسط کلاین وبلترامی وهانری پسوانکاره بسط داده شد.

بعدها ریمان، دانشمند آلمانی موفق شد نوع دیگری از هندسه‌بنام‌هندسهٔ بیضوی‌راکشف نماید. دراین هندسه خطوط موازی‌وجودندارند. پس‌ازاین کشف‌دانشمندان درصددبرآمدند هندسه را ازنوبا دقت‌بیشترمطالعه‌نمایند. ازجملهٔ این‌دانشمندان می توان ازهیلبرت نام برد. هیلبرت یکی از ریاضیدانان قرن بیستم وقهرمان بزرگ روش‌بنداشتی است. وی درسال ۱۹۰۰ درکنگره بزرگ ریاضیدانان درشهرپاریس ۲۳ مسئله مهم این سده را پیش‌بینی ومطرح کرد. اصول هیلبرت درهندسهٔ مسطحه درکتابهای درسی موجود درج شده است.

درکتابهای جدیدهندسه، برای تفهیم استقلال اصول از یکدیگر، ازالگوها استفاده می‌شود. الگو دستگاهی است که‌در آن‌تعبیرهایی ازتعریف نشده‌ها می‌نمایند واین تعبیرها باید در اصول موضوعه صدق نماید. مثلاً اگرتنها سه اصل اول‌هندسهٔ وقوع به شرح زیر را درنظربگیریم، بسهولت مسی‌توان اصل توازی را ازاین سه اصل مشاهده نمود:

۱ـ ازهردونقطهٔ متمایز A و B فقط یك خط می گذرد،

۲ـ هرخط لااقل دارای دونقطهٔ متمایزاست،

۳ـ به‌ازای‌هرخط، نقطه‌ای‌وجود دارد که‌روی‌آن‌نیست.

مثال ۱ـ مجموعـهٔ سه عضوی $E=\{A,B,C\}$ را در نظرمی گیریم. نقاط‌راعناصرمجموعه‌وخطوط‌را زیرمجموعه‌های دو عضوی E یعنی $\{A,B\}$ و $\{B,C\}$ و $\{C,A\}$ در نظـر می گیریم. وقوع را عضویت درمجموعه تعریف می کنیم.

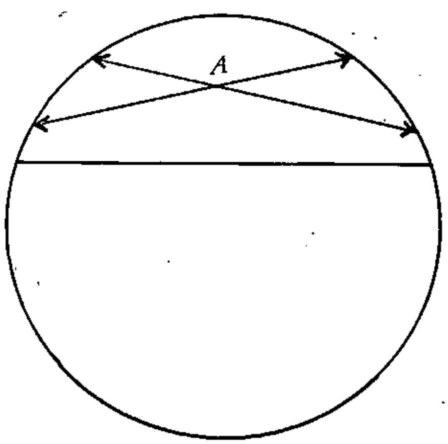
با این تعبیرها یك الگو به‌دست مـی‌آید. زیـرا هرسه اصل درآن صادق هستند وخاصیت توازی بیضوی است، یعنی خطوط موازی وجود ندارد. تعریف دوخط موازی چنین‌است: درخط را موازی می‌نامند هرگاه نقطهٔ مشترك نداشته باشند.

مثال ۲ـ مجموعهٔ چهار عضوی $E=\{A,B,C,D\}$ را درنظرمی گیریم. مسانند مسئلهٔ بسالا نقاط عبارت‌انسد ازعناصر مجموعه وخطوط عبارت‌اند از زیـر مجموعه‌های دوعـضوی $\{A,B\}$ و $\{A,C\}$ و $\{A,D\}$ و $\{B,C\}$ و $\{B,D\}$ و $\{C,D\}$. وقوع عبارت است ازعضویت درمجموعه.

ملاحظه می‌شود که این تعبیرنیز یك الگوست و خاصیت توازی اقلیدسی است.

مثال ۳ـ نقاط عبارت‌انـد ازنقاط درون یك دایـره و خطوط عبارت‌اندازوترهای باز (منظور ازوترهای بازوترهایی هستندکـه شامل نقاط ابتدا و انتهای خـود نیستند). وقـوع عبارت است از قرارگرفتن یك نقطه روی وتر به معنی‌معمولی.

واضح است‌که این تعبیر نیز یك الگوست. نوع‌توازی دراینجا هذلولوی است، یعنی ازهر نقطهٔ واقع درخارج یـك خط حداقل دوخط به موازات آن رسم می‌شود.



نامشخص‌ترین مثلث

از نشریهٔ انجمن معلمان ریاضی فرانسه

ترجمهٔ : عبدالحسین مصحفی

۱ـ رسم مثلث نامشخص.
Jacques Lubczanski

روبرویی با دشواری برای دستیابی به‌چیزی که پیش‌پا افتاده و در دسترس انگاشته می‌شده واقعیتی است پذیرفتنی و هرکس کمابیش ازاین‌گونه رویارویی‌ها داشته است. رسم مثلث نامشخص ازاین‌گونه است. این مسئله آنچنان پیش پـا افتاده انگاشته شده که‌نویسندگان کتابهای هندسه لازم ندانسته‌اندحتی یادی ازآن بنمایند. اگر ازدانش‌آموزی خواسته شودکه مثلثی بایك زاویهٔ قائمه یا بایك زاویهٔ منفرجه یا بادوضلع برابررسم کندتأمل‌می‌کندوروش‌آموخته‌شده را به‌کارمی‌بندد وحاضراست توضیحات لازم رابدهد. اما اگر ازهمین دانش‌آموزرسم‌مثلثی نامشخص خواسته شود بدون تأمل و بدون به‌کاربردن روش‌معین سه‌نقطهٔ دلخواه را انتخاب و به هم‌وصل می‌کند. آیا مثلثی کـه بدین‌گونه رسم شده نامشخص است؟

برای پاسخ‌دادن بدین پرسش نخست باید معلوم کرد که به‌چه گونـه مثلثی نامشخص گفته می‌شود. مثلثی را نامشخص می‌نامیم که هیچ زاویهٔ آن قائمه یامنفرجه وهیچ دوضلع آن با هم‌برابرنباشد. بنابراین، رسم مثلث نامشخص یعنی رسم‌مثلثی که ویژگیهای معینی را دارا نباشد. دررسم مثلث مشخص، یعنی مثلث باویژگی‌یاویژگیهای معین، معمولاً یك‌ضلع آن، مثلاً BC، رابه‌دلخواه‌انتخاب‌وآنگاه رأس Aرا چنان‌می‌یابند که ویژگی یا ویژگیهای گفته شده برای آن مثلث برقرار باشد. بـرای رسم مثلث نامشخص همین روش را به‌کار می‌بریم وفرض می‌کنیم:

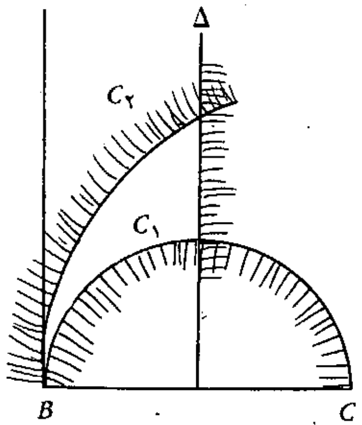
BC بزرگترین ضلع و AB کوچکترین ضلع مثلث و A بالای BC واقع باشد. بااین شرط هریك از زاویه‌های B و C حاده است ویافتن رأس A موکول به تحقق شرایط زیر است: زاویهٔ A قائمه نباشد، زاویهٔ A منفرجه نباشد، فاصلهٔ A تـا B بزرگتر یا برابر با فاصلهٔ A تا C نباشد.

ازاینکه زاویهٔ A قائمه نیست پس A برنیمدایرهٔ به‌قطر BC قرارندارد.

از اینکه زاویهٔ A منفرجه نیست پس A داخل نیمدایرهٔ به‌قطر BC واقع نیست. این ناحیه را پرداز می‌زنیم.

چون $AC<BC$ پس A درخارج دایرهٔ به‌مرکز C و به شعاع CB واقع نیست. این ناحیه را نیز پردازمی‌زنیم.

از $AC>AB$ نتیجه می‌شودکـه A سمت راست عمود منصف BC یا روی آن قـرار ندارد. پس ایـن ناحیه را هم پردازمی‌زنیم.



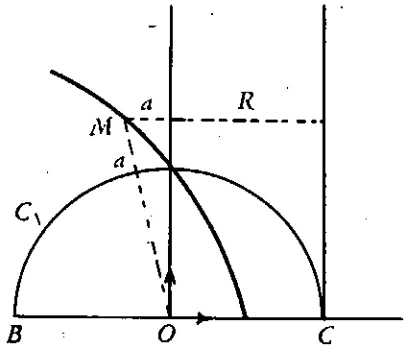
بنابراین مکان A داخل ناحیه‌ای است که پرداز نخورده است وملاحظه می‌شودکه‌ناحیهٔ محدود وبه‌نسبت کوچکی است. بدیهی است که اگرABC مثلثی نامشخص باشد هرمثلث دیگر که مستقیماً یامعکوساً با ABC متشابه (و درحالت‌خاص برابر)

باشد نیز نامشخص خواهد بود.

۲ـ تعیین نامشخص‌ترین مثلث

هرچند که هرنقطهٔ واقع درداخل ناحیهٔ به دست آمده به عنوان رأس A انتخاب شود، مثلث ABC نامشخص خواهد بود. اما اگر نقطه به یکی از مرزهای ناحیه نزدیک باشد می‌توان گفت که مثلث نظیر تقریباً مشخص است. بنابراین، برای آنکه مثلث هرچه بهتر نامشخص باشد، یعنی نامشخص‌تر باشد، نقطهٔ A باید از مرزهای ناحیه هرچه بیشتر فاصله داشته باشد. اما چون ناحیه محصور است، پس نامشخص‌ترین مثلث آنگاه است که رأس A از آن ازسه مرز ناحیه به یک فاصله باشد.

دایرهٔ به قطر BC را C_1، دایرهٔ به مرکز C و به شعاع CB را C_2 وعمودمنصف BC را Δ می‌نامیم ومنحنیهایی را به دست می‌آوریم که مجموعهٔ نقاطی باشند که از C_1 و Δ و از C_2 و Δ به یک فاصله باشند. نقطهٔ برخورد این دومنحنی از C_1 و C_2 و Δ به یک فاصله خواهد بود.

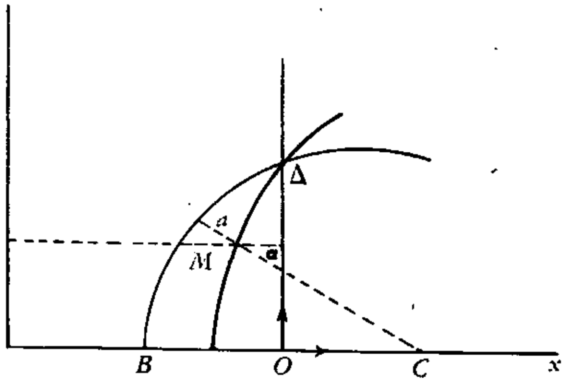


هرگاه O وسط BC و D خطی باشد که در C بر BC عمود است و R نصف طول BC یعنی شعاع دایرهٔ C_1 باشد، نقطهٔ M که از C_1 و Δ بـه‌یک فاصلهٔ a باشد دارای فاصله‌ای برابر با $R+a$ از O و D خواهد بود. پس مکان M سهمی است به کانون O و با خط هادی D. نسبت به دستگاه محورهای مختصات باجهتهایی که روی شکل نموده شده، معادلهٔ سهمی مزبور عبارت است از:

$$x=\frac{1}{2R}(R^2-y^2)$$

عمود D' برخط BC را رسم می‌کنیم که ازنقطهٔ O به فاصلهٔ $2R$ باشد. نقطهٔ M که از C_2 و Δ به یک فاصله باشد از D' و از C به فاصلهٔ $2R-a$ است. پس مکان M سهمی است به کانون C و با خط هادی D'. معادلهٔ این سهمی نسبت به دستگاه محورهای انتخابی عبارت است از:

$$x=\frac{1}{6R}(y^2-3R^2)$$



از حذف x بین معادله‌های دوسهمی ومحاسبهٔ y وپس از آن x نتیجه خواهد شد که نقطهٔ M کـه ازسه مرز ناحیهٔ موردبحث به یک فاصله باشد دارای مختصات زیراست:

$$M\left(x=-\frac{R}{4}\ ,\ y=\sqrt{\frac{3}{2}}R\right)$$

(می‌توانستیم مکان نقطهٔ M را بیابیم که از C_1 و C_2 به یک فاصله باشد که بیضیی می‌شد بـه کانونهای O و C و از آن راه نیز مختصات M را حساب کنیم.)

هرگاه M را رأس A از مثلث ABC بگیریم داریم:

$$B(-R,0)\ ،\ C(R,0)\ ،\ A\left(-\frac{R}{4}\ ,\ \frac{R\sqrt{6}}{2}\right)$$

ومی‌توانیم اندازه‌های زاویه‌های مثلث را حساب کنیم که نتیجه خواهد شد:

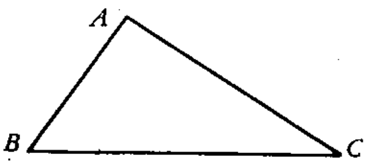
$$\hat{A}=Arctg\frac{16\sqrt{6}}{9},\ \hat{B}=Arctg\frac{2\sqrt{6}}{3},\ \hat{C}=Arctg\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

وبا مقدار تقریبی:

$$\hat{A}=77°4'\ ,\ \hat{B}=58°31',\hat{C}=44°26'$$

۳ـ نتیجه

از بین مثلثهای نامشخص که ضلع بزرگتر آنها BC باشد یکی نامشخص‌ترین است. اندازه‌های زاویه‌های این مثلث مقادیر بالا است واندازه‌های ضلعهای آن تقریباً باعددهای ۳۲، ۲۸ و ۲۳ متناسب می‌باشند. مثلث شکل زیر یکی از این‌گونه مثلثها است.



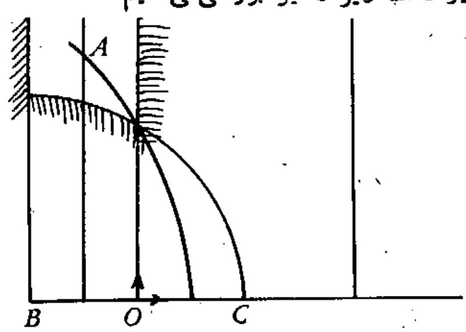
این نکته هم قابل توجه زیباپرستان است که اگر مستطیل زیبایی به‌ضلع BC را در نظر بگیریم، ضلع روبرو به BC از آن بسیار نزدیك به A خواهد بود. به عبارت دیگر نسبت ضلع BC ازمثلث بالا به‌ارتفاع AH از آن با دقت کمتر از ۱٪ برابر با عدد زرین است.

[هرگاه پاره‌خطی به دو پاره چنان بخش‌شود که پارهٔ بزرگتر واسطهٔ هندسی باشد بین پارهٔ کوچکتر وتمام پاره‌خط، گفته می‌شود که به‌نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده است. این پاره خط از طرف افلاطونیان به برش زرین ونسبت پارهٔ بزرگتر به‌تمام پاره خط که برابر $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ است عددزرین وبالاخره مستطیلی که نسبت بین دوضلعش برابر عدد مزبور باشد مستطیل زیبایی نام داشته است. بنابر باور آنان، از بین همهٔ مستطیلها مستطیل مزبور زیباترین است. مترجم]

بعدالتحریر

یکی ازهمکاران پس ازخواندن متن بالا این‌پرسش را به میان آورد که آیا به‌کنار نهادن فرض «BC بزرگترین ضلع مثلث است» درعمومیت حل‌مسئله خللی وارد نمی‌سازد؟

برای برطرف ساختن هرنوع شك درامان ماندن ازهر ایراد، دوحالت زیر رانیز بررسی‌می‌کنیم:



۱) BC کوچکترین ضلع مثلث باشد، یعنی داشته باشیم:

$$AC>AB>BC$$

در این حالت مکان A ناحیه‌ای خواهدبود محصور بین دوخط موازی که در B و O بر BC عمودند وازیك سو به دایرهٔ به‌مرکز B و به‌شعاع BC محدود است وازطرف دیگر نامحدودمی‌باشد. منحنیهایی که ازمرزهای این ناحیه به‌یك فاصله‌اند به‌معادله‌های $x=-\frac{R}{2}$ و $x=-\frac{1}{6R}(y^2-3R^2)$ هستندونقطهٔ برخورد آنها می‌شود:

$$A(x=-\frac{R}{2} , y=R\sqrt{6})$$

ونتیجه خواهد شد:

$$\hat{B}=Arctg2\sqrt{6} ، \hat{C}=Arctg\frac{2\sqrt{6}}{3} ، \hat{A}=Arctg\frac{8\sqrt{6}}{21}$$

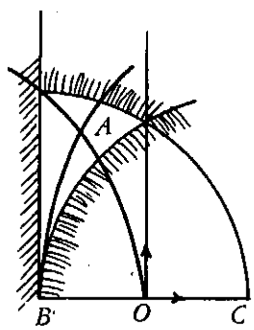
وبه تقریب برحسب درجه:

$$\hat{B}=78°\ 29' ، \hat{C}=58°\ 31' ، \hat{A}=43°$$

۲) BC ضلع میانی باشد، یعنی:

$$AB>BC>AB$$

دراین حالت مکان A ناحیه محدودی است که‌از یك‌سو به خط عمودبر BC در O واز دوسوی دیگر به دایره‌های به‌مرکزهای B و C وبه‌شعاع BC محصوراست. منحنیهایی‌که نقطه‌های به یك‌فاصله ازمرزهای این‌ناحیه رامعین می‌کنند بـه معادله‌های $x=-\frac{1}{4R}y^2$ و $x=\frac{1}{8R}(y^2-8R^2)$ می‌باشند و نقطهٔ برخورد آنها می‌شود:



$$A(x=-\frac{2}{3}R , y=\frac{2R\sqrt{6}}{3})$$

وبرای مثلث ABC خواهیم داشت:

$$\hat{B}=Arctg2\sqrt{6} ، \hat{C}=Arctg\frac{2\sqrt{6}}{5} ، \hat{A}=Arctg\frac{12\sqrt{6}}{109}$$

وبه تقریب برحسب درجه:

$$\hat{B}=78°\ 29' ، \hat{C}=44°\ 25' ، \hat{A}=57°\ 06'$$

اختلاف مشهودبین سه نتیجهٔ به‌دست آمده به عمومیت راه‌حل مسئله خدشه وارد می‌سازد واین پرسش را به میان می‌آورد که آیا چند مثلث نامشخص‌ترین وجود دارد؟

می‌توان گفت که: رابطهٔ ترتیبی که مثلثها را از نظر بیشتر یاکمتر نامشخص بودن رده‌بندی می‌کند برحسب نوع انتخاب BC تفاوت می‌کند؛ باسه نوع انتخاب BC سه رابطهٔ ترتیب معین می‌شود که شبکهٔ آنها یکسان‌نیست: هرکدام برای خودیك مثلث نامشخص‌ترین دارد.

آیا جالب نیست؟

درسهایی از هندسه (۲)

حسین غیور

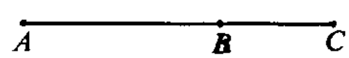
همنهشتی

۱- تعریف. هرگاه بین نقطه‌های دوشکل، تناظر یك‌به‌یك طوری برقرار باشد که هر دوپاره خط متناظر از نظر درازا برابر باشند، دوشکل همنهشت یکدیگر، ورابطهٔ بین آنها همنهشتی نامیده‌می‌شود. دوپاره خط، وقتی نظیر یکدیگرند که دوسر آنها نظیر یکدیگر باشد.

۲-قضیه. در همنهشتی نظیر سه نقطه ازیك خط راست، سه نقطهٔ واقع بریك خط راست است.

برهان. اگر سه نقطهٔ A،B،C بریك‌خط باشند، به‌موجب تعریف جمع دو پاره خط، درازای یکی ازسه پاره خط حاصل از سه نقطه مساوی مجموع دو پاره خط دیگر است.

$AB = AC + CB$ (در شکل زیر)



اگر A' و B' و C' نظیرهای A و B و C در همنهشتی مفروض باشد، به‌موجب تعریف همنهشتی این تساوی برقرار است:

$$A'B' = A'C' + C'B'$$

این تساوی نشان می‌دهد که سه نقطهٔ A' و B' و C' بریك خط واقع‌اند؛ در غیراین صورت در مثلث حاصل،

$$A'B' \angle A'C' + C'B'$$

نتیجه. در همنهشتی، نظیر خط راست، خط راست ونظیر دوخط موازی، دوخط موازی با همان فاصله است.

توضیح. اگرخط AB با CD موازی باشد دوخط $A'B'$ و $C'D'$، نظیرهای آنها، با هم موازی هستند؛ زیرا اگر دو خط اخیر درنقطهٔ S' متقاطع شوند و S نظیر S' فرض شود، باید S از طرفی با A و B و از طرف دیگر با C و D بریك خط باشد یعنی باید AB و CD در S متقاطع باشندکه خلاف فرض است. تساوی فاصلهٔ دوخط موازی نظیر، از تساوی دومثلث ABC و $A'B'C'$ (به‌حالت ض‌ض‌ض)نتیجه می‌شود؛ زیرا دراین دو مثلث متساوی ارتفاعهای نظیر دوراس C و C' باهم برابرند.

۳-قضیه. در همنهشتی اندازهٔ هندسی زاویه حفظ‌می‌شود.

برهان. روی دوضلع زاویهٔ A دونقطهٔ B و C را اختیار می‌کنیم. اگر A' و B' و C' نظیرهای A و B و C فرض شوند، از تساوی دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به‌حالت سه ضلع نتیجه می‌شود

$$\angle ABC = \angle B'A'C'$$

(علامت $\angle$ در کنار BAC علامت اندازهٔ هندسی آن زاویه است.) اگر زاویه‌ها جهت‌دار فرض شوند، ازتساوی اخیر تساوی ذیل نتیجه می‌شود:

$$\angle BAC = \pm \angle B'A'C'$$

نتیجه. اگر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ دوبردار و $\overrightarrow{A'B'}$ و $\overrightarrow{C'D'}$ نظیرهای آنها باشد

$$\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = \pm\angle(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'})$$

توضیح. از رأس A بردار $\overrightarrow{AN}$ را مساوی $\overrightarrow{CD}$ رسم می‌کنیم. باتوجه به نتیجه قضیهٔ (۲)، حکم ثابت می‌شود.

یادآوری. تکرار این مطالب برای‌درك دقیق قضیهٔ‌اصلی که‌شرح آن می‌آید، ضرورت دارد.

الف ـ متساوی بودن دوزاویهٔ جهت‌دار یعنی اختلاف

اندازهٔ آنها مساوی $2k\pi$ باشد،

$$\angle(\vec{U},\vec{V})=\angle(\vec{U'},\vec{V'}) \Longleftrightarrow \angle(\vec{U},\vec{V})=\angle(\vec{U'},\vec{V'})+2k\pi$$

ب_ اندازهٔ اصلی زاویه $\angle(\vec{U},\vec{V})$ اندازه‌ای از این زاویه در فاصلهٔ $(0,\pi)$ یا $(-\pi,0)$ است و آن را با علامت $\widehat{\angle(\vec{U},\vec{V})}$ نشان می‌دهیم.

ج_ هرگاه اندازهٔ جبری دو زاویه باهم مساوی باشد، اندازهٔ اصلی آن دو زاویه با هم مساوی است و به‌عکس،

$$\angle(\vec{U},\vec{V})=\angle(\vec{U'},\vec{V'}) \Longleftrightarrow \angle(\vec{U},\vec{V})=\angle(\vec{U'},\vec{V'})$$

۴_ قضیهٔ اصلی. اگر درهمنهشتی اندازهٔ یک زاویه حفظ شود، اندازهٔ اصلی همهٔ زاویه‌ها حفظ می‌شود.

برهان. فرض می‌کنیم

$$\angle(\vec{u},\vec{v})=\angle(\vec{u'},\vec{v'}) \qquad \angle(\vec{u},\vec{v})\neq k\pi$$

می‌خواهیم ثابت کنیم اندازهٔ اصلی هر زاویهٔ دیگر $\angle(\vec{a},\vec{b})\neq k\pi$ تغییر نمی‌کند؛ یعنی:

$$\angle(a,b)=\angle(\vec{a'},\vec{b'})$$

برای اثبات قضیه، ابتدا ثابت می‌کنیم اندازهٔ اصلی زاویه‌هایی که بردار $\vec{a}$ یا $\vec{b}$ با هریک از بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ می‌سازد باهم برابراست یعنی:

$$\angle(\vec{u},\vec{a})=\angle(\vec{u'},\vec{a'})$$
$$\angle(\vec{a},\vec{v})=\angle(\vec{a'},\vec{v'})$$

به‌موجب قضیهٔ شال این دو رابطه را می‌نویسیم:

$$\angle(\vec{u},\vec{v})=\angle(\vec{u},\vec{a})+\angle(\vec{a},\vec{v})$$
$$\angle(\vec{u'},\vec{v'})=\angle(\vec{u'},\vec{a'})+\angle(\vec{a'},\vec{v'})$$

عطف به‌نتیجه ازقضیهٔ ۳

$$\angle(\vec{u'},\vec{a'})=\pm\angle(\vec{u},\vec{a}) \qquad (1)$$

$$\angle(\vec{a'},\vec{v'})=\pm\angle(\vec{a},\vec{v}) \qquad (2)$$

از چهار رابطهٔ اخیر و فرض قضیه رابطهٔ ذیل حاصل می‌شود:

$$\angle(\vec{u},\vec{a})+\angle(\vec{a},\vec{v})=\pm(\vec{u},\vec{a})\pm(\vec{a},\vec{v}) \qquad (3)$$

اگر یکی از دوزاویهٔ $\angle(\vec{u},\vec{a})$, $\angle(\vec{a},\vec{v})$ یا هر دو تغییر علامت بدهند ازرابطهٔ (۳) سه رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\angle(\vec{u},\vec{a})+\angle(\vec{a},\vec{v})=-\angle(\vec{u},\vec{a})+\angle(\vec{a},\vec{v})\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\angle(\vec{v},\vec{a})=k\pi$$

$$\angle(\vec{u},\vec{a})+\angle(\vec{a},\vec{v})=\angle(\vec{u},\vec{a})-\angle(\vec{a},\vec{v})\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\angle(\vec{a};\vec{v})=k\pi$$

$$\angle(\vec{u},\vec{a})+\angle(\vec{a},\vec{v})=-\angle(\vec{v},\vec{a})-\angle(\vec{a},\vec{v})\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\angle(\vec{u},\vec{v})=k\pi$$

از تساویهای $\angle(\vec{u},\vec{a})=k\pi$, $\angle(\vec{a},\vec{v})=k\pi$ به‌ترتیب دوتساوی ذیل حاصل می‌شود

$$\angle(\vec{a},\vec{v})=-\angle(\vec{a},\vec{v}),\quad \angle(\vec{u},\vec{a})=-\angle(\vec{u},\vec{a})$$

تساوی $\angle(\vec{u},\vec{v})=k\pi$ خلاف فرض قضیه است.

بنابرآنچه گفته شد درتمام حالتها، رابطه‌های (۱)و(۲) به‌صورت ذیل درمی‌آیند:

$$\angle(\vec{u'},\vec{a'})=\angle(\vec{u},\vec{a})$$
$$\angle(\vec{a'},\vec{v'})=\angle(\vec{a},\vec{v})$$

واگر به‌جای $\vec{a}$ بردار $\vec{b}$ را قراردهیم، داریم:

$$\angle(\vec{u'},\vec{b'})=\angle(\vec{u},\vec{b})$$
$$\angle(\vec{b'},\vec{v'})=\angle(\vec{b},\vec{v})$$

به‌موجب قضیهٔ شال، این دورابطه را می‌نویسیم:

$$\angle(a,b)=\angle(\vec{a},\vec{v})+\angle(\vec{u},\vec{b})$$
$$\angle(\vec{a'},\vec{b'})=\angle(\vec{a'},\vec{v'})+\angle(\vec{u'},\vec{b'})$$

چون‌طرف‌دوم‌دوتساوی‌اخیرجزء به‌جزء باهم مساوی‌اند، طرف اول آنها باهم‌مساوی است:

$$\angle(\vec{a},\vec{b})=\angle(\vec{a'},\vec{b'})$$

نتیجهٔ ۱_ اگر درهمنهشتی اندازهٔ اصلی یک زاویه‌تغییر علامت دهد، اندازهٔ اصلی هر زاویه تغییرعلامت می‌دهد.

نتیجهٔ ۲_ دوشکل همنهشت وجودنداردکه درآن اندازهٔ

اصلی بعضی اززاویه‌ها حفظ شود، وبعضی تغییرعلامت دهد.

۵- تعریف - همنهشتی که در آن اندازهٔ اصلی زاویه‌ها حفظ شود، همنهشتی مثبت و اگر اندازهٔ اصلی زاویه تغییر علامت دهد، همنهشتی منفی نامیده می‌شود.

نتیجهٔ ۳- درهمنهشتی مثبت، جهت چند ضلعی محدب حفظ می‌شود ودرهمنهشتی منفی تغییر می‌کند.

۵- قضیه.

الف ـ انتقال و دوران شکل مفروض را به‌شکلی تبدیل می‌کندکه باآن رابطهٔ هم‌نهشتی مثبت دارد.

ب ـ تقارن محوری وترکیبی ازتقارن محوری و انتقال یا دوران شکل مفروض‌را به‌شکلی‌تبدیل می‌کندکه باآن‌رابطهٔ همنهشتی منفی دارد.

برهان. برای تبدیلهایی‌که در صورت قضیه آمده، باید سه‌حکم ذیل‌را ثابت‌کنیم.

Iـ خط راست به‌خط راست تبدیل می‌شود.

IIـ اندازهٔ پاره خطها تغییر نمی‌کند.

IIIـ اندازهٔ اصلی زاویه‌ها در انتقال ودوران حفظ می‌شود، ودردوتبدیل دیگر تغییرعلامت می‌دهد.

این سه‌حکم را برای تبدیلهای نامبرده درقضیه‌به‌ترتیب ثابت می‌کنیم.

انتقال ـ I) انتقال یافتهٔ خط راست، خطراست است.

اگر درانتقال $T_{\vec{v}}$ انتقال یافتهٔ دو نقطهٔ A و B دونقطهٔ A' و B' باشند. از دو تساوی $\overrightarrow{AA'}=\vec{v}$, $\overrightarrow{BB'}=\vec{v}$ تساوی ذیل حاصل می‌شود.

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'} \Rightarrow$$
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{A'B'} \Rightarrow$$
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$$

اگر M نقطهٔ دلخواهی ازخط AB باشد به‌همین‌ترتیب ثابت می‌شود

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{A'M'}$$

چون A وB وM بریك خط راست واقع‌اند

$$\overrightarrow{AM}=K\overrightarrow{AB} \Rightarrow K\neq ۰,۱$$

$$\overrightarrow{A'M'}=K\overrightarrow{A'B'}$$

این تساوی نشان می‌دهدکه M' درراستای $A'B'$ است.

II) درانتقال، اندازهٔ پاره‌خط حفظ می‌شود:

رابطهٔ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$ نتیجه می‌دهد $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{A'B'}|$

III) درانتقال اندازهٔ اصلی زاویه حفظ می‌شود.

اگر A رأس‌زاویهٔ مفروض و B وC دو نقطه رأس‌ضلعهای آن باشد و A'،B'،C' انتقال‌یافته‌های A،B،C فرض شود ازدوتساوی $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$ و $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$:

$$\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\angle(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})$$
$$\Rightarrow \angle BAC=\angle B'A'C'$$

دوران - I) دوران یافتهٔ خط راست، خط راست است.

A ، B دونقطه از خط d و A' ، B' دوران یافتهٔ آنها در $R_{o,\alpha}$ است. ازدوتساوی $\angle AOA'=\alpha$, $\angle BOB'=\alpha$ نتیجه می‌گیریم

$$\angle AOA'=\angle BOB' \Rightarrow$$

$$\angle AOB+\angle BOA'=\angle BOA'+\angle A'OB' \Rightarrow$$
$$\angle AOB=\angle A'OB'$$
$$OA'=OA\ ,\ OB'=OB$$

ازسه تساوی اخیر نتیجه می‌شود، دومثلث OAB و$OA'B'$ به حالت (ض ز ض) باهم مساوی‌اند وچون دراین دو مثلث‌اندازهٔ اصلی $\angle AOB$ حفظ شده به موجب قضیهٔ اصلی (۴) دو مثلث با هم، همنهشتی مثبت دارند؛ یعنی اندازهٔ اصلی سایر زاویه‌ها نیز حفظ می‌شود:

$$\angle OAB=\angle OA'B'.$$

اگر M نقطه‌ای ازخط AB باشد به شرحی که گفته‌شد

$$\angle OAM=\angle OA'B'.$$

چون M روی خط AB است:

$$\angle OAM=\angle OAB+k\pi \Rightarrow$$
$$\angle OA'M'=\angle OA'B'+k\pi$$

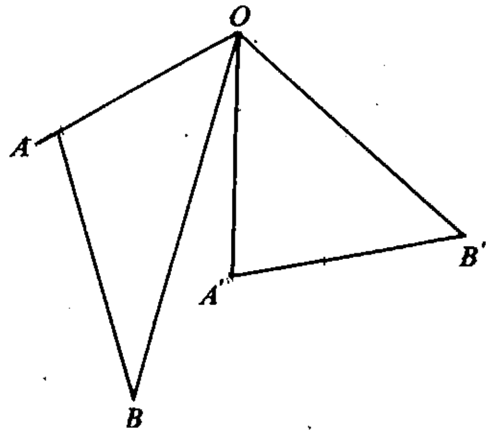
این تساوی نشان می‌دهدکه M متعلق به‌خط $A'B'$ است.

III) برای اثبات اینکه دردوران زاویه، حفظ‌می‌شود؛ ابتدا حکم ذیل را ثابت می‌کنیم.

حکم. هربردار با دوران‌یافتهٔ خودزاویه‌ای مساوی با زاویه دوران می‌سازد.

اگر $\overrightarrow{AB}$ بردار مفروض و $\overrightarrow{A'B'}$ دوران‌یافتهٔ آن‌در $R_{o,\alpha}$ باشد،

چون دومثلث OAB، $OA'B'$ با هم همنهشتی مثبت دارند:



$$\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}) = \angle(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'O})$$

$$\angle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}) = \angle(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'}) = \alpha$$

از قضیه شال

$$\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}) = \angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}) + \angle(\overrightarrow{AO'},\overrightarrow{AO}) + \angle(\overrightarrow{A'O},\overrightarrow{A'O'})$$

از سه‌تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم:

$$\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}) = \angle(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AO'}) = \angle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}) = \alpha$$

اگر A رأس زاویه‌ای درصفحه و B و C دو نقطه روی دوضلع زاویه باشد و A' و B' و C' دوران یافته‌های آنها فرض شود، باید ثابت‌کنیم $\angle BAC = \angle B'A'C'$

به‌موجب قضیهٔ شال

$$\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}) + \angle(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}) + \angle(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{AC})$$

عطف به‌حکم قبل

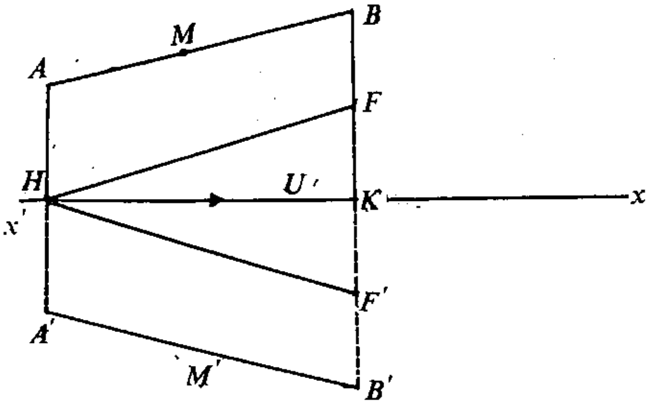
$$\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}) = \alpha \text{ و } \angle(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{AC}) = -\alpha$$

$$\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \angle(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})$$

یا $\angle BAC = \angle B'A'C'$

اقارن محوری I) قرینهٔ محوری خط راست، خط راست‌است

درشکل بعد $A'B'$ قرینهٔ AB نسبت به‌محور $x'x$ با برداریکه $\vec{U}$ است. از H دو خط HF و HF' را موازی AB و $A'B'$



رسم می‌کنیم. از تساوی دو مثلث HKF و HKF' به‌حالت (ض‌زض) نتیجه می‌شود که

$$HF = HF' \text{ و } \angle(\vec{U},\overrightarrow{HF}) = -\angle(\vec{U},\overrightarrow{HF'})$$

و از این دوتساوی ذیل حاصل می‌شود

$$AB = A'B' \text{ و } \angle(\vec{U},\overrightarrow{AB}) = -\angle(\vec{U},\overrightarrow{A'B'})$$

به‌عکس می‌توان ثابت‌کرد که اگر A' قرینهٔ A و $A'B' = AB$ و $\angle(\vec{U},\overrightarrow{AB}) = -\angle(\vec{U},\overrightarrow{A'B'})$، آنگاه B' قرینهٔ B است.

برای اثبات حکم I اگر M نقطه‌ای از AB فرض‌شود باید ثابت‌کنیم نقطهٔ M' قرینهٔ محوری‌آن روی خط $A'B'$ است

$$\angle(\vec{U},\overrightarrow{AM}) = -\angle(\vec{U},\overrightarrow{A'M'})$$

چون M نقطه‌ای ازخط AB است

$$\angle(\vec{U},\overrightarrow{AM}) = \angle(\vec{U},\overrightarrow{AB}) + k\pi$$

ازسه تساوی اخیر این تساوی حاصل می‌شود

$$\angle(\vec{U},\overrightarrow{A'M'}) = \angle(\vec{U},\overrightarrow{A'B'}) + k\pi$$

این‌تساوی نشان می‌دهدکه M' نقطه‌ای از خط $A'B'$ است و حکم I ثابت است. چون $A'B'$ مساوی AB است‌حکم II نیز ثابت شده است

برای اثبات حکم III، زاویهٔ A را در نظر می‌گیریم‌و دو نقطهٔ B وC را روی اضلاع آن اختیار می‌کنیم. اگر A' و B' وC' قرینه‌های محوری A و B وC باشند، باید ثابت‌کنیم

$$\angle BAC = -\angle A'B'C'$$

به موجب قضیهٔ شال

$$\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{U})+\angle(\overrightarrow{U},\overrightarrow{AC})$$
$$\angle(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})=\angle(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{U})+\angle(\overrightarrow{U},\overrightarrow{A'C'})$$

دردو تساوی اخیر بشرحی که گذشت، جمله‌های طرف دوم از یک تساوی قرینهٔ جمله‌های نظیر از طرف دوم است بنابراین:

$$\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-\angle(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})$$

یا

$$\angle BAC=-\angle B'A'C'$$

ترکیبی از تقارن محوری با انتقال یا دوران.

چون در تقارن محوری و انتقال یا دوران، خط راست به خط راست تبدیل می‌شود، در ترکیب آنها نیز چنین است. همین طور دربارهٔ اندازهٔ پاره خطها.

درحالت III، اندازهٔ اصلی زاویه در تقارن محوری تغییر علامت می‌دهد ولی درانتقال یا تقارن تغییر نمی‌کند. پس در ترکیبی از تقارن محوری و انتقال یا دوران اندازهٔ اصلی زاویه تغییر علامت می‌دهد.

۶ـ قضیه. هرگاه نظیرهای دونقطه از شکل مفروض دردو همنهشتی که هردومثبت یا هردو منفی‌اند، نظیربه‌نظیر برهم‌منطبق باشند بین دو همنهشتی نسبت همانی برقراراست. یعنی همهٔ نقطه‌های نظیر برهم منطبق می‌باشند.

برهان. فرض می‌کنیم A و B دو نقطه ازشکل مفروض و A' و B' نظیرهای این دونقطه دردو همنهشتی باشد. اگر M نقطهٔ دلخواهی از شکل مفروض و M' و M'' نظیرهای آن در دو همنهشتی باشد، درحالتی که دو همنهشتی مثبت است

$$\angle BAM=\pm\angle B'A'M' \qquad (1)$$

$$\angle BAM=\pm\angle B'A'M'' \qquad (2)$$

ازاین دوتساوی، تساوی (۳) حاصل می‌شود:

$$\angle B'A'M'=\angle B'A'M'' \qquad (3)$$

درحالتی که دو همنهشتی منفی باشد، درتساویهای (۱) و (۲) درطرف دوم قبل ازعلامت زاویه (−) می گذاریم و تساوی (۳) به‌قوت‌خود باقی‌می‌ماند. تساوی (۳) نشان‌می‌دهد که M'' روی ضلع $A'M'$ از $\angle B'A'M$ واقع است. و چون دو مثلث $A'B'M'$ و $A'B'M''$ باهم مساوی‌اند $A'M'$ مساوی $A'M''$ است و M'' بر M' منطبق می‌شود و قضیه ثابت است.

۷ـ قضیه عکس. در رابطهٔ همنهشتی بین دوشکل وضع دونقطه ونظیرهای آنها مشخص است.

الف ـ اگر رابطهٔ همنهشتی مثبت باشد این همنهشتی معادل انتقال یا دوران است.

ب ـ اگر رابطه همنهشتی منفی باشد. همنهشتی معادل تقارن محوری یاترکیبی ازتقارن محوری وانتقال است.

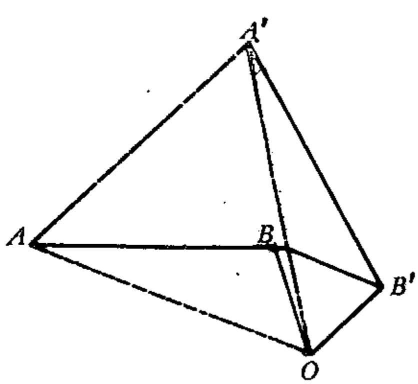
برهان. درحالت الف درحالتی که $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$. این تساوی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B}=\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{BB'}\Longrightarrow$$
$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{V}$$

انتقال $T_{\vec{V}}$، A و B را به موجب این تساوی به A' و B' تبدیل می‌کند که بنابه قضیهٔ ۵ انتقال $T_{\vec{V}}$ شکل را به شکلی تبدیل می‌کند که با آن همنهشتی مثبت دارد.

ازطرف دیگر A' و B' نظیرهای A و B در همنهشتی مثبت فرض قضیه‌اند، پس به موجب قضیهٔ (۶) همنهشتی فرض قضیه همان انتقال $T_{\vec{V}}$ است.

درحالت کلی که $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{A'B'}$، A را به A' وصل می‌کنیم ونقطهٔ O را طوری اختیارمی‌کنیم که



و $OA=OA'$ و $\angle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'})=\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'})$.

دوران $R_{o,\alpha}$ را که در آن $\alpha=\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B'A'})$، درنظر می‌گیریم و به شرح زیر ثابت می‌کنیم که در ایـن دوران B' نظیر B است. به‌موجب رابطهٔ شال

$$\angle OAB=\angle(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})=\angle(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{A'O})+$$
$$+\angle(\overrightarrow{A'O},\overrightarrow{A'B'})+\angle(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{AB})$$

$$\angle(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{A'O})=\angle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'})=\alpha$$

$$\angle(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{AB})=-\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'})=-\alpha$$

ازاین سه تساوی نتیجه می‌شود $\angle OBA=\angle OA'B'$

$AB=A'B'$ به موجب فرض و $OA=OA'$، بنابرعملی که انجام داده‌ایم می‌باشد.

ازسه‌تساوی‌اخیرنتیجه‌می‌شود که‌دومثلث OAB و $OA'B'$ به‌حالت (ض‌زض) بـا هم برابرنـد و چـون اندازهٔ اصلـی $\angle OAB$ تغییرنکرده‌است دومثلث بـاهم رابطهٔ همنهشتی مثبت دارند و اندازهٔ اصلی دو زاویهٔ دیگرنیزتغییرنمی‌کند

$$\angle AOB=\angle A'OB' \Longrightarrow \angle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=$$
$$=\angle(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'})\Longrightarrow\angle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'})+$$
$$+\angle(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB})=\angle(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB})+\angle(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'})$$

$$\angle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'})=\angle(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'})$$

یا

$$\angle(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'})=\alpha$$

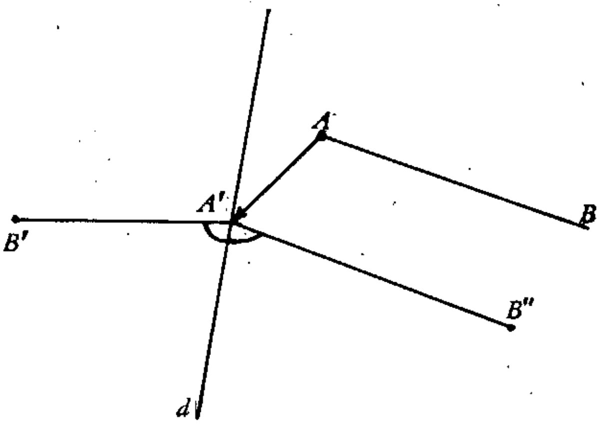
$OB=OB'$ (نتیجه‌ازتساوی‌دومثلث OAB و $OA'B'$)

از دو تساوی اخیرنتیجه مـی‌شود که B' دوران یـافتهٔ B در $R_{o,\alpha}$ است.

دوران $R_{o,\alpha}$ دونقطهٔ Aو B را به A' و B' تبدیل می‌کند. این دوران بـه موجب قضیهٔ ۵، شکل را به‌شکلی تبدیـل می‌کند کـه با آن رابطهٔ همنهشتی مثبت دارد. از طرف دیگر A' و B' نظیر A و B در یك همنهشتی مثبت است. پس بنابر قضیهٔ ۶ این همنهشتی همان دوران $R_{o,\alpha}$ است.

تبصره- برای تعیین مرکـز دوران بایـد عمودمنصفهای AA' و BB' را رسم‌کرده ونقطهٔ تقاطع آنها را تعیین‌کرد.

برهان (ب)- در این حالت نیز فرض می‌کنیم A و B دونقطهٔ مفروض و A' و B' نظیرهای آنـها دریك همنهشتـی منفی باشد. عمودمنصف BB' را رسم می‌کنیم (اگر B و B' بر هم منطبق باشد عمود منصف AA' را رسم می‌کنیم) اگرایـن خط منطبق برعمودمنصف AA' باشد، تقارنی که عمود منصف مشترك BB' و AA' محورآن است تبدیلی است‌که A را به A' و B را به B' تبدیل‌می‌کند واین تقارن عطف به‌قضیه‌های ۵ و ۶ معادل همنهشتی مفروض است.



درحالت‌کلی‌که عمودمنصف BB' منطبق برعمود منصف AA' نیست، شکل را به‌اندازه بردار $\overrightarrow{AA'}$ انتقال می‌دهیم تـا انتقال $T_{\overrightarrow{AA'}}$ دونقطه A و B را به A' و B'' تبدیل‌کند، آنگاه انتقالی‌که محورآن نیمساز $\angle(\overrightarrow{A'B'}$ و $\overrightarrow{A'B''})$ است محورتقارنی می‌باشدکه B'' را به B' و A' را به A' تبدیل می‌کند. $s_dT_{AA'}$ ترکیب تقارن و انتقالی است‌که A را به A' و B را به‌B' بدل می‌کندوایـن ترکیب عطف‌به قضیه‌های ۵و۶ معادل همنهشتی مفروض‌است.

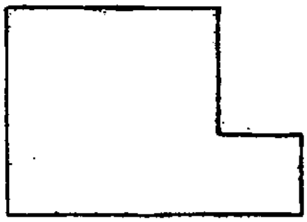
استدلالهای معمایی هندسی

نوشتهٔ
«مایکل ستیو بن»
در مجلهٔ
«دیسکاور»، ژانویه ۱۹۸۶

ترجمهٔ حسن نصیرنیا

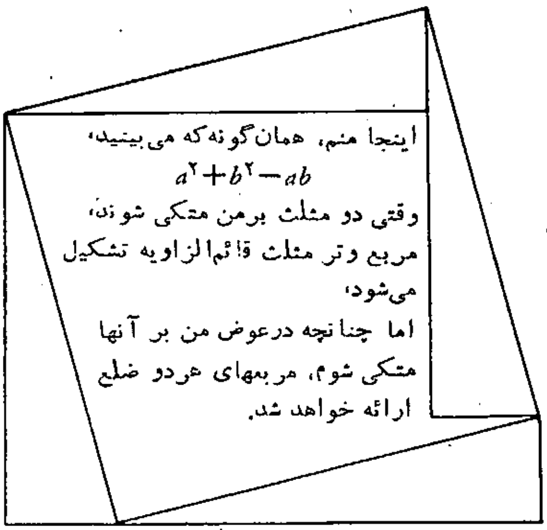
در سال ۱۸۵۵ ریاضیدان انگلیسی[2] اوگاستس دمورگن[1] طی نامه‌ای به‌دوستش[3] ویلیام راون همیلتون[4] ریاضیدان وستاره شناس ایرلندی، چندین معمای هندسی مطرح کرد و وی را به حل آنها فراخواند. تا آنجا که اطلاع داریم، همیلتون هرگز پاسخی بدانها نداد ومعماهای طرح شده نیز تا کنون* درهیچ کجا انتشار نیافته است. به‌اعتقاد من این معماهای به‌جا مانده ازسدهٔ پیشین، گنجینهٔ نفیس از یاد رفته‌ای هستند. این معماها را، که با همکاری یکی از خوانندگان مجله از اهالی ایالت ویرجینیا تهیه و تنظیم شده‌اند، اینك بـرای نخستین بار ارائه می‌کنیم. چنانچه موفق به‌حل آنها نشدید، پاسخها را درصفحه ملاحظه خواهید کرد.

۱ــ در اینجا عین عبارات دمورگن را که حاوی معمای طرح شده برای همیلتون است، می‌آوریم : «دو مربع مفروض، مطابق شکل، در دست داریم . می‌خواهیم با بریدن شکل و تقسیم آن به سه قسمت و تنها با انتقال آنها و بدون دوران تشکیل یك مربع ثالث بدهیم». با اینکه همیلتون ریاضیدانی نابغه بود، دمورگن تصور نمی‌کرد که وی قادر به‌یافتن حل آن باشد؛ از این‌رو برای راهنمایی دوست خود وکمك به‌حل‌معما، سه معمای کمکی برای او طرح کرد.



چنانچه‌شما راه حل‌معمای اصلی‌را بیابید، عملی‌برخلاف انتظار دمورگن صورت داده‌اید. شکل را طوری ببریدکه به سه قسمت تقسیم شود و باتغییرمکان آنها یك مربع جدید به‌دست آورید. اما اگرموفق به‌انجام‌آن نشدید، نام خود را درکاروان شتابنده به‌مقصود پروفسور دمورگن بنویسید و همگام بااو منزل به‌منزل طی طریق کنید:

۲ــ دمورگن پس از ارائه معمای اصلی، چنین ادامه‌داد: «روند [حل معما] در شکل زیر [و درقطعه شعر پیوست] نموده شده است.» دو مصرع نخست شعر به فضای سفید میان چهار مثلث‌قائم‌الزاویه همنهشت‌اشاره دارند. هرمثلث دارای‌اضلاعی به‌طولهای a و b است و درازای وتر هریك ازمثلثها c است. همان‌گونه‌که دمورگن می‌خواهد، ثابت‌کنیدکه سطح فضای مزبور در واقع برابر a^2+b^2-ab است. برای اثبات آن کافی‌است‌که‌قضیهٔ فیثاغورث $(a^2+b^2=c^2)$ را به‌یادآورید.



۳ــ پس از حل معمای پیشین. حل این یکی باید آسان باشد: مطلوب است تفسیر هندسی دو مصرع بعد:

وقتی دو مثلث برمن (فضای سفید) متکی شوند،

---

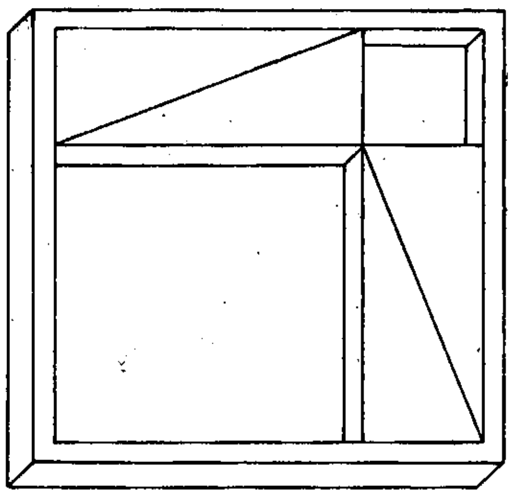
* ژانویه ۱۹۸۶

مربع وتر مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌شود*؛

۴ـ سپس دو مصرع آخر را تشریح کنید:

«اما چنانچه درعوض (برخلاف مورد قبل) من بر آنها
(دو مثلث) متکی شوم،
(مفهوم مجموع) مربعهای هردو ضلع (مثلث) ارائه
خواهد شد.»

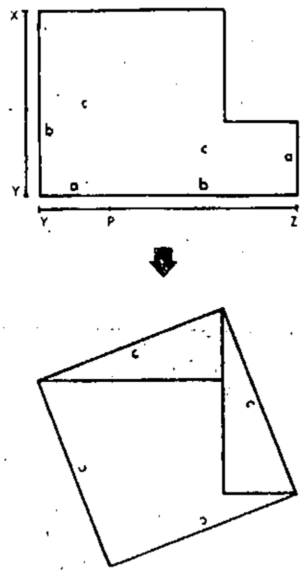
۵ـ راه حل تقسیم در مسئلهٔ اصلی می‌بایست تا به حال روشن شده باشد. آن گونه که «دمورگن» نتیجه گرفت است: «از این مسئله می‌توان شاید ساده‌ترین نمایش هندسی قضیهٔ فیثاغورث را استنتاج کرد.» با این همه خواه شما باور کنید، خواه باور نکنید، دراینجا دو دلیل ساده‌تر برای اثبات قضیهٔ فیثاغورث وجود دارد که از چشم «دمورگن» پنهان‌مانده‌است. با فرض اینکه چهار مثلث قائم‌الزاویهٔ هم‌ارز در درون یك خانهٔ چهارگوشه‌داشته باشیم، از شما می‌خواهیم یك یا دو آرایش جدید در آن چنان به‌وجود آورید (با انجام جا بجائیهایی) که شکل به‌دست آمده نمایانگر برابری مساحت c^2 با مجموع مساحتهای a^2 و b^2 باشد. اگر در انجام این کار موفق شوید، بر «دمورگن» پیشی گرفته‌اید.



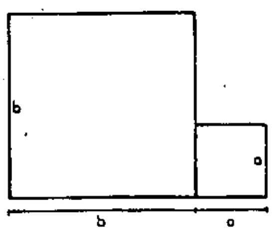
پاسخها

۱ـ نقطهٔ P را برروی شکل چنان انتخاب کنید، که پاره خط PX مساوی پاره خط XY گردد. آنگاه با ترسیم خطهایی، نقطهٔ P را به دو رأس شکل وصل کنید. حال دو مثلث تشکیل شده در پایین را ببرید و آنها را به‌محلهای جدیدشان در بالای شکل بلغزانید. با این‌کار نه تنها به‌حل معما دست یافته‌اید، بلکه قضیهٔ فیثاغورث ($a^2+b^2=c^2$) را نیز اثبات کرده‌اید.

۲ـ توجه داشته باشید که مربع بزرگ (شکل زیر) مساحتی معادل c^2 دارد، که بنا بر قضیهٔ فیثاغورث برابر است با



a^2+b^2. کل مساحت دو مثلث درون مربع $2\left(\frac{1}{2}ab\right)$ است که می‌شود ab. از این رو مساحت فضای سفید خالی می‌شود c^2 منهای مساحت مثلثها، یا $(a^2+b^2)-(ab)$.



۳ـ فضای سفید خالی و دو مثلث بالای شکل روی هم رفته تشکیل یك مربع به‌ضلع c را می‌دهند، که این ضلع طول وتر هریك از مثلثهاست.

۴ـ فضای سفید خالی و دو مثلث زیرین دو مربع می‌سازند، که اضلاع یکی از آنها با b و اضلاع دیگری با a علامت گذاری شده‌اند.

۵ـ

برهان شمارهٔ ۱

با تغییر مکان دادن قطعات درون خانهٔ بزرگ می‌توانید

بقیه در صفحه ۴۷

* البته حفظ سیاق این‌قسمت ازمتن اصلی‌درترجمه، وبرگرداندن ابیات شیوای دمورگن به‌فارسی‌منظوم‌کاریك مترجم شاعر و خارج ازتوانایی‌مترجم‌حاضراست. باپوزش‌ازخوانندگان عزیز که لطافت ادبی‌مورد نظر استاد صاحب قریحه سلف ما، ناگزیر به‌فارسی راه نیافت (مترجم).

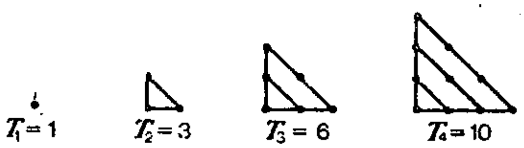
تمرین روی اعداد چند ضلعی

مترجم : اکبرفرهودی‌نژاد

ریاضیات پر از طرح والگو است وتوانایی تشخیص الگوها درریاضیات می‌تواندشخص‌را به‌طورشهودی به‌روابط وفرمولهایی راهبرشودکه شاید درمطالعات ریاضی آینده آنها مفیدباشد. خواه این‌روابط کشف شده مفید باشند وخواه‌نباشند، روند حل مسئله که برای رسیدن به‌این اکتشافات مورد استفاده قرار گرفته، مفید واقع می‌شود. این روند حل مسئله متضمن اندیشه ومنطق لازم برای حل بسیاری ازانواع مسائل ریاضی است. یك دسته‌ازمسائلی‌که متضمن الگوهای ریاضی است با درنظر گرفتن اعداد مصور، یا چند ضلعی به‌دست می‌آیند. الگوهای ناشی ازاین اعداد ازاهمیت خاصی برخوردارند، زیرا می‌توان ازآنها برای تعمیم هرنوع عدد چند ضلعی ونیز دنبالهٔ جمله‌های اول، جمله‌های دوم، وغیره وسرانجام برای پیداکردن جمله عمومی Kمین عدد n ضلعی استفاده‌کرد.

یك‌عددچندضلعی، عددی است‌که ازشمارش تعدادنقاطی به‌دست می‌آید که به‌فاصله‌های مساوی‌ازهم درامتداد اضلاع یك‌چندضلعی قراردارند واضلاع این چندضلعی به‌ترتیب شامل ۱،۲،۳،......n نقطه می‌باشند و نقاط درونی چند ضلعیهای قبلی به‌اضلاع ۱،۲،......، $n-1$ به‌آنها اضافه شده باشد.

در این مقاله روشی ارائه می‌شود تا دانش‌آموزان به وسیله‌آن فرمولی‌کلی برای nمین عدد چندضلعی راکشف‌کنند. روش‌معمولی به‌دست‌آوردن اعداد مصور، نقطه شروع‌کاراست. مثلاً، مثلثهای‌متوالی‌که اعداد مثلثی‌را می‌دهند، همراه با اعداد نظیر $T_1=1$، $T_2=3$، $T_3=6$، $T_4=10$ درشکل ۱ نشان داده شده‌اند.



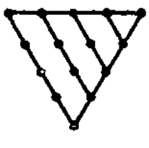
اعداد مثلثی

شکل ۱

ممکن است‌کسی حدس بزند که عدد مثلثی بعدی ۱۵ است، زیرا تفاضلهای بین‌اولین۴عددبه‌دست‌آمده‌عبارت‌انداز:

$T_2-T_1=2$ و $T_3-T_2=3$ و $T_4-T_3=4$

بنابراین $T_5-T_4=5$. بااضافه‌کردن یك نقطه‌به‌هریك ازدوضلع آخرین مثلث وتکمیل‌آن مثلث‌شکل۲ به‌دست‌می‌آید که ۱۵ نقطه دارد و صحت این حدس را که $T_5-T_4=5$، تأیید می‌کند. وبنابراین $T_5=15$. به طریق مشابه $T_6=21$ و $T_7=28$ والی‌آخر.

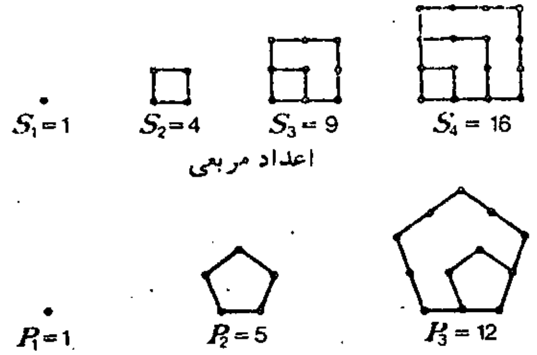


شکل ۲

مربعهایی‌که اعداد مربعی را می‌دهند درشکل ۳ نشان داده شده‌اند، اعداد مربعی نظیرعبارت‌انداز $S_1=1$، $S_2=4$، $S_3=9$، $S_4=16$ وبه‌همین‌ترتیب الی‌آخر. بازمی‌توان حدس‌زدکه $S_5=25$، $S_6=36$ وغیره‌خواهندبود، وصحت

این مقادیررا می‌توان با افزودن یك نقطه به‌هریك از دوطرف مربع وتکمیل آن تحقیق کرد.

پنج ضلعیهایی که اعداد مخمسی را می‌دهند، درشکل ۳ نشان داده شده‌اند؛ اعداد مخمسی نظیربه‌ترتیب عبارت‌اند از: $P_۱=۱$ ، $P_۲=۵$ ، $P_۳=۱۲$ ، $P_۴=۲۲$.



شکل ۳

ازطریق امتحان آشکار می‌شود که $P_۲-P_۱=۴$ ، $P_۳-P_۲=۷$ ، $P_۴-P_۳=۱۰$ درنتیجه، می‌توان حدس‌زد که $P_۵-P_۴=۱۳$ ، $P_۶-P_۵=۱۶$، بنابراین $P_۵=۱۳+P_۴=۳۵$ ، $P_۶=۱۶+P_۵=۱۶+۳۵=۵۱$ وبه‌همین ترتیب الی آخر. می‌توان پنج ضلعیهایی برای تأیید این حدس رسم کرد.

این اطلاعات‌را می‌توان درقالب یك جدول (جدول ۱) تدوین کرد:

جدول ۱

جمله / چندضلعی	۱	۲	۳	۴	۵	۶
مثلثی	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱
مربعی	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶
مخمسی	۱	۵	۱۲	۲۲	۳۵	۵۱

۱. آیا می‌توان هریك ازسریهای چند ضلعی را بدون استفاده ازرسم‌شکل بسط داد؛ یعنی آیا می‌توان یك روندکلی را پیداکردکه ازروی آن بتوان هردنباله ازاعداد چند ضلعی را ادامه داد؟

۲. آیا می‌توان دنباله‌های مشابهی برای شش‌ضلعیها، هفت‌ضلعیها، هشت ضلعیها وغیره چه‌ازطریق رسم چند ضلعیهای مناسب وچه باتشخیص الگوازجدول تشکیل داد؟ هدف نهایی آن است‌که جدول را با تشخیص الگوی موجود درآن تعمیم داد.

۳. آیا می‌توان جمله عمومی، یعنی عبارتی برای Kمین جمله هردنباله پیداکرد؟

۴. آیا می‌توان جمله‌ای عمومی برای J مین جملهٔ دنباله‌ای به‌دست‌آوردکه ازاولین جملهٔ اعداد مثلثی، مربعی، مخمسی، مسدسی، وغیره تشکیل می‌شود (یعنی برای دنبالهٔ ۱، ۱، ۱، ....)؛ همین‌طوربرای دنباله تشکیل شده از جمله‌های دوم (یعنی ۳، ۴، ۵، .....) وغیره؟

۵. آیا می‌توان فرمولی برای Kمین جملهٔ n ضلعی پیدا کرد؟

پاسخ به‌تمام این سئوالها مثبت است. خواننده‌ای که قبلاً روی اعداد چند ضلعی کار نکرده است، می‌تواند پیش‌از ازخواندن بقیه مقاله به‌دنبال پاسخ سؤالهای فوق برود.

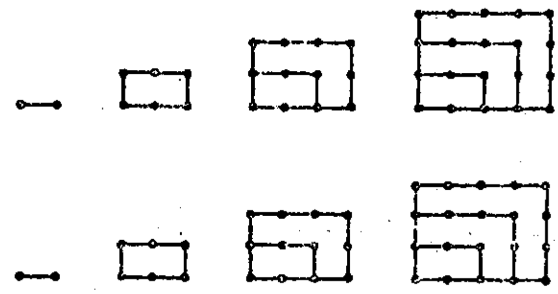
بعلاوه، این ازنوع فعالیتهایی است‌که خواننده درهر سطحی از تحصیلات، از راهنمایی تاسالهای اول دانشگاه، می‌تواندنبال‌کند. برای دوره‌های راهنمایی شاید فقط‌دوسؤال اول مناسب‌باشند درحالی‌که همه‌سؤالات برای دانش‌آموزان دبیرستانی ودانشگاهی مناسب‌اند.

درمورد سؤالهای ۱ و ۲ اطلاعات جدول ۱ به‌صورتی که درجدول ۲ نشان داده شده، تعمیم داده شده‌اند.

جدول ۲

جمله / چندضلعی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
مثلثی	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱	۲۸	۳۶.....
مربعی	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹	۶۴.....
مخمسی	۱	۵	۱۲	۲۲	۳۵	۵۱	۷۰	۹۲.....
مسدسی	۱	۶	۱۵	۲۸	۴۵	۶۶	۹۱	۱۲۰......
هفت‌ضلعی	۱	۷	۱۸	۳۴	۵۵	۸۱	۱۱۲	۱۴۸.....
هشت ضلعی	۱	۸	۲۱	۴۰	۶۵	۹۶	۱۳۳	۱۷۶.....

درسؤال ۳ جملهٔ عمومی هریك از دنباله‌ها خواسته‌شده است. ابتدا اعداد مثلثی ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵،.... را در نظر بگیرید. برای پیدا کردن جملهٔ عمومی اعداد مثلثی، ابتدا دنباله‌ای ازاعداد مستطیلی مربوط به مستطیلهای شکل ۴ را در نظر بگیرید. این الگو اعداد مستطیلی $R_1 = 2$، $R_2 = 6$، $R_3 = 12$، $R_4 = 20$،.... را به‌دست می‌دهد. می‌توان به‌دو نتیجه زیر رسید:

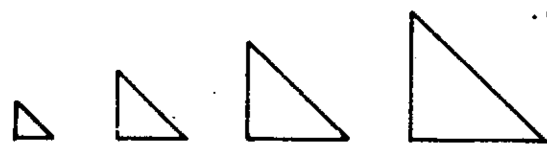


شکل ۴

۱. $R_1 = 1\cdot 2$، $R_2 = 2\cdot 3$، $R_3 = 3\cdot 4$ و $R_4 = 4\cdot 5$، بنابراین به‌همین قیاس R_K عبارت خواهد بود از $R_K = K(K+1)$.

۲. اگر مستطیلهای شکل ۴ را به‌وسیله یکی از قطرها مطابق با شکل ۵ دو قسمت‌کنیم، می‌توان تشخیص داد که $R_1 = 2T_1$، $R_2 = 2T_2$، $R_3 = 2T_3$، $R_4 = 2T_4$ و به‌طور کلی $R_K = 2T_K$.

بنابراین نتیجه می‌شود که $R_K = 2T_K = K(K+1)$ و بنابراین $T_K = (K(K+1))/2$ جمله عمومی اعداد مثلثی است.



شکل ۵

در مورد اعداد مربعی ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵،..... شخص ممکن است بآسانی تشخیص دهد که $S_k = K^2$ جمله عمومی دنباله است، شخص ممکن است متوجه این روابط‌نیز بشود که:

$$S_2 = T_2 + T_1 \quad \text{و} \quad S_3 = T_3 + T_2 \quad \text{و} \quad S_4 = T_4 + T_3$$

بنابراین درحالت‌کلی:

$$S_k = T_k + T_{k-1} = \frac{K(K+1)}{2} + \frac{(K-1)K}{2} = \frac{K^2+K+K^2-K}{2} = \frac{2K^2}{2} = K^2$$

درمورد اعداد مخمسی می‌توان تشخیص داد که:

$$P_2 = T_1 + S_2 = T_1 + (T_1 + T_2) = 2T_1 + T_2,$$
$$P_3 = T_2 + S_3 = T_2 + (T_2 + T_3) = 2T_2 + T_3,$$
$$P_4 = T_3 + S_4 = T_3 + (T_3 + T_4) = 2T_3 + T_4,$$

وبطور کلی

$$P_K = 2T_{K-1} + T_K = \frac{2(K-1)K}{2} + \frac{K(K+1)}{2} = \frac{K}{2}\left(2K-2+K+1\right) = \frac{K(3K-1)}{2}$$

این فرمول‌کلی را با استفاده ازرابطهٔ $P_K = T_{K-1} + S_K$ نیز می‌توان به‌دست آورد.

درمورد اعداد مسدسی‌کسی ممکن است تشخیص بدهد که:

$$H_2 = T_1 + P_2 = T_1 + (2T_1 + T_2) = 3T_1 + T_2,$$
$$H_3 = T_2 + P_3 = T_2 + (2T_2 + T_3) = 3T_2 + T_3,$$

وبطور کلی

$$H_K = 3T_{K-1} + T_K = \frac{3(K-1)K}{2} + \frac{K(K+1)}{2} = \frac{K}{2}\left(3K-3+K+1\right) = \frac{K(4K-2)}{2} = K(2K-1)$$

این فرمول‌کلی را از رابطه $H_K = T_{K-1} + P_K$ نیز می‌توان به‌دست آورد.

باتشخیص اینکه همین روابط حاکم همه‌جا برقراراست (یعنی $S_K = T_{K-1} + T_K$، $P_K = T_{K-1} + S_K$، $Hex_K = T_{K-1} + P_K$) می‌توان تشخیص‌داد که فرمول‌کلی اعداد مسبعی به صورت،

$$Hep_K = T_{K-1} + Hex_K = T_{K-1} + (3T_{K-1} + T_K) = 4T_{K-1} + T_K = \frac{4(K-1)K}{2} + \frac{K(K+1)}{2} = \frac{K(5K-3)}{2}$$

درمورد اعداد هشت ضلعی،

$$O_K = T_{K-1} + Hep_K = 5T_{K-1} + T_K = \frac{K(6K-4)}{2}.$$

درمورد اعداد نه ضلعی،

$$N_K = T_{K-1} + O_K = 6T_{K-1} + T_K = \frac{K(7K-5)}{2}$$

وبه همین ترتیب. توجه‌کنید که درمورد هر n ضلعی، K مین

عـدد چندضلعی مساوی است با K مین عـدد $(n-۱)$ ضلعی بعلاوه $(K-۱)$ مین عددمثلثی. درواقع اعداد مثلثی بلوکهای سازندهٔ اعداد چند ضلعی هستند.

حال سؤال ۴ را درنظر می گیریم. آیا می‌توان فرمولی برای Jمین‌جملهٔ دنباله‌ای که از اولین جمله‌ها، دومین جمله‌ها، سومین جمله‌های و..... اعداد چندضلعی مختلف تشکیل می‌شود، پیدا کرد؟

دنبالهٔ تشکیل شده از اولین جمله‌های اعداد چند ضلعی چنین است ۱،۱،۱،....، وبنابر تعریف اعـداد چند ضلعی جملهٔ اول هریك‌ازآنها ۱ است، بنابراین‌جمله Jم این دنباله ۱ است.

دنبالهٔ تشکیل شده ازدومین جمله‌های اعـداد چند ضلعی چنین است ۳،۴،۵،۶،....،هرجمله یك واحد ازجمله ماقبل خود بزرگترمی‌باشد وچون $a_۱=۳$، $a_۲=۴$، $a_۳=۵$، $a_۴=۶$، نتیجه می‌شودکه $a_J=J+۲$ که درآن J شمارهٔ جمله است. شخص همچنین ممکن‌است تشخیص داده باشد جمله‌های ایـن دنباله برابر با تعداد اضلاع چندضلعی متناظر است. یعنی تعداد اضلاع یك مثلث، سه، اولین جمله را دراین دنبالـه می‌دهـد $(a_۱=۳)$؛ تعداد اضـلاع یك مربـع، چهار، دومین جمله را می‌دهد $(a_۲=۴)$؛ وغیره. بااستفاده از این فکر، ملاحظه می‌شود که $n=a_J$ چندضلعیی‌است که J مین جملهٔ‌دنباله رامی‌دهد، وبنابراین $J=n-۲$.

دنبالهٔ تشکیل شده ازسومین جمله‌های اعـداد چندضلعی چنین است، ۶،۹،۱۲،۱۵،۱۸،.... شخص تشخیص می‌دهد که این اعداد جمله‌های متوالی یك تصاعد حسابی است‌کـه قدر نسبت آن ۳ وجملهٔ اول آن ۶ است وبنابراین

$$a_J=a_۱+(J-۱)d=۶+(J-۱)۳=۳J+۳$$

برای کسانی‌کـه با تصاعد حسابی آشنایی ندارنـد توضیح می‌دهیم‌که:اگرهرجمله ۳ واحد ازجمله قبلی بزرگترباشدآنگاه عبارت $۳P$، وقتی‌که P مقادیر ۱،۲،۳،۴ را بـه خود می گیرد مقادیر ۳،۶،۹،۱۲،.... را می‌دهد، این جمله‌ها ۳ واحدکمتراز جمله‌های نظیرشان در دنبالهٔ ۶،۹،۱۲،۱۵،.... هستند. بنابراین اگر ۳ واحد بـه هرجملهٔ دنبالـهٔ ۳،۶،۹،۱۲،.... اضافه کنیم، دنبالهٔ مطلوب بـه دست خواهد آمـد؛ بنابراین $a_J=۳J+۳$ جمله عمومی دنباله است. اگراین جملهٔ عمومی برحسب تعداد اضلاع چند ضلعیی که این جمله از دنباله را می‌دهد بیان شود دراین صورت‌باید داشته باشیم $J=n-۲$ که درآن J شمارهٔ جمله و n چند ضلعیی است کـه جمله از آن‌گرفته شده است. درنتیجه چنین خواهیم داشت:

جدول ۳

جمله / چندضلعی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	جمله K ام
مثلثی	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱	۲۸	۳۶....	$\frac{K(K+۱)}{۲}$
مربعی	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹	۶۴....	$K^۲=\frac{K(۲K-۰)}{۲}$
مخمسی	۱	۵	۱۲	۲۲	۳۵	۵۱	۷۰	۹۲....	$\frac{K(۳K-۱)}{۲}$
مسدسی	۱	۶	۱۵	۲۸	۴۵	۶۶	۹۱	۱۲۰....	$\frac{K(۴K-۲)}{۲}$
هفت‌ضلعی	۱	۷	۱۸	۳۴	۵۵	۸۱	۱۱۲	۱۴۸....	$\frac{K(۵K-۳)}{۲}$
هشت‌ضلعی	۱	۸	۲۱	۴۰	۶۵	۹۶	۱۳۳	۱۷۶....	$\frac{K(۶K-۴)}{۲}$
جمله J ام	۱	$J+۲$	$۳J+۳$	$۶J+۴$	$۱۰J+۵$	$۱۵J+۶$	$۲۱J+۷$	$۲۸J+۸$....	⋮
جمله J ام برحسب تعداد اضلاع چند ضلعی	۱	n	$۳n-۳$	$۶n-۸$	$۱۰n-۱۵$	$۱۵n-۲۴$	$۲۱n-۳۵$	$۲۸n-۴۸$....	

$a_J = 3J+3 = 3(n-2)+3 = 3n-6+3 = 3n-3$.

دنبالهٔ تشکیل شده از جمله‌های چهارم چنین است ۱۰، ۱۶، ۲۲، ۲۸، ... که این نیز یک تصاعد حسابی است (و این شامل حال تمام دنباله‌های تشکیل شده از K مین جمله‌های اعداد چند ضلعی است) بنابراین می‌توان یا از فرمول مجموع تصاعد حسابی یا شیوهٔ دیگری که در بالا به آن اشاره شد، $a_J = 6J+4$ را به‌دست آورد. یا اگر بخواهیم آنرا برحسب n ضلعی مربوط به آن جمله بیان کنیم می‌توانیم بنویسیم $a_J = 6n-8$. جدول ۳ را ببینید.

پنجمین سؤالی که مطرح کردیم به دست آوردن فرمولی برای محاسبهٔ K مین عدد n ضلعی بود. وقتی که جمله‌های دنباله‌ای را که برحسب چندضلعیهایی که جملهٔ Jم را می‌دهند، امتحان کنیم، ضرایب جمله‌هایی که متضمن n هستند عبارت‌اند از ۰، ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، ۲۱، ۲۸ که همان اعداد مثلثی هستند (وقتی که از جمله دوم شروع کنیم). جمله عمومی K مین جمله اعداد مثلثی، یا جمله $(K+1)$م این دنباله به‌صورت $\frac{(K(K+1))}{2}$ است.

دنبالهٔ جمله‌های ثابت، با شروع از جملهٔ دوم ۰، ۳، ۸، ۱۵، ۲۴، ۳۵، ۴۸، ... است. اگر این جمله‌ها با اعداد مربعی یعنی ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ۳۶، ۴۹، ...: مقایسه شوند، مشاهده می‌شود که هرجملهٔ این دنباله یک واحد از جملهٔ نظیرش در اعداد مربعی کمتر است، بنابراین K مین جمله در این دنباله K^2-1 است. بنابراین $(K+1)$مین جملهٔ دنبالهٔ 1، n، $3n-3$، ...، $6n-8$، $10n-15$، ... به ازای $K>1$ به صورت $\frac{K(K+1)}{2}n-(K^2-1)$ است. اگر در این فرمول به‌جای K مقدار $K-1$ را قرار دهیم، جملهٔ عمومی K مین عدد n ضلعی به‌دست می‌آید

$$\frac{(K-1)K}{2}n-\left[(K-1)^2-1\right].$$

با امتحان کردن دنبالهٔ جمله‌های عمومی، یعنی

$$\frac{K(K+1)}{2},\ \frac{K(2K-0)}{2},\ \frac{K(3K-1)}{2},\ \frac{K(4K-2)}{2},\ \frac{K(5K-3)}{2},\ \ldots$$

ملاحظه می‌کنیم که جملهٔ عمومی به‌صورت زیر است

$$\frac{K[(n-2)K-(n-4)]}{2}$$

که در آن n معرف n ضلعی و K معرف K مین عدد n ضلعی است. با بسط این جملهٔ عمومی و دسته بندی مجدد، می‌توان به‌سادگی نشان داد که این جمله همان جملهٔ عمومی است که قبلاً به‌دست آورده‌ایم. یعنی،

$$\frac{K[(n-2)K-(n-4)]}{2}=\frac{K^2(n-2)-K(n-4)}{2}=$$

$$\frac{K^2n-2K^2-Kn+4K}{2}=\frac{K^2n-Kn-2K^2+4K}{2}$$

$$=\frac{(K^2-K)n-(2K^2-4K)}{2}$$

$$=\frac{K(K-1)n-2(K^2-2K)}{2}$$

$$=\frac{K(K-1)n}{2}-(K^2-2K)$$

$$=\frac{K(K-1)n}{2}-(K^2-2K+1)+1$$

$$=\frac{K(K-1)n}{2}-(K-1)^2+1$$

$$=\frac{K(K-1)n}{2}-[(K-1)^2-1].$$

K مین عدد n ضلعی را می‌توان به دوصورت

$$\frac{K(K-1)n}{2}-[(K-1)^2-1]$$

یا

$$\frac{K[(n-2)K-(n-4)]}{2}$$

نوشت که در آن K شمارهٔ جمله و n، n ضلعی است. مثلاً برای نوشتن پنجمین جمله اعداد هشت ضلعی کافی است در روابط فوق مقادیر $K=5$ و $n=8$ را جایگزین کنیم، پس داریم:

$$O_5=\frac{5(4)8}{2}-[4^2-1]=80-15=65.$$

این تمرین با اعداد چندضلعی را می‌توان در یک دورهٔ چندروزه با دانش‌آموزان انجام داد، و برای این کار کافی است هر قسمت از مسئله را برای یک روز در نظر گرفت. بحث قسمتهایی از کل مسئله در هر روز به آن دسته از دانش آموزانی که اعتماد به نفس ندارند اجازه می‌دهد که با دید جدیدی به مسئله بنگرند و جواب قسمتهای بعدی را در روزهای دوم و سوم برای خود پیدا کنند. این تمرین می‌تواند به عنوان یک مسئله ویژه و جدا از تکالیف روزانه دانش‌آموزان در اختیار آنها قرار گیرد.

اثباتی از رابطهٔ فیثاغورس

محمد داوری اردکانی، دبیر ریاضی

مطابق شکل، از دو نقطهٔ B و C دو عمود به ترتیب از AB و AC مساوی با آنها اخراج می‌کنیم: $BE = AB$ و $CD = AC$. سپس ارتفاع AH و عمودهای DD_1 و EE_1 را رسم می‌کنیم. دو مثلث ACH و CDD_1، و نیز دو مثلث ABH و EE_1B برابرند، و نقاط D، A، و E روی یک خط راست واقعند.

مساحت ذوزنقهٔ DD_1E_1E برابر است با حاصلجمع مساحات مثلثهای DD_1C، ACD، AHC، AHB، ABE، و BEE_1. حاصلجمع مساحات دو مثلث CDD_1 و EBE_1 مساوی مساحت مثلث ABC است. بنابراین، اگر S مساحت ذوزنقهٔ مذکور باشد،

$$S = \frac{b^2}{2} + bc + \frac{c^2}{2},$$

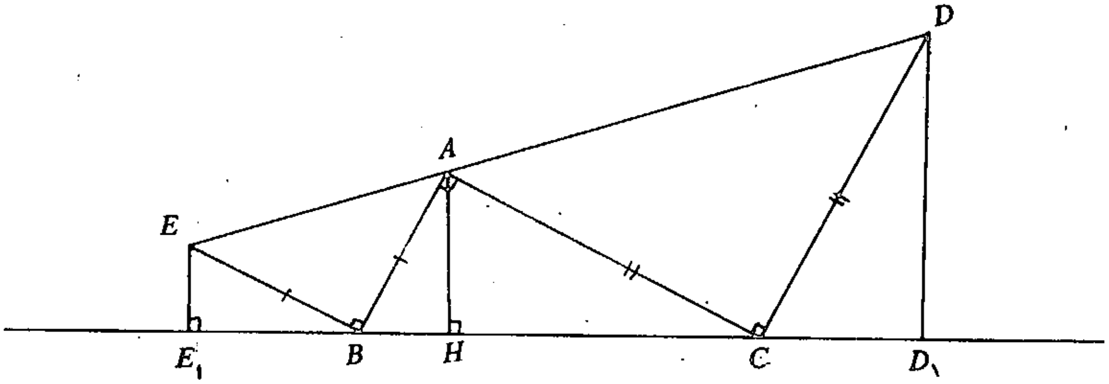
و از طرفی

$$S = \frac{BH + CH}{2}(a + 2h) = \frac{a}{2}(a + 2h).$$

از مقایسهٔ دو رابطهٔ فوق، نتیجه می‌شود که

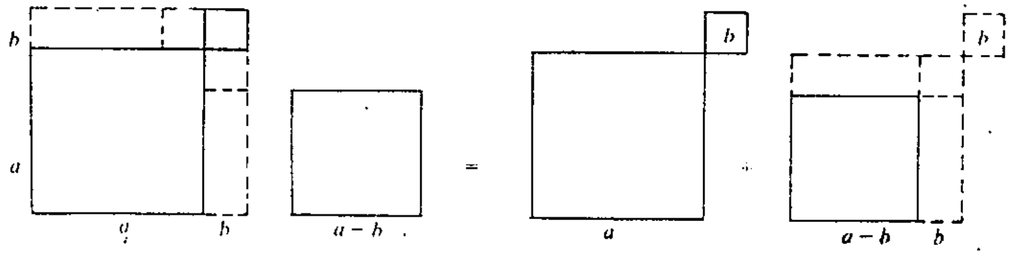
$$\frac{b^2}{2} + bc + \frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + ah.$$

چون $ah = bc$، خواهیم داشت $a^2 = b^2 + c^2$.



اثبات، بی کلمات!

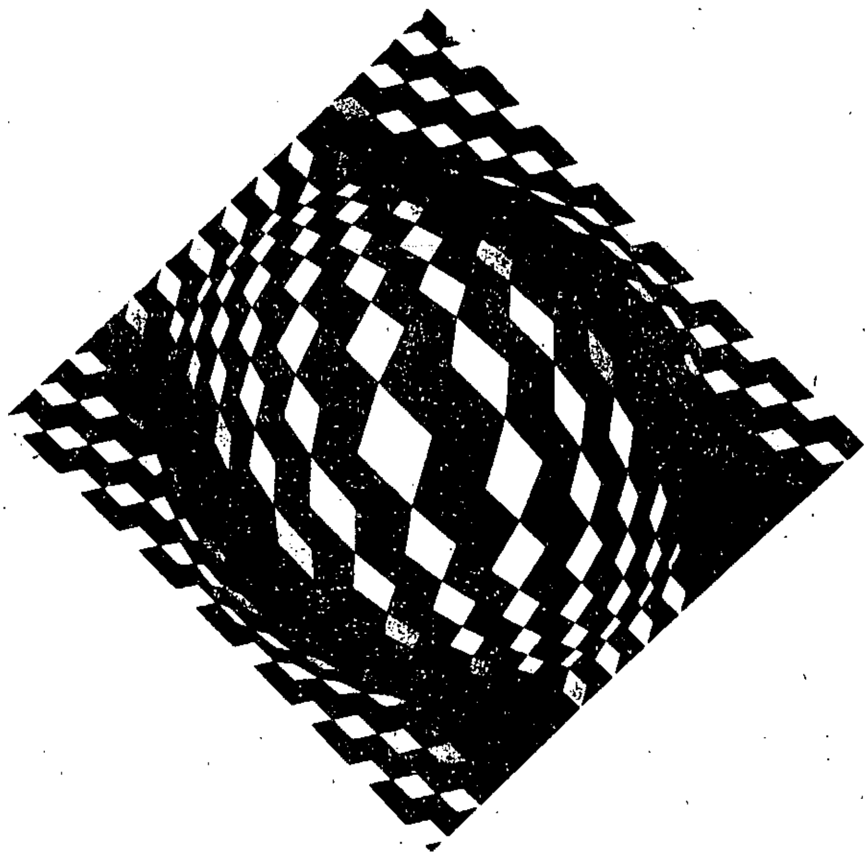
$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$$



نقل از «Mathematics Magazine»، شمارهٔ ۴ سپتامبر ۱۹۸۴

توپولوژی

ترجمه و تنظیم: بنفشه گلستانه



۱ـ مقدمه

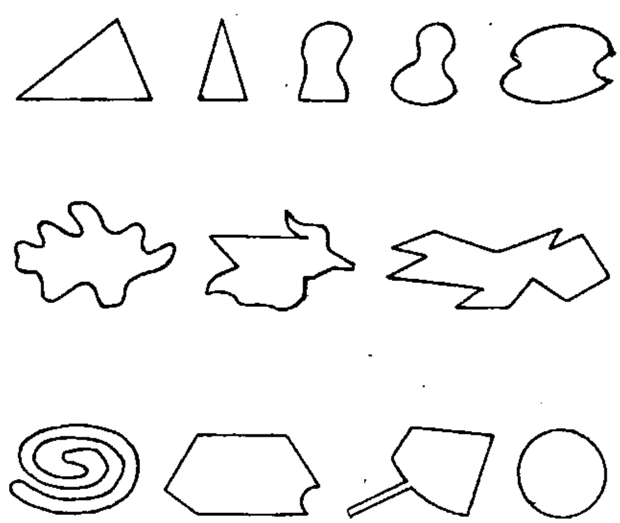
یك شکل هندسی نظیر پاره خط ، دایره یا مثلث را می‌توانیم غیرقابل‌انعطاف فرض نماییم وتصورکنیم که‌می‌توان‌آنرا بدون تغییرشکل‌یا انحنا درفضاحرکت داد. برای مثال، اگریك مثلث ثابت رادر فضا حرکت دهیم، طول اضلاع واندازهٔ زوایا ثابت می‌ماند، اضلاع خمیدگی پیدا نمی‌کند، مساحت ثابت مانده و فاصلهٔ بین هر دو نقطه معین نیز تغییر نمی‌کند. این گونه ویژگیها مانند شکل، طول، مساحت وغیره که تغییر نمی‌یابد پایا نامیده می‌شود.

جال مثلثی را تصور کنید که از لاستیکی، کاملا قابل ارتجاع ساخته شده باشد و بتوان آن را به مقدار دلخواه کشیده و یا فشرد. اگر این مثلث درفضا حرکت داده شود و اضلاع خمیده کشیده شوندو زوایا تغییرشکل دهند ، آیا بازهم ویژگیهایی وجود دارد که پایا باشد؟ جواب مثبت است. برای مثال بدون توجه به اینکه چگونه مثلث لاستیکی کشیده ویا خمیده شده است، برای تقسیم آن به دوتکهٔ مجزا، باید دوبار بریده شود. شاخه‌ای ازریاضیات که خواص پایا راتحت حرکت لاستیکی مورد مطالعه قرار می‌دهد **توپولوژی** نام دارد (واژهٔ توپولوژی ریشهٔ یونانی داردکه‌از دوجزء topo به‌معنی فضا

و logia به‌معنی مطالعه تشکیل شده‌است.)

در توپولوژی هرشکلی می‌تواند دستخوش یك حرکت الاستیکی شود که‌این حرکت شامل کشیدگی، خمیدگی، چروکیدگی وغیره می‌باشد. به‌طور کلی حرکت الاستیکی انحنای هرشکل به هر طریقی رامجاز می‌داند به شرط آنکه دو نقطهٔ مجزا، همواره مجزا باقی بمانند، یعنی اجازه داده نمی‌شود که هیچ دو نقطهٔ مجزایی برهم منطبق شده‌و تشکیل یك نقطه رابدهند. به‌عنوان مثال، درحرکت الاستیکی نمی‌توان دایره را به 8 تغییر شکل داد، زیرا درطی این تبدیل دونقطهٔ مجزای (روی محیط) دایره دریك نقطه که‌مرکز 8 است ادغام می‌شوند. به‌طور مشابه شکلی مانند 8 رانمی‌توان باقطع کردن آن در مرکز، به‌یك دایره مبدل کرد. به‌طورکلی درحرکت الاستیکی تنها زمانی می‌توان شکل را برش داد که بتوان بریدگی را دوباره مثل حالت اولیه دوخت. به‌عنوان مثال می‌توان نوار مدوری رابریده‌ویك انتهای آن رایك چرخش (°۳۶۰) داده‌ودومرتبه برش رادوخت، لکن حرکت الاستیکی به‌ما اجازهٔ نیم‌دورچرخش (°۱۸۰) و دوختن را نمی‌دهد؛ زیرا نقاط لبهٔ بریدگی به‌طریقی که‌قبل‌ازبرش بودند برهم منطبق نخواهد شد. اگردرطی یك حرکت الاستیکی شکلی ساخته شود که بر شکل دیگر منطبق شود، این‌دو شکل‌را هم ارزتوپولوژیکی می‌خوانند.

حال مطالعهٔ خود رابا درنظر گرفتن اشکال مسطحی که هم‌ارز توپولوژیکی هستند آغاز می‌کنیم. سطح یك میز تحریر رابه عنوان صفحه تصور کرده وفرض می‌کنیم برروی آن یك حلقهٔ لاستیکی بدون ضخامت قرار داشته باشد. تمام اشکال مختلفی که‌حلقهٔ لاستیکی درطی حرکت الاستیکی وبدون خارج شدن ازصفحه می‌تواند به‌خود بگیرد، مجموعه‌ای ازاشکال هم ارزتوپولوژیکی است. البته این مجموعه شامل بی‌نهایت شکل است که دوازده نوع آن در شکل (۱) نشان داده شده است.



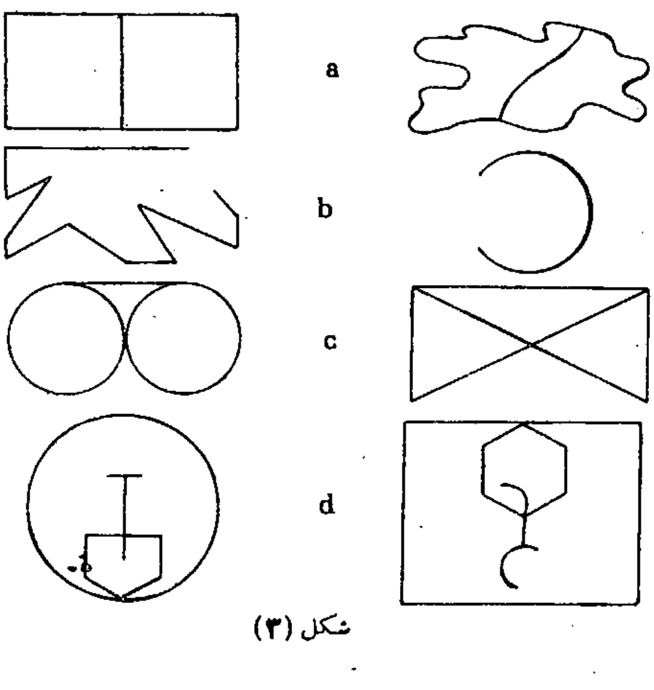
شکل (۱)

هریك‌از دوازده شکلی که‌در شکل (۱) مشاهده می‌کنید یك منحنی‌ساده‌بسته می‌باشد. یك منحنی سادهٔ بسته دارای این خاصیت توپولوژیکی است که‌سطحی راکه بدان تعلق دارد به سه مجموعهٔ مجزا از هم افراز مـی‌کند: مجموعهٔ نقاط روی منحنی، مجموعهٔ نقاط داخل منحنی و بالاخره مجموعهٔ نقاط خارج منحنی در شکل (۲) داخل یك منحنی سادهٔ بسته سایه زده شده است.

شکل (۲)

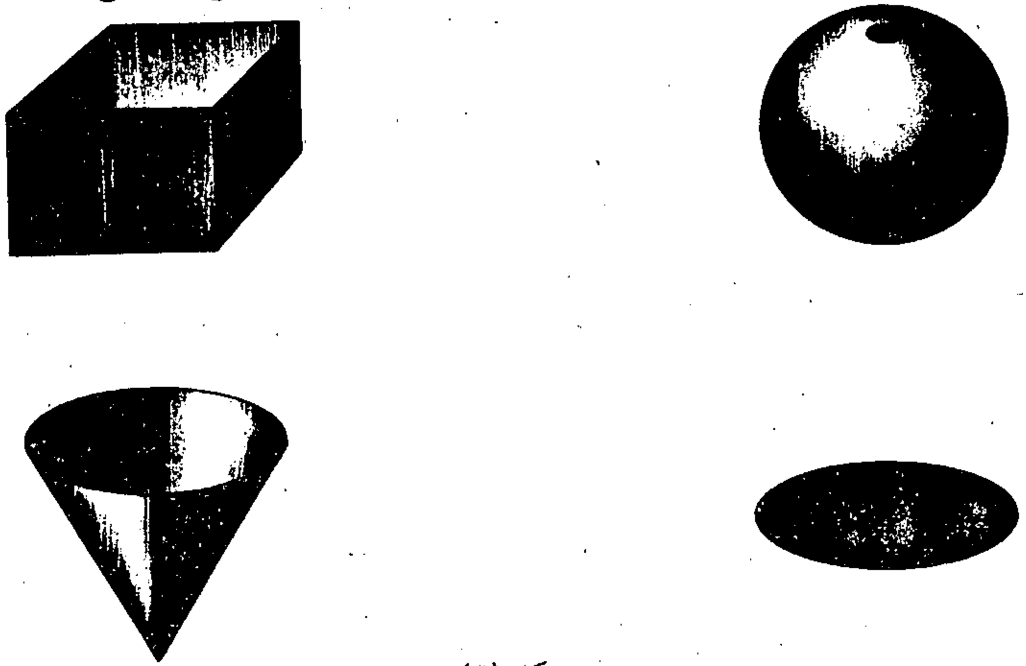
باید توجه داشت که منحنی ساده بسته تنها دارای یك سطح داخلی است. البته می‌دانیم که‌تمام منحنیهای سادهٔ بستهٔ دیگر هم‌از لحاظ توپولوژیکی هم‌ارزند. نمونه‌های دیگری ازاشکال هم‌ارز توپولوژیکی درشکل(۳) نمایش داده شده‌است که‌درآنها دوشکل (الف) باهم، ودو شکل (ب) باهم، هم‌ارز می‌باشند، والی آخر. به راحتی می‌توان دیدکه‌هر یك از زوج شکلهای هم ارز راممکن است بایك حرکت الاستیکی به زوج مقابلش تبدیل کرد.

تاکنون بیشتر توجه مابه اشکالی که‌روی یك صفحه قرار دارد ؛ متمرکز بوده است ؛ این اشکال اغلب دو بعدی بوده و



شکل (۳)

دارای طول و عرض می‌باشند. اگر اشکال سه بعدی را در نظر بگیریم، این اشکال علاوه بر طول و عرض، دارای ارتفاع نیز می‌باشند و لازم است متذکر شویم کـه هنوز اشکال هم ارز توپولوژیکی بسیاری هستند که می‌توان آنها را مطالعه کرد. بـرای مثال، جعبه بـدون در، کره سوراخ شده، قیف توخالی وقرص مـدور که‌در شکـل (۴) نشان داده شده‌انـد، بطـور

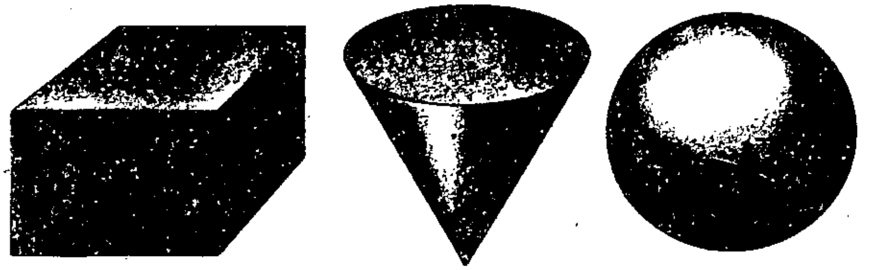


شکل (۴)

توپـولوژیکی هم ارزند زیـرا هر یك از آنها بـا یك حـرکت الاستیکی ازدیگری به‌دست می‌آید؛ این واقعیت که‌قرص مدور یك شکل مسطح است مانع از این نمی‌شود که نتوان آن‌را با اشکال دیگر سه بعدی دریك هم‌ارزی توپولوژیکی قرار دارد. زیرا با کشیدن، فشار دادن و فشردن زیاد می‌توان هر یـك از اشکال سه‌بعدی رامسطح کرده وبه‌یك قرص مدور تغییرشکل داد

مشابه یك سطح سادهٔ بسته‌در فضای دو بعدی سطح سادهٔ بسته درفضای سه بعدی می‌باشد. مثالی از سطح سادهٔ بسته در فضای سه‌بعدی، کره است که بادکنك وتوپ تنیس نمونه‌هایی از آن هستند. سطح سادهٔ بسته، فضا را به سه مجموعهٔ مجزا افرازمی‌کند: مجموعه نقاط خود سطح، مجموعهٔ نقاط درون و مجموعهٔ نقاط بیرون سطح. یك سطح سادهٔ بسته تنها یك درون دارد. برخی ازسطوح سادهٔ بسته عبارتند از: جعبهٔ سرپوشیده یا مکعب، قیف مخروطی باسرپوش و کره. (شکل ۵)

اشکالی کـه در شکل (۵) نشان داد شده‌اند بـا یکدیگر هم‌ارز توپولوژیکی هستند ولی هیچ یك از آنها بااشکالی که‌در تصویر (۴) نشان داده شده‌اند هم ارز نمی‌باشند. بـرای نشان دادن صحت این مطلب فرض کنید که باتبدیل، کره سوراخ شده را



شکل (۵)

به کره سوراخ نشده تغییر شکل دهیم درهنگام پرکردن سوراخ برخی از نقاطی که در محیط سوراخ قرار دارند درنقاط دیگر محیط ادغام می‌شوند درواقع می‌توانیم سوراخ راکوچکتر و کوچکتر کنیم تاجایی که‌همهٔ نقاط محیط سوراخ برهم منطبق شده‌و تشکیل یك‌نقطه را بدهند، لکن حرکت الاستیکی اجازه نمی‌دهد که‌نقاط مجزا برهم منطبق شوند.

تا اینجا حاکی ازآن است‌که توپولوژی اساساً شاخه‌ای ازهندسه می‌باشد. البته، این مطاب چندان هم دور ازحقیقت نیست‌و توپولوژی درابتدا به عنوان شاخه‌ای از هندسه مورد مطالعه بود. اما در طی چهل، پنجاه سال اخیر به‌حدی تعمیم یافته و با دیگر شاخه‌های ریاضیات بستگی پیدا کرده که شاید بهتر باشد طبقه بندی جداگانه‌ای برای آن قائل شویم.

نظریه اعداد وتوپولوژی دوشاخه ازریاضیات هستندکه مطالعهٔ آنها حتی برای افراد غیر حرفه‌ای نیز خالی از لطف نیست، امادر بین این‌دو نظریهٔ اعداد ازقدمت‌بیشتری‌برخور- دار است درحالی که‌توپولوژی ازجدیدترین شاخه‌های ریاضیات محسوب می‌شود و اکثر مطالعات این رشته به یك قرن اخیر اختصاص دارد. بااین‌حال برخی‌مفاهیم جالب ومهم دراین‌رشته به‌تازگی گسترش یافته‌اند.

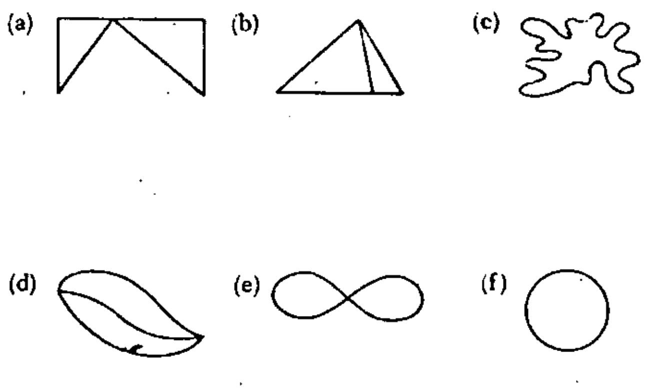
ازنخستین کسانی که‌در توسعهٔ مفاهیم توپولوژی دست داشته‌اند، می‌توان» رنه‌دکارت[1]«(۱۶۵۰-۱۵۹۶)، «لئونهارد اویلر[2]« (۱۷۸۳-۱۷۰۷)، «کارل‌ف گاوس[3]« (۱۸۵۵-۱۷۷۷) وآگوست ف.موبیوس[4]» (۱۸۶۸-۱۷۹۰) رانام‌برد.«برنهارد ریمان[5]»(۱۸۶۶-۱۸۲۶)و«هانری‌پوانکاره[6]» (۱۹۱۲-۱۸۵۴) نیز دربین پیشگامان نسبتاً متقدم این رشته، مقام شامخی دارند کشفیات جدید دراین رشته توسط مائوریس‌فرشه[7] اوسوالدوبلن[8] ج.و.الکساندر[9]، ل.ا.بروئر[10]، وسولومون‌لفشتس[11]، صورت گرفته است. بااین حال درطی صدسال گذشته تعداد «کسانی‌که پیشرفت این رشته رایاری کرده‌اند آن قدر زیاد است که ذکر بعضی بدون نام بردن ازبقیه دور ازانصاف است. بیشتر مفاهیم توپولوژی توسط ریاضی‌دانان کشورهایی نظیر، ایتالیا، لهستان شوروی، فرانسه، آلمان،آمریکا انجام شده است. درحال حاضر ریاضی دانان بسیاری درسراسردنیابه توسعه این‌رشته ازریاضیات اشتغال دارند.

اکنون برای اینکه توانایی خود را در فراگیری مفاهیم توپولوژی بیازمایید، سعی کنید تمرینهای زیر را انجام دهید:

تمرین

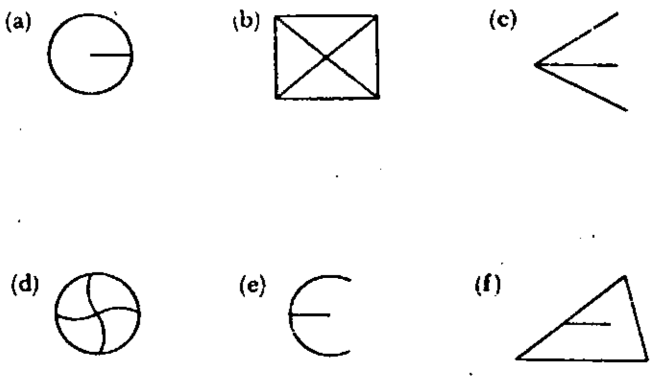
(۱) ۶شکل زیرازسه زوج‌شکل هم‌ارز توپولوژیکی تشکیل شده‌اند. آنها رامشخص کنید.

f e d c b a



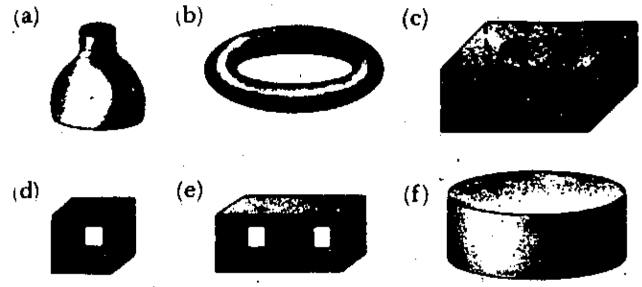
(۲) در شکل‌های زیر، زوجهای هم‌ارز توپولوژیکی رابیابید.

(f) (e) (d) (c) (b) (a)



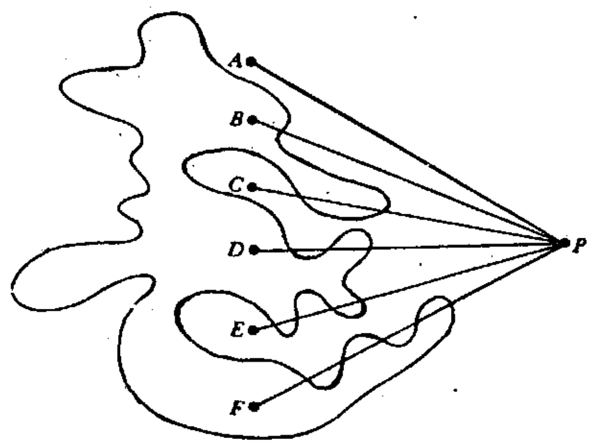
(۳) در شکل‌های زیر، زوجهای هم ارز توپولوژیکی رابیابید.

(f) (e) (d) (c) (b) (a)



(۴) شکل زیرمنحنی ساده بسته‌ای را نشان می‌دهد. نقطهٔP درخارج ازاین منحنی قرار دارد وهریك ازنقاط A،B، C،D،E،F به‌وسیله یك خط به نقطه P وصل شده‌اند:

f e d c b a



الف) هریك از این قطعه خطها منحنی بسته را چند بار قطع می‌کنند؟

ب) آیابین تعداد دفعاتی که این خطوط منحنی را قطع می‌کنند وداخل یا خارج بودن نقطه‌ای که خط از آنها شروع شده‌است،ارتباطی وجود دارد؟

ج) جمله زیررا طوری بنویسید که‌صحیح باشد:
اگر نقطهٔ دلخواهQ رابه نقطهٔP که‌خارج ازمنحنی سادهٔ بسته‌ای قرار دارد ، بوسیلهٔ پاره‌خطی وصل کنیم، دراین صورت Q در خارج ازمنحنی است اگرقطعه خط منحنی رادر (زوج،فرد)مرتبه قطع کند،و نقطهQ در داخل منحنی‌است اگر قطعهٔ خط منحنی رادر (زوج،فرد) مرتبه قطع کند.

(۵) فرض کنید که‌یك خط‌کش معمولی اندازه‌گیری که از ۱ تا ۲۰ سانتیمتر درجه بندی شده، از لاستیك ساخته شده باشد. اگر این خط کش‌را به‌طور یکنواخت از دوانتهای آن به‌گونه‌ای بکشیم که‌اندازه آن‌دو برابر حالت اولیه‌اش شود در این صورت :

(الف) طول خط‌کش چقدر خواهد شد؟

(ب) برای‌اندازه‌گیری فاصله حقیقی ۱۰ سانتیمتر، درجه خط‌کش بایدروی چه‌عددی باشد؟ برای۲۰ سانتیمتر چطور؟

(ج) آیاتمام علائم روی خط‌کش به‌همان ترتیبی هستند که‌قبل ازکشیده شدن بودند؟

(۶) الف- برروی یك ورقهٔ کاغذ یك منحنی ساده بسته رسم کنید ومنحنی رسم شده را از طول به‌وسیلهٔ قیچی ببرید. دراین صورت کاغذبه چند تکهٔ مجزا تقسیم می‌شود؟

(ب) این باربر روی‌یك ورقه کاغذ منحنی سادهٔ بسته‌ای بکشید که‌خودش رایك بارقطع کند(مثلا شکلی مانند عدد 8) اگر چنین شکلی راباقیچی ببریم کاغذ به چند تکه مجزا تقسیم خواهدشد؟ این مسئله رابرای شکلی که‌خودش رادوبار، سه‌بار ودرحالت n کلی بارقطع کند، بررسی کنید.

(۷) الف- اگریك دستکش دست چپ را پشت‌ورو کنیم آیاباز دردست چپ خواهد رفت ؟

ب- آیایك‌دستکش دست چپ بایك دستکش‌دست راست هم‌ارز توپولوژیکی است؟

منبع

Mathematics, A libral Art Approach

سومین مسابقه ریاضی دانش‌آموزان ممتاز کشور در هفدهمین کنفرانس ریاضی در دانشگاه سیستان و بلوچستان

فروردین ۱۳۶۵

(جلسه صبح)

۱ـ اگر $\cos\alpha=\frac{p}{q}$ (p و q اعداد صحیح‌اند) ثابت کنید که مقدار $q^n\cdot\cos n\alpha$ عددی صحیح است.

۲ـ بفرض آنکه سه‌عدد حقیقی ومثبت x، y، و z دررابطه

$$x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$$

صدق کنند مقدار عبارت زیر را بدست آورید:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$$

۳ـ توابع

$$f:R\to R$$
$$g:R\to R$$
$$\varphi:R\to R$$

هر سه صعودی بوده و بازای هرعدد حقیقی x داریم

$$f(x)\leqslant g(x)\leqslant \varphi(x). \qquad (1)$$

ثابت کنید بازای هرعدد حقیقی x رابطه زیر برقرار است:

$$f(f(x))\leqslant g(g(x)\leqslant \varphi(\varphi(x)).$$

۴ـ ثابت کنید شرط لازم و کافی برای اینکه تساویهای زیر برقرار باشند این است که حداقل یکی از دو عدد x یا y عدد صحیح باشد.

$$[x]+[y]=[x+y] \quad \text{و} \quad [-x]+[-x]=[-x-y]$$

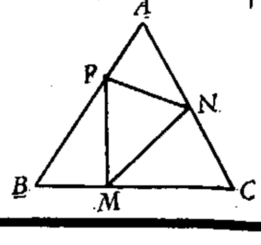
۵ـ توابع $f:R\to R$ و $g:R\to R$ مفروضند به‌طوری که

$$\forall x,\ \forall y\in R \quad \text{و} \quad f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$
$$\forall x,\ x\in R \quad \text{و} \quad f(x)=1+xg(x)$$
$$\lim_{x\to 0} g(x)=1$$

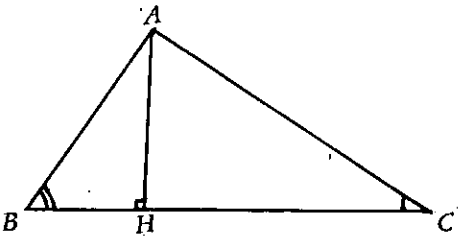
مطلوبست تعیین مشتق f در نقطه دلخواه x.

(جلسه بعد از ظهر)

۱ـ مثلث ABC مفروض است مثلثی در آن محاط کنید که محیطش مینیمم باشد.



۲ـ از مثلث ABC اندازهٔ ضلع BC و اندازهٔ ارتفاع AH معلوم است و می‌دانیم اندازهٔ زاویهٔ B دو برابر اندازهٔ زاویهٔ C است. مثلث را رسم کنید.



۳ـ زاویه بین دوفصل مشترك صفحه $2x+y-z=0$ ومخروط $4x^2-y^2+3z^2=0$ را بیابید.

۴ـ (G و $\circ$) یك گروه و a عضو ثابتی از آن است، نشان دهید که

$$G_a=\{x|n\in z: x=a^n\}$$

یك زیرگروه G است.

۵ـ درتیراندازی با یك تفنگ خاص احتمال اصابت گلوله به هدف ۹۰٪ است. اگر هنگام استفاده از این تفنگ تیراندازی را آنقدر ادامه دهیم تا گلوله به‌هدف اصابت‌نماید مطلوبست محاسبه

الف ـ احتمال آنکه دقیقاً سه‌گلوله مصرف شود.

ب ـ احتمال آنکه حداقل سه‌گلوله مصرف شود.

۶ـ درحلقه R، رابطه زیر برقرار است.

$$\forall x\in R,\quad x^2=x$$

ثابت‌کنید اولا هرعضو R با قرینه‌اش برابر است. ثانیاً ثابت کنید حلقه جابجائی است.

۷ـ اگر a و b و c اعداد حقیقی و c و b مثبت باشند نشان دهید که اگر $a<b$ ($a>b$) آنگاه

$$\frac{a+c}{b+c}>\frac{a}{b}\quad \left(\frac{a+c}{b+c}<\frac{a}{b}\right)$$

و نتیجه بگیرید که $\frac{a+c}{b+c}$ بین ۱ و $\frac{a}{b}$ است.

اگر $a<b$ و هردو گویا باشند بااستفاده از نتایج فوق ثابت کنید عدد اصمی مانند x وجود دارد بطوری که $a<x<b$.

وقت $۲\frac{1}{2}$ ساعت

مسابقه ریاضی دانشجوئی کشور

سئوالات معلومات عمومی ریاضی مدت ۱ ساعت

۱ــ آزمایشی را درنظر بگیرید که احتمال موفقیت (S) برابر p و احتمال شکست (F) برابر $q=1-p$ باشد. این آزمایش را دوبار تکرار می‌کنیم. اگر نتیجه FS یا SF باشد متغیر تصادفی X را بترتیب برابر ۰ یا ۱ می گیریم. درغیراین صورت آزمایش را دوبار دیگر تکرار می کنیم؛ اگر نتیجهٔ این دو آزمایش FS یا SF باشد باز X را بترتیب ۰ یا ۱ می گیریم و درغیراین صورت آزمایش را دوباردیگر تکرار می‌کنیم.... ثابت کنید

$$P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$$

۲ــ نشان دهیدکه هر مجموعهٔ بسته مانند A در صفحه باشرط $A^\circ=\varnothing$ مرز یك مجموعهٔ باز درصفحه است.

۳ــ ثابت کنیدهر جواب معادله‌دیفرانسیل (*) یك‌جواب معادلهٔ انتگرال (**) است وبالعکس.

$$x''=f(t,x),\quad x'(0)=y_0,\quad x(0)=x_0 \qquad (*)$$

کــه درآن $f(t,x)$ تابعی است پیوسته دریك میدان D شامل نقطهٔ $(0,x_0)$

$$x(t)=x_0+y_0t+\int_0^t (t-x)f(s,x(s))ds \qquad (**)$$

۴ــ ثابت کنید حاصلضرب r عــدد طبیعی متوالی بر $r!$ بخش‌پذیر است وازآنجا نتیجه بگیرید که $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ همواره عددی است صحیح $(n\geqslant r)$

(نمرهٔ هرچهار سؤال برابر است)

سؤالات جبرـ مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کشور مدت ۲ ساعت

۱ــ ثابت کنیدگــروه جمعی اعــداد حقیقــی R دارای زیرگروه ماکسیمال نمی‌باشد.

۲ــ فرض‌کنیم A، B، C و D ایده‌آلهایــی دریك حلقهٔ یکانی R باشند، به‌قسمی که

$$A+B=A+C=A+D=R, \qquad (*)$$

اگر $M=B\cap C\cap D$ ثابت کنیدکه $A+M=R$.

مثالی از یك حلقه R دارای ایده‌آلهای نابدیهی A، B، C و D که در شرط (*) صدق کند، بزنید.

۳ــ فرض‌کنید E یك‌توسیع میدان F و $\alpha\in E$ روی F جبری و از درجهٔ n باشد.

اگر $m<n$ و $(n,m!)=1$ آنگاه نشان دهید:

$$F(\alpha)=F(\alpha^m)$$

۴ــ ثابت کنید هیچ مجموعه‌ای از ماتریسهای پوچ توان نمی‌تواند مولد فضای $M_n(F)$ باشدکه در آن $M_n(F)$ فضای ماتریسهای $n\times n$ روی میدان F است.

(نمرهٔ هرچهار سؤال برابر است)

سؤالات آنالیز مدت ۲ ساعت

مسئلهٔ اول ــ تابع حقیقی f با شرایط ذیل داده شده است:

الف ــ $f(1)=1$

ب ــ $f'(x)=\frac{1}{x^2+[f(x)]^2}$ برای $x\geqslant 1$

ثابت کنید $\lim_{x\to\infty} f(x)$ موجود وکوچکتراز $1+\frac{\pi}{4}$ می باشد.

مسئلهٔ دوم ــ تابع‌پیوسته $f:[a,b]\to R$ باشرایط ذیل مفروض است:

الف ــ $f(a)=f(b)=0$

ب ــ مشتق دوم f در بازه (a,b) موجود است.

نشان دهیدکه:

$$\int_a^b |f(x)|dx\leqslant M\ \frac{(b-a)^3}{12}$$

که درآن

$$M=\sup\{|f''(x)|:x\in(a,b)\}$$

راهنمائی: از تابع کمکی

$$g(t)=(t-a)(t-b)f(x)-(x-a)(x-b)f(t)$$

استفاده کنید.

مسئلهٔ سوم ــ ثابت‌کنیدکه

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^3 \frac{x^2(1-x)x^n}{1+x^{2n}}dx=0$$

(نمرهٔ هرسه سؤال برابر است)

منتخب مسائل مسابقات سال چهارم ریاضی استانهای کشور

استان گیلان

۱ـ مقادیر d, c, b, a را چنان پیدا کنید که دو منحنی $y=x^3+ax^2+bx+c$ و $y=dx-x^3$ در نقطه $(1, 0)$ بریکدیگرمماس بوده وهمین نقطه‌مرکزتقارن یکی ازمنحنی‌های مذکور باشد. پس از تعیین d, c, b, a دوتابع حاصل میشود. شرطی بنویسیدکه سه نقطه از منحنی درجه ۳ روی یك خط راست باشد و بکمك این شرط مختصات یکی از نقاط مذکور راکه وسط دونقطه دیگراست بدست‌آورید، این نقطه چه نام دارد ـ ثالثاً بدون هیچگونه‌محاسبه و فقط با ذکر دلیل نقطه مذکور را مشخص کنید.

۲ـ اگر AM میانه مثلث ABC وزوایای $\widehat{BAM}=\theta$ و $\widehat{CAM}=\varphi$ باشد ثابت کنید:

$$\cot g\theta-\cot g\varphi=\cot gB-\cot gC$$

جبر

۱ـ برد تابع $y=3^{x-1}+3^{-x-1}$ را پیداکنید.

۴ـ ثابت‌کنید:

$$\mathrm{Arc}\,tg\frac{1}{2}+\mathrm{Arc}\,tg\frac{1}{8}+\dots+\mathrm{Arc}\,tg\frac{1}{2n}=\mathrm{Arc}\,tg\frac{n}{n+1}$$

۱۰ـ سه صندوق دربستهٔ میوه داریم که برروی هر یك از آنها بترتیب برچسب «سیب»، «پرتقال» و «سیب و پرتقال» نصب شده است. درضمن می‌دانیم که برچسب‌ها را به‌غلط بر روی آنها چسبانده‌اند، و به عبارت دیگر، نوع میوه درون صندوق با برچسب آن صندوق، همخوانی ندارد. می‌خواهیم بی آنکه بترتیبی به‌میوه‌ها دست بزنیم و یا نگاه‌کنجکاوانه‌ای بیندازیم، با بیرون آوردن فقط یك‌عدد میوه ازیکی ازصندوقها ونگاه‌کردن به‌آن «یك عدد میوه»، میوه‌های درون هرصندوق را مشخص‌کنیم. «۵ نمره»

استان لرستان

۱ـ ثابت‌کنید عبارت

$$3\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-8\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+101$$

بازاء هرمقدار حقیقی x و y مخالف صفر، نامنفی است.

۷ـ ثابت‌کنیدکه اگر یکی ازاعداد 2^n-1 و 2^n+1 اول است آنگاه دیگری غیر اول است ($n>2$، برای $n=2$ هردو عدد اولند). «۳ نمره»

استان خراسان

جبر و آنالیز

۱ـ تابع f در R بصورت

$$f(x)=(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+\dots+(a_nx+b_n)^2$$

تعریف شده است با در نظر گرفتن می‌نیمم تابع و $f(x)\geqslant 0$ نامساوی زیر را ثابت‌کنید. (۱۵ نمره)

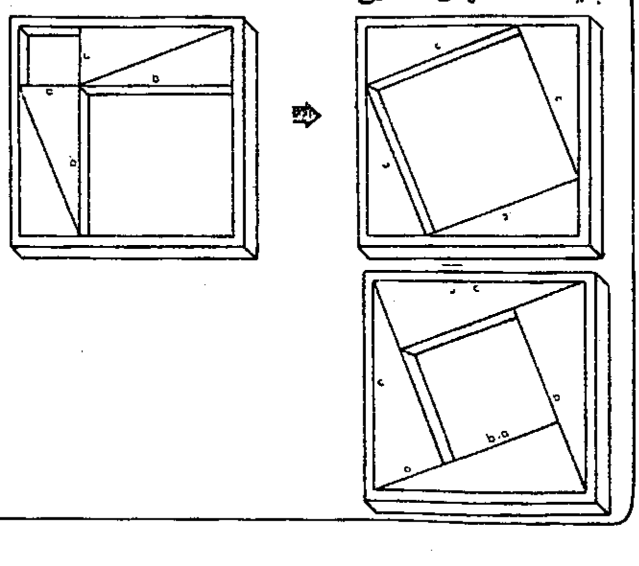
$$(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)$$

مثلثات

۶ـ اگر $\cos^3 2\alpha+\cos^2 2\alpha+\gamma^2\cos 2\alpha=\gamma^2$ باشد رابطه زیر را نتیجه بگیرید «۷/۵ نمره»

$$\gamma tg^3\alpha+tg^2\alpha+\alpha tg\alpha=1$$

بقیه استدلالهای معمایی از صفحه ۳۳



از فضای خالی یك مساحت a^2+b^2 و سپس c^2 بسازید.

برهان شمارهٔ ۲

مساحت چهار مثلث همنهشت قائم‌الزاویه $2ab$ است. از طرفی مساحت مربع کوچك میانی $(b-a)^2$ است. حال‌باجمع کردن این مساحتها و برابر قرار دادن آنها با مساحت خانه (یعنی c^2) خواهیم داشت: $2ab+(b-a)^2=c^2$، وازآنجا:

$$a^2+b^2=c^2$$

پانوشتها

1) Augustus De Morgan
2) William Rowan Hamilton

پاسخ سئوالات مسابقه ریاضی دانش‌آموزان ممتاز کشور

(مندرج درشمارهٔ ۷)

سئوال اول: توابع زیرمفروض‌اند.

$$f(x)=\frac{1}{[|x|]-1} \quad , \quad g(x)=\frac{1}{|[x]|-1}$$

اولاً قلمروی هریك ازتوابع‌فوق را به‌دست آورید.

ثانیاً ثابت کنیدکه

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} g(x)$$

حل ـ پاسخ این مسئله درشمارهٔ ۸ ، سال دوم، رشد آموزش ریاضی ارائه شده است.

سئوال دوم: تابع زیرمفروض است:

$$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}[x]\right)$$

اولاً، دورهٔ تناوب آن را پیدا کنید ونمودار آن را در یك دورهٔ تناوب رسم کنید.

ثانیاً، ثابت کنید که حد یکطرفی (چپ و راست) $\lim_{x\to 1^{\pm}} f(x)$ هردوموجودند، ولی، $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجود نیست (با روش ε و δ)

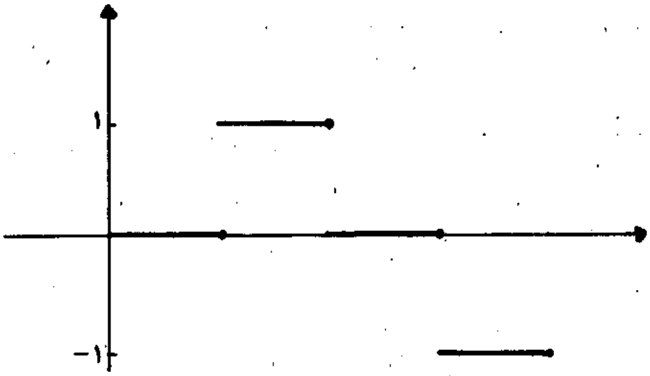
حل ـ می‌بایستی کوچکترین k ئی به دست آوریم که، $f(x+k)=f(x)$. اگر $k\in Z$ آنگاه $[x+k]=[x]+k$.

بنابراین، بااین فرض که k یك عدد صحیح است،

$$f(x+k)=\sin\left(\frac{\pi}{2}[x+k]\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}[x]+\frac{\pi k}{2}\right)$$

برای اینکه حاصل عبارت فوق برابر $f(x)$ باشد باید $\frac{\pi k}{2}=2\pi$ یا $k=4$. بالنتیجه، ضابطهٔ تابع f دریك‌دورهٔ تناوب چنین است

$$f(x)=\begin{cases} 0 & 0\leqslant x<1 \\ 1 & 1\leqslant x<2 \\ 0 & 2\leqslant x<3 \\ -1 & 3\leqslant x<4 \end{cases}$$



اینك به‌روش ε و δ ثابت می‌کنیم که حدود یکطرفی (چپ وراست) در نقطهٔ $x=1$ موجود است، ولی دراین نقطه تابع حد ندارد.

فرض‌کنیم که ε عدد مثبت دلخواهی باشد. اگر $0<\delta<1$ آنگاه به‌ازای‌هر x که $1<x<1+\delta$،

$$|f(x)-f(1)|=|1-1|=0<\varepsilon$$

بنابراین، $\lim_{x\to 1^+} f(x)=1$، به‌طریق مشابه ثابت می‌شود که $\lim_{x\to 1^-} f(x)=0$ چون حد راست و چپ متمایز است، بدیهی است که تابع درنقطهٔ $x=1$ حدندارد. ولی‌سعی می‌کنیم ازطریق ε و δ حکم فوق را ثابت کنیم.

فرض کنیم که حد تابع در نقطهٔ $x=1$ برابر l باشد. بدیهی‌است که $|l|\leqslant 1$ (چرا؟). بنابراین، به‌ازای‌هرεدلخواه، بالاخص $\varepsilon=\frac{1}{4}$ عدد مثبتی مانند δ موجود است که به‌ازای هر x،

$$|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\frac{1}{4}$$

می‌توان چنین تصور کرد که $\delta<1$ (چرا؟).

حال اگر $x_1=1+\frac{\delta}{2}$، $x_2=1-\frac{\delta}{2}$ آنگاه

$$|x_1-1|<\frac{\delta}{2} \Rightarrow |f(x_1)-1|=|1-1|<\frac{1}{4}$$

$$|x_2-1|<\frac{\delta}{2} \Rightarrow |f(x_2)-1|=|0-1|<\frac{1}{4}$$

ازطرفی

$$1=|1-1+1|\leqslant|1-1|+|1|<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$1<\frac{1}{2}$$

که تناقض است.

سؤال سوم: تابع $f : R \longrightarrow R$ چنان‌تعریف شده است‌که به‌ازای هر x وهر y از R رابطهٔ زیربرقرار است؛

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$

اگر $f(0)\neq 0$ و $f'(0)$ موجود ومتناهی باشد، ثابت کنیدکه f درهرنقطه دارای مشتق است.

حل ـ چون به‌ازای هر xو y رابطه فوق برقرار است، پس به‌ازای $x=y=0$،

$$f(0)=f(0)f(0),$$
$$f(0)(1-f(0))=0,$$
$$f(0)=1$$

بنابراین، اگر x عدد حقیقی‌دلخواهی باشد.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}$$
$$=\frac{f(x)(f(h)-f(0))}{h}$$

بالنتیجه،

$$f'(x)=\lim_{h\longrightarrow 0}f(x)\frac{f(h)-f(0)}{h}=f(x)f'(0)$$

سؤال چهارم: تعیین کنید بسط $(a+b+c)^{99}$ در حالت‌کلی چند جمله می‌تواندداشته باشد.

حل ـ فرض‌کنیم‌که $z=a+b$ بنابراین

$$(a+b+c)^{99}=(z+c)^{99}=\sum_{k=0}^{99}\binom{99}{k}z^kc^{99-k}$$

تعداد جملات متمایز $(a+b)^kc^{99-k}$ برابر $(k+1)$ است. لهذا، تعدادجملات متمایز $(a+b+c)^{99}$ برابراست‌با

$$\sum_{k=0}^{99}(k+1)=\sum_{k=0}^{99}k+100=\frac{1}{2}99\times 100+100=5050$$

سؤال پنجم: اگرداشته باشیم

$$S_n=\frac{5}{9}\times\frac{14}{20}\times\frac{27}{35}\times\cdots\times\frac{2n^2-n-1}{2n^2+n-1}$$

مطلوبست تعیین حد S_n، وقتی n بسمت بینهایت میل می‌کند.

حل ـ ابتدا حکمی‌را یادآوری می‌کنیم: فرض‌کنیم f تابعی ازاعداد صحیح باشد. دراین صورت به‌ازای $m\leqslant n$

$$1)\quad \sum_{k=m}^{n}(f(k+1)-f(k))=f(n+1)-f(m)$$

$$2)\quad \prod_{k=m}^{n}\frac{f(k+1)}{f(k)}=\frac{f(n+1)}{f(m)}\quad(f(k)\neq 0)$$

روابط فوق‌که به‌قاعده ادغام معروف‌اند، به‌استقراءقابل اثبات‌اندکه برهان آن‌را بعهده خواننده می‌گذاریم. حال اگر n عدد طبیعی باشد،

$$\frac{2n^2-n-1}{2n^2+n-1}=\frac{(2n+1)(n-1)}{(2n-1)(n+1)}=\left(\frac{\frac{(2n+1)}{(n+1)n}}{\frac{(2n-1)}{(n-1)n}}\right)$$

بنابراین، اگر $f(k)=\frac{2k-1}{k(k-1)}$

آنگاه بنابر (2)،

$$S_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{f(k+1)}{f(k)}=\frac{\frac{(2n+1)}{(n+1)n}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\times\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

ازاینجا نتیجه می‌شودکه:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}S_n=0$$

سؤال ششم: دوخط D و D' به معادله‌های

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}\ ,\ \frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{3}$$

مفروض‌اند. طول عمود مشترك این دوخط را محاسبه‌کنید.

حل ـ از نقطهٔ $A(-1, -2, 1)$ واقع بر خط $D' : \frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{3}$ خط D'' را موازی D رسم می‌کنیم. از D' و D'' صفحهٔ P را عبورمی‌دهیم. عمود مشترك دوخط که باید هم بر D وهم بر D' عمود باشد بر D' و D'' و درنتیجه برصفحهٔ P عمود است. بنابراین طول عمود مشترك به اندازهٔ فاصلهٔ نقطهٔ $B(1, 1, 1)$ واقع برخط D ازصفحهٔ P است.

$\vec{n}$ بردارقائم صفحهٔ P چنین است:

$$\vec{n} = \vec{V}(۲,۳,۴) \wedge \vec{V'}(۲,۴,۳) \Longrightarrow \vec{n}(-۷,۲,۲).$$

چون صفحهٔ P از نقطهٔ A می‌گذرد، معادلهٔ آن چنین است:

$$P: -۷(x+۱)+۲(y+۲)+۲(z-۱)=۰$$

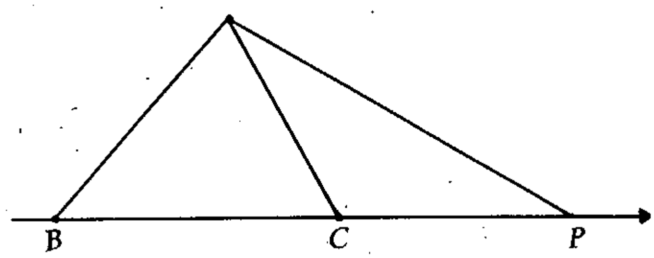
فاصلهٔ B ازصفحهٔ P = طول عمود مشترک

$$= \frac{|-۷(۱+۱)+۲(۱+۲)+۲(۱+۱)|}{\sqrt{(-۷)^۲+۲^۲+۲^۲}} = \frac{۸}{\sqrt{۵۷}}.$$

سؤال هفتم: دونقطهٔ ثابت B و C درصفحهٔ P مفروض‌اند مکان هندسی نقاطی مانند M ازصفحهٔ P را به دست آورید به طوری‌که داشته‌باشیم $MB^۲+KMC^۲=a^۲$ (a و K دوعدد معلوم‌اند و $K>۰$)

حل– در راستای BC که جهت‌دار فرض شده است، نقطهٔ P را طوری اختیار می‌کنیم که:

$$(۱)\quad \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -K$$



$\overline{PB}$ و $\overline{PC}$ ازتساوی (۱) و تساوی $\overline{PC}-\overline{PB}=\overline{BC}$، برحسب $\overline{BC}$ و K حساب می‌شوند:

$$\overline{PB}=\frac{-K\overline{BC}}{۱+K} \quad \text{و} \quad \overline{PC}=\frac{\overline{BC}}{۱+K}$$

برای سه نقطهٔ B و C و P که بریک خط قرار دارند و نقطهٔ M، رابطهٔ استوارت را می‌نویسیم

$$\frac{MB^۲}{\overline{BC}\cdot\overline{BP}}+\frac{MC^۲}{\overline{CB}\cdot\overline{CP}}+\frac{MP^۲}{\overline{PB}\cdot\overline{PC}}=۱$$

دراین تساوی به‌جای PB و PC اندازه‌های آنها را که حساب کرده‌ایم قرار می‌دهیم. با توجه به فرض $MB^۲+KMC^۲=a^۲$، MP به دست می‌آید.

$MP^۲=\dfrac{(۱+K)a^۲-KBC^۲}{(۱+K)^۲}$ و مکان دایره‌ای به مرکز P وشعاع MP است.

(شرط امکان مسئله $a^۲ \geqslant \dfrac{KBC^۲}{۱+K}$ می‌باشد.)

سؤال هشتم: عمل دوتایی در مجموعهٔ اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف شده است $x\oplus y=x+y-xy$، $\forall x,\ y\in R$ که در آن اعمال سمت راست، جمع و تفریق و ضرب معمولی‌اند. ثابت کنید، اولاً $\oplus$ در R شرکت‌پذیر است؛ ثانیاً عضو خنثی در این عمل را تعیین کنید.

حل– ثابت می‌کنیم که

$$(x\oplus y)\oplus z=x\oplus(y\oplus z) \qquad (۱)$$

داریم

$$(x+y)\oplus z=(x+y-xy)\oplus z$$

$$=x+y+z-xy-xz-yz+xyz$$

$$=x+y-xz+z-(x+y-xy)z$$

به‌همین ترتیب

$$x\oplus(y\oplus z)=x+y+z-xy-xz-yz+xyz$$

پس تساوی (۱) برقراراست. برای به‌دست‌آوردن‌عضو خنثی، فرض می‌کنیم که e عضو خنثی و x عضو دلخواهی باشد. بنابراین

$$e\oplus x=x\oplus e=x$$

یا

$$e+x-ex=x+e-xe=x$$

درنتیجه

$$e(۱-x)=۰$$

چون تساوی فوق به ازای هر x باید برقرار باشد، بنابراین $e=۰$، یعنی ۰ عضو خنثی است.

حل مسائل مسابقه ریاضی دانشجویان کشور
(مندرج در شماره ۷)

دکتر رحیم زارع نهندی

حل مسائل معلومات عمومی ریاضی

حل ۱ــ ستون اول را از یك یك ستون‌هــای دیگر کم می‌کنیم سپس سطرهــای دوم و سوم و...و nام را به‌سطر اول اضافه می‌کنیم در ماتریس حاصل تمام اعضای بالای قطر اصلی صفر خواهند بود پس

$$\det(A)=[r+(n-1)\lambda](r-\lambda)^{n-1}$$

حل ۲ــ فرض می‌کنیم x تعداد جوجه‌ها در مرغداری و y تعداد روزهائی باشدکه دانه دارند ولی مقدار دانه مصرفی یك جوجه دریك روز باشد. دراینصورت داریم:

$$xyz = \text{مقدار دانه موجود درمرغداری}$$

$$=(x-75)(y+20)z=(x+100)(y-15)z$$

که‌جواب $x=300$ را بدست می‌دهد.

حل ۳ــ طبق فرض می‌توان نوشت:

$$\alpha^2\int_0^1 f(x)dx-2\alpha\int_0^1 xf(x)dx+$$

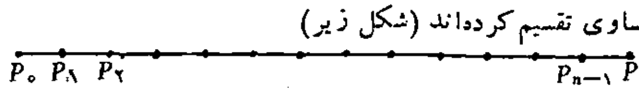
$$\int_0^1 x^2f(x)dx=\alpha^2-2\alpha^2+\alpha^2=0$$

یعنی:

$$\int_0^1(\alpha-x)^2f(x)dx=0$$

وچون تابع $(\alpha-x)^2$ جز درنقطه $x=\alpha$ همواره مثبت است و f نیز درفاصله $[0,1]$ مثبت و پیوسته است، اما شرط اخیر امکان پذیر نیست.

حل ۴ــ قطعه خط P_0P_n را بطول n در نظر می‌گیریم. نقاط P_0 و P_1 و P_2 و...و P_n این قطعه خــط را به n قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند (شکل زیر)



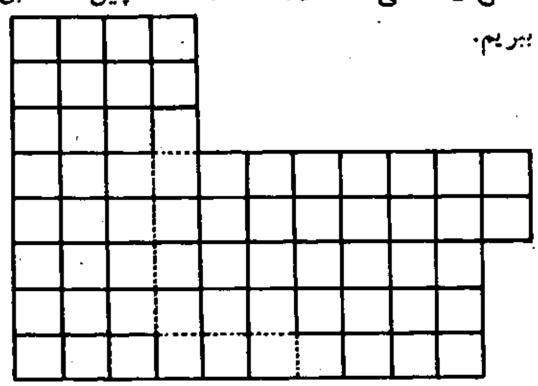
هر دسته‌جواب‌معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_m=n$ دراعدادصحیح مثبت، متناظر است با یك تجزیه قطعه خط فوق به m قطعه که طولهای آنها اعداد صحیح و مثبت هستند. تعداد $m-1$ نقطه انتهائی این قطعه‌ها باید از بین $n-1$ نقطه

P_1 و P_2 و...و P_{n-1}

انتخاب شوند و این به‌تعداد $\binom{n-1}{m-1}$ طریــق ممکن است.

در نتیجه تعداد جوابهای معادله فوق $\binom{n-1}{m-1}$ است.

حل ۵ــ کافی است در امتداد خــط چین‌ها مطابق شکل زیر ببریم.



حل ۶ــ اگــر فاصلهٔ منزل وکارخانه را در x دقیقه طی کند، x دارای‌توزیع یکنواخت است.

الف: کارگرحداکثر ۱۵ دقیقه فرصت دارد تا به‌محل‌کار برسد بنابراین

= احتمال اینکه بموقع سرکار حاضر نشود

$$=P(x>15)=\frac{20-15}{20-10}=\frac{1}{2}$$

ب: فرض‌کنیم‌کارگر y دقیقه قبل از ساعــت ۸ حرکت کند. برای اطمینان از رسیدن بموقع به سرکار باید $y>20$ باشد، بنابراین‌کارگر $x-y$ دقیقه درکارخانه فــرصت صرف صبحانه خواهد داشت. احتمال اینکه این فرصت برای صرف صبحانه‌کافی باشد عبارتست از:

$$P(y-x\geqslant 15)=P(x\leqslant y-15)=$$

$$=\frac{y-15-15}{20-10}=\frac{y-30}{10}$$

ولذا برای‌آنکه $0/75\leqslant\frac{y-30}{10}$ باشدبایده $37/5\leqslant y$ باشد.

یعنی اگرکارگر ۳۷/۵ دقیقه قبل از ۸ حرکت‌کند بموقع‌بکار خود می‌رسد وبا احتمال ۰/۷۵ می‌تواند صبحانه صرف‌کند.

حل ۸ــ دردترمینان مورد نظردرسطر اول از C_1 وسطر دوم از C_2 و...و سطر nام از C_n فاکتور می‌گیریم سپس در ستون اول از C_1 وستــون دوم از C_2 و...و ستون nام از C_n فاکتور می‌گیریم

$$|A|=\begin{vmatrix}1+C_1C_1 & C_1C_2 & \cdots & C_1C_n\\ C_2C_1 & 1+C_2C_2 & \cdots & C_2C_n\\ \vdots & & & \vdots\\ C_nC_1 & C_nC_2 & \cdots & 1+C_nC_n\end{vmatrix}$$

$$=(C_1C_2\cdots C_n)^2\begin{vmatrix}\frac{1}{C_1^2}+1 & \cdots & & 1\\ 1 & \frac{1}{C_2^2}+2 & \cdots & 1\\ \vdots & & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{C_n^2}+1\end{vmatrix}$$

در دترمینان بالا سطر آخر را از یکایك بقیه سطرها کم می‌کنیم سپس سطر اول را در C_1^2 ضرب واز سطر آخر کم می‌کنیم و سطر دوم را در C_2^2 ضرب و از سطر آخر می‌کنیم وهمین طور سطر $n-1$ ام را در C_{n-1}^2 ضرب و ازسطر آخر کم می‌کنیم. دترمینان حاصل مثلثی است:

$$|A|=(C_1C_2\cdots C_n)^2\begin{vmatrix}\frac{1}{C_1^2} & 0 & \cdots & \frac{-1}{C_n^2}\\ 0 & \frac{1}{C_2^2} & \cdots & \frac{-1}{C_n^2}\\ \vdots & & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{C_n^2}+1\end{vmatrix}=$$

$$=(C_1C_2\cdots C_n)^2\begin{vmatrix}\frac{1}{C_1^2} & 0 & \cdots & \frac{-1}{C_n^2}\\ 0 & \frac{1}{C_2^2} & & \frac{-1}{C_n^2}\\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{C_1^2+C_2^2+\cdots+C_{n-1}^2}{C_n^2}+1+\frac{1}{C_n^2}\end{vmatrix}$$

$$=(C_1C_2\cdots C_n)^2\left[\frac{C_1^2+C_2^2+\cdots+C_n^2}{C_1^2C_2^2\cdots C_n^2}+\frac{1}{C_1^2C_2^2\cdots C_n^2}\right]$$

$$=1+C_1^2+C_2^2+\cdots+C_n^2$$

حل‌مسائل جبری

حل۱. فرض کنیم H یك زیر گروه G با اندیس p باشد. مجموعه کلاس‌های چپ H در G را که یك مجموعه p عنصری است L می‌نامیم برای هر $g\in G$ نگاشت $\tau_g:L\to L$ که به‌صورت $\tau g(xH)=gxH$ تعریف می‌شود، یك نگاشت دوسوئی یعنی یك جایگشت L است لذا یك هومورفیسم از G در S_p گروه جایگشت‌های L به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$G\xrightarrow{\varphi}S_p$$
$$g\longrightarrow\tau_g$$

می بینیم $K=Ker(\varphi)$ مشمول H است. نشان می‌دهیم $K=H$ در نتیجه H در G نرمال خواهد بود. $\frac{G}{K}$ با یك زیر گروه S_p ایزومورف است پس $\left|\frac{G}{K}\right|\,\Big|\,p!$. از طرفی هرمقسوم علیه $\frac{G}{K}$ مرتبه $|G|$ را می‌شمارد، از مقسوم‌علیه‌های اول $p!$ تنها عدد p مرتبه G را می‌شمارد (چون p کوچکترین مقسوم علیه اول مرتبه G است) . پس $\left|\frac{G}{K}\right|=p$ یا $\left|\frac{G}{K}\right|=1$. ولی چون $K\subset H$ است و $[G:H]=p$ پس $\left|\frac{G}{K}\right|=p$ ولذا $H=K$.

حل ۲: هر عنصر این دو میدان را به‌صورت یکتای $a+bx$ بطوریکه a و $b\in Z_3$ باشند، می‌توان نوشت. اگر f یك ایزومرفیسم به‌شرح مسأله باشد داریم

$$f(a+bx)=f(a)+f(b)f(x)$$

ازطرفی چون می‌توان فرض کرد: $a=0$ یا $a=1$ یا $a=1+1$، داریم $f(a)=a$. و بهمین ترتیب $f(b)=b$.
لذا کافی است $f(x)$ را معین کنیم. با توجه به‌اینکه در میدان اول $x^2+1=0$ است داریم

$$0=f(x^2+1)=(f(x))^2+1$$

لذا $(f(x))^2+1=x^2+x+2$

ویا $(f(x))^2=x^2+x+1=x^2-2x+1+3x$

وچون مشخص میدان ۳ است:

$$(f(x))^2=(x-1)^2$$

پس

$f(x)=1-x$ یا $f(x)=x-1$.

براحتی دیده‌می‌شود که هردوصورت بالا ایزومرفیسم مورد نظر را بدست می‌دهند.

حل ۳: داریم

$$4x^4+5x^2+1=4x^4-2x^2+1=$$
$$=4(x^4+3x+2)=4(x^2+2)(x^2+1)$$
$$4x^3+4x^2+x+1=4(x^3+x^2+2x+2)=$$

$$=4[x(x^2+2)+x^2+2]=4(x^2+2)(x+1)$$

که عملیات در میدان Z_7 انجام گرفته است. چون x^2+1 و $x+1$ نسبت بهم اولند بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو چند جمله‌ای بالای x^2+2 است.

حل ۴: برای هر $u\in K-F$ کثیرالجملهٔ تحویل ناپذیر u روی F از درجه دوم است لذا عناصر b و c در F وجود دارند بطوری که $u^2+bu+c=0$ باشد. چون مشخص F برابر ۲ نیست، می‌توان نوشت $\left(u+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4}-c$. حال قرار می‌دهیم $y=u+\frac{b}{2}$. روشن است $y^2=\frac{b^2}{4}-c\in F$ و $y\notin F$. در نتیجه $\{1,y\}$ یك پایهٔ K روی F است.

حل ۵: W هسته گسترش خطی $T-I$ است وداریم:

$$\dim V-\dim W=\dim Im(T-I)$$

لذا

$$n=\dim W+\dim Im(T-I)$$

اگر ثابت کنیم $Im(T-I)\subset W$، مسأله حل‌است. ولی اگر $u\in Im(T-I)$ باشد $u=T(v)-v$ برای‌یك $v\in V$ واز آنجا چون $T^2=I$ است و مشخص K برابر ۲ است داریم:

$$T(u)=T^2(v)-T(v)=v-T(v)=T(v)-v=u.$$

لذا $u\in W$.

حل مسائل آنالیز

حل ۱: برای هر $a\in R$ کلاس هم‌ارزی a عبارتست‌از مجموعه $\{a+q|q\in Q\}$، که انتقال Q به‌اندازه a است. چون Q در R متراکم‌است مجموعهٔ بالانیز در R متراکم خواهدبود.

حل ۲: طبق خاصیت مقدار میانی‌برای توابع پیوسته حقیقی، f یاصعودی است ویا نزولی چه‌اگر مثلاً $a<b$ و $f(a)<f(b)$ و $a<x<b$ و $f(a)<f(b)<f(x)$، طبق خاصیت یاد شده عدد c بین a و x وجود دارد بطوریکه $f(c)=f(b)$، و این با یك بیك بودن f متناقض است حالت‌های دیگر نیز به‌روش مشابه قابل بحث‌اند.

فرض کنیم f صعودی است. داریم:

$f([a,b])=[f(a),f(b)]$ زیرا اگر N عددی‌بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد مجدداً طبق خاصیت مقدار میانی عددی مانند c بین a و b وجـود داردبطوریکه $f(c)=N$. بنابراین خواهیم داشت $(f(a,b))=(f(a),f(b))$، که نشان‌می‌دهدوارون f پیوسته است چه سایه وارون هرفاصله بازی توسط f^{-1} یك‌فاصله باز است. وقتی f نزولی است استدلال مشابه‌استدلال فوق است.

حل ۳: ابتدانشان‌می‌دهیم $f(E)\subset E$. اگر $x\in E$ باشد داریم $f(x)\geqslant x$ وچون f صعودی است پس $f(f(x))\geqslant f(x)$ یعنی $f(x)\in E$ وبنابراین $f(E)\subset E$ حال ثابت می کنیم $E\subset f(E)$. فرض‌کنیم $x\in E$ است. داریم:

$$f([a,x])=[f(a),f(x)]=[a,f(x)]-[a,x]$$

وچون f پیوسته است طبق قضیه مقدارمیانی عددی مانند t بین a و x وجـود دارد به‌طوری کـه $f(t)=x$. ادعـا می کنیم $f(t)\geqslant t$ یعنی $t\in E$ و لـذا $x\in f(E)$. چه اگـر $f(t)<t$، داریم $x<t$ وچون f صعودی است $f(x)<f(t)=x$ یعنی $x\notin E$ که خلاف فرض است.

حل ۴: ثابت‌می‌کنیم f درنقاط اصم پیوسته است. در اینصورت مجموعه نقاط نا پیوستگی f شمارش‌پذیرخواهدبود ولذا $\int_0^1 f(x)dx$ موجود است. فرض کنیم a عددی اصم در فاصله $[0,1]$ است. برای $\varepsilon>0$ داده‌شده عدد صحیح و مثبت n وجود دارد به‌طوری‌که $\frac{1}{n}<\varepsilon$ گردد. برای عددصحیح‌ومثبتی مانند m داریم $\frac{m-1}{n}<a<\frac{m}{n}$. بین دوعدد $\frac{m-1}{n}$ و $\frac{m}{n}$ تنها تعدادی متناهی عدد گویا با مخرج کوچکتراز n وجود دارد زیرا صورت این‌کسرها بایـد کوچکتر از m باشدفرض می کنیم r نزدیکترین این اعداد به a باشد برای هر x درفاصله $(a-r,a+r)$ داریم $0\leqslant f(x)-f(a)=f(x)<\frac{1}{n}<\varepsilon$. یعنی f در a پیوسته است.

حل ۵: نشان می‌دهیم‌برای هردوخاصیت ازسه خاصیت مذکور تابعی با آن دوخاصیت وجوددارد وسپس ثابت می کنیم هیچ تابعی نمی‌تواند توأماً هرسه خاصیت را دارا باشد.

الف ـ تابعی پیوسته و یك بیك: تابع $f(x)=(x,0)$ پیوسته ویك‌بیك است زیرا توابع همانی وثابت از $[0,1]$ در $[0,1]$ پیوسته‌اند.

ب ـ تابعی پیوسته وبروی: «منحنی صفحه پر کن» (*Space filling curve*).

ج ـ تابعی یك‌بیك وبروی: میدانم هرعددحقیقی فقط‌یك نمایش اعشاری نامتناهی‌دارد (مثلاً $0/4999000=0/5$). قرارمی‌دهیم:

$$f(0/\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\cdots)=(0/\alpha_1\alpha_3\alpha_5\cdots,0/\alpha_2\alpha_4\alpha_6\cdots)$$

f یك‌بیك وبروی است.

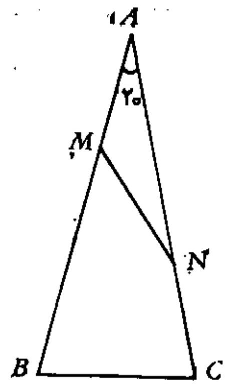
دـ اگر تابع f دارای هر سه خاصیت باشد وارون آن نیز پیوسته است. زیرا اگر A یك زیرمجموعه بسته $[0,1]$ باشد A فشرده‌است لذا $f(A)$ فشرده‌است‌درنتیجه $f(A)$ بسته‌است. بنابراین f یك‌هومومرفیسم‌از $[0,1]$ در $[0,1]\times[0,1]$ است لیکن این امکانپذیرنیست چون مثلاً مجموعهٔ $[0,1]\times[0,1]-\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ همبند است لیکن‌سایه آن‌توسط f^{-1} همبندنیست.

مسابقه

با توجه به‌استقبالی که از سؤال مسابقهٔ مجله رشد ریاضی شمارهٔ ۴ به عمل آمد، بر آن شدیم که حتی‌المقدور در هرشماره مسئله‌ای برای مسابقه درج کنیم. از خوانندگان محترم خواهشمندیم که پاسخهای خود را حداکثر تا سه ماه بعد از انتشار مجله ارسال کنند. به‌پاسخهایی که بعد از مهلت تعیین شده، ارسال شود و پاسخهای بی‌تاریخ ترتیب اثر داده نخواهد شد.

مسئلهٔ شمارهٔ ۵، رشد آموزش ریاضی شمارهٔ ۴ (مسئله‌مسابقه):

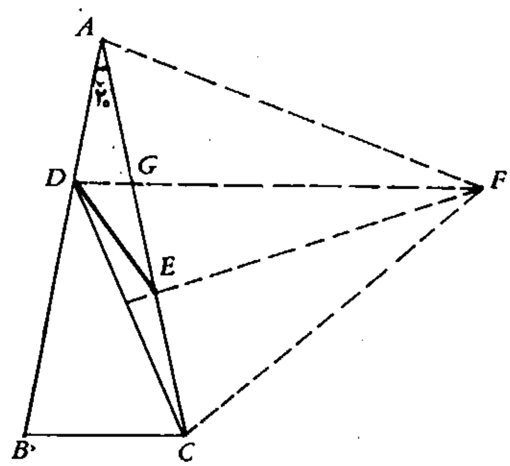
درمثلث متساوی‌الساقین ABC بازاویهٔ رأس $\widehat{A}=20^\circ$، طولهای AM و CN را مساوی BC جدا کرده، M را به N وصل می‌کنیم. به طریقه هندسی زاویهٔ $\widehat{BMN}$ را بیابید (شکل زیر).



پاسخ اول از آقای پرویز فرهودی مقدم

ΔADF مساوی با ΔABC رسم‌شده‌است. پس ΔAFC متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه ΔDCF متساوی‌الساقین و اندازهٔ زاویهٔ رأس آن یعنی، $\widehat{DFC}$ برابر 40° است. بنابراین

$$\widehat{ECD}=10^\circ \quad \text{و} \quad \widehat{BDC}=30^\circ$$

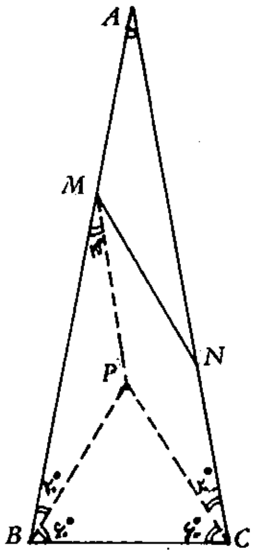


پاسخ دوم ازآقای علیرضا حریرچی

مثلث متساوی‌الاضلاع BPC را روی BC بنامی‌کنیم و نقطهٔ P را به M وصل می‌کنیم. باتوجه به‌شکل، چهارضلعی $AMPC$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین خواهد بود و از توازی MP با AC متساوی‌الساقین بودن مثلث BPM را نتیجه می‌گیریم و می‌توان گفت $BP=PM=NC=AM$.

بنابراین چهارضلعی $PMNC$ متوازی‌اضلاع (عملاً لوزی) می‌باشد. در نتیجه $\angle PMN=20^\circ$. بنابراین‌خواهیم داشت:

$$\angle BMN=\angle BMP+\angle PMN=20^\circ+20^\circ=40^\circ.$$



پاسخ سوم از آقای محمد حسین‌آبادی ــ گرگان

مثلث متساوی‌الاضلاعی روی ضلع NC می‌سازیم. E را به B وصل می‌کنیم.

$$\angle ECB=80+60=140$$

$$BC=CE \Rightarrow \angle BEC=20$$

$$\angle BEC=\angle BAC$$

بسادگی پیداست که نقطهٔ E روی دایرهٔ‌محیطی ABC است. Aرا به E وصل‌می‌کنیم.

$$CE=BC \Rightarrow \angle CAE=\angle BAC=20$$

$\Delta ABE: \angle AEB = ۱۸۰-(۶۰+۴۰)=۸۰$ (۱)

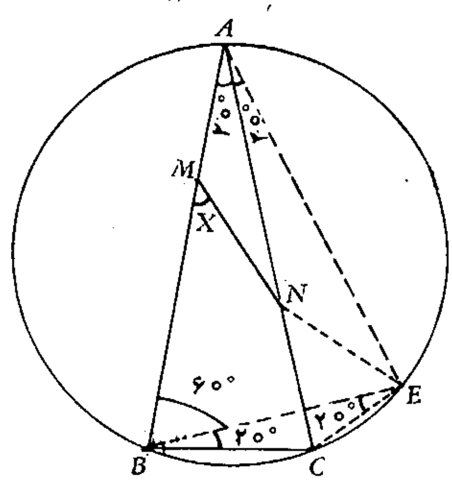
$\Delta NEC: \angle NEB = ۶۰-۲۰=۴۰$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow \angle AEN = \angle AEB - \angle NEB =$

$= ۸۰ - ۴۰ = ۴۰$

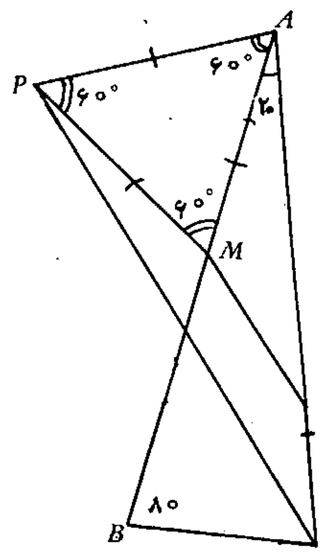
در چهار ضلعی $AMNE$ دو زاویهٔ مجاور A و E مساوی‌اند و $AM = EN$ پس چهـار ضلعی ذوزنقهٔ متساوی الساقین است. پس

$$MN \| AE \Rightarrow x = ۴۰^\circ$$



پاسخ چهارم از آقای جوادپور

مثلث متساوی‌الاضلاع AMP را مطابق شکل می‌سازیم، پس $\widehat{PAN} = ۸۰^\circ$ و $PA = BC$. بنابراین دو مثلث ABC و CPA بنابه‌حالت(ض‌زض)برابرمی‌شوند،پس $\widehat{PCN} = ۲۰^\circ$ ، $\widehat{CPM} = ۲۰^\circ$. بنابراین، چون $NC = PM$، پس‌چهارضلعی



$CPMN$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین می‌شود . لذا زاویهٔ MNA برابر ۲۰° خواهد بود. پس $\widehat{BMN} = ۴۰$.

اسامی فرستندگان سایر پاسخهای صحیح که‌راه‌حلهایشان کـم و بیش مشابه راه حلهای فوق یا طـولانیتر است در زیر می‌آید.

۵ـ رضا اللهیاری بیگ

۶ـ نجف زارع

۷ـ محمدرضا رحمانی

۸ـ افشین غلام‌زاده

۹ـ شهاب شهابی

۱۰ـ امیرحسین دلیرروی فرد

۱۱ـ محمد بهلولی

۱۲ـ محمدحسین زحمتکش

۱۳ـ عزت‌اله جالو

۱۴ـ حسام حمیدی تهرانی

۱۵ـ روزبه گنجور

۱۶ـ پیوند فلاح تهرانی

مسئلهٔ مسابقهٔ جدید (فرستنده آقای محمد داوری اردکانی)

۱ـ هریك از اضلاع یك چهارضلعی محـدب را به سه قسمت متساوی تقسیم می‌کنیم و نقاط تقسیم هـردو ضلع مقابل را به‌یکدیگر وصل می‌کنیم به‌قسمی که خطوطی که نقاط تقسیم دو ضلع مقابـل را به‌هم وصل می‌کنند، در داخـل چند ضلعی متقاطع باشند. چهار ضلعی به نه قسمت تقسیم مـی‌شود، ثابت کنید مساحت چهار ضلعی وسط، یك نهم مساحت چهار ضلعی مفروض است.

گزارشی از بیست و ششمین المپیاد ریاضی

بیست وششمین المپیاد بین‌المللی ریاضی امسال[1] از ۲۹ ژوئن (۸ تیر) تا ۹ ژوئیه (۱۸ تیر) در فنلاند بــر گزار شد. تیمهایی از ۳۸ کشوردراین مسابقه شرکت کردند. ازلحاظ تعداد کشورهای‌شرکت کننده،این رقم‌رکورد محسوب می‌شود. تعداد تیمها درسال‌گذشته ۳۴ بود که تاآن‌زمان، این تعداد تیم‌سابقه نداشت. مانند سال قبل، هرتیم متشکل از ۶ دانش‌آموز از هر کشور بود(حداکثر تعداد مجاز). بااین حال اگرتعدادکشورهای شرکت‌کننده به‌همین‌صورت افزایش‌یابد،اندازهٔ هرتیم‌احتمالاً به ۴ دانش‌آموز تقلیل خواهد یافت (این وضع درسال ۱۹۸۲ درلهستان پیش آمد). کاهش تعداد اعضای هــر تیم، شاید این امکان را برای کشورهای نسبتاً کم‌جمعیت فراهم‌کندکه تیمهای بهتری را وارد مسابقات کنند. علاوه براین هزینه‌ها کاهش پیدا می‌کنند و می‌توان آسانتر به تدارك ملزومات پرداخت. امسال تعداد دانش‌آموزان شرکت‌کننده هم به‌رقم بیسابقهٔ ۲۰۸ رسید کــه رقم رکــوردی سال قبل، ۱۹۲ نفر، را پشت سر گذاشت. کشورهایی‌که برای اولین بــار شرکت‌کردند، چین، ایران[2]، ایسلند، وترکیه بودند.

المپیادهای سالهای ۱۹۸۶، ۱۹۸۷، ۱۹۸۸ بترتیب در لهستان،کوبا، و استرالیا برگزار خواهند شد.

به‌شش مسئله مسابقه، امتیازهای برابر ۷ داده شد (نظیر چهار سال‌گذشته) و حداکثر امتیاز ۴۲ بود. به‌نظر می‌رسدکه مسابقهٔ امسال‌مشکلتر ازمسابقهٔ قبلی‌بود، زیرا تنها ۱۰ دانش‌آموز نمرهٔ بالاتر از ۳۵ گــرفتند (سال گذشته ۲۴ دانش‌آموز نمره بالای ۳۵ داشتند)،وتنها ۲ دانش‌آموز نمرهٔ‌کامل گرفتند درحالی که پارسال ۸ دانش‌آموز نمرهٔ‌کامل گرفته بودند.

برندگان جوایز اول عبارت بودند از:

گزاکوز	مجارستان	۴۲ امتیاز
دانیل تاتورو	رومانی	۴۲ امتیاز
گابور مکیزی	مجارستان	۳۸ امتیاز
نیکولای چاوادوروف	بلغارستان	۳۷ امتیاز
فیلیپ آلفونزه	بلژیك	۳۶ امتیاز
اولگا لئونتوا	شوروی	۳۶ امتیاز
اندروهاسل	استرالیا	۳۵ امتیاز
واسیل داسکالوف	بلغارستان	۳۵ امتیاز
والدمار هورووات	آمریکا	۳۵ امتیاز
نگوین دانگ	ویتنام	۳۵ امتیاز
هاگن آیتسن	آلمان غربی	۳۴ امتیاز
رادونگو لسکو	رومانی	۳۴ امتیاز
گلگا رازوان	رومانی	۳۴ امتیاز
جرمی کان	آمریکا	۳۴ امتیاز

چون مسابقات المپیاد بــه‌صورت انفرادی است، نتایج به‌طور رسمی فقط برای اعضای تیمها اعلام می‌شود. مع‌هذا، وضعیت تیمها معمولاً با جمع‌کردن نمرات اعضای تیم به‌طور غیررسمی مشخص می‌شود. رومانی،که مؤسس المپیاد ریاضی درسال ۱۹۵۹ هم بود، رتبهٔ اول این مسابقات بود. فهرستی‌از پانزده تیم اول درزیر می‌آید:

رتبه	کشور	مجموع نمرات
۱	رومانی	۲۰۱
۲	آمریکا	۱۸۰
۳	مجارستان	۱۶۸
۴	بلغارستان	۱۶۵
۵	ویتنام	۱۴۴
۶	شوروی	۱۴۰
۷	آلمان غربی	۱۳۹
۸	آلمان شرقی	۱۳۶
۹	فرانسه	۱۲۵
۱۰	انگلیس	۱۲۱
۱۱	استرالیا	۱۱۷
۱۲-۱۳	کانادا	۱۰۵
۱۲-۱۳	چکسلواکی	۱۰۵
۱۴	لهستان	۱۰۱
۱۵	برزیل	۸۳

سؤالات بیست و ششمین المپیاد ریاضی[۳]:

۱ـ مرکز یك دایره بر ضلع AB از چهارضلعی محاطی $ABCD$ واقع است. سه ضلع دیگر چهارضلعی بر دایره مماس هستند. ثابت کنید که $AD+BC=AB$.

۲ـ فرض کنید که n و k اعداد طبیعی متباینی باشند و $0<k<n$. هر عدد مجموعهٔ $M=\{1,2,\dots,n-1\}$ را رنگ آبی یا سفید می‌زنیم. می‌دانیم که

(الف) به ازای هر $i\in M$، هم i و هم $n-i$ از یك رنگ‌اند، و

(ب) به ازای هر $i\in M$، $i\neq k$، هم i و هم $|i-k|$ همرنگ هستند.

ثابت کنید که همهٔ اعضای M باید یك رنگ داشته باشد.

۳ـ به‌ازای هر چند جمله‌ای با ضرایب صحیح مانند $P(x)=a_0+a_1x+\dots+a_kx^k$، تعداد ضرایب فرد با $w(p)$ نشان داده می‌شود. به ازای $i=0,1,2,\dots$ فرض کنید $Q_i(x)=(1+x)^i$، ثابت کنید که اگر i_1، i_2، ...، i_n اعداد صحیحی باشند به طوری که $0\leqslant i_1<i_2<\dots<i_n$، در این صورت

$$w(Q_{i_1}+Q_{i_2}+\dots+Q_{i_n})\geqslant w(Q_{i_1})$$

۴ـ مجموعه‌ای مانند M متشکل از ۱۹۸۵ عدد صحیح مثبت متمایز، که هیچکدام از آنها مقسوم‌علیه اولی بزرگتر از ۲۶ ندارند، مفروض است. ثابت کنید که M شامل حداقل یك زیرمجموعه با چهار عضو متمایز است به‌طوری که حاصلضرب آنها توان چهارم یك عدد صحیح است.

۵ـ دایره‌ای به‌مرکز O بر رئوس A و C مثلث ABC می‌گذرد، و پاره خطهای AB و BC را مجدداً بترتیب در نقاط متمایز K و N قطع می‌کند. دایره‌های محیطی مثلثهای ABC و KBN یکدیگر را دقیقاً در دو نقطهٔ متمایز B و M قطع می‌کنند. ثابت کنید که مثلث OMB قائم‌الزاویه است.

۶ـ به‌ازای هر عدد حقیقی x_1، دنبالهٔ $x_1, x_2, \dots$ را با قرار دادن

$$x_{n+1}=x_n\cdot\left(x_n+\frac{1}{n}\right)$$

به‌ازای هر $n\geqslant 1$ تشکیل دهید. ثابت کنید که تنها یك مقدار x_1 موجود است که درمورد آن، به‌ازای هر n،

$$0<x_n<x_{n+1}<1$$

پانوشتها

۱ـ منظور سال ۱۹۸۵ است.

۲ـ گمان نمی‌رود که این تیم به‌طور رسمی به‌عنوان نمایندگان دولت جمهوری اسلامی ایران در این مسابقات شرکت کرده باشد. امید است که برای تشویق دانش‌آموزان مستعد، از ایران نیز تیمهایی به‌طور رسمی دراین مسابقات شرکت کنند.

۳ـ برای آنکه خوانندگان رأساً فرصتی برای حل این مسائل داشته باشند، حل آنها را درشمارهٔ بعد می‌آوریم.

گزارش فوق توسط ق. وحیدی از Mathematical Magazine, vol. 59, No. 1, 1686 ترجمه شده است.

بقیه پیشگفتار از صفحه ۳

سلیقه‌های فکری همهٔ خوانندگان در هر سطحی است، بلکه منظور آن است که باتلاش مداوم، «رشد» بتواند از بسترهای اصلی جریانات آموزش ریاضی کشور باشد و وجود و توفیق آن مشوقی برای سایر مجلات ریاضی در سطوح مختلف شود. همچنین امیدواریم که به‌محض فراهم شدن امکانات فنی، نسبت به‌افزایش شماره‌های مجله در هر سال اقدام کنیم تا امکان درج مقالات ارسالی، که خوشبختانه تعدادشان روبه‌افزایش است، مقدور باشد.

بجاست‌ازخوانندگان محترمی که نامه‌های‌محبت‌آمیزشان، مشوق ما در ادامه این راه و انجام این خدمت ــ که انشاءاله مقبول‌درگاه احدیت وخوانندگان محترم باشد ــ تشکر کنیم واز کلیه خوانندگان یك‌بار دیگر بخواهیم که همچنان از ارسال پیشنهادها و نظریات اصلاحی دریغ نکنند.

سردبیر

گزارشی از تغییرات کتابهای ریاضی چاپ ۱۳۶۵

۱- مقطع ابتدائی

اشکالات کتاب ریاضی سال پنجم ابتدائی اصلاح شده است.

۲- مقطع راهنمایی

کتابهای ریاضی اول و دوم راهنمائی جدیدالتألیف هستند.

۳- مقطع متوسطه

I- ریاضی فیزیك

اشکالات کتاب جبر سال اول اصلاح شده است.

اشکالات کتاب مثلثات سال دوم اصلاح شده است.

اشکالات کتاب مثلثات سال سوم اصلاح شده است.

اشکالات کتاب جبر سال سوم ریاضی اصلاح شده است.

تعدادی تمرین به کتاب جبر و آنالیز سال چهارم ریاضی اضافه شده است.

اشکالات کتاب ریاضی جدید سال چهارم اصلاح شده و تمرینهای جدید نیز اضافه شده است.

بخش تقسیم توافقی به ابتدای هندسه تحلیلی سال چهارم اضافه شده است.

II- علوم تجربی

بخشی از مثلثات کتاب هندسه و مثلثات سال دوم تجربی به کتاب جبر و مثلثات سال سوم منتقل گردید (بخش توابع مثلثاتی مجموع و تفاضل دو کمان).

در کتاب ریاضیات سال چهارم به جای تابع اولیه علامت انتگرال در بخش تابع اولیه و محاسبه سطح و حجم آمده است.

تمریناتی که در کتاب ریاضی جدید سال چهارم در چاپ ۶۵-۶۴ اضافه شده است.

۱- باقیمانده تقسیم اعداد $3^{6n}-2^{6n}$ را بر ۳۵ و $3^{3n-2}+7^{n}\times 2^{3n-1}$ را بر ۲۹ به‌دست آورید (صفحه ۶۳).

۲- ثابت کنید $2^{120}-1$ بر ۲۱ بخش‌پذیر است (صفحه ۶۳).

۳- ثابت کنید (پیمانه ۷) $n^7\equiv n$ و از آنجا نتیجه بگیرید $2^7+3^7+4^7+5^7$ بر ۷ بخش‌پذیر است.

۴- ثابت کنید $(6n+10\ ,\ 4n+7)=1$ (صفحه ۶۴).

۵- رقم یکان عدد $7^{4k+2}+17^{8k+4}$ را پیدا کنید. (صفحه ۶۴).

۶- ثابت کنید $6|a(a^2+11)$ (صفحه ۶۴).

۷- اگر $A^2=A$ و $(A-A')^2=\bar{0}$ ثابت کنید (صفحه ۱۵۷).

الف- $AA'+A'A=A+A'$ ب- $(AA')^2=AA'$

۸- اگر X و Y دو ماتریس مربعی باشد و داشته باشیم $X+Y=XY$ ثابت کنید اگر X وارون‌پذیر باشد، Y نیز وارون‌پذیر است و $X^{-1}+Y^{-1}=I$ (صفحه ۱۵۷).

۹- ثابت کنید اگر k فرد باشد، $11^{2k}+19^{2k}$ بر ۲۴۱ بخش‌پذیر است (صفحه ۱۶۴).

۱۰- رقم یکان عدد 4^{n^2-1} تعیین کنید (صفحه ۱۶۴).

۱۱- اگر n مضرب ۳ نباشد آنگاه $31|5^{2n}+5^n+1$ (صفحه ۱۶۴).

۱۲- ثابت کنید a^p و a^{p+4} رقم یکان مشترك دارند (صفحه ۱۶۴).

۱۳- ثابت کنید $13^n+7^n+19^n$ بر ۳۹ بخش‌پذیر است (صفحه ۱۶۴).

۱۴- رقم سمت راست $1^n+2^n+3^n+4^n$ چیست؟ (صفحه ۱۶۴).

۱۵- (پیمانه ab) $b^{a-1}+a^{b-1}\equiv 1$ (a و b اول هستند) (صفحه ۱۶۴).

۱۶- ثابت کنید (پیمانه p^2) $a^p+b^p\equiv 0 \Longleftarrow$ (پیمانه p) $a^p+b^p=0$ (صفحه ۱۶۴)

۱۷- عدد صحیح n را چنان تعیین کنید که $2n+13$ بر $n-1$ بخش‌پذیر باشد (صفحه ۱۶۴).

۱۸ـ عدد صحیح ومثبت n را چنان تعیین کنید که مجموع ارقام عدد $10^{3n} - 10^{n}$ برابر ۲۳۴ باشد.

۱۹ـ اگر $n \neq 3k$ ثابت کنید

$3^{n}+1 \equiv$ (پیمانه ۱۳) $.3^{2n}+2$

مسائل اضافه شده بر کتاب جبر و آنالیز سال چهارم ریاضی فیزیك

۱ـ کدامیك از توابع زیر یك به‌یك و پوششی هستند؟ بررسی کنید.

الف: $f: R \to R,\ f(x) = 3^{x+1}$

ب: $f: [-1,1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ f(x) = \mathrm{Arc}\sin x$

ج: $f: (2, +\infty) \to R,\ f(x) = \log_{2}(x-2)$

د: $f: R-\{1\} \to R-\{2\},\ f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

۲ـ تابع $y = \sin(\log_{2}\log_{3}x)$ را داریم، الف: دامنه و برد آن را تعیین کنید، ب: بااستفاده ازتعریف نشان دهید در دامنه‌اش یك به یك است، ج: ضابطهٔ معکوس آن را به دست آورید.

۳ـ تابع $f(x) = \sqrt{1+x+2\sqrt{1+x}}$ مفروض است، الف: دامنه وبرد آن را به‌دست آورید، ب: نشان دهید در دامنه‌اش وارون پذیر است و ضابطه وارون آن را به دست آورید. (امتحان نهایی چهارم ریاضی فیزیك سراسر کشور خرداد ۱۳۶۳).

۴ـ تابع $y = \mathrm{Arc}\sin\frac{2x}{1-x^{2}}$ را داریم، الف: دامنه وبرد آن را به‌دست آورید، ب: نشان دهید در دامنه‌اش وارون پذیر است و سپس ضابطهٔ وارون آن را به‌دست آورید.

۵ـ توابع $f = \{(2,2), (3,4), (4,5)\}$ و $g = \{(3,4), (5,6), (2,3)\}$ مفروض‌اند، عبارات زیر را بررسی کنید:

الف: $f+g$　　ه: $5f+3g$

ب: f/g　　و: $4f/(2g+1)$

ج: $f \circ g$　　ی: $g \circ f$

ح: $2f \cdot g$　　ز: $1/5f$

۶ـ بدون استفاده ازقاعده هوپیتال حدود زیررا به‌دست

الف: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^{2}}$　　د: $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{tg x - tg a}$

ه: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0} \frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{2x}}$　　ب: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{tg x - 1}$

ج: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x^{2}}{(\mathrm{Arc}\cos x)^{2}}$

۷ـ حدود زیررا محاسبه کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{x}}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^{x}}}$

ب) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^{4}}$

ج) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+2+3+\dots+x}{x^{2}}$

د) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1^{2}+2^{2}+3^{2}+\dots+x^{2}}{x^{3}}$

ه) $\lim\limits_{x\quad 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^{2}x}$

و) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+tg x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^{3}}$

۸ـ با استفاده از تعریف حد درستی تساویهای زیر را بررسی کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to 3} x^{2} = 4$ ، ب) $\lim\limits_{x\to -5} (|x-3|) = 8$

، ج) $\lim\limits_{x\to 3} x^{2}-2x = 3$

۹ـ پیوستگی توابع زیررا در فاصله $[2,3)$ بررسی کنید:

الف: $f(x) = (-1)^{E(x)}(x-E(x9))$

ب: $f(x) = (-1)^{E(x)}$

ج: $f(x) = E(x^{2}+1)$

د: $f(x) = (-1)^{E(x^{2})}$

ه: $f(x) = 4E(x)+3E(-x)$

و: $f(x) = \frac{x}{E(x)}+1$

۱۰ـ پیوستگی توابع زیررا در $x_{0}=0$ بررسی کنید:

الف) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$

ج) $h(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$

د) $t(x)=\begin{cases} \cos(\sin x) & , x\neq 0 \\ 1 & , x=0 \end{cases}$

۱۱- مشتق توابع زیر را در نقطه $x_0=0$ به‌دست آورید:

الف: $f(x)=\cos(\sin x)$ ج: $f(x)=1-\sqrt[3]{1-x}$

ب: $f(x)=\sin x$ د: $f(x)=tg\,x$

۱۲- مشتقات y نسبت‌به x را درهریك به‌دست آورید:

۱) $2x^4-3xy+4y^2+2y=0$

۲) $3x^4+7xy^2+5x=0$

۳) $12x^3+7y=x^2y-y^3$

۴) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}\ ,\ a>0$

۵) $x^3+y^3=5xy$

۶) $3x^2+4xy+5y^2+2x+3y=4$

۷) $7x^3+5y^2+2x^3y^2=0$

۸) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{a}\ ,$

۱۳- نمودار توابع زیر را در فاصله $-2\leqslant x\leqslant 2$ رسم کنید.

الف: $y=x|x|-E(x)$ ج: $y=\frac{|x|}{E(x)+4}$

ب: $y=xE(x)-|x|$ د: $y=3E(x)+x^2E(x^2)$

۱۴- دوره تناوب توابع زیررا به‌دست آورید:

۱) $y=\cos(\sin x)$

۲) $y=E(x)+\sin\pi x-x$

۳) $y=\sqrt{\sin x}$

۴) $y=\sin^4 3x$

۵) $y=\frac{2\sin x-3\cos x}{4\cos x}$

۶) $y=cotg\,2x-tg\,2x$

۷) $y=\sin x+x$

۸) $y=\cos x\sin 3x$

۹) $y=|\sin x|$

۱۰) $y=tg\frac{1}{x}+\cos\sqrt[3]{x}$

۱۵- تابع $y=\frac{x}{x^2-3x+2}$ مفروض است، نقاط M_1 , M_2 را بترتیب به طولهای x_1 , x_2 $(x_1 , x_2\neq 0)$ بر روی منحنی فرض می‌کنیم، الف: نمودار و جدول تغییرات را رسم کنید، ب: اگـر M_1 و M_2 و O مبدأ مختصات بـر یك استقامت باشند ثابت‌کنید $x_1+x_2=3$ و از آنجا مختصات نقطه A نقطه تماس خط مماس برمنحنی را به‌دست‌آورید، ج: اگر M_1 و M_2 به موازات محور طـولها وغیر منطبق برآن فرض‌شود ثابت‌کنید $x_1.x_2=2$ وسپس ازآنجا نتیجه‌بگیرید مثلث OM_1M_2 نمی‌توانـد در رأس O قائمه باشد. (کنکور تشریحی فنی مهندسی ۱۳۶۱)

۱۶- اولاً درتعداد وعلامت ریشه‌های معادله زیر بحث کنید و ثانیاً m را طوری محاسبه کنید که‌دارای ریشه مضاعف باشد:

$$x^3+mx^2+2=0$$

۱۷- چه رابطه‌ای بیـن ضرایب برقرار باشد تا معادلهٔ زیردارای ریشهٔ مضاعف باشد؟

$$ax^3+bx^2+2=0$$

۱۸- اگر یکی از ریشه‌های $ax^3+bx^2+cx+b=0$ برابر مجموع دو ریشه دیگر باشد، ثابت‌کنید:

$$b^3=4a(bc-2ad)$$

۱۹- اگـر ریشه‌هـای $x^3+ax^2+bx+c=0$ به تصاعدحسابی باشد ثابت‌کنید:

$$2a^3-9ab+27c=0$$

۲۰- اگربین a, b, c که‌مخالف یکدیگرند سه رابطه زیر برقرار باشد ثابت‌کنید $a+b+c=0$.

$$\begin{cases} a^3+pa-q=0 \\ b^3+pb+q=0 \\ c^3+pc+q=0 \end{cases}$$

۲۱- اگر a, b, c ریشه‌های $x^3+px+q=0$ باشد معادله‌درجه‌سومی تشکیل دهید که‌ریشه‌هایش a^3+c^3 و b^3+c^3 و a^3+b^3 باشد.

۲۲- اگر ریشه‌های معادله زیر تشکیل تصاعـد حسابی دهند مقدار k را محاسبه کنید:

$$x^3-3kx^2+k^2x+23=0$$

۲۳- اگر ریشه‌های معادله زیر تشکیل تصاعـد هندسی

دهند معادله زیر را حل کنید:

$$x^3-7x^2+14x-8=0$$

۲۴ـ اگر a و b و c ریشه‌های معادله $x^3-5x^2+6x=10$ باشد معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش $(a-2)^2$ و $(b-2)^2$ و $(c-2)^2$ باشد.

۲۵ـ مقدار تقریبی $\sin(60°, 3')$ و نیز $\sin(60°, 18')$ را بدست آورید.

۲۶ـ اگر $\log 2=0/30103$ باشد $\log 200/2$ را به‌دست آورید.

۲۷ـ با استفاده از دیفرانسیل نشان دهید

$$\mathrm{Arc}tg(0/99)\simeq\frac{\pi}{4}+\frac{1}{200}$$

است. (امتحان نهایی خرداد ۱۳۶۲)

۲۸ـ با استفاده از دیفرانسیل ثابت کنید:

$$\sqrt{a^2+b}\simeq a+\frac{b}{2a} \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{a^3+b}\simeq a+\frac{b}{3a^2}$$

۲۹ـ محاسبه کنید:

$$\int\frac{\sin 2x\,dx}{(1+\cos^2x)^n} \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Arc}\sin x}$$

$$\int\frac{(2ax+b)dx}{\sqrt[n]{ax^2+bx+c}} \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{2+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$$

۳۰ـ انتگرال $I=\int\frac{dx}{1+\sin^2x}$ را محاسبه کنید (کنکور تشریحی فنی مهندسی ۱۳۶۱)

راهنمایی: $tg\frac{x}{2}=a$ را تغییر متغیر گرفته و بااستفاده از فرمول $\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}$ محاسبه می کنیم.

۳۱ـ انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

$$\text{الف)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+a^2\sin^2x} \qquad \text{ب)}\ \int_0^{\pi}\frac{dx}{3+2\cos x}$$

۳۲ـ اولا در تابع $y=\frac{ax^2+b}{x^2}$ ضرایب a و b را طوری تعیین کنید که نقطه $M(3,2)$ نقطه می‌نیمم باشد، ثانیاً جدول تغییرات $y=\frac{x^3+4}{x^2}$ را رسم کنید و منحنی (c) نمایش هندسی آن را رسم کنید، ثالثاً در عده نقاط تلاقی و علامت طولهای نقاط تلاقی خط D به‌معادله $y=m(x+1)-1$ با منحنی (c) برحسب مقادیر مختلف m بحث کنید، رابعاً x_1, x_2, x_3 ریشه‌های $(m-1)x^3+(m-1)x^2-4=0$ باشد m را طوری محاسبه کنید که داشته باشیم:

$$x_1^2(1+x_1)+x_2^2(1+x_2)+x_3^2(1+x_3)=\frac{1}{3}$$

خامساً مساحت سطح محصور بین منحنی (c) و خطوط $y=x$ و $x=2$ و $x=\lambda>2$ را حساب و حد این مساحت را وقتی $\lambda\to+\infty$ بدست آورید. (امتحان نهایی چهارم ریاضی‌فیزیك سراسر کشور درخرداد ماه ۱۳۶۳).

۳۳ـ توابع $y=\pm x\sqrt{a^2-x^2}$ مفروض‌اند، الف: جدول ومنحنی نمایش تغییرات آن‌را رسم کنید، ب: a را طوری تعیین کنید که نسبت حجم دوار حادث از دوران سطح منحنی فوق حول محور طولها درفاصله $x=0$ و $x=a$ به‌سطح محصور بین منحنی و محور طولها درهمین فاصله برابر $\frac{8\pi}{5}$ شود.

۳۴ـ اولاً ثابت کنید

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3x}{\sin^3x+\cos^3x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3x}{\cos^3x+\sin^3x}dx$$

وثانیاً بااستفاده ازفرض اولاً انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3x}{\sin^3x+\cos^3x}dx$$

(کنکور تشریحی فنی‌مهندسی ۱۳۶۳)

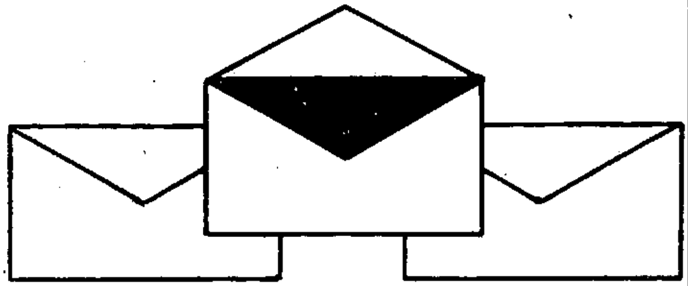
۳۵ـ محاسبه کنید:

الف) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

ب) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$

ج) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{tg x\,dx}{tg x+cotg x}$

د) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{tg x}}{\sqrt{tg x}+\sqrt{cotg x}}dx$



نامه و نظر

برادر کاظم فائقی ـ تبریز

نامه پرمحبت وتشویق‌آمیز شما رسید. همکاری شما موجب کمال امتنان است. مطالب ارسالی شما در یکی از شماره‌های آتی چاپ خواهد شد.

برادر سعید ذاکری ـ دانش‌آموز ـ تهران

پاسخهای شما به‌مسائل مجلات شمارهٔ ۴ و شماره ۶ـ۵ رسید. متأسفانه، به‌دلیل زیرچاپ بودن رشد ریاضی شمارهٔ ۸، امکان درج پاسخهای شما درمجله مقدور نگردید. لطفاً بعد از این پاسخهای خودرا حداکثر تا دوماه بعد از انتشار هرشماره ارسال فرمایید تا امکان درج آنها درمجله به‌نام خودتان مقدور باشد.

برادر محمدرضا جمشیدی ـ دبیرریاضی ـ اندیمشك

راهی که برای اثبات این حکم که «اگر نیمسازهای دو زاویهٔ داخلی مثلثی باهم برابر باشند، آن مثلث متساوی‌الساقین است» پیدا کرده‌اید، صحیح و خالی ازنقص است و در موقع مناسب در مجله درج خواهد شد. مع‌هذا این نکته را در نظر داشته باشید که:

برهانی که برای اثبات یك قضیه مطرح می‌شود، وقتی با ارزش‌وجالب است که ازبرهان معمولی آن مقدماتی‌تر وساده‌تر باشد وشما در اثبات خود، ازتشابه‌که در فصلهای آخر هندسهٔ اقلیدسی‌است، استفاده کرده‌اید و راه‌حل معروف آن،مقدماتی‌تر ازراه حل شماست.

خواهر م. اکبری‌زاده ـ دیپلمهٔ ریاضی

با تشکر از توجه شما به مجله، به‌استحضار می‌رساند که متأسفانه پاسخ ارسالی شما برای مسئلهٔ ۲۴ رشدریاضی شمارهٔ ۳ درست نیست.

برادر علی‌اکبر عیشی ـ فردوس

پاسخ ایرادهایی که به‌اقلیدس گرفته‌اید، این است که‌در درهندسه نقطه هیچ بعدی ندارد وخط تنها یك بعد دارد که درازای آن‌است. اینکه‌صفحه وخط‌نامحدود فرض‌شده‌اند،ممکن است با واقعیت جهان تطبیق نکند و تا به‌حال مطلب به طور قطع ثابت نشده است. امید است درآینده بـا دقتی که‌دارید با توجه به‌تعریفها و اصول، احکام ومسائل مهمی را ثابت و حل کنید.

برادر عبدالرضا یزدان‌پناه ـ دانش‌آموز ـ آباده

توصیه می‌کنیم که یك بار دیگر مقالهٔ «امتناع تثلیث زاویه...» را بدقت بخوانید.

برادر غلامحسین کریمی خوشحال و برادر احمد اشرفی

پاسخهای شما به‌مسئلهٔ مسابقه، متأسفانه، درست نیست.

برادر علیرضا نادری‌فر ـ اسلام‌آباد غرب

متأسفانه درج مطالبی که مستقیماً بـا ریاضیات دورهٔ راهنمایی مرتبط باشد، درمجله مقدورنیست.

برادر محمد پورفهندری ـ تربت حیدریه

محاسبهٔ مساحت وشعاع دایرهٔ محیطی چهارضلعی محاطی برحسب اضلاع آن مسئله‌ای است‌کلاسیك وحل شده. اگراین مسئله را برای‌پنج‌ضلعی‌محاطی وشش‌ضلعی محاطی‌حل کرده‌اید، حل‌آن را برای بررسی به‌دفتر مجله بفرستید. راجع‌به‌آنچه‌در بارهٔ تثلیث زاویه‌نوشته‌اید، توجه‌شما را به مقالهٔ «اثبات‌امتناع تثلیث زاویه، . . .» مندرج در رشد ریاضی شمارهٔ ۶ـ۵ جلب می‌کنیم.

برادر عباس میرزایی ـ دانش‌آموز ـ رودسر

با تشکر از اظهارلطف شما نسبت به‌مجله، افزایش‌تعداد مسائل درهر شماره، با توجه به‌اینکه حل‌آنها درشماره‌های‌بعد بخش وسیعی از مجله را اشغال می‌کند، مقدور نیست. مع‌هذا امیدواریم‌که با انتشارمرتب شماره‌های‌مجله و با توجه‌به‌اینکه درهرشماره‌حداقل ۲۰ مسئلهٔ متنوع چاپ می‌شود، اندوخته‌ای از مسائل دراختیار شما وسایردانش‌آموزان محترم قرار گیرد.

برادررشید دانشمند ـ دانش‌آموز ـ درگز

با تشکر ازنامه واظهارمحبت شما، خواهشمند است که فقط حل مسائل آخرین شماره‌های منتشر شده مجله را، حداکثر تا دو ماه بعد از انتشار هر شماره ارسال فرمایید تا امکان درج

پاسخ درمجله مقدور باشد. برای مشترك‌شدن، فرم ضمیمهٔ مجله را پرکرده به‌بخش توزیع بفرستید.

برادر محمد علی سیادت

نامهٔ شما دراختیارمسؤولین مربوطه‌قرار داده شدتانسبت به‌بررسی واعمال پیشنهادات شما اقدام کنند.

برادر مهدی حاجیان حیدری

به‌علت محدودیت صفحات مجله، درهرشماره فقط پاسخ مسایل دو شمارهٔ جلوتر کـه در بخش مسائل داده شده، درج می‌شود. پاسخهای‌خوانندگان به‌شرطی قابل درج درمجله‌است که حداکثر تا دو ماه بعد از انتشار مجله به دفتر مجله رسیده باشد.

برادرکورش حمیدزاده ــ سال دوم ریاضی

قضیهٔ سوم کــه به عنوان مقدمه، برای حل مسئلهٔ مسابقه، ذکرکرده‌اید صحیح نیست،

برادر سید شهاب‌الدین نبی‌پور ــ سال‌دوم ریاضی ــ ایلام

فرمولی‌که برای محاسبهٔ محیط بیضی ارائه کــرده‌اید، درست نیست؛ چون استدلال شما درچندین مــورد خطا دارد. برای محیط بیضی فرمول بسته‌ای وجود ندارد ومحاسبهٔ محیط آن با هرتقریبی امکانپذیر است. برخلاف تصور شما ندانستن فرمول بیضی درهیچ یك ازرشته‌هایی‌که اشاره کرده‌اید،موجب خسران نیست. خوب است علاقه وجدیت خود را در راههای صحیح به‌کار ببرید.

برادر حسین ترکفر ــ دبیر ریاضی ــ برازجان

نامه‌ها و مطلب شما رسید. امید است در راهی‌که درآن قدم‌گذاشته‌اید، موفق باشید. امکان ارسال مسئله یا سؤال تستی برای ما وجود ندارد. امید است ازمطالب ومسائل مندرج در مجله بتوانیدبه‌نحواحسن استفاده‌کنید. سؤالاتی‌که برای‌دانش‌آموزان طرح کــرده‌اید، در مجموع مناسب هستند، انشاءالله با یاری خداوند و فعالیت بیشتر، بیش از پیش، در ارتقاءکیفیت آموزش ریاضیات‌کوشا وموفق باشید.

برادر غلامرضا خضرلوی مقدم

در برهان ارائه شده درشمارهٔ ۳ بــرای نامتناهی بودن عدهٔ اعداد اول، ادعایی بر اول بودن $p!+1$ نشده و اصولاً نیازی به‌اول بودن $p!+1$ دراین برهان وجود ندارد.

برادر روزبه‌فتاحیان ــ سال چهارم ریاضی فیزیك ــ تهران

درپاسخ مطلبی‌که درنامهٔ خود نوشته‌اید، متذکرمی‌شویم که درهندسهٔ اقلیدسی، بینهایت بدمعنایی‌که موردنظر شما بوده، وجود ندارد.

برادر نادر طباطبایی ــ دانشجو ــ تهران

پاسخهای شما به مسائل مجلــه رشد ریاضی، شمارهٔ ۴، واصل‌گردید. از اینکه به‌دلیل انتشار مجلهٔ رشد شمارهٔ ۷،پیش از وصول نامه شما، امکان درج پاسخهای شما مقدور نشد،عذر می‌خواهیم. آرزومند همکاری بیشتر هستیم.

برادر سهراب‌طالبی ــ دبیر ریاضی ــ فردوس

پیشنهادهــای شما در خصوص درج مطالبی راجع بــه ریاضیات کاربردی، اختصاص صفحه‌ای بــه محتوای کتابهای درسی، ومعرفی‌ونقدکتاب بجاست. انشاءالله درشماره‌های‌آینده سعی در عملی‌کردن‌آنها خواهیم‌کرد.

برادر حسین صبوری ــ تبریز

اگر بتوانید توضیح بیشتری درباره آنچه‌که مشکل‌خود در درك ریاضیات نامیده‌اید، بدهید شاید بتوانیم بهتر به سؤال شما پاسخ دهیم. می‌توانید ازکتبی‌که دفترامورکمك آموزشی وکتابخانه‌ها منتشر می‌کند، استفاده‌کنید.

برادر محمد صال‌مصلحیان ــ مشهد

نامه‌ها ومطالب‌شما رسید. ضمن تشکرازتوجه شمانسبت به‌مجله، پیشنهادهای شما را حتی‌المقدور عملی خواهیم‌کرد.از همین شماره صفحه‌ای را به‌مسابقهٔ ریــاضی بین دانش‌آموزان اختصاص داده‌ایم.

برادر حسین آکار ــ تهران

مطلب ارسالی شما رسید. امیدواریم‌که همکاری شما با مجله، ازطریق ارسال مطالب‌کوتاهتر وبدیعتر حفظ شود.

برادر جمال‌الدین جهانتابی ــ دبیر ریاضی ــ قروهٔ‌کردستان

نامهٔ شما رسید. برای‌رسیدگی به‌خواسته شما،که‌خواسته اغلب دبیران ریاضی است،کپی آن را در اختیار برادر دکتر حداد عادل قرار داده‌ایم تا با مسؤلین محترم وزارت‌آمــوزش وپرورش مطرح‌کنند.

● برادرانی‌کــه نامشان در زیر می‌آید، مسائلی را جهت درج درمجله فرستاده‌اند. ضمن تشکر ازاین برادران،به‌اطلاع می‌رسانیم‌که مسائل جالب وبدیع ارسالی تدریجاً در مجله به نام فرستندگان آنها درج خواهد شد:

۱ــ فرهاد غلامی ــ اندیمشك

۲ــ غلامحسین طاهری ــ دبیر ریاضی ــ کاشمر

۳ــ حسن ماسچی‌زاده ــ دبیر ریــاضی مدرسهٔ راهنمایی ایثار ــ دزفول

۴ــ سید سعید میربهرسی ــ مشهد

۵ــ جلال زارع ــ دیپلمهٔ ریاضی ــ تهران

گزارش سومین دوره مسابقات ریاضی کشور

سومین‌دورهٔ مسابقات ریاضی کشور بین ۱۰۵ دانش‌آموز ممتاز سال چهارم رشته ریاضی فیزیک دبیرستانهای سراسر کشور با همکاری انجمن ریاضی ایران و سازمان‌پژوهش‌وبرنامه‌ریزی‌درسی‌وزارت آموزش و پرورش همزمان با برگزاری هفدهمین کنفرانس ریاضی ایران (۸–۱۱ فروردین ۶۵) در دانشگاه سیستان و بلوچستان برگزارشد. شرکت‌کنندگان‌در این مسابقه علاوه برحضور در جلسات سخنرانی‌که به همت گروه ریاضی دفتر تحقیقات وانجمن ریاضی ایران برگزار شد، روز دهم فروردین‌ماه ازشهر تاریخی زابل دیداری داشتند.

قرار است به نفرات اول تا دهم مسابقه، ازطرف بنیاد خیریه فرهنگی‌البرز جوائزی داده شود. طبق اطلاع رسیده از آقای دکتر تومانیان دبیرانجمن ریاضی ایران، درسال آینده شهرستان بیرجندمحل برگزاری چهارمین دوره مسابقات ریاضی کشور وهیجدهمین‌کنفرانس ریاضی‌ایران خواهد بود. کلیهٔ سؤالات مسابقه در همین شماره مجله رشد درج شده است. اوراق امتحانی‌توسطانجمن‌ریاضی ایران‌تصحیح و نتایج آن تا نفربیستم به‌شرح زیر اعلام گردید:

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان	منطقه	دبیرستان	جمع نمره از ۵۰	رتبه
۱	محمد ستوده	اصفهان	اصفهان	شهدای ادب	۴۱/۵	اول
۲	حسین‌اجتهادیان	تهران	سه	منتظری	۴۰	دوم
۳	محسن مدرس	تهران	دوازده	علوی	۳۹/۵	سوم
۴	حسام توسلی	فارس	شیراز	شهید شرافتیان	۳۸	چهارم
۵	صادق عباسی شاهکوه	مازندران	گرگان	شهید بهشتی	۳۵/۵	پنجم
۶	علیرضا کیان ابوالفضلیان	تهران	دو	آیت‌الله مطهری	۳۵	ششم
۷	هادی ولادی	آذربایجان شرقی	تبریز	مصطفی خمینی	۳۴/۵	هفتم
۸	حسین‌زاده مرشدبیگ	تهران	شش	البرز	۳۱/۵	هشتم
۹	عباس قدیمی	همدان	همدان	ابن‌سینا	۳۰/۵	نهم
۱۰	مهرداد دارویی	اصفهان	سه	دکتر بهشتی	۳۰	دهم
۱۱	محمد رضا شیخ بهایی	تهران	یك	نیکان	۲۹/۵	یازدهم
۱۲	محمود عراقی	زنجان	زنجان	شریعتی	۲۹/۵	یازدهم
۱۳	حامد جعفرنژاد	گیلان	رشت	شهید بهشتی	۲۹	دوازدهم
۱۴	مهدی مظفری	تهران	هشت	احمدیه (کمال)	۲۹	دوازدهم
۱۵	امیرحسین دلیرروی‌فرد	تهران	شش	البرز	۲۸/۵	سیزدهم
۱۶	علیرضا احسانی اردکانی	اصفهان	شاهین‌شهر	شهید مولایی	۲۷	چهاردهم
۱۷	شهرام امین مانیرانی	تهران	یازده	شهید مفتح	۲۷	چهاردهم
۱۸	حسین بزازیان	تهران	کرج	دهخدا	۲۶/۵	پانزدهم
۱۹	محمد لهراسبی‌نژاد	کرمان	کرمان	شهیدان	۲۶/۵	پانزدهم
۲۰	آصف زارع	خراسان	گناباد	بهشتی	۲۶/۵	پانزدهم

اخبار گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه ریزی درسی

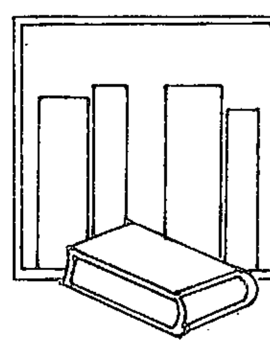
● کلاسهای بازآموزی دورهٔ آزمایشی کتاب جدیدالتألیف ریاضی دوم راهنمائی هرهفته روزهای پنجشنبه درمحل دفتر تحقیقات با حضور دبیران سال دوم راهنمائی مدارس آزمایشی ومؤلفین تشکیل گردید. در این کلاسها دبیران ریاضیات راهنمائی با روش تدریس کتاب جدیدالتألیف آشنا می‌شوند.

● کتاب ریاضی جدیدالتألیف سال دوم راهنمائی برای چاپ و توزیع تحویل گردید. این کتاب جایگزین کتاب فعلی ریاضی سال دوم راهنمائی درسراسر کشور خواهد شد. ضمناً تألیف کتاب راهنمای معلم این کتاب نیز ادامه یافت و قسمت دیگری از آن آماده شد.

● با همکاری دفتر آموزش ضمن خدمت، مقدمات تشکیل کلاس کارآموزی برای «مدرس راهنماهای ریاضی» در تابستان آینده فراهم گردید. دراین کلاس «مدرس راهنماهای ریاضی» با روشهای آموزش کتاب جدیدالتألیف سال دوم راهنمائی آشنا خواهند شد، تا هر مدرس راهنما، پس ازکسب موفقیت دراین دوره به‌آموزش روش تدریس کتاب فوق‌الذکر به‌دبیران ریاضی منطقه خود بپردازد.

معرفی کتب ریاضی

ناشرینی که قصد معرفی کتب ریاضی خود را در مجله دارند، می‌توانند دو نسخه از آنها را به‌دفتر مجله ارسال کنند.



۱) **مبانی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی**، تألیف ایان اسندون، ترجمهٔ مرتضی شفیعی موسوی و علی کدخدایی. تهران. مرکز نشر دانشگاهی. ۱۳۶۴. ۴۷۱ ص. ۹۵۰ ریال.

۲) **مفاهیم و روشهای آماری**، جلد ۱، تألیف باتاچاریا، گوری ک. و ریچارد ا. جانسون، ترجمهٔ مرتضی ابن‌شهرآشوب، و فتاح میکائیلی، تهران. مرکز نشر دانشگاهی. ۱۳۶۴. ۳۵۰ ص. ۷۰۰ ریال.

۳) **نظریهٔ مقدماتی احتمال و فرآیندهای تصادفی**، تألیف کای‌لای‌چانگ، ترجمهٔ ابوالقاسم میامئی و محمد قاسم وحیدی اصل. تهران. مرکز نشردانشگاهی. ۱۳۶۴. ۳۸۳ ص. ۷۸۰ ریال.

۴) **نظریه و کاربردهای آنالیز عددی**، تألیف فیلیپس ج. م. و پ. ج. تیلر. ترجمهٔ غلامحسین بهفروز و میرکمال میرنیا. تهران. مرکز نشردانشگاهی. ۱۳۶۴. ۱۱۰۰ ریال.

۵) **اعداد مختلط**، تألیف والتر لدرمان، ترجمهٔ علی‌اکبر مهرورز. تهران. مرکز نشر دانشگاهی. ۱۳۶۴. ۶۸ ص. ۱۸۰ ریال.

اطلاعیه

دربارهٔ نشریات رشد آموزش تخصصی

مجلات رشد آموزش مواد درسی مدارس کشور نشریاتی است که از سوی گروههای درسی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش با همکاری دفتر امور کمک آموزشی هر سه ماه یکبار ــ چهار شماره در سال ــ منتشر می‌شود.

این نشریات در حال حاضر عبارتند از:

۱ ــ رشد آموزش ریاضی
۲ ــ رشد آموزش زبان
۳ ــ رشد آموزش شیمی
۴ ــ رشد آموزش فیزیک
۵ ــ رشد آموزش زمین‌شناسی
۶ ــ رشد آموزش ادب فارسی
۷ ــ رشد آموزش جغرافیا
۸ ــ رشد آموزش زیست‌شناسی

هدف از انتشار این نشریات در وهلهٔ اول ارتقاء سطح معلومات معلمان و در مرحلهٔ بعد ایجاد ارتباط متقابل میان معلمان هر رشته و دفتر تحقیقات به منظور تبادل تجارب و مطالب جنبی و مفید درسی است.

دبیران، دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر علاقه‌مندان به اشتراک این مجلات می‌توانند جهت اشتراک هر چهار شماره از یک مجله در سال مبلغ ۴۰۰ ریال به حساب ۹۲۹ خزانهٔ بانک مرکزی ــ قابل پرداخت در کلیهٔ شعب بانک ملی ــ واریز و فیش آن را همراه با فرم تکمیل شدهٔ زیر به نشانی تهران، صندوق پستی شماره ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱ دفتر امور کمک آموزشی ــ مرکز توزیع ارسال دارند. شماره تلفن مرکز توزیع: ۸۳۱۴۸۱

محل فروش آزاد

الف ــ تهران:

۱ ــ کتابفروشی شهید سیدکاظم موسوی ــ اول خیابان ایرانشهر شمالی
۲ ــ فروشگاه انتشارات رشد ــ خیابان انقلاب بین ولی‌عصر و کالج.
۳ ــ مرکز نشر دانشگاهی ــ نمایشگاه دائمی کتاب.
۴ ــ نمایشگاه دائمی کتاب کودک ــ روبروی دانشگاه تهران.
۵ ــ کتابفروشی صفا ــ روبروی دانشگاه تهران.
۶ ــ کیوسکهای معتبر مطبوعات

ب ــ شهرستانها:

۱ ــ باختران ــ کتابفروشی دانشمند ــ خیابان مدرس پاساژ ارم.
۲ ــ آذربایجان شرقی (تبریز) ــ مطبوعاتی ملازاده.
۳ ــ آذربایجان غربی (ارومیه) ــ مطبوعاتی زینال‌پور.
۴ ــ اصفهان ــ کتابفروشی مهرگان و کتابفروشی جنگل.
۵ ــ مازندران (ساری) هماهنگی گروههای آموزشی استان.
۶ ــ کرمان ــ پارک مطهری ــ فرهنگسرای زمین.
۷ ــ خرم‌آباد ــ خیابان شهدای شرقی، کتابفروشی آسیا

توجه، دانشجویان مراکز تربیت معلم می‌توانند با ارسال فتوکپی کارت تحصیلی از ۵۰٪ تخفیف برخوردار شوند.

فرم اشتراک مجلات رشد تخصصی

اینجانب .... با ارسال فیش واریز مبلغ ۴۰۰ ریال، متقاضی اشتراک یکسالهٔ مجلهٔ رشد آموزش .... هستم.

نشانی دقیق متقاضی: استان .... شهرستان .... خیابان ....

کوچهٔ .... پلاک .... تلفن ....

Contents

Roshd, Magazine of Mathematical Education, Vol III No. 9,. Spring 1986 Mathematics Section, 274 BLDG-No. 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave., Tehran - Iran.

A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.